UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DANIEL EMANUEL BRUNO SILVA

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ABORDAGEM NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

FORTALEZA
2015

DANIEL EMANUEL BRUNO SILVA

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ABORDAGEM NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador(a):Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA
2015

DANIEL EMANUEL BRUNO SILVA

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ABORDAGEM NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 07 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Jonatan Floriano da Silva

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Franc Regis V Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A minha esposa Lidiane de Sousa Andrade, pelo amor, paciência, apoio incondicional e principalmente pela compreensão de minhas ausências, sempre me ajudando para que eu conseguisse vencer. As minhas filhas, Maria Stella e Emanuelle pelo carinho diário me lembrando o tempo todo de que eu era capaz. Aos meus pais, Evaristo (in Memoriam) e Osanira, pelo carinho, palavras de coragem e preces. A meus sogros, Luciliane e Vilemar pelo apoio.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer." (Einstein)

RESUMO

Este trabalho trata sobre o Teorema de Pitágoras e suas diversas demonstrações, abordando sua importância e como vem sendo apresentado na educação matemática. Apresentaremos um pouco da história de Pitágoras, bem como, sobre o seu teorema, e veremos uma pesquisa sobre a sua importância, e como os alunos recebem essa informação. Falaremos um pouco, sobre como os livros didáticos, tanto do ensino fundamental como no médio, tratam sobre o assunto, e por fim veremos algumas demonstrações sobre este Teorema buscando abrir muito mais o leque de opções para os alunos e professores amantes da matemática. Essas demonstrações fazem parte do acervo reunido por Loomis, que conseguiu apresentar mais de trezentas demonstrações do teorema em uma publicação de 1940.

Palavras-chave: Teorema. Pitágoras. Educação. Demonstrações

ABSTRACT

This work is about the Pythagorean Theorem and its various statements, addressing its importance and as has been shown in mathematics education. We will present some of the history of Pythagoras, as well as on his theorem, and well see a search on their importance, and how students receive this information. We'll talk a bit about how the textbooks, from elementary school to the middle, deal about it, and finally we will see some statements about this theorem seeking to open a lot more range of options for students and lovers of mathematics teachers. These statements are part of the collection assembled by Loomis, who managed to submit more than three hundred statements of the theorem in a publication of 1940.

Keywords: Theorem. Pythagoras. Education. Statements

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ensino da Matemática, acumulamos experiências, algumas boas e outras nem tanto e chegamos à conclusão de que muito ainda deve ser feito pela educação. Entre as muitas ações a serem desenvolvidas está à formação do professor, objetivo maior do PROFMAT e especialmente voltado à educação básica.

Nesse ensejo escolhemos o tema a ser desenvolvido nesse trabalho que a nosso ver, é um tema relevante tanto ao ensino fundamental como no médio, mas tão pouco explorado nesses dois segmentos.

Nesse trabalho iremos focar em três frentes, a primeira, mostra uma análise dos livros didáticos utilizados nos ensinos fundamental e médio sobre o assunto do Teorema de Pitágoras e um posterior comentário sobre esses livros, a segunda, mostra uma pesquisa com alguns professores de matemática sobre o desenvolvimento do tema em sala de aula e por fim nosso trabalho irá mostrar algumas demonstrações do teorema de Pitágoras abrindo mais ainda as opções sobre o tema.

Observamos que os alunos têm uma grande dificuldade no que se refere à utilização do Teorema de Pitágoras como ferramenta nas aplicações, em resolução de problemas ou na compreensão do conceito. Para que possamos, enquanto professores de Matemática, sanar as dificuldades encontradas pelos alunos, faz-se necessário um amplo conhecimento sobre o assunto. Por isso apresentaremos uma pesquisa sobre algumas formas de se demonstrar o Teorema de Pitágoras entre tantas já publicadas.

Não há como descrever conteúdos específicos da Matemática sem antes trilhar pela sua história. Devemos ao matemático grego Euclides (330 A.C: - 260 A.C:) essa maneira organizada e lógica de ver a Geometria. Ele reuniu numa obra de treze volumes, chamada “Os Elementos", todos os conhecimentos de Geometria até então conhecidos, organizando-os e sistematizando-os logicamente.

O Teorema de Pitágoras é admirado e reconhecido por matemáticos como talvez um dos mais belos teoremas, cujo enunciado é em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas que têm como lados cada um dos catetos". Tal proposição celebre é conhecida na história como a proposição 47, do primeiro livro” Os Elementos “ de Euclides.

Este teorema, demonstrado pela primeira vez há cerca de 2500 anos, leva o nome de um importante filósofo e matemático grego do século VI A.C., que nasceu por volta de 572 a.C., na Grécia. Sua figura está envolta em mitos e lendas, uma vez que não existem escritos originais sobre sua vida e trabalhos.

Vale ressaltar a importância desse teorema que vem fascinando os matemáticos ao longo dos tempos, de tal forma que suas diferentes demonstrações, e não são poucas, já foram reunidas em uma publicação, por Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos). Em 1927, ele reuniu 230 demonstrações, posteriormente, em 1940 este número foi aumentado para 367 demonstrações.

Segundo Loomis, muitas outras provas além das selecionadas por ele serão estabelecidas por futuros pesquisadores, pois as possibilidades das relações algébricas e geométricas implícitas no teorema são ilimitadas.

Algo que é destacado em seu livro é a tradução de trechos de uma monografia, de Wipper Júri, publicada em 1880, que conta detalhe do famoso Teorema de Pitágoras. De acordo com o relato, a demonstração desta proposição deve-se a Euclides que a adaptou em seus elementos. O método da demonstração de Pitágoras permanece desconhecido para nós, está por decidir se o próprio Pitágoras descobriu essa característica do triângulo retângulo, ou aprendeu de sacerdotes egípcios, ou ainda se pegou da Babilônia. De acordo com Pitágoras, dizia ter aprendido com os padres egípcios as características de um triângulo no qual uma perna = 3, (designando Osíris), o segundo = 4, (designando Isis) e a hipotenusa = 5, (designando Hórus), razão pela qual o triângulo em si também é chamado de egípcio ou de Pitágoras.

As características de tal triângulo, no entanto, eram conhecidas não só dos sacerdotes egípcios, os estudiosos chineses também já as conheciam. Na história chinesa, diz-se que grandes honras são concedidas para o irmão do Uwan governante, Tschou-gun, que viveu em 1100 A.C., ele conhecia as características do triângulo retângulo, fez um mapa das estrelas, descobriu a bússola e determinou o comprimento do meridiano e o equador.

Outro estudioso, Cantor, disse que este imperador escreveu ou compartilhou a composição de um tratado matemático em que foram descobertas as características fundamentais, como linhas terrestres e linhas de base da matemática, na forma de um diálogo entre Tschou-Gun e Schau-Gao. O título do livro é Tschaou pi, a alta de Tschao. Aqui também, os lados de um triângulo são nomeados por pernas, como nos idiomas grego, latim, alemão e russo.

Desta forma não há como passar pela História da Matemática sem o devido destaque ao importante Teorema de Pitágoras, tão fascinante aos matemáticos.

Neste trabalho, estabelecemos uma abordagem histórica no capítulo 1, pois não há como desvincular todo processo histórico da Matemática do conteúdo em questão, o capítulo 2 traz uma análise dos livros didáticos, no capítulo 3 temos algumas demonstrações do teorema de Pitágoras feitos por personagens importantes da história como também pessoas comuns amantes da matemática ,no capítulo 4 temos o resultado de uma pesquisa com 5 professores de matemática sobre a abordagem do tema em questão , na sala de aula, por fim temos as considerações finais e bibliografias utilizadas .

2 PITÁGORAS E A ESCOLA PITAGÓRICA

Considerado o primeiro matemático, Pitágoras nasceu no século VI A.C. em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso (um grupo de ilhas gregas na extremidade leste do Mar Egeu, junto à costa sudoeste da Turquia), próximo a Mileto, lugar de nascimento de Tales. Não a como precisar o ano de nascimento de Pitágoras. Algumas fontes afirmam que foi por volta de 550 A.C. ou 569 a.C. Tales era um exímio negociante, descendente de uma nobre família grega. Mas deixou tudo isso para se dedicar ao estudo da Matematica, Astronomia e Filosofia tornando-se um grande sábio, de tal maneira que foi o primeiro dos considerados “Sete sábios da Grécia” (Tales de Mileto, Periandro de Corinto, Pitaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleobulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quilon de Esparta). A estes sábios foram atribuídas autorias de grandes provérbios, alguns tão famosos que foram inscritos no templo de Apolo em Delfos. A Tales são atribuídas algumas descobertas matemáticas, como:

(1ª) Em triângulos semelhantes, a razão entre lados homólogos e constantes;

(2ª) Os ângulos da base de um triangulo isósceles possuem a mesma medida, ou seja, são congruentes.

(3ª) Quando são conhecidos um lado e seus dois ângulos adjacentes, todo o triangulo e conhecido;

(4ª) Um triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo;

(5ª) Em duas retas concorrentes, os pares de ângulos opostos formados são congruentes;

(6ª) Se um lado e dois ângulos de um triângulo são congruentes a um lado homólogo e dois ângulos de outro triangulo, então estes triângulos são semelhantes.

Com idade próxima a 18 ou 19 anos, Pitágoras partiu de Samos para conhecer o mundo, pois, em sua época, isto era um costume para adquirir conhecimento através do contato com outros povos. Nestas viagens, Pitágoras visitou e viveu alguns anos no Egito e Babilônia e é muito provável que ele tenha ido também à Índia. Contemporâneo de Confúcio, Lao-Tse e Buda, há quem diga que Pitágoras teve contato com Buda e seus ensinamentos em sua provável passagem pela Índia.

> Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tentam nos fazer crer que Pitágoras teria ido ate a Índia e a Inglaterra, mas o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e os babilônicos. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados e construir prédios elaborados. De fato, os dois povos viam a matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu a descoberta de algumas das leis básicas da geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do Nilo. A palavra geometria significa “a medida da terra”. (SINGH, 2008, p.29)

E desta situação gerada pelas enchentes anuais do rio Nilo que os antigos egípcios desenvolveram métodos usando cordas para refazerem na terra as marcações apagadas pelo rio. Um desses métodos, que e bastante interessante, era utilizar uma corda aberta. Com 13 nós, igualmente espaçados, para construir um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5. Os egípcios perceberam que com tal triângulo era possível construir um ângulo reto entre os lados que mediam três e quatro. Ou seja, eles conheciam pelo menos um terno de números ditos. Pitagóricos, que com certeza não eram ainda conhecidos desta forma. Mas, mesmo sem qualquer documento que comprove isto, o mais importante e que estas situações devem ter sido vividas de alguma forma por Pitágoras nestas viagens.

Voltando a Grécia, Pitágoras tinha o objetivo de fundar uma escola para estudar a filosofia e a matemática que aprendeu durante suas viagens por estes diferentes povos. Porém, em Samos, Pitágoras enfrentou um problema político. Durante suas viagens, um tirano persa, chamado Polícrates, teria transformado Samos em uma cidade conservadora, um lugar de intolerância. Convidado por Policrates para compor a equipe de sua corte, Pitágoras percebeu que esta era a maneira encontrada para fiscaliza-lo, impedindo que ele difundisse a ideia do estudo filosófico e matemático. A princípio, a solução encontrada por Pitágoras foi se refugiar em uma caverna localizada em uma região remota da ilha, a fim de continuar seus estudos.

> Pitágoras não apreciava o isolamento e acabou subornando um menino para ser seu primeiro aluno. A identidade do garoto e incerta, mas alguns historiadores sugerem que ele também se chamaria Pitágoras [...] Pitágoras, o mestre, pagava ao seu aluno três ebolos para cada aula a que ele comparecia. Logo percebeu que, à medida que as semanas se passavam, a relutância inicial do menino em aprender se transformava em entusiasmo pelo conhecimento. Para testar seu pupilo, Pitágoras fingiu que não podia mais pagar o estudante e que teria de interromper as aulas. Então o menino se ofereceu para pagar por sua educação. O pupilo tornara-se discípulo. Infelizmente este foi o único adepto que Pitágoras conquistou em Samos. Ele chegou a estabelecer temporariamente uma escola conhecida como o Semicírculo de Pitágoras, mas suas ideias de reforma social eram inaceitáveis e o filosofo foi obrigado a fugir com sua mãe e seu único discípulo. (SINGH, 2008, p.30).

Foi neste momento que Pitágoras chega a Crotona, uma antiga cidade-estado da Magna Grécia, onde hoje e o sul da Itália. Por lá, Pitágoras encontrou o apoio de Milo que era o homem mais rico e forte da cidade. Além de influente politicamente, Milo era forte fisicamente, já que era um atleta olímpico, cinco vezes campeão de luta livre nos jogos olímpicos da antiguidade. Este homem já tinha ouvido sobre a fama de Pitágoras, que ecoava na Grécia, e lhe cedeu parte de sua casa para que Pitágoras fundasse a sua escola, tendo inclusive a filha de Milo, uma bela mulher chamada Teano, como uma de suas alunas.

Futuramente, apesar da diferença de idade, Pitágoras e Teano acabaram se casando. E então que nasce a famosa “escola pitagórica”, conhecida também como “irmandade pitagórica”, já que esta escola possuía também um caráter religioso e era cercada de mistérios e lendas.

> A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígida. O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmissão das almas, com a preocupação consequente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de um amigo morto. Entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). (BOYER, 1996, p.33)

> Talvez Pitágoras, influenciado pelas tradições budistas, desenvolveu a ideia de comunidade fraternal (sangha – comunidade dos budistas que tem os mesmos objetivos). Com características monásticas, instituiu ritos de abstinência, pureza e o vegetarianismo, que era imposto ou aceito pelos que queriam participar da escola. (CYRINO, 2006, p. 38)

> Ao entrar para a Irmandade cada adepto devia doar tudo o que tinha para um fundo comum. E se alguém quisesse partir receberia o dobro do que tinha doado e uma lapide seria erguida em sua memoria. A Irmandade era uma escola igualitária e incluía várias irmãs. (SINGH, 2008, p.30)

> Os discípulos da escola pitagórica formavam duas classes: os Auditores ou Pitagoristas, cujo ensino se limitava a musica, considerado como medicina da alma, e os Matemáticos ou Pitagóricos, iniciados nas principais descobertas da escola e nos segredos dos deuses. (CYRINO, 2006, p. 38)

Estes são relatos de algumas histórias que cercavam a escola pitagórica. O fato e que tal escola contava com cerca de seiscentos seguidores que estudavam e desenvolviam a matemática proposta por Pitágoras. O interesse deles era de ir além da utilização dos números. Eles queriam entende-los profundamente, tanto que o lema da escola pitagórica é que “tudo é número”.

> Pitágoras desenvolveu a ideia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características. Ele estudou as propriedades de certos números, o relacionamento entre eles e os padrões que formavam. Ele percebeu que os números existem independentemente do mundo palpável e, portanto, seu estudo não e prejudicado pelas incertezas da percepção. (SINGH, 2008, p.28)

Além de entender completamente o que cada número significava e de estudar a relação entre eles, a irmandade pitagórica cercava os números de imenso misticismo.

> Os pitagóricos tiveram grandes influencia no misticismo dos números, mas não foram os únicos a imaginar os números ímpares como sendo masculinos e os pares femininos; afirmavam que os impares exerciam supremacia sobre os pares, pois a soma de dois impares gera um numero par e a de dois pares sempre gera um numero par. (CYRINO, 2006, p. 46).

A partir deste raciocínio, os pitagóricos chegaram a listar as características místicas dos primeiros números naturais. O numero "um" é o gerador dos números, o primeiro número masculino. O "dois" que é o primeiro dos números femininos, o número da opinião. "Três" é o número da harmonia ou número da forma, por causa das dimensões: comprimento, largura e altura.

O numero "quatro" se corresponde ao tetraedro onde as faces seriam os elementos ar, terra, fogo e agua. A soma do primeiro número feminino com o primeiro número masculino verdadeiro, respectivamente dois e três, chegaria ao "cinco" que, por isso, e o número do casamento. O "seis" é o numero da criação. "Sete" e a junção da harmonia, simbolizada pelo três, com os elementos, que é o quatro. Sendo o dobro do número que representa os elementos, o "oito" é o número das formas perfeitas. Já o número "nove" e a caracterização numérica da indestrutibilidade, pois a soma dos algarismos de seus múltiplos e ele próprio; exemplos: 18, 27 e 36. E o "dez" e o número sagrado.

> A irmandade era realmente uma comunidade religiosa e um de seus ídolos era o Número. Eles acreditavam que se entendessem as relações entre os números poderiam descobrir os segredos espirituais do universo, tornando-se, assim, próximos dos deuses. Em especial, a Irmandade voltou sua atenção para os números inteiros (1, 2, 3, ...) e as frações. Os números inteiros e as frações (proporções entre números inteiros) são conhecidos, tecnicamente, como números racionais. (SINGH, 2008, p.32)

Pitágoras também foi o responsável pela formalização da escala musical que usamos hoje.

> O instrumento mais importante da antiga musica helênica era o tetracórdio, ou lira de quatro cordas. Antes de Pitágoras, os músicos tinham percebido que certas notas, quando soavam juntas, criavam um efeito agradável e afinavam suas liras de modo que ao tocarem duas cordas pudessem produzir tal harmonia. Contudo, os antigos músicos não compreendiam por que certas notas, em especial, eram harmônicas e não tinham nenhum meio preciso de afinar seus

> instrumentos. Eles afinavam suas liras pelo ouvido, ate conseguirem um estado de harmonia – um processo que Platão chamava de torturar as cravelhas. (SINGH, 2008, p.35)

Pitágoras observou que quando os comprimentos das cordas estavam em algumas proporções, elas soavam de forma harmônica. Ele notou que se uma corda produzia uma nota qualquer, outra corda com o dobro do tamanho produziria a mesma nota em uma oitava abaixo. Este mesmo princípio e utilizado hoje em harpas e pianos. Pitágoras formalizou as notas musicais que conhecemos da seguinte forma: dada uma corda que produzia um Do, uma corda com o dobro do comprimento levaria a um Do uma oitava abaixo e de forma ascendente, uma corda com 16:9 de seu tamanho produziria um Re, 8:5 para Mi, 3:2 para Fá, 4:3 para Sol, 6:5 para La e 16:15 para Si. Todas estas descobertas fizeram com que a escola pitagórica ganhasse notoriedade na Grécia antiga, porem junto com este prestigio muita inveja também era atraída. *Cyrino (2006, p. 52)* diz: "Da mesma maneira que os pitagóricos conseguiram ascensão politica, os inimigos surgiram. Um dos senhores mais ricos de Crotona, chamado Cilon, empreendeu um ataque a uma casa onde se reuniam os pitagóricos e muitos foram assassinados. Pitágoras foi para Tarento e daí, para Metaponto, onde perdeu a vida, aproximadamente, em 500a.C."

Pitágoras e os pitagóricos foram pessoas que deixaram um legado matemático e filosófico muito grande, porem esta historia importante da Matematica e envolta em muitas lendas, pelo fato de muitas de suas descobertas ficarem em segredo, além da perda da maioria dos documentos. Ha uma lenda que diz que, neste ataque aos pitagóricos, toda a casa foi incendiada, queimando os registros de Pitágoras e sua escola.

3 ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Seguem abaixo a análise de nove livros do ensino fundamental e de três livros do ensino médio, sobre a abordagem do tema “teorema de Pitágoras”. Os livros analisados, em sua grande maioria, são do “Plano Nacional do Livro Didático” (PNLD), programa do Ministério da Cultura e Educação (MEC), que distribui livros a escola pública.

LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL

1 – Livro: Matemática – 9º ano, 6ª edição, São Paulo, 2006, Editora: Moderna e Autor: Edwaldo Bianchini.

Este livro traz, em seu Capitulo 8, uma Seção introdutória contando a parte histórica de Pitágoras, o local de seu nascimento e falando um pouco sobre a escola pitagórica. Na próxima Seção do Capitulo, o autor diz o que é um triângulo retângulo e apresenta seus lados (catetos e hipotenusa). Finalmente, na terceira Seção, um triângulo retângulo com hipotenusa medindo 5 e catetos medindo 3 e 4 é apresentado, juntamente com os quadrados construídos a partir de seus lados para fora do triângulo. Utilizando este exemplo, nota-se que as áreas dos respectivos quadrados são 25, 9 e 16 e que 25 = 9 + 16, ou seja, que $5^2 = 3^2 + 4^2$. Então o autor deste livro didático afirma que esta relação e válida para todo triangulo retângulo e generaliza enunciando o teorema de Pitágoras. Após a 39 generalizações, ele cita que ha mais de trezentas provas para tal teorema e apresenta uma delas.

2 – Livro: Tudo e matemática – 9º ano, 3ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2011, Editora: Ática e Autor: Luiz Roberto Dante.

No Capitulo 7 o livro começa com uma parte histórica falando sobre os “esticadores de cordas” do antigo Egito, que usavam uma corda de 12 nós para construir ângulos retos, chegando ao triângulo com lados 3, 4 e 5. Antes de falar dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo, o autor já cita o que chama de “relação de Pitágoras”. Na próxima Seção, sem definir o que é um triângulo retângulo, apresentam-se seus lados (catetos e hipotenusa). Por fim, na Seção dedicada ao teorema de Pitágoras, ele é apenas enunciado.

Sua demonstração aparece na Seção seguinte quando se apresentam as outras relações métricas no triangulo retângulo. Ao final desta Seção, uma parte intitulada de “Leitura” apresenta mais três demonstrações.

3 – Livro: Matemática e realidade – 8ª série 5ª edição, São Paulo, 2005, PNLD 2008, Editora: Atual Editora e Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado.

O teorema de Pitágoras e apresentado no Capitulo 13 deste livro. O Capítulo se inicia com os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo e, em seguida, mostra as semelhanças em um triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa. O teorema de Pitágoras e demonstrado em meio a outras relações métricas no triangulo retângulo. Outros tipos de demonstração e a parte histórica são apresentados no final do Capítulo em uma Seção intitulada “Matemática no tempo”, após todas as aplicações e exercícios.

4 – Livro: Vencendo com e matemática – 8ª serie 1ª edição, São Paulo, 2005, Editora: Editora do Brasil e Autor: Miguel Asis Name.

Neste livro o teorema de Pitágoras é apresentado no Capítulo 13, e se inicia com uma parte histórica muito pequena sobre como os Egípcios construíam ângulos retos com uma corda com 13 nós igualmente espaçados (Note que no segundo livro analisado, a corda continha 12 nós). Porém o autor deste livro didático diz “o nó era considerado a unidade de medida”, o que parece estar errado. O correto parece ser que o espaço entre os nós é a unidade de medida, já que eles são igualmente espaçados. Após os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo serem apresentados, algumas relações métricas são dadas e demonstradas através de semelhança. Após alguns exercícios, o teorema de Pitágoras é demonstrado usando as relações já provadas. Ao final do

Capítulo, em uma Seção intitulada como “Um pouco de historia”, uma pequena parte histórica e apresentada.

5 – Livro: Novo praticando matemática – 8ª serie 1ª edição, São Paulo, 2002, PNLD 2005, Editora: Editora do Brasil e Autores: Álvaro Andrini e Maria Jose Vasconcellos.

Na Unidade 6 os autores deste livro didático iniciam falando sobre ângulos retos no cotidiano e sobre o método dos Egípcios para construir ângulos retos com a corda de 13 nós. Em seguida, com o exemplo do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, faz a constatação sobre a relação entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados. A seguir, usa o quadrado com lado “b + c” para demonstrar o teorema de Pitágoras fazendo uma comparação entre a área do quadrado $(b + c)^2$ e a área do mesmo quadrado partido em um quadrado menor de lado medindo “a” e 4 triângulos retângulos com catetos b e c. Ou seja, a mesma área e dada por $a^2 + 2bc$. Ao final os autores deste livro didático apresentam uma pequena parte histórica intitulada “Falando de Pitágoras”.

6 – Livro: A conquista da matemática – 9º ano, 1ª edição, São Paulo, 2009, PNLD 2011, Editora: FTD e Autores: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.

Na parte intitulada “Estudando as relações métricas no triangulo retângulo”, os.

Autores deste livro didático iniciam o assunto com algumas curiosidades. Dentro desta parte, no Capitulo 49, apresentam-se os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo e a história dos Egípcios, utilizando-se agora uma corda de 12 nós. Usando as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5, enunciasse a teorema de Pitágoras. Após alguns exemplos de aplicação, uma parte intitulada “Outra demonstração do teorema de Pitágoras”, e enunciada sem, entretanto nenhuma demonstração ter sido feita. Isso pode levar o aluno a seguinte constatação: achar que um exemplo é uma demonstração, ou que vários exemplos seguidos são satisfatórios para se demonstrar algo.

7 – Livro: Matemática - Volume 8, 1ª edição, São Paulo, 2003, Editora: Moderna e Autoria do Projeto Arariba.

Na Unidade 4 “Relações no triangulo retângulo”, a parte 2, “Relações métricas no triângulo retângulo”, apresenta a demonstração do teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos, sem qualquer abordagem histórica. Após falar das aplicações do teorema de Pitágoras razões trigonométricas no triangulo retângulo, ângulos notáveis, tabela trigonométrica, relações trigonométricas em um triangulo qualquer e muitas atividades, apresenta-se uma parte histórica sobre a vida e a obra de Pitágoras.

8 – Livro: Matematica - Projeto Telares – 9º ano, 1ª edição, São Paulo, 2012, Editora: Ática e Autor: Luiz Roberto Dante.

No Capitulo 6 o autor deste livro didático introduz o tema falando dos

“harpedonaptas” que são os esticadores de cordas do antigo Egito, usado pela maioria dos autores citados anteriormente. Ainda desta vez, o autor deste livro didático afirma que a corda utilizada para obter ângulos retos com o triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 possuía 12 nós. Após esta pequena parte histórica, ele diz que este método e baseado no teorema de Pitágoras e enuncia o teorema. Em seguida, sem definir de forma rigorosa o que é um triângulo retângulo, seus lados (catetos e hipotenusa) são apresentados. E enfim, após apresentar o exemplo das áreas construídas a partir dos lados, o teorema de Pitágoras é demonstrado em meio às outras relações métricas no triângulo retângulo. Ainda, em tempo, após alguns exercícios o autor apresenta outras duas demonstrações do teorema.

9- Livro: Matemática compreensão e prática- 9º ano, 1ª edição, São Paulo, 2008,

Editora: Moderna e Autor: Ênio Silveira e Claudio Marques.

No Capítulo 7 os autores iniciam o assunto falando uma breve história sobre os triângulos retângulos utilizando a corda egípcia de 12 nós e o triângulo 3, 4 e 5.

Logo após introduz um tópico intitulado biografia na qual conta um pouco da história de Pitágoras.

Por fim, da inicio as relações métricas no triângulo retângulo usando semelhança, chegando ao final no resultado do teorema de Pitágoras. Entretanto, ainda mostram outras duas demonstrações para o teorema, à demonstração clássica e a do presidente americano.

LIVROS DO ENSINO MÉDIO

1 – Livro: Matematica: Ciências e aplicações - Volume 1, 6ª edição, São Paulo, 2010, PNLD 2012, Editora: Saraiva, Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Perigo e Nilze de Almeida.

No Capitulo 12, o teorema de Pitágoras e demonstrado junto com as outras relações métricas no triângulo retângulo, usando semelhança de triângulos. Após as aplicações do teorema de Pitágoras, uma parte chamada de “Um pouco de historia” apresenta uma parte da história de Pitágoras e uma demonstração feita por James Abraham Garfield (1831 –1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos da América.

2 – Livro: Matematica Paiva - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2009, PNLD 2012, Editora: Moderna, Autor: Manoel Paiva.

Ao final do Capitulo 3, na Seção 8, as relações métricas no triângulo retângulo são primeiro, citadas e, em seguida, demonstradas. A última delas é o teorema de Pitágoras. Em uma nota pequena o autor cita o livro The Pythagorean Proposition de Elisha Scott Loomis, onde ha 367 demonstrações diferentes do teorema de Pitágoras.

3 – Livro: Matematica - Volume 1, 1ª edição, São Paulo, 2004, PNLD 2006, Editora: Moderna e Autores: Edvaldo Bianchini e Herval Paccola.

No Capítulo 2 os autores deste livro didático iniciam o tema enunciando diretamente o teorema de Pitágoras sem demonstrar ou fazer qualquer abordagem histórica. Em seguida, apresentam um exemplo onde se pede para calcular um cateto de um triangulo retângulo dados a medida da hipotenusa e do outro cateto que medem, respectivamente, 5 cm e 4 cm.

Logo após é proposta aos leitores uma Seção de exercícios, que sem duvida são mais difíceis que o exemplo apresentado. E, para encerrar, as aplicações do teorema no quadrado e no triângulo equilátero são rapidamente demonstradas. Nem no final do Capítulo, como alguns autores fazem, alguma parte histórica da vida de Pitágoras ou uma demonstração é apresentada.

OBSERVAÇÕES DAS ANÁLISES FEITAS SOBRE OS LIVROS

O teorema de Pitágoras é um tema de grande notoriedade e um resultado muito explorado nos conteúdos de trigonometria e geometria seguintes, por isso deve ser um tema com um tratamento especial. Mas o que vemos nos livros dos ensinos fundamental e médio são abordagens pobres de informação histórica e falta de argumentação de provas, principalmente nos livros de ensino médio. Nos livros de ensino fundamental analisados é quase que unanime a apresentação do tema com uma pequena parte histórica falando dos “esticadores de corda” do antigo Egito.

Os egípcios utilizavam uma corda com 13 ou 12 nós igualmente espaçados? Esta duvida fica ar. Note que se a corda for aberta, com 12 nós há 11 espaços entre os nós, mas 11espaços não geram um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5, pois 3 + 4 + 5 = 12. Ou seja, faz-se necessário que a corda possua 13 nós para que 12 espaços entre eles sejam gerados.

Mas se a corda for fechada, com 12 nós, há 12 espaços entre os nós. O que nos leva a seguinte conclusão: quando os autores citam a corda com 12 nós, parece que eles se referem a uma corda fechada, sem extremidades. E quando a corda é citada com 13 nós, então ela é aberta. Mas esta dualidade de informação, sem qualquer tipo de informação textual ou ilustrada, confunde o leitor que consulte dois ou três materiais diferentes.

Nos livros de ensino médio analisados, a abordagem histórica praticamente não existe. Em nosso entendimento, isto é uma pena, pois é a oportunidade de se acrescentar mais conhecimento ao aluno que já tendo estudado o tema no ensino fundamental, encontra-se mais maduro para uma análise mais completa. Apenas um dos livros faz este tipo de abordagem, mas de forma muito breve.

A abordagem histórica é muito importante e necessária que seja feita com a maior precisão possível, a fim de gerar conhecimento e interesse no leitor em se aprofundar no tema. Caso contrário, isso poderá afastá-lo do assunto, fazendo com que ele não perceba com quanta riqueza o resultado foi descoberto. Impossibilitando-o de guardar o resultado por meio de uma motivação histórica, que sem duvida agrega mais qualidade a aprendizagem e prolonga, ou até mesmo perpetua, sua memoria em relação ao que foi estudado. Ainda falando sobre a parte histórica, poucos autores contam a história do próprio Pitágoras e da escola pitagórica na introdução do tema. Este fato nos parece pesar contra, pois esta história é rica em detalhes curiosos e, além disso, é um capitulo interessante da construção do conhecimento matemático e filosófico que temos hoje em dia. Acreditamos que os professores de ensino básico precisam ter conhecimento da história da Matemática para poderem motivar os seus alunos. De fato, segundo a M.A.A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber.

Quanto às demonstrações, existe uma grande quantidade delas e, em todos os livros de ensino fundamental analisados, temos pelo menos uma delas. A mais comum entre elas é a que usa semelhança de triângulos para demonstrar todas as relações métricas no triângulo retângulo, inclusive o teorema de Pitágoras. Isto é um ponto positivo, e mais interessante ainda são os livros que além desta demonstração fornecem uma leitura com mais uma ou duas demonstrações diferentes. Além disso, seria importante que os autores publicassem que estas são apenas duas ou três de muitas demonstrações existentes. Isto é uma curiosidade que pode despertar um interesse no leitor, instigando-o a pesquisar mais em outras fontes. Um fator muito negativo é que, na maioria dos livros de ensino médio, não são apresentadas sequer uma demonstração. Assim, como foi dito sobre a abordagem histórica, a respeito da maturidade que o aluno já adquiriu estudando o assunto no ensino fundamental, também se perde uma grande oportunidade quando não se apresentam demonstrações do teorema no ensino médio. Neste momento o aluno já possui uma bagagem matemática maior para entender e discutir provas mais complexas. O fato de o aluno já ter estudado o teorema de Pitágoras em outra oportunidade, leva a maioria dos autores a tratar o tema com superficialidade neste momento acadêmico, mas isso nos parece ser prejudicial. Esta objetividade, ao invés de ajudar no processo de construção do conhecimento matemático acaba o empobrecendo.

4 BREVE PESQUISA

Nesta pesquisa utilizamos um questionário contendo perguntas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras em sala de aula, bem como, a percepção dos professores com relação aos alunos sobre o entendimento e as suas aplicações práticas.

Esse questionário foi respondido por cinco colegas professores de ensino fundamental e médio.

QUESTIONÁRIO: RESPONDIDO PROF. APERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:

Prof º Doutor Marcos Ferreira Melo

Mestrando: Daniel Emanuel Bruno Silva

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras? Ele utiliza as relações métricas em um triângulo retângulo para provar que $a^2=b^2+c^2$

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste teorema? Não traz aspectos históricos e tem poucas questões contextualizadas.

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais? Sim. Apenas uma. Conclui que, como $b^2=a.m$ e $c^2=a.n$, então $b^2+c^2=a.(m+n)$, ou seja, $b^2+c^2=a^2$.

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?
Pelo menos quatro.

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos?
A citada acima é também esta outra:

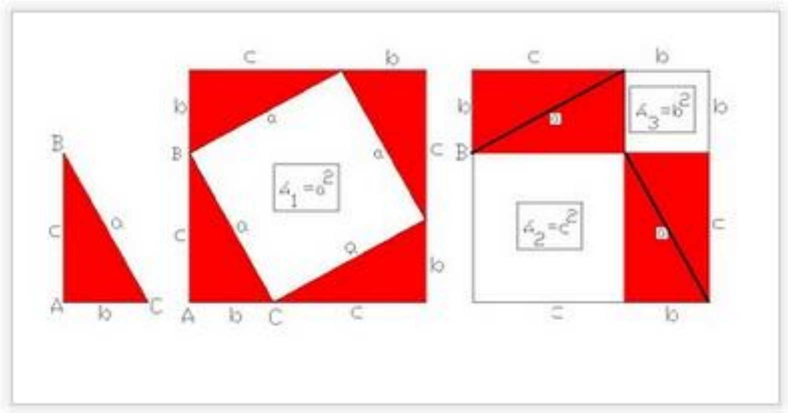


Figura 1

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a(s) demonstração (ções) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?

a) Material concreto
b) Quadro
c) Software computacional (Site www.dinamatica.com.br)
d) Vídeo

7. Ao utilizar o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas? Em algumas situações.

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática? Na maioria das vezes, sim.

QUESTIONÁRIO: RESPONDIDO PROF. B

PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:

Prof º Doutor Marcos Ferreira Melo

Mestrando: Daniel Emanuel Bruno Silva

Livro Adotado na EEFM Pe Marcelino Champagnat que trabalho:

Matemática Ciência e Aplicações – Ensino Médio – 1º Ano Editora Saraiva

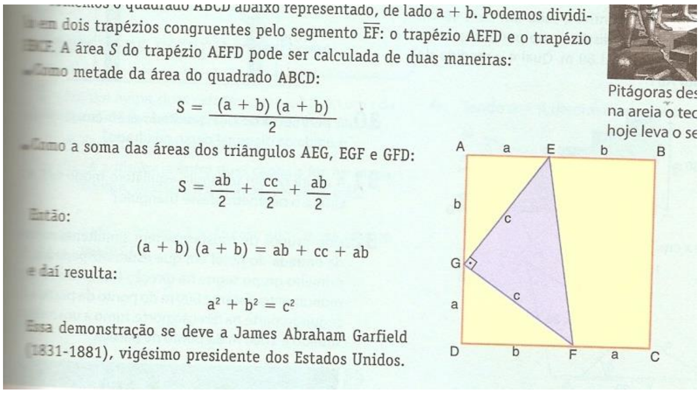
Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras? A abordagem é apenas uma relação métrica do triângulo retângulo. (pág. 254 e 255)

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste teorema? O livro adotado traz poucos aspectos históricos (pág. 257) e quantos a contextualização de situações problemas envolvendo este teorema, considero pobre.

.

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais? Apenas a da imagem abaixo retirada da pág. 257.



...o quadrado ABCD abaixo representado, de lado a + b. Podemos dividi-... em dois trapézios congruentes pelo segmento $\overline{EF}$: o trapézio AEFD e o trapézio ... A área S do trapézio AEFD pode ser calculada de duas maneiras:

...como metade da área do quadrado ABCD:

$$S = \frac{(a + b)\,(a + b)}{2}$$

...como a soma das áreas dos triângulos AEG, EGF e GFD:

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2}$$

Então:

$$(a + b)\,(a + b) = ab + cc + ab$$

e daí resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Essa demonstração se deve a James Abraham Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos.

Figura 2

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

Pelo menos três.

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos? Prefiro esta:

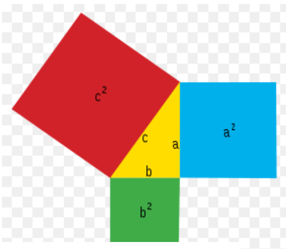


Figura 3

Visto que hoje em dia os alunos não conseguem se concentrar por muitos segundos, e esta é bem rápida.

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a(s) demonstração (ções) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?

Por ordem:

a. Quadro

b. Vídeo – quando há a disponibilidade de equipamento multimídia na escola

c. Software - quando há a disponibilidade de equipamento multimídia na escola e espaço adequado (Laboratório) e quando há interesse na turma para o aprendizado.

7. Ao utilizar o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas?

É um assunto fácil para a contextualização. Gosto muito de utilizar a ideia de calcular a altura de um prédio pela sua sombra. Porém, quando vamos para a contextualização, esbarra-se na dificuldade que os alunos têm de interpretar textos simples.

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática?

Os Alunos de hoje só querem saber como resolve aquela questão que vai cair na prova. Uma aplicação simplória e tradicional. Quando se quer fazer algo diferente, há muita resistência. Não sei se você lembra que eu fazia uns livretos para as turmas de seis anos no Ari de Sá. Fiz esta experiência ano passado com os alunos do 2º ano, onde um dos tópicos era o teorema de Pitágoras, foi uma luta realizar este trabalho, mas ao final quem realmente levou a sério, gostou do que produziu. Então afirmo que os alunos tem muita dificuldade, ou melhor, pouco interesse de enxergar diferentes aplicações desse teorema.

QUESTIONÁRIO: RESPONDIDO PROF. C

PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:

Prof º Doutor Marcos Ferreira Melo

Mestrando: Daniel Emanuel Bruno Silva

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras? De forma bem direta apenas com a demonstração feita por meio de semelhança de triângulos.

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste teorema? Não traz aspectos históricos, mas trazem algumas questões contextualizadas, afinal essa é uma nova tendência de mercado de uma forma geral e quem não se adaptar a esse tipo de abordagem irá se tornar obsoleto.

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais? Apenas por semelhança de triângulos.

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

Pelo menos 15.

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos? A tradicional por semelhança ou a que utiliza áreas com um quadrado interno contornado por quatro triângulos retângulos.

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a(s) demonstração (ções) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?

e) Material concreto
f) Quadro
g) Software computacional
h) Vídeo

Apenas quadro.

7. Ao utilizar o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas? Não.

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática? Principalmente em Física.

QUESTIONÁRIO: RESPONDIDO PROF. D

PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:

Prof º Doutor Marcos Ferreira Melo

Mestrando: Daniel Emanuel Bruno Silva

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras? O livro do Paiva. A abordagem é bem tradicional.

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste teorema? Apresenta aspectos históricos, mas não é contextualizado.

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais? Sim. Uma algébrica e outra com geometria plana.

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?
   Pelo menos cinco.

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos? Tenho duas favoritas, uma que usa objeto de aprendizagem e outra que usa material concreto do laboratório de matemática.

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a(s) demonstração (ções) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?
   i) Material concreto
   j) Quadro
   k) Software computacional
   l) Vídeo

7. Ao utilizar o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas? Sim, falo muito sobre as aplicações na engenharia.

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática? Não, pois o tempo da aplicação é muito pouco.

QUESTIONÁRIO: RESPONDIDO PROF. E

PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:

Prof º Doutor Marcos Ferreira Melo

Mestrando: Daniel Emanuel Bruno Silva

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras? A abordagem é bem tradicional.

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste teorema? Apenas sobre os esticadores de corda do Egito e uma minibiografia de Pitágoras.

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais? Sim. A que usa semelhança para ganhar tempo com as relações métricas no triângulo retângulo e em anexos mais umas três demonstrações.

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

Pelo menos cinco.

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos? A do presidente americano, GARFIELD. James Abraham.

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a(s) demonstração (ções) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?

m)Material concreto

n) Quadro

o) Software computacional

p) Vídeo

7. Ao utilizar o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas? Sim, falo muito sobre as aplicações no ensino médio.

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática? Não, pois a forma como nós somos obrigados a passar os conteúdos dificultam o ato de pensar, pois nós estamos preocupados apenas em terminar a matéria independente se os alunos compreenderam o conteúdo ou não.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA

Pelos dados dessa pesquisa podemos ver como o assunto é tratado nos livros didáticos, em todas as respostas temos que a abordagem é tradicional. Na maioria das respostas os livros tem uma abordagem histórica, mas quase não há contextualização com o cotidiano.

As demonstrações sobre o teorema de Pitágoras se resumem basicamente a prova por semelhança, embora os professores terem respondido que conhecem outras demonstrações. A esse fato, posso atribuir como professor, as cobranças que todos nós temos com relação ao tempo relacionado aos assuntos e a quantidade de tópicos a serem desenvolvidos no decorrer do ano.

Os professores, responderam que buscam contextualizar o conteúdo com situações ligadas a engenharia, ao ensino médio, a física, apenas um professor diz não contextualizar o assunto em sala de aula. Por fim foi feita uma pergunta sobre se os alunos eram capazes de enxergar o assunto dentro e fora da matemática e a maioria das respostas foi não. O que condiz muito com a maneira de como está sendo tratado o ensino da matemática nos dias de hoje. Sentimos que nós temos o dever de reverter essa situação em que nos encontramos com relação ao ensino da matemática, nos questionando onde estamos errando, procurando melhorar nossas aulas, sinalizando aos autores de livros como errados eles estão no sentido de como estão desenvolvendo seus temas, e nós como pesquisadores do ensino, desenvolvermos melhores técnicas para que no final, nossos alunos tenham um devido aprendiza

5 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

1. *Demonstração utilizando vetores*

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A.

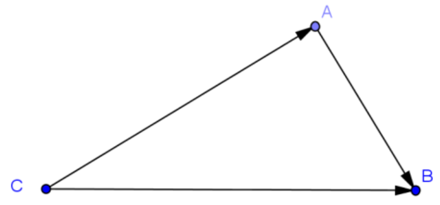


Figura 4

$Sejam\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\ e\ \overrightarrow{CB},\ vetores\ de\ normas\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = c\ , \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = b\ e$

$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = a,\ respectivamente.$

$Da\ definição\ de\ soma\ de\ vetores,\ temos\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.$

$Disto\ e\ do\ \ fato\ de\ que\ \vec{v}.\vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2,\ para\ qualquer\ vetor\ \vec{v},$

$Segue\ que:$

$a^2 = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) =$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}.$

$Assim,\ a^2 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + 2.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.$

$Mas\ os\ vetores\ \overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CA}\ são\ ortogonais,\ e\ isto\ implica\ que$

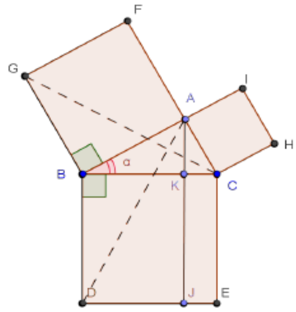
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\cos 90^o = 0.$

$Logo,\ a^2 = b^2 + c^2.$

2. *Demonstração de Euclides*

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Sobre o cateto AC, construímos o quadrado ACHI, sobre o cateto AB, construímos o quadrado ABGF e sobre a hipotenusa BC o quadrado BCED. Tracemos AJ paralelo a CE, marquemos K na intersecção com BC e J na intersecção com DE, assim obtemos KJ=BC=BD. Ligando-se o vértice G ao vértice C e o vértice D ao vértice A, temos BC=BD.

Figura 5



Pelo caso (LAL), os triângulos BCG e ABD são congruentes. Como BG é base de BCG e de BAFG, AB é altura de BCG e também de BAFG, temos que a área do triângulo BCG é igual a metade da área de BAGF. Por outro lado, tomando BD como base de ABD e de BDJK, BK é a altura de BDJK e ABD.

Novamente, temos que a área triângulo ABD é igual a metade da área de BDJK. Como os triângulos BCG e ABD são congruentes temos ½ área (ABFG) =1/2 área (BDJK). Temos então área (BACF) =área (BDJK) e analogamente, área (ACHI) =área (CEJK), o que nos dá área (ABGF) +área (ACHI) =área (BCED).

3. Demonstração do Presidente Americano

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Prolonguemos o segmento AB até o ponto D, de modo que. Tracemos uma reta paralela a AC pelo ponto D e marquemos o ponto E nesta reta, de modo que $\overline{DE} = \overline{AB}$ e o triângulo CBE seja retângulo com ângulo reto em B (isto é possível, pois pela construção, os triângulos ABC e BDE são congruentes e.

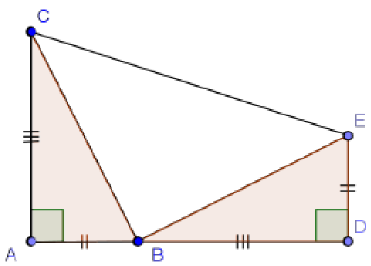


Figura 6

A área do trapézio com bases $\overline{AC}$ *e* $\overline{DE}$ é dada por:

$$A = \frac{\left(\overline{AC}+\overline{DE}\right).\overline{AD}}{2}.$$

Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos.

$$A = A_1+A_2+A_3 = \frac{\left(\overline{AB}\right).\left(\overline{AC}\right)}{2}+\frac{\left(\overline{BD}\right).\left(\overline{DE}\right)}{2}+\frac{\left(\overline{BE}\right).\left(\overline{BC}\right)}{2}$$, ou seja,

$$A = \frac{\left(\overline{AC}+\overline{DE}\right).\overline{AD}}{2} = \frac{\left(\overline{AB}\right).\left(\overline{AC}\right)}{2}+\frac{\left(\overline{BD}\right).\left(\overline{DE}\right)}{2}+\frac{\left(\overline{BE}\right).\left(\overline{BC}\right)}{2}.$$

$$Como\ \overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}, \overline{AB}=\overline{DE}, \overline{BE}=\overline{BC}\ e\ \overline{BD}=\overline{AC}, temos:$$

$$\left(\overline{AC}\right).\left(\overline{AB}\right)+\left(\overline{AC}\right).\left(\overline{AC}\right)+\left(\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{AB}\right).\left(\overline{AC}\right)=$$

$$2.\left(\overline{AB}\right).\left(\overline{AC}\right)+\left(\overline{BC}\right)^2.$$

$$Simplificando, obtemos\ \left(\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{BC}\right)^2, o$$

que prova o Teorema de Pitágoras.

4. Demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci nasceu na Itália em 15 de abril de 1542, pintor e escultor italiano um dos grandes gênios da humanidade, criador do quadro Mona Lisa também concebeu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que se baseia na figura.

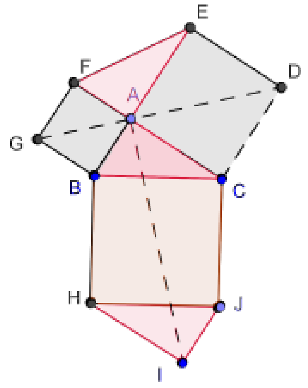


Figura 7

Os quadriláteros ABHi , ACJI , GFED e GBCD são congruentes . Logo os hexágonos ABHIJC e GBCDEF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado BCHJ é a soma dos quadrados ABGF e ACDE.

Da Vinci se baseou no princípio de comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos.

5. Demonstração Utilizando a fórmula de Heron

A fórmula de Heron permite calcular a área de um triângulo em função do semiperímetro p e dos lados a, b e c .

Vamos considerar um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c como mostra a figura abaixo.

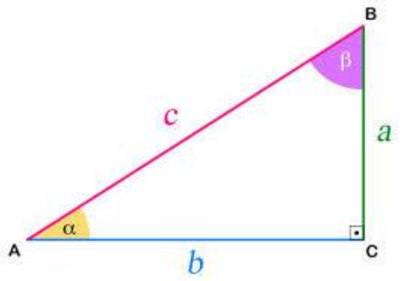


Figura 8

Pela fórmula de Heron, a área desse triângulo é dada por:

Área (ABC) = $\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$.

Efetuando o produto dentro do radical, com p = $\frac{a+b+c}{2}$ *, obtemos:*

Área (ABC) = $\frac{1}{4}.\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$.

Por outro lado: Área (ABC) = $\frac{b.c}{2}$.

Comparando essas duas equações, temos:

$\frac{1}{4}.\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.= \frac{b.c}{2}$, *ou seja,*

$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4 = 4b^2c^2$

Rearrumando essa última expressão e efetuando as devidas simplificações temos:

$$\left[\left(b^2+c^2\right)-a^2\right]^2=0$$

$$Logo: a^2=b^2+c^2.$$

6. A demonstração (usando semelhança).

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

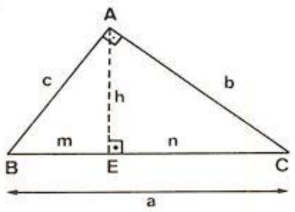


Figura 9

Da semelhança dos triângulos AHB e ABC temos $b^2=a.n$ *e da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos.*

Somando essas duas relações membro a membro, encontramos: $b^2+c^2=am+an=a(m+n)=a\cdot a=a^2$.

Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo.

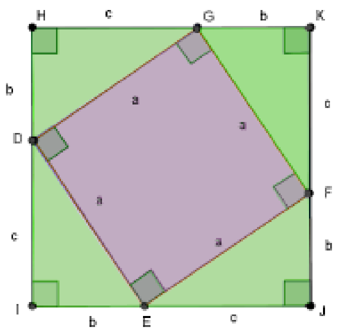
Além das duas que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc=ah$, *que é também se interpreta com o conceito de área, e* $h^2=mn$, *que revela o importante fato que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

7. *Uma prova do teorema de Pitágoras que não utiliza a "teoria da semelhança"*

É uma prova que poderia ser feita na sétima série do Ensino Fundamental pois que não depende da teoria da semelhança mas somente da noção de área.

Considere um triângulo AMQ retângulo em A. Sejam a, b e c respectivamente as medidas dos lados QM, AM e AQ. Existe um ponto B na semirreta AM tal que AB = b + c e existe um ponto D na semirreta AQ tal que AD = c + b. Portanto MB = c e DQ = b. Considere o quadrado ABCD e um ponto N pertencente ao lado BC de modo que BN = b e NC = c. Considere também um ponto P pertencendo ao lado CD de modo que CP = b e PD = c .Os triângulos AQM, BMN, CNP e DPQ são congruentes (caso LAL). Logo MN=NP=PQ=QM.

Figura 10



Sendo α a medida do ângulo AMQ , a medida do ângulo NMB será 90°-α. Portanto o ângulo QMN será reto. De maneira análoga estabelece-se que os ângulos MNP, NPQ e PQM são retos. O quadrilátero MNPQ será portanto um quadrado. A área do quadrado MNPQ será simultaneamente $(b+c)^2$ e $a^2+4.\frac{b.c}{2}$ (um quadrado e quatro triângulos retângulos). Da igualdade $(b+c)^2 = a^2+4.\frac{b.c}{2}$ resulta que $a^2=b^2+c^2$.

Observe que a demonstração acima apoia-se no fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Desse fato decorre que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°. E desse fato decorre que se um quadrilátero possui três ângulos retos então o quarto ângulo será também reto. Donde se conclui também que existem retângulos e quadrados. Portanto a *prova convincente do teorema de Pitágoras apresentada acima apresenta hipóteses "escondidas", tendo como ponto crucial o fato de que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180°. Esta proposição apresentada no livro I de Euclides (proposição 32) depende do quinto postulado de Euclides.*

8. *O recíproco do Teorema de Pitágoras.*

Se em um triângulo ABC, o quadrado da medida do lado BC é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto ao lado BC é reto.

Prova

Sejam a, b e c respectivamente as medidas dos lados BC, AB e AC do triângulo ABC.

Considere duas semirretas perpendiculares que se interceptam no ponto M. Existe um ponto N numa das semirretas e um ponto P na outra semirreta tal que MN = b e MP = c. Pelo teorema de Pitágoras $NP^2 = b^2 + c^2$. Mas no triângulo ABC temos por hipótese $a^2 = b^2 + c^2$.

Logo $NP^2 = a^2$, donde NP = a Concluímos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo MNP (caso LLL). Do fato do ângulo NMP ser reto conclui-se que o ângulo BAC também é reto.

9. *Uma generalização feita pelo matemático árabe Thabit ibn-Qurra (século IX).*

Considere um triângulo qualquer ABC. Construa sobre os seus lados três quadrados.

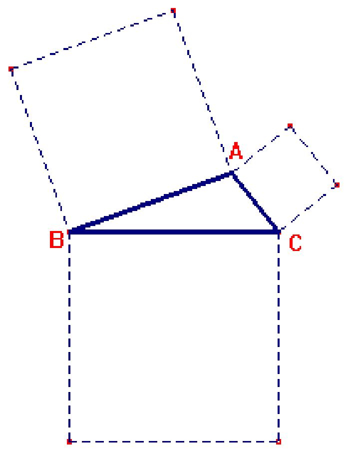
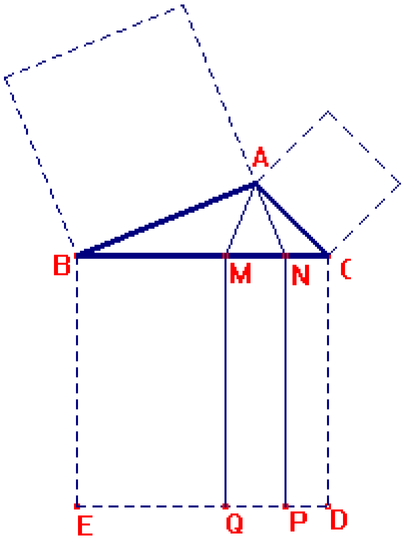


Figura 11

Sejam M e N os pontos de BC, de modo que os ângulos BMA e CNA sejam iguais ao ângulo BAC. Sejam P e Q as projeções de M e N sobre DE. Sob essas condições verifica-se que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados AB e AC é igual à soma das áreas dos retângulos BMQE e NCDP.

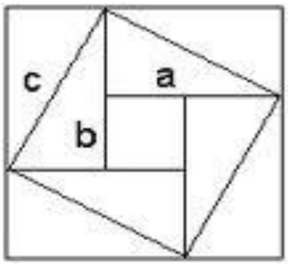


$$AB^2+AC^2=(BM+NC).BC$$

10. Demonstração de Bháskara

Segundo Barbosa (1993), Bháskara foi um matemático hindu que não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado veja ou contemple, talvez sugerindo que em seu diagrama a disposição induzia a uma bela prova do teorema de Pitágoras. Procedendo de modo análogo, a figura que aparece no Chou-pei, de forma geral, constrói o triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c (Figura 1):

Figura 1: Comparação da demonstração de Bháskara com uma das figuras Que aparecem no Chou-pei :



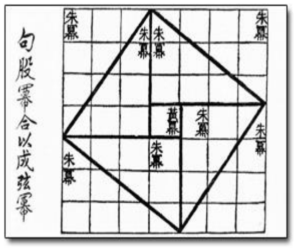


Figura 12

No interior, ao centro, encontramos um quadrado de lado b – c. Temos por área que:

$$a^2 = (b-c)^2 + 4.\frac{b.c}{2} = b^2 - 2.b.c + c^2 + 2.b.c \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

De acordo com a estratégia utilizada, esta demonstração pode ser do tipo geométrico ou do tipo algébrico, vai depender da estratégia utilizada. Acima utilizamos a demonstração algébrica.

11. Demonstração de Leibniz

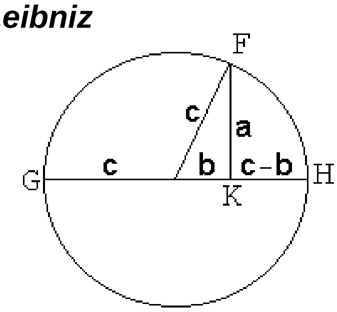


Figura 13

Desenhe um círculo com raio c e um triângulo retângulo com os lados A e B, como mostrado. Nesta situação, pode-se aplicar qualquer um dos poucos fatos conhecidos. Por exemplo, no diagrama de três pontos F, G, H situados no círculo formar outro triângulo com o FK altitude de um comprimento. O GH hipotenusa é dividido em duas partes:

(b + c) e (c - b). Assim, temos $a^2 = (c + b).(c - b) = c^2 - b^2$.

[Loomis , n º 53] atribui essa construção ao grande Leibniz.

12. Demonstração de Pappus

Esta prova aparece no Livro IV Coleção Matemática por Pappus de Alexandria (cerca de 300 d.C.)[Eves, Pappus]. Ele generaliza o Teorema de Pitágoras de duas maneiras: o triângulo ABC não é obrigado a estar em ângulo reto e as formas construídas em seus lados são paralelogramos arbitrários em vez de quadrados. Assim, construir paralelogramos CADE e CBFG em lados AC e, respectivamente, BC. Vemos que DE e

FG reúnem-se em H e desenhamos AL e BM paralelos e iguais a HC. Então a Área (ABML)= Área (CADE) + Área (CBFG). Na verdade, Área (CADE) = Área (CAUH) = Área (SLAR) e também da área (CBFG) = Área (CBVH) = Área (SMBR). Agora, basta somar o que é igual.

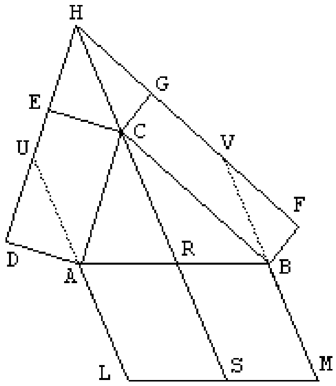


Figura 14

13. Demonstração de Dr. Scott Brodie

Aqui está a segunda prova da carta do Dr. Scott Brodie.

Tomamos como é conhecido um "poder do ponto" teoremas: Se um ponto é tomado exterior a um círculo, e, do ponto de um segmento é desenhado tangente ao círculo e outro segmento (a secante) é desenhada que corta o círculo em dois pontos distintos, em seguida, o quadrado do comprimento da tangente é igual ao produto da distância ao longo da secante do ponto externo ao ponto mais próximo da intersecção com o círculo e a distância ao longo da secante para o ponto mais distante da intersecção com a círculo.

Seja ABC um triângulo retângulo, com
reto em C. Desenhe a altitude de C para a hipotenus
P denotar o pé desta altitude. Então, já que a CEC
ponto P encontra-se o círculo com diâmetro BC;
CPA é certo, o ponto P encontra-se no círculo com
AC. Portanto, a intersecção dos dois círculos nas pernas

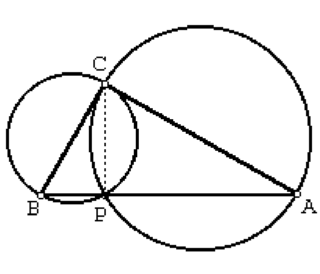


Figura 15

BC, CA do triângulo direito originário coincide com P, e em particular, encontra-se em AB. Denotam por x e y os comprimentos de segmentos PA e PA, respectivamente, e, *como é habitual deixara, b, c denota os comprimentos dos lados opostos de ABC dos ângulos A, B, C, respectivamente. Em seguida, $x + y = c$.*

Desde ângulo C é certo, BC é tangente ao círculo com CA de diâmetro, eo teorema de energia afirma que $a^2 = xc$; da mesma forma, AC é tangente ao círculo com diâmetro aC, e $b^2 = yc$ .Adicionando, encontramos $a^2 + b^2 = xc + yc = c^2$, QED

(Esta prova foi publicado como número XXIV em uma coleção de provas por BF Yanney e JA Calderhead em Am Math Mensal , v.4, n. 1 (1897), pp 11-12).

14. Demonstração de Larry Hoehn

Larry Hoehn também publicou a seguinte prova (The Mathematics Teacher,88(1995),p.168)

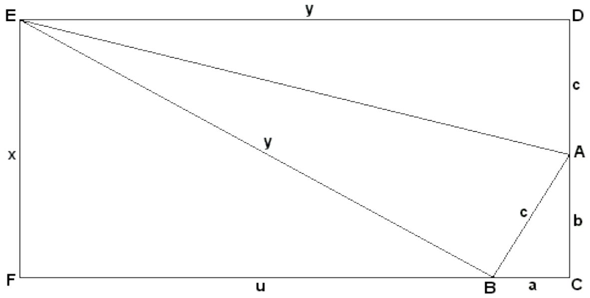


Figura 16

Aumentar a altura AC do triângulo retângulo ABC até D de modo que AD=AB=c, como no diagrama. No ponto D desenhar uma perpendicular ao lado CD. De A desenhar uma bissetriz do ângulo BAD. Na qual as duas linhas se encontrem em E. Finalmente, vamos verificar que EF é perpendicular à CF. Por esta construção, os triângulos ABE e AD , têm um lado comum AE e têm outros dois lados iguais: AD = AB, bem como os ângulos formados por esses lados: . ∠ BAE = ∠ DAE Portanto, triângulos ABE e ADE são congruentes pelo caso ***LAL*** *. A partir daqui, o ângulo ABE está certo.*

Segue-se então que em triângulos retângulos ABC e BEF ângulos ABC e EBF adicionar até 90°. Assim

∠ ABC = ∠ BEF e ∠ BAC = ∠ EBF.

Os dois triângulos são semelhantes, de modo que $\frac{x}{a} = \frac{u}{b} = \frac{y}{c}$.

Mas, EF = CD, ou x = b + c, que, em combinação com a proporção acima dá

$$u = \frac{b.(b+c)}{a} \; e \; y = \frac{c.(b+c)}{a}$$

Por outro lado, y = u + a, o que leva a

$$\frac{c.(b+c)}{a} = \frac{b.(b+c)}{a} + a$$

que é facilmente simplificado para $c^2 = a^2 + b^2$.

15. Demonstração Barry Sutton

(By J. Barry Sutton, A Gazeta de Matemática, v 86, n 505, março de 2002, p72).

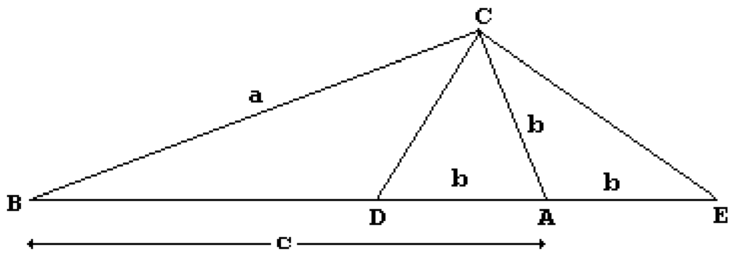


Figura 17

Vemos em ΔABC, o ângulo C = 90 °. Como de costume, AB = c, AC = b, BC = a. Definir pontos D e E sobre AB, de modo que AD = AE = b.

Por construção, C encontra-se no círculo de centro A e raio b. Ângulo DCE subtende o seu diâmetro e, portanto, tem razão: DCE = 90 °. Daqui resulta que BCD = ACE. Desde ΔACE é isósceles, CEA = ACE.

Triângulos DBC e EBC têm um lado comum BC. Além disso, < BCD = <BEC. Portanto, triângulos DBC e EBC são semelhantes. Temos $\frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{BE}}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{\overline{BC}}}$, *ou*

$$\frac{a}{(c+d)} = \frac{(c-b)}{a}$$ *e finalmente* $a^2 = c^2 - b^2$, $a^2 + b^2 = c^2$.

16. Demonstração de Jack Oliver

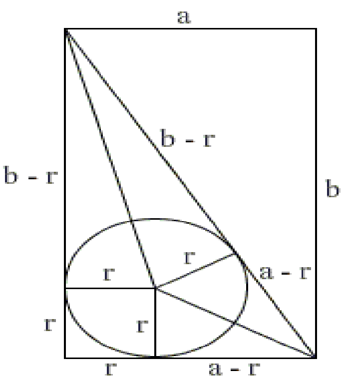


Figura 18

Área de um triângulo é, obviamente, rp, onde r é o raio e p = $\frac{a+b+c}{2}$ *o semi-perímetro do triângulo. A partir do diagrama, a hipotenusa c = (a - r) + (b - r), ou r = p - c. A área do triângulo é então calculada de duas formas:*

p (p - c) = $\frac{a.b}{2}$*, o qual é equivalente a (a + b + c) (a + b - c) = 2ab, ou (a + b)* ^{2} *- c* ^{2} *= 2ab.*

E, finalmente:

$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$

A prova disso é devido a Jack Oliver, e foi publicado originalmente na Gazeta de Matemática 81 (Março de 1997), p 117-118

17. Demonstração

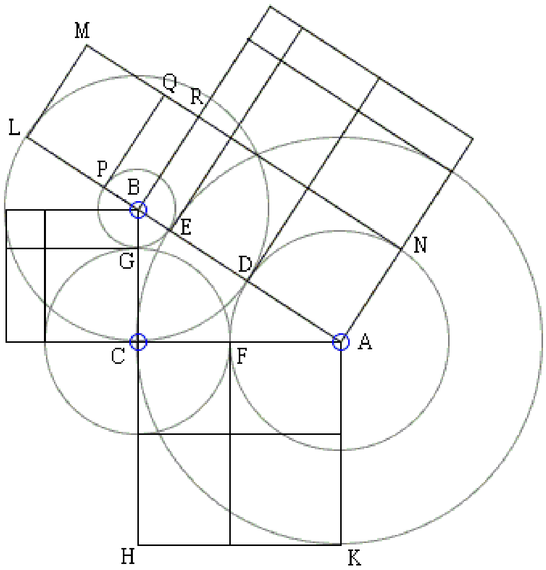


Figura 19

Seja D e E Ser pontos sobre a hipotenusa AB tal que BD = BC e AE = AC. Vamos AD = x, y = DE, BE = z. Em seguida, AC = x + y, BC = y + z, AB = x + y + z. O teorema de Pitágoras é, então, equivalente à identidade algébrica (y + z) p + (x + y) = p (x + y + z) ².

O que simplifica a y ² = 2xz.

Para verificar que o último é verdadeiro calcular a potência do ponto A em relação ao círculo B (C), ou seja, o círculo centrado em B e passando através de C, de duas maneiras: em primeiro lugar, como o quadrado da tangente de CA e, em seguida, como o produto AD · AL:

(x + y) p = x (x + 2 (y + z)),

que também simplifica para y ² = 2xz.

Esta é uma prova algébrica 101 da coleção Loomis.

18. Demonstração do estudante Sang Woo Ryoo

Esta prova foi publicada no Mathematical Monthly americana (v. 116, n 8, de 2009, outubro de 2009, p 687.)., Com uma nota do editor: Embora esta prova não parece ser amplamente conhecida, é uma redescoberta de uma prova de que apareceu pela primeira vez na imprensa em [Loomis, pp 26-27]. A prova foi apresentada pelo Sang Woo Ryoo, estudante, Carlisle Ensino Médio, Carlisle, PA.

Loomis leva o crédito para a prova, apesar de editor da Monthly traça a sua origem a um papel 1896 por BF Yanney e JA Calderhead (Mensal, v.3, p. 65-67.)

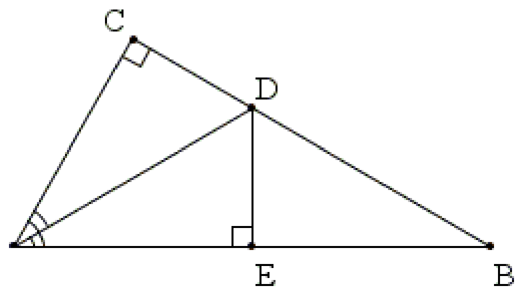


Figura 20

Desenhe AD, a bissetriz do ângulo A, e DE perpendicular a AB. Vamos, como sempre, AB = c, BC = a, e AC = b. Vamos CD = DE = x. Então BD = a - x e BE = c - b. Triângulos ABC e DBE são semelhantes, levando a x / (a - x) = b / c, ou x = ab / (b + c). Mas também $\frac{(c-b)}{x}=\frac{a}{b}$*, o que implica* $c-b=\frac{ax}{b}=\frac{a^2}{(b+c)}$*. O que leva a (c - b) (c + b) = a ² e a identidade de Pitágoras.*

19. Demonstração de John Arioni usando progressão geométrica

John Arioni veio com uma derivação do teorema de Pitágoras , que depende da convergência da série geométrica. Com o estabelecimento do fato de que o cálculo de uma variável pode ser (e , de fato, geralmente é), desenvolvido sem invocar o teorema de Pitágoras , torna-se claro que o uso da teoria dos limites em uma variável para obter o teorema de Pitágoras não leva a um círculo vicioso . Portanto , podemos assumir a convergência da série geométrica

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

como base para a prova do teorema .

Ponto de partida de João era a presença de triângulos retângulos semelhantes formados pela altura com relação ao ângulo reto :

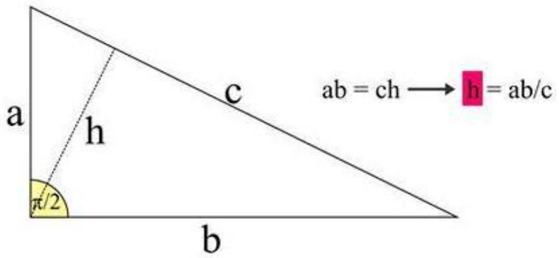
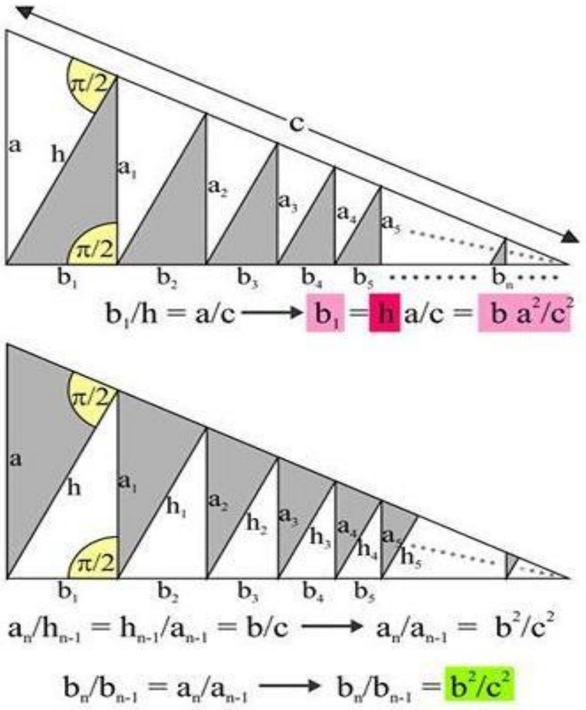


Figura 21

Os triângulos em cinza na figura abaixo são todos semelhantes com o triângulo retângulo acima , o que implica as proporções que seguem os diagramas :



Sem muita demora,

$$b = b_1 + b_2 + b_3 + ... = b_1 + \frac{b^2}{c^2}.b_1 + \frac{b^4}{c^4}.b_1 + ...$$

em que a configuração de $x = \frac{b^2}{c^2} < 1$ *e aplicando a fórmula da soma da série geométrica leva*

$$b = b_1 + b_2 + b_3 + ... = b_1.(1 + x + x^2 + ...)$$

$$b.\frac{a^2}{c^2}.\frac{1}{1 - b^2/c^2} = b.\frac{a^2}{c^2 - b^2}$$

a partir do qual $\frac{a^2}{c^2 - b^2} = 1$.

20. Demonstração de Van Lamoen utilizando o teorema de Bottema

No entanto, o teorema não é realmente necessário para realizar a prova.

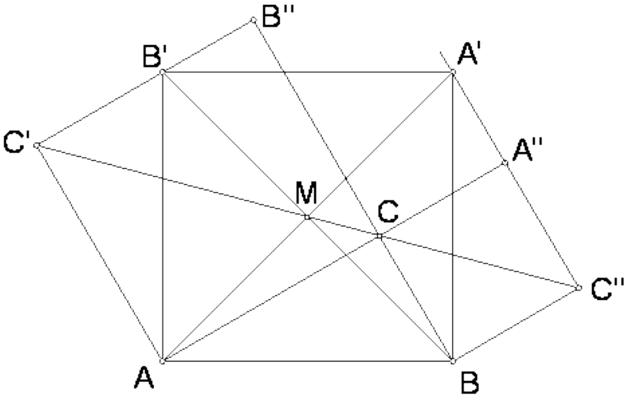


Figura 22

Na figura, M representa o centro do quadrado ABA'B '. Triângulo AB'C 'é uma rotação do triângulo ABC. Assim, vemos que B 'fica na C'B''. Da mesma forma, A 'encontra-se em A'' C''. Ambos AA'' e'' BB igual a + b. Assim, a distância a partir de M para A'''' C, bem como a B'C 'é igual a $\frac{(a+b)}{2}$. *Isto dá*

Área (AMB'C ') = Área (MAC) + Área (MB'C')

$$\frac{(a+b)}{2}.\frac{b}{2}+\frac{(a+b)}{2}.\frac{a}{2}=$$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{a.b}{2}+\frac{b^2}{4}.$$

Mas também:

Área (AMB'C ') = Área (AMB') + Área (AB'C ')

$$=\frac{c^2}{4}+\frac{a.b}{2}.$$

Isso gera um $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}\to a+b^2=c^2$ *e o teorema de Pitágoras*

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a apresentação de uma parte histórica, demonstrações e analise de 11 livros didáticos de Matemática, pode-se concluir que o teorema de Pitágoras possui um encanto praticamente inexplicável. Este teorema e o mais demonstrado de toda a Matemática, sendo essas demonstrações de todos os tipos e características. Apesar disso, o teorema tem um enunciado simples que se traduz em uma identidade pequena e direta.

O desenvolvimento da história em torno do triângulo retângulo, dos ternos pitagóricos e do teorema de Pitágoras e cheia de incertezas e lendas. Muitos documentos históricos dão conta do conhecimento da regra e da aplicação e benefícios que ela trazia, mas em momento algum a sua demonstração e apresentada. Da mesma forma, não existe nenhum documento que comprove a demonstração por parte de Pitágoras ou da escola pitagórica, porem este credito e dado a Pitágoras e seus discípulos desde aquele tempo. A própria história carregou este fato até os dias de hoje, assim como todas as lendas que os cercam.

Teorema e história tão fascinante merecem atenção especial dos livros didáticos de Matemática, que apresentam a parte histórica de maneira muito breve e despretensiosa. A apresentação da parte histórica deve ter a intenção de motivar o leitor a se interessar pelo teorema de Pitágoras, buscando mais fontes e sendo instigado a dissecar o tema (mesmo que esta tarefa seja difícil). Assim, o aluno teria a real dimensão da importância deste teorema para a história da Matemática e para o desenvolvimento da Geometria que temos nos dias de hoje. Os livros didáticos analisados, principalmente os de ensino médio, tratam o assunto com superficialidade. Assim, perde-se a oportunidade de acrescentar conhecimento, motivar e mostrar um lado mais real no estudo da Matemática, para estes alunos que estão no final do ensino fundamental e no início do ensino médio. O desenvolvimento da parte histórica de qualquer conteúdo matemático mostra para os alunos que a Matemática é uma ciência construída pelos homens ao longo de muito tempo, com muito esforço e estudo.

Isto, de certa forma, humaniza o conhecimento e traz o aluno para mais próximo da Matemática. Como o teorema de Pitágoras possui uma história bela em detalhes e curiosidades, é um desperdício não utiliza-la para motivar os alunos a gostarem um pouco mais de Matemática.

As demonstrações do teorema são itens que ficam de fora em alguns livros, que apresentam o teorema sem qualquer justificativa formal. Um livro, em especial, leva o aluno a crer que um exemplo é uma demonstração, quando apresenta sua primeira prova com o título de “outra demonstração”. A maioria dos livros apresenta apenas um tipo de demonstração, sem citar que existe uma enorme quantidade de demonstrações distintas para tal teorema. Ha também alguns livros de ensino médio que enunciam o teorema, apresentam um exemplo e partem para os exercícios, que são bem mais difíceis que o exemplo apresentado. Esta ocultação de provas e de demonstrações apresenta uma Matemática muito direta, desinteressante e irreal.

Matemática pode ser, brevemente apresentada como sendo, composta por conjecturas, histórias, demonstrações e aplicações. Por essa razão, recomendamos que nada disso pode ficar de fora dos livros didáticos e da sala de aula!

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

CREASE, Robert P. As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

CYRINO, Hélio Fernando Ferreira. Matemática & Gregos. São Paulo: Editora Átomo, 2006.

MARQUES, Sofia Cardoso. A descoberta do teorema de Pitágoras. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 42.

Ensino fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 127.

PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS MAIS. Ensino médio Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 2007, p. 123 e 124.

SINGH, Simon. O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 13ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BASTIAN, Irma Verri. O Teorema de Pitágoras, PUC. São Paulo: 2000.

BOULOS, Paulo e CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica. Um tratamento vetorial, 3ªed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

GERÔNIMO, João Roberto e FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria plana e espacial. Um estudo axiomático, 2ª ed. Maringá: EDUEM, 2010.

IMENES, Luiz Márcio. Descobrindo o Teorema de Pitágoras. Coleção Vivendo a Matemática, São Paulo: Scipione, 1988.

LOOMIS, Elisha Scott. The Pythagorean Proposition, classics in Mathematics Education Series, Second edition Washington: National council of teachers of Mathematics, 1940.