UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
POLO DE BARRA DO GARÇAS

PROFMAT

Introdução ao Ensino de Vetores: Uma Proposta para a Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio

Daniel Messias da Silva
danielmesiass@yahoo.com.br

Orientador: **Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos**

Trabalho financiado pela Capes

24 de abril de 2015

Barra do Garças - MT

Introdução ao Ensino de Vetores:
Uma Proposta para a Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por **Daniel Messias da Silva** e aprovada pela banca examinadora.

Barra do Garças - MT, 24 de abril de 2015.

Prof. Dr. **Juan Elmer Villanueva Zevallos**
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto ICET - CUA - UFMT
Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos ICET - CUA - UFMT
Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo DMAT - UFES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586i Silva, Daniel Messias da.
Introdução ao Ensino de Vetores: Uma Proposta para a Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio / Daniel Messias da Silva. -- 2015
xiv, 94 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Geometria Analítica. 2. Matriz Curricular de Matemática. 3. Vetores. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MATO GROSSO PRÓ-REITORIA DE
ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - Cep: 78060900 -Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8713/8710 - Email : geraldo@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "Introdução ao Ensino de Vetores: uma proposta para a matriz curricular de matemática do ensino médio"

AUTOR : Daniel Messias da Silva

defendida e aprovada em 24/04/2015.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor Juan Elmer Villanueva Zevallos
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Adilson A. Berlatto

Examinador Externo Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Instituição : Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

BARRA DO GARÇAS ,24/04/2015.

Dedico este trabalho a minha família,
pela fé em mim depositada.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Ao orientador Professor Juan Elmer Villanueva Zevallos, pela paciência e apoio.

Aos professores do PROFMAT do Polo de Barra de Garças, pela dedicação nas aulas ministradas.

Aos professores da banca examinadora pelas contribuições para esta dissertação.

A todos os professores e tutores do PROFMAT pelo comprometimento visto no curso.

A minha esposa, pelo apoio e compreensão diante das situações críticas apresentadas e pelo seu amor.

Aos meus filhos, Tales e Ravi, pelas perdas dos carinhos quando seu pai se ausentava.

Aos meus pais, pelo apoio dado nesta caminhada.

A todos os meus amigos que me ajudaram neste percurso.

Aos colegas de curso, pela amizade construída e pelas noites de estudos acordados.

Por fim, a todos aqueles que fizeram parte deste percurso vitorioso que percorri, expresso meu MUITO OBRIGADO.

Resumo

Nesta dissertação, apresenta-se uma teoria formal de Vetores no Plano. Além disso, propões a inserção de vetores na Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio, elaborando um conteúdo e uma proposta metodológica a ser aplicada na primeira série, desta modalidade de ensino; com o qual pretende contribuir com a interdisciplinaridade junto à disciplina de Física.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio, Vetores.

Abstract

In this essay, it is showed a formal theory Vectors in the Plane. Furthermore, it also proposes the inclusion of vectors in the High School Math Curriculum, developing a content and a methodology to be applied in the first series of this type of education; which it intend to contribute to interdisciplinarity by the discipline of Physics.

Key-words: Analytic Geometry, High School Math Curriculum, Vectors.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A história da matemática, mostra que ela é fruto do trabalho entre várias gerações de matemáticos e, ainda continua sendo um processo em constante construção. O conceito de *vetor* não foge a este princípio, surgindo dentro da Mecânica com os trabalhos do holandês Simon Stevin, em sua publicação *Estática e Hidrostática* [22, pág. 64], onde resultou a propriedade que conhecemos hoje como *Regra do Paralelogramo*, relacionada à soma de vetores.

Na obra *Ensaio Sobre a Representação da Direção*, de Gaspar Wessel, publicada em 1797 [22, pág. 64], os vetores aparecem como linhas dirigidas e, sua sistematização, só ocorre no século XIX por Wilham Hamilton, com seus trabalhos da *Teoria Vetorial*; sendo contemplados também por Hermann Grassmann e Josiah Gibbs [12, pág. 578].

Este trabalho tem como objetivo inserir o ensino de vetores na disciplina de matemática na Educação Básica, onde se busca apresentar uma nova proposta de conteúdos para esta disciplina no Ensino Médio. Com utilização direta em sala de aula, poderá ser utilizada pelos professores em seus planejamentos pedagógicos, buscando auxiliá-los no seu trabalho escolar.

Sendo dirigida, principalmente, para os professores que atuam em tal modalidade de ensino, tem como objetivo apresentar uma sugestão curricular para o tema vetores, que é visto, até então pelos alunos, como exclusivamente na disciplina de Física, o que reforça cada vez mais o distanciamento entre as "matérias-irmãs" da área de Ciências da Natureza e Matemática, contrariando os preceitos de "interdisciplinaridade" e/ou "transdisciplinaridade" defendidos pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN* [2] e pelas *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica* [4].

Embora já na primeira série do Ensino Médio o aluno tenha tido contato com o conceito de vetor na disciplina de Física, ele não construiu ferramentas para relacionar este conceito com a Geometria Analítica, que é vista no último ano da Educação Básica, ficando todas as demonstrações tratadas somente de modo cartesiano, gastando-se demasiado tempo com lousas cheias de operações algébricas e enfadonhas. Do ponto de vista vetorial, as demonstrações podem ficar mais simples e, a transição natural da Geometria Plana para a Espacial, poderia ser facilitada, pois muitos tópicos da Geometria Analítica seriam contextualizados, deixando de ser transferidos para os alunos como fórmulas mágicas e prontas. Desta forma, diminui-se a aprendizagem receptiva e mecânica, evoluindo para uma aprendizagem significativa com constante construção do conhecimento.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos, sendo os três primeiros relativos ao estudo formal dos vetores no plano e aplicações e, no quarto capítulo apresenta-se uma proposta de inserção deste conteúdo no Ensino Médio.

No Capítulo 1, estudamos conceitos de *equipolência de segmentos orientados* e suas propriedades, que é a base para posteriormente darmos a definição de vetor e, apresentar sua representação no plano como um *par ordenado*.

No Capítulo 2, são estudadas inicialmente as operações de *adição de vetores* e de *multiplicação por escalar*. Logo em seguida é definido o *produto interno entre dois vetores* e apresenta-se suas propriedades, tendo sua aplicação, dedicada a verificação de ortogonalidade entre vetores.

No Capítulo 3, com o objetivo de fortalecer os tópicos estudados, é trabalhado algumas aplicações de vetores nos conteúdos de Geometria Analítica, através de exemplos de propriedades fundamentais e demonstrações de proposições, busca-se relacioná-lo aos temas da Geometria Plana.

No Capítulo 4, baseado nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* [6], propomos a criação de um novo descritor "D6a" dentro do Tema I: Espaço e Forma do *Plano de Desenvolvimento da Educação* (*Ensino Médio*) *- matrizes de referência, tópicos e descritores – PDE/SAEB 2011* [7].

Finalizamos este trabalho apresentando, no Apêndice A, uma proposta de conteúdos para a introdução ao estudos de vetores, que acreditamos, deveria ser trabalhada na disciplina de Matemática da primeira série do Ensino Médio.

Barra do Garças - MT, 24 de abril de 2015.

Capítulo 1

Vetores no Plano

Nesse capítulo, introduziremos coordenadas na reta, para representar pontos por meio de números reais. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos. Admitiremos conhecidos os axiomas e propriedades elementares da Geometria Euclidiana Plana Real, relativos aos seus elementos básicos: *pontos*, *retas* e *planos*. A partir desses elementos e dos axiomas de ordem, definiremos dois conceitos fundamentais: *segmento* e *distância* entre dois pontos.

Apresentaremos o conceito de *segmentos orientados* e *equipolência de segmentos orientados*, para posteriormente introduzirmos a definição de *vetor*.

O termo vetor provém do verbo latino *vehere* que significa transportar ou levar [22, pág. 65]. A palavra vetor é o particípio pretérito de vehere, significando transportado ou levado.

Do ponto de vista geométrico, dizemos que o vetor transporta o ponto A até o ponto B, sendo necessárias três informações: norma, direção e sentido. O matemático alemão Grassmann (1809 – 1877) interpretou está situação como uma translação do vetor $\vec{v}$, partindo do ponto inicial A até o ponto C [22, pág. 66]. Desta forma escreveu $B = A + \vec{v}$, resultando em $\vec{v} = B - A$. Assim o vetor $\vec{v}$ pode ser enxergado como uma diferença de dois pontos, sendo aceita sua representação cartesiana como *par ordenado*.

Como referências principais para elaboração deste capítulo, utilizou-se principalmente [13], [22] e [20].

1.1 Segmentos

Definição 1.1. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r.

(a) O *segmento de reta* AB (ou *segmento* AB) ou BA é o conjunto formado pelos pontos A e B e por todos os pontos da reta r que estão entre A e B (Figura 1.1).

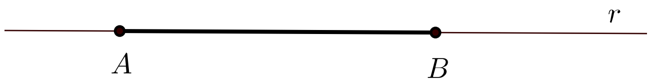


Figura 1.1: Segmento de reta AB

(b) A *semirreta* $\overrightarrow{AB}$, é o conjunto formado pelo segmento AB e por todos os pontos D, pertencentes a r, tais que B está entre A e D (Figura 1.2).

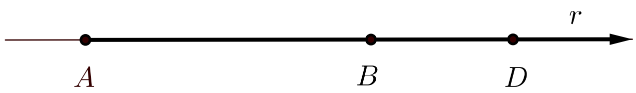


Figura 1.2: Semirreta $\overrightarrow{AB}$

(c) Se A é um ponto do plano, o conjunto unitário $\{A\}$ é chamado de *segmento nulo*, o qual denota-se por AA. Costuma-se dizer que $\{A\}$ é o ponto A.

Definição 1.2. Dado dois pontos A e B, quaisquer, chama-se *distância* entre os pontos A e B (ou *comprimento* do segmento AB), designado por $d(A,B)$ ou $|AB|$, um número real que satisfaz às seguintes propriedades:

(i) se $A \neq B$ então $d(A,B) > 0$;

(ii) se $A = B$ então $d(A,B) = 0$;

(iii) $d(A,B) = d(B,A)$;

(iv) se A, B e C são pontos sobre uma reta r então $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ se, e somente se, C está entre A e B (Figura 1.3).

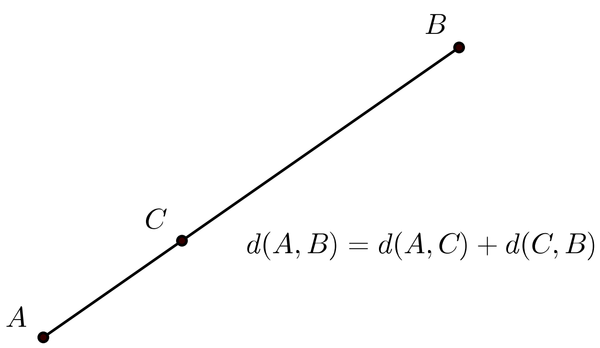


Figura 1.3: Distância $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$

Seja r uma reta, na qual está fixado um ponto O, denominado *origem* da reta r. Sejam agora A e B dois pontos de r tais que, A está à direita de O e B está à esquerda de O(Figura 1.4). A reta r poder ser posta em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da seguinte forma:

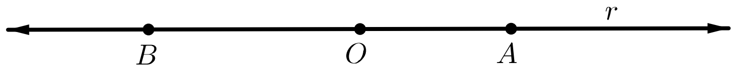


Figura 1.4: Reta r

(i) A origem O faz-se corresponder com o número real 0;

(ii) Cada ponto $X \neq O$, da semirreta $\overrightarrow{OA}$ corresponde-se ao número real positivo $x = d(O, X)$;

(iii) Cada ponto $Y \neq O$, da semirreta $\overrightarrow{OB}$ corresponde-se ao número real negativo $y = -d(O, Y)$.

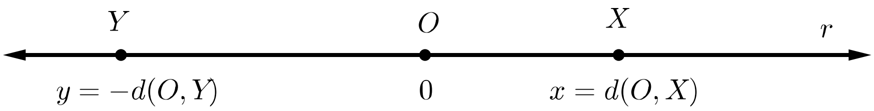


Figura 1.5: Coordenadas na reta r

Os números reais x e y, de acordo com a correspondência acima estabelecida (Figura 1.5), são denominados *a coordenada do ponto* X e *a coordenada do ponto* Y na reta r, respectivamente.

Proposição 1.3. *Sejam A e B pontos da reta r com coordenadas a e b, respectivamente. Então*

$$d(A, B) = |b - a|.$$

Demonstração. Se $A = B$, temos $a = b$, então $b - a = 0$. Suponhamos agora que $A \neq B$, estando A à esquerda de B, isto é, $a < b$. O caso em que A está à direita de B é verificado de maneira análoga. Temos três casos a considerar: A e B estão à esquerda da origem; A e B estão à direita da origem e; A e B estão de lados opostos em relação a origem.

CASO 1: A e B estão à esquerda da origem O, isto é, $a < b < 0$ (Figura 1.6).

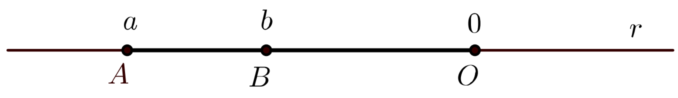


Figura 1.6: $a < b < 0$

Como B está entre A e O, temos

$$d(O, A) = d(A, B) + d(B, O),$$

onde $d(O, A) = -a$ e $d(B, O) = -b$. Logo,

$$-a = d(A, B) - b.$$

Portanto,

$$d(A, B) = b - a = |b - a|.$$

Caso 2: A e B estão à direita da origem, isto é, $0 < a < b$ (Figura 1.7).

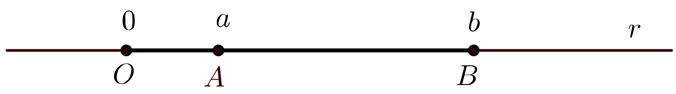


Figura 1.7: $0 < a < b$

Como A está entre O e B, temos

$$d(O, B) = d(O, A) + d(A, B),$$

onde $d(O, B) = b$ e $d(O, A) = a$. Logo,

$$b = a + d(A, B).$$

Portanto,

$$d(A, B) = b - a = |b - a|.$$

Caso 3: A e B estão de lados opostos em relação à origem, isto é, $a < 0 < b$ (Figura 1.8).

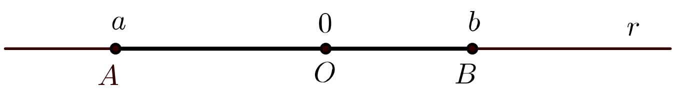


Figura 1.8: $a < 0 < b$

Como O está entre A e B, temos

$$d(A, B) = d(A, O) + d(O, B),$$

onde $d(A, O) = -a$ e $d(O, B) = b$. Logo,

$$d(A, B) = -a + b = b - a = |b - a|.$$

Portanto, em qualquer caso, temos $d(A, B) = |b - a|$ (Figura 1.9).

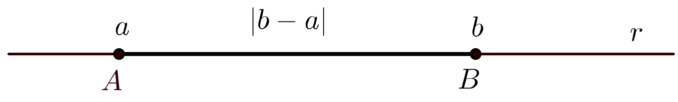


Figura 1.9: $d(A, B) = |b - a|$

□

Exemplo 1.4. Sejam A e B pontos da reta r com coordenadas -2 e 3 (Figura 1.10). A distância entre os pontos A e B é

$$d(A, B) = |(3) - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5.$$

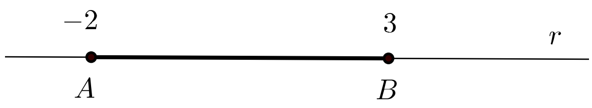


Figura 1.10: Distância entre os pontos A e B

Definição 1.5. Sejam A, B e M pontos da reta r tal que M está entre A e B. Diz-se que M é *ponto médio* do segmento AB, se $d(A, M) = d(M, B)$ (Figura 1.11).

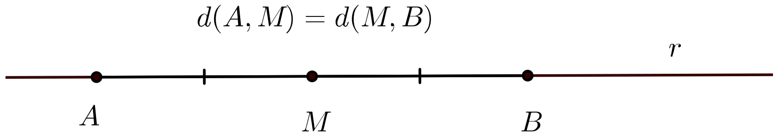


Figura 1.11: Ponto médio M do segmento AB

Observação 1.6. Sejam a e b as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. Se M é o ponto médio do segmento AB, com coordenada m, então

$$m = \frac{a+b}{2},$$

pois $m - a = b - m$.

Exemplo 1.7. Sejam A e B pontos da reta r, com coordenadas -7 e -1, respectivamente, temos que o ponto médio M, do segmento AB, tem coordenada

$$M = \frac{-7 + (-1)}{2} = \frac{-7 - 1}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

1.2 Coordenadas e distâncias num sistema de eixos ortogonais

Definição 1.8. Um *sistema de eixos ortogonais Oxy no plano π*, consiste de dois *eixos orientados* (retas orientadas) Ox e Oy, perpendiculares entre si, com o mesmo ponto de origem O e unidades de medida de igual comprimento (Figura 1.12). Neste caso, O é chamado *origem do plano π*. Ox chama-se *eixo das abscissas* e Oy chama-se de *eixo das ordenadas*.

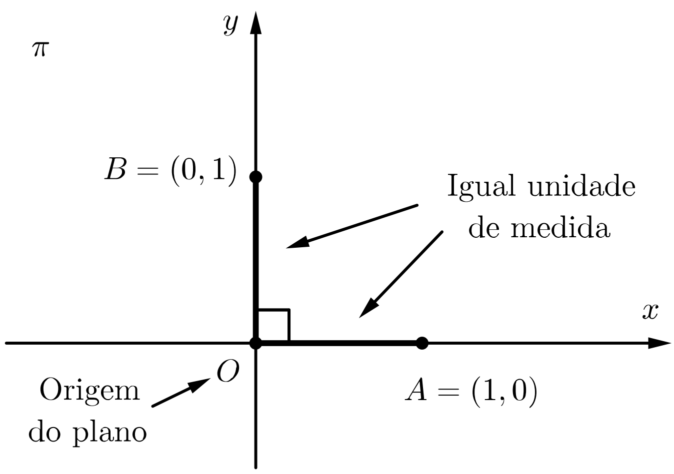


Figura 1.12: Sistema de eixos ortogonais Oxy no plano π

No sistema de eixos ortogonais Oxy no plano π, existe uma relação entre os pontos do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais; de tal forma que, cada par ordenado de números reais encontram-se em correspondência biunívoca com um ponto do plano.

O ponto de origem O, do sistema de eixos ortogonais Oxy, faz-se corresponder ao par ordenado $(0,0)$. Se o ponto P estiver sobre o eixo Ox, o par ordenado que o corresponde é $(x,0)$, onde x é chamada a *coordenada de* P *no eixo* Ox. Se o ponto P estiver sobre o eixo Oy, o par ordenado que o corresponde é $(0,y)$, onde y é chamada a *coordenada de* P *no eixo* Oy. Estes dois casos, vistos separadamente são análogos aos visto na Seção 1.1. Se o ponto P não estiver sobre nenhum dos eixos coordenados, traçando por P uma paralela ao eixo Ox e outro paralela ao eixo Oy, que intersetam Ox e Oy nas coordenadas x e y,respectivamente, faz-se corresponder o par ordenado de números reais(x,y) ao ponto P do plano π (Figura 1.13).

Se o ponto $P \in \pi$ corresponde ao par ordenado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, escreveremos $P = (a,b)$.

Os eixos orientados do sistema de eixos ortogonais são identificados como os conjuntos:

$$Ox = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad Oy = \{(0,y); y \in \mathbb{R}\}.$$

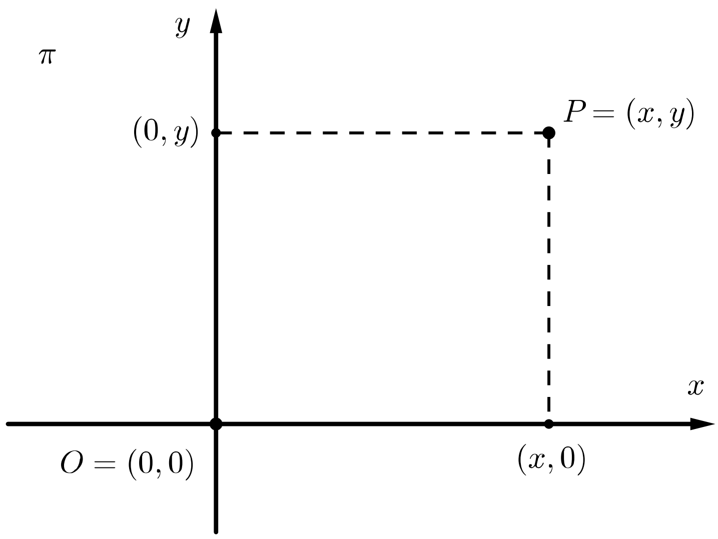


Figura 1.13: Coordenadas x e y do ponto P no plano π

Proposição 1.9. *Dados os ponto* A *e* B *com coordenadas* (x,y) *e* (x',y'), *no sistema de eixos ortogonais* Oxy, *respectivamente.* A distância *entre os pontos* A *e* B *é*

$$d(A,B) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

Demonstração. Seja C o ponto de interseção entre a reta que contém o ponto A, paralela ao eixo Oy, e a reta que contém o ponto B, paralela ao eixo Ox (Figura 1.14).

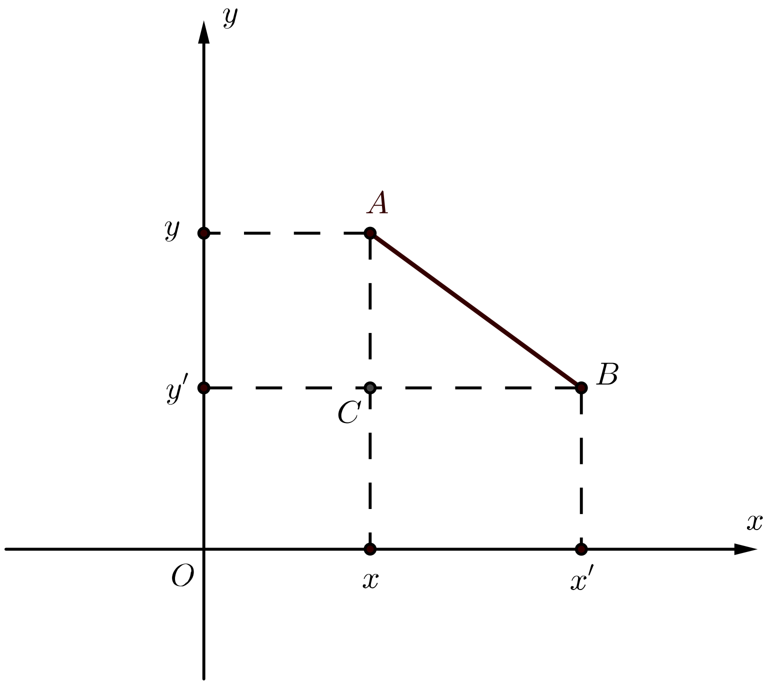


Figura 1.14: $d(A, B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

Utilizando o Teorema de Pitágoras tem-se

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

ou equivalentemente

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}.$$

Logo,

$$d(AB) = \sqrt{d(BC)^2 + d(AC)^2} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

$\square$

Exemplo 1.10. Sejam $A = (-2, 3)$ e $B = (1, 5)$ dois pontos no sistema de eixos ortogonais Oxy. A distância ente A e B é

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Proposição 1.11. *Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ dois pontos no sistema de eixos ortogonais Oxy. Se M é o ponto médio do segmento AB, suas coordenadas são expressas por*

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

Demonstração. Sejam m_1 e m_2 as coordenadas do ponto M.

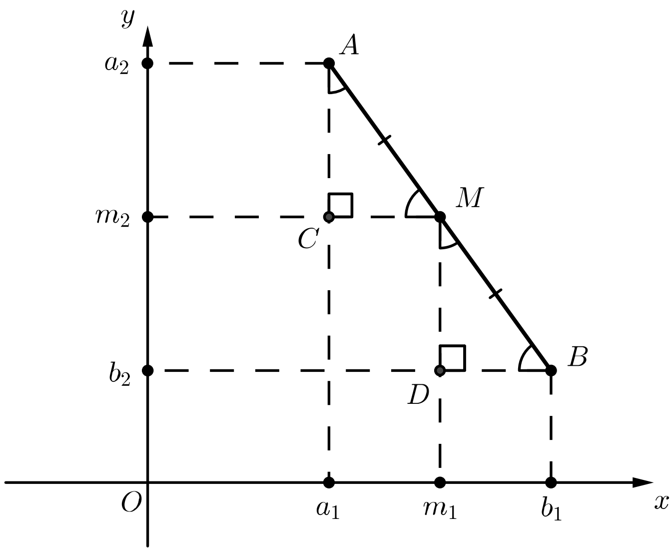


Figura 1.15: Ponto médio M do segmento AB

Na Figura 1.15, os triângulos ACM e MDB são congruentes, pelo caso ângulo–lado–ângulo. Como $d(C, M) = d(D, B)$, temos

$$\begin{aligned} |m_1 - a_1| = |b_1 - m_1| \quad &\Leftrightarrow \quad m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2m_1 = a_1 + b_1 \\ &\Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}. \end{aligned}$$

Como $d(M, D) = d(A, C)$, temos

$$\begin{aligned} |m_2 - b_2| = |a_2 - m_2| \quad &\Leftrightarrow \quad m_2 - b_2 = a_2 - m_2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2m_2 = a_2 + b_2 \\ &\Leftrightarrow \quad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$. □

Exemplo 1.12. Sejam $A = (-2, 3)$ e $B = (1, 5)$ dois pontos no sistema de eixos ortogonais Oxy. O ponto médio do segmento AB tem coordenadas

$$M = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 4\right).$$

1.3 Segmentos orientados

Definição 1.13. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r com coordenadas a e b, respectivamente. Diz-se que o segmento AB é *orientado* (ou que o ponto B está *à direita* do ponto A ou que o ponto A está *à esquerda* do ponto B), denotado por AB (lê-se "*segmento orientado* AB"), se $a < b$. Também, o ponto A é considerado como sua *extremidade inicial* (ou *origem*) e o ponto B como sua *extremidade final* (ou *extremidade*). Nestas condições, dizemos também que o segmento AB possui *sentido de percurso* de A para B (Figura 1.16).

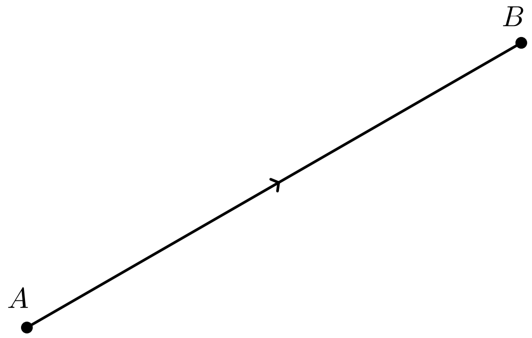


Figura 1.16: Segmento orientado AB

Segue da definição que os segmentos orientados AB e BA são diferentes. Neste caso, dizemos que o segmento orientado BA possui *sentido de percurso oposto* ao segmento orientado AB (Figura 1.17).

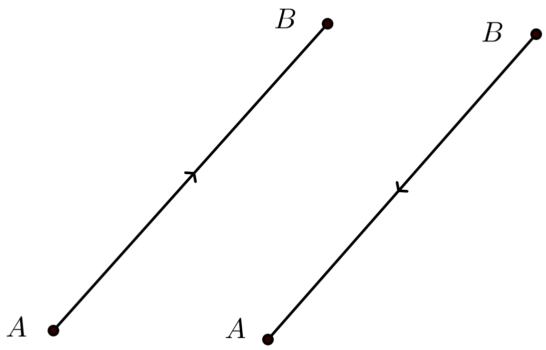


Figura 1.17: Segmentos orientados com sentido de percurso opostos

Observação 1.14. Dois segmentos colineares AB e CD têm o mesmo sentido de percurso quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contém (Figura 1.17).

Observação 1.15. Se AB e CD são segmentos paralelos e de comprimento igual, então AB e CD têm o mesmo sentido de percurso quando $ABDC$ é um paralelogramo (Figura 1.17).

Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD colineares ou paralelos possuem *sentido de percurso oposto* se os segmento orientados AB e DC possuem o mesmo *sentido de percurso* (Figura 1.17).

1.4 Segmentos orientados equipolentes

Definição 1.16. Dois segmentos orientados AB e CD, são chamados *equipolentes*, denotado por $AB \equiv CD$, se os segmentos AB e CD possuem o mesmo comprimento, são paralelos ou colineares e, possuem o mesmo sentido de percurso (Figura 1.18). Isto define uma relação no conjunto de todos os segmentos orientados do plano, chamada de relação de equipolência.

Se os segmentos orientados AB e CD não são equipolentes, escreveremos $AB \not\equiv CD$ (figuras 1.19 e 1.20).

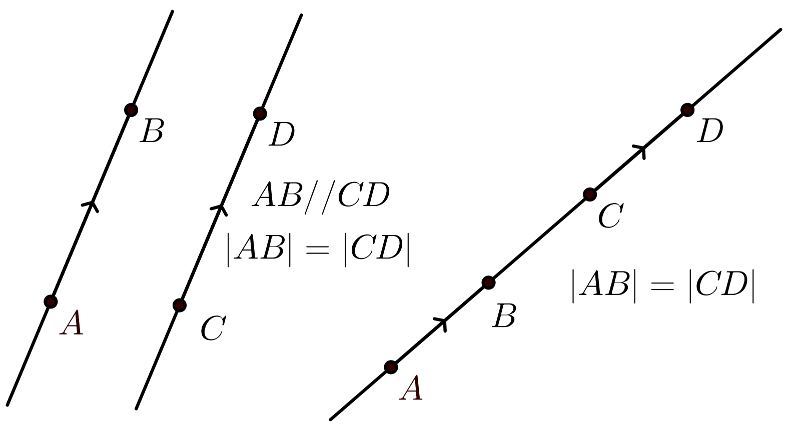


Figura 1.18: $AB \equiv CD$

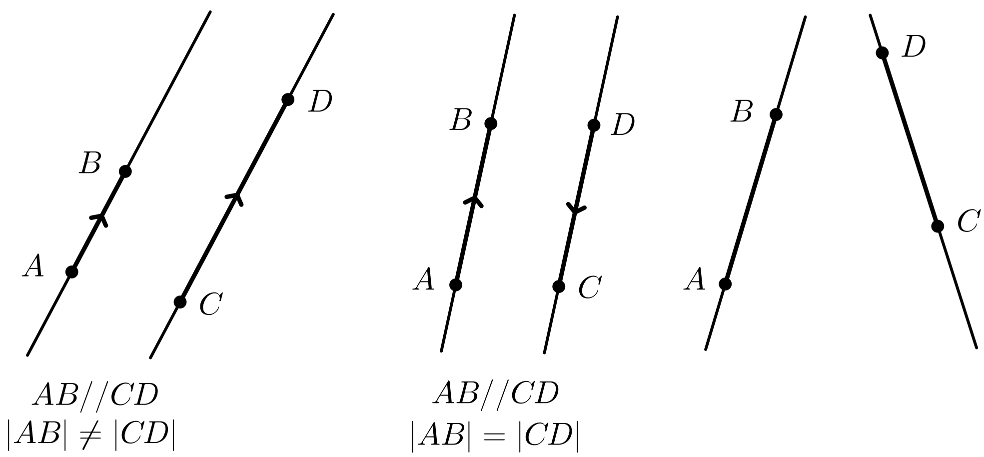


Figura 1.19: $AB \not\equiv CD$

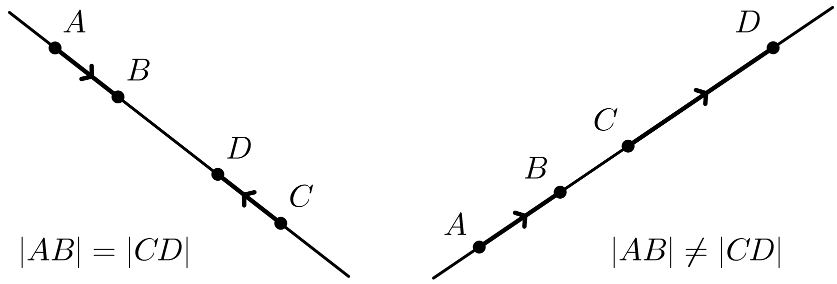


Figura 1.20: $AB \not\equiv CD$

Teorema 1.17. *Sejam AB e CD segmentos orientados. Então $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio de AD é o ponto médio de BC.*

Demonstração. Sejam a, b, c e d as coordenadas dos pontos A, B, C e D, respectivamente. Suponhamos inicialmente que $AB \equiv CD$. Temos dois casos a serem considerados: AB e CD são paralelos ou colineares.
Caso 1: AB é paralelo a CD. Se $AB \equiv CD$, os segmentos AB e CD têm o mesmo comprimento. Logo, $ABDC$ é um paralelogramo, como mostra a Figura 1.21. Portanto, suas diagonais se intersetam ao meio, isto é, o ponto médio de AD é o ponto médio de BC.

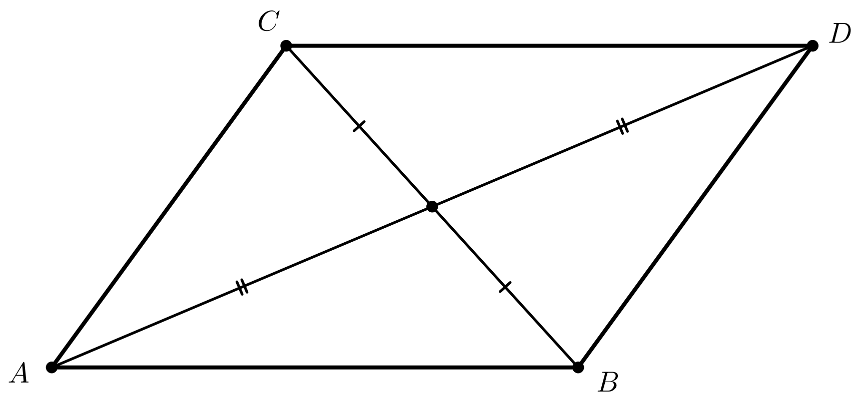


Figura 1.21: Paralelogramo $ABCD$ com $AB \equiv CD$ e $AC \equiv BD$

Caso 2: AB e CD são colineares (Figura 1.22). Se $AB \equiv CD$, segue que $|AB| = |CD|$, isto é, $b - a = d - c$, ou equivalentemente, $a + d = b + c$. Logo

$$\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2},$$

Portanto, o ponto médio de AD é o ponto médio de BC.

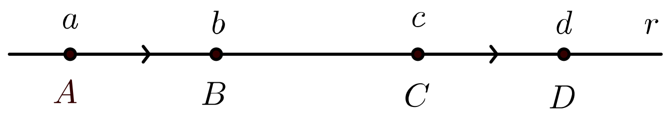


Figura 1.22: reta r com AB e CD colineares

Assim, em qualquer caso, temos provado que o ponto médio de AD é o ponto médio de BC.

Reciprocamente, suponhamos agora que o ponto médio de AD é o ponto médio de BC. Temos dois casos a serem considerados: AB e CD são paralelos ou colineares.
Caso 1': AB é paralelo a CD. Se o ponto médio de AD é o ponto médio de BC, o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo. Logo $|AB| = |BC|$ e, pela Observação 1.14, AB e CD possuem o mesmo sentido. Portanto, $AB \equiv CD$.
Caso 2': AB e CD são colineares. Se o ponto médio de AD é o ponto médio de BC, tem-se

$$\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Assim, $a + d = b + c$, ou equivalentemente, $b - a = d - c$. Como $b - a$ e $d - c$ são positivos temos $|AB| = |CD|$. Como $b - a$ e $d - c$ têm o mesmo sinal, segue que AB e CD têm o mesmo sentido. Portanto, $AB \equiv CD$.

Assim, em qualquer caso, temos provado que AB e CD são equipolentes. □

Observação 1.18. Os casos 1 e 1', da demonstração do Teorema 1.17, nos garante que se $AB \equiv CD$ se, e somente se, o quadrilátero de lados opostos AB e CD é um paralelogramo.

1.4.1 Propriedades da relação de equipolência

Proposição 1.19. *Sejam A, B pontos no plano. Sejam AB, CD e EF segmentos orientados quaisquer. A respeito da relação de equipolência tem-se*:

(1) $AB \equiv AB$ (*propriedade reflexiva*).

(2) *Se* $AB \equiv CD$ *então* $CD \equiv AB$ (*propriedade simétrica*).

(3) *Se* $AB \equiv CD$ *e* $CD \equiv EF$ *então* $AB \equiv EF$ (*propriedade transitiva*).

(4) $AB \equiv CD$ *se, e somente se,* $AC \equiv BD$ (*propriedade do paralelogramo*);

(5) *Para qualquer ponto C do plano, existe um único ponto D, pertencente ao mesmo plano, tal que* $AB \equiv CD$.

Demonstração.

(1) Sejam a e b as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. Como $\frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$, pelo Teorema 1.17, segue que $AB \equiv AB$.

(2) Sejam a, b, c e d as coordenadas dos pontos A, B, C e D, respectivamente. Como $AB \equiv CD$ têm-se $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$ ou equivalentemente, $\frac{c+b}{2} = \frac{d+a}{2}$. Logo, $CD \equiv AB$.

(3) Sejam a, b, c, d, e e f as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F, respectivamente. Como $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$ temos

$$\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c+f}{2} = \frac{d+e}{2}.$$

Somando as igualdades obtém-se

$$\frac{a+d+c+f}{2} = \frac{b+c+d+e}{2},$$

ou seja,

$$\frac{a+f}{2} = \frac{b+e}{2}.$$

Portanto, $AB \equiv EF$.

(4) Sejam a, b, c e d as coordenadas dos pontos A, B, C e D, respectivamente. Pelo Teorema 1.17, temos

$$AB \equiv CD \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+d}{2} = \frac{c+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad AC \equiv BD.$$

(5) Sejam C um ponto dado do plano e r a reta que contenha o ponto C e que seja paralela ou colinear a AB (Figura 1.23).

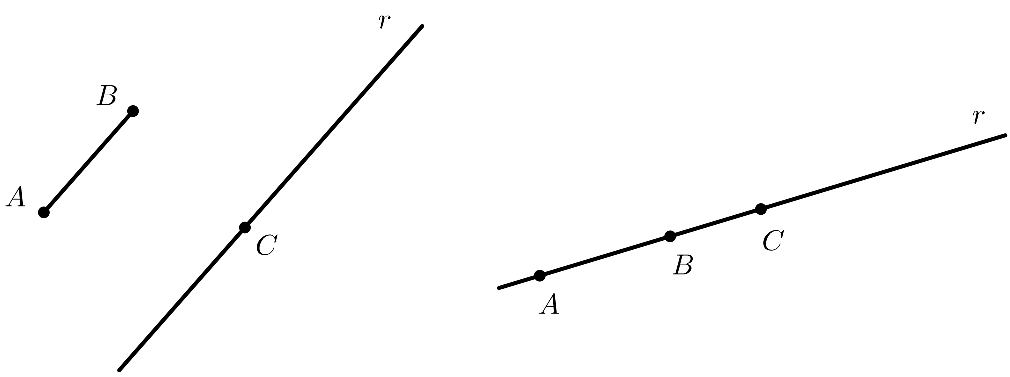


Figura 1.23: AB paralelo a r (à esquerda) e AB colinear a r (à direita)

Analisemos cada um dos dois casos.

CASO 1: r é paralela a AB. Seja ω a circunferência com centro C e raio $|AB| > 0$. A circunferência ω, assim definida, interseta r nos pontos D e D', como observa-se na Figura 1.24.

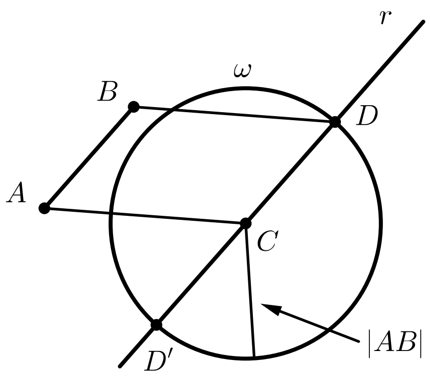


Figura 1.24: Circunferência ω com centro C e raio $|AB|$: AB paralelo a r

Logo, os segmentos AB, CD e CD' são paralelos. Como D e D' pertencem a ω, segue que $|CD| = |CD'|$. Como os segmentos orientados DC e CD' possuem o mesmo sentido de percurso, segue que apenas um dos seguintes quadriláteros $ABDC$ ou $ABD'C$ é um paralelogramo. Isto prova que apenas um dos segmentos orientados CD ou CD' é equipolente a AB.

CASO 2: r é colinear a AB. Seja ω a circunferência com centro C e raio $|AB| > 0$. A circunferência ω, assim definida, interseta r nos pontos D e D', como observa-se na Figura 1.25.

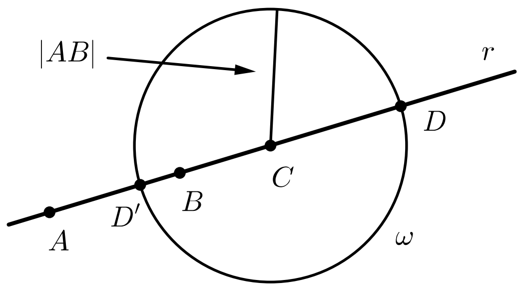


Figura 1.25: Circunferência ω com centro C e raio $|AB|$: AB colinear a r

Logo, os segmentos AB, CD e CD' são colineares. Como D e D' pertencem a ω, segue que $|CD| = |CD'|$. Como os segmentos orientados DC e CD' possuem o mesmo sentido de percurso, segue que CD e CD' possuem sentido de percurso opostos. Sendo A, B, D e C' colineares, concluímos que apenas um dos vetores

CD e CD' possui o mesmo sentido de percurso que AB. Isto prova que apenas um dos segmentos orientados CD ou CD' é equipolente a AB.

Assim, em qualquer caso, existe um único ponto D_C tal que $AB \equiv CD_C$.

□

1.5 Vetores

Definição 1.20. Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todos os segmentos orientados do plano munido de todos os segmentos nulos. Em $\mathcal{V}$, define-se uma relação $\sim$ entre dois elementos como sendo estes equipolentes ou se estes são segmentos nulos. Mais precisamente, se α e β pertencem a $\mathcal{V}$ então

$$\alpha \sim \beta \text{ se, e somente se, } \alpha \text{ e } \beta \text{ são equipolentes ou } \alpha \text{ e } \beta \text{ são segmentos nulos.}$$

Observação 1.21. A relação $\sim$ definida em $\mathcal{V}$ é uma relação de equivalência. Com efeito, seja $\alpha \in \mathcal{V}$. Se α for um segmento nulo é claro que $\alpha \sim \alpha$. Se α for um segmento orientado, pelo item (1) da Proposição 1.19, $\alpha \equiv \alpha$ e, assim, $\alpha \sim \alpha$. Isto mostra que a relação $\sim$ é reflexiva. Provemos agora a simetria. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ tais que $\alpha \sim \beta$. Se α e β são segmentos nulos é claro que $\beta \sim \alpha$. Suponhamos então que α ou β não sejam segmentos nulos. Como $\alpha \sim \beta$, segue que $\alpha \equiv \beta$. Então, novamente, pelo item (2) da Proposição 1.19, $\beta \equiv \alpha$ e, assim, $\beta \sim \alpha$; provando que a relação $\sim$ é simétrica. Provaremos agora a transitividade. Sejam α, β e $\gamma \in \mathcal{V}$ tais que $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$. Se α e γ são segmentos nulos é claro que $\alpha \sim \gamma$. Suponhamos então que α ou γ não sejam segmentos nulos, desta forma, temos dois casos a considerar:
Caso 1: α não é segmento nulo. Como $\alpha \sim \beta$, segue que $\alpha \equiv \beta$. Em particular, β não é segmento nulo. No entanto, $\beta \sim \gamma$ e, assim, $\beta \equiv \gamma$. Logo, pelo item (3) da Proposição 1.19, $\alpha \equiv \gamma$ e, portanto, $\alpha \sim \gamma$.
Caso 2: γ não é segmento nulo. Como $\beta \sim \gamma$, segue que $\beta \equiv \gamma$. Em particular, β não é segmento nulo. No entanto, $\alpha \sim \beta$ e, assim, $\alpha \equiv \beta$. Logo, pelo item (3) da Proposição 1.19, $\alpha \equiv \gamma$ e, portanto, $\alpha \sim \gamma$.
Isto prova que a relação $\sim$ é transitiva.

Dado um segmento orientado AB (Figura 1.26), a classe de AB módulo a relação de equivalência $\sim$ é o conjunto

$$[AB] = \{CD : CD \text{ é um segmento orientado e } CD \equiv AB\}.$$

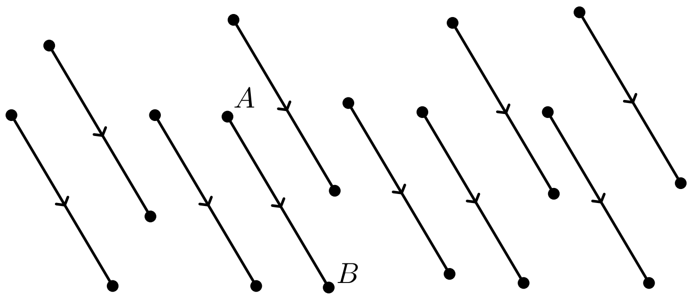


Figura 1.26: Classe de equivalência de AB

Dado um ponto A do plano (Figura 1.27), a classe do segmento nulo AA módulo a relação de equivalência $\sim$ é o conjunto

$$[AA] = \{BB : \ B \text{ é um ponto do plano}\}.$$

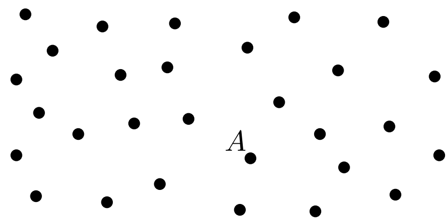


Figura 1.27: Classe de equivalência de AA

A classe de $[AB]$ denomina-se *classe de equivalência de* AB.

Definição 1.22. Sejam A e B dois pontos do plano. A classe de equivalência de AB, denomina-se *vetor* AB e é denotado por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Assim, $\overrightarrow{AB} = [AB]$. Em particular, se $A \neq B$, todo segmento equipolente a AB é um representante do vetor $\vec{v}$ (Figura 1.28).

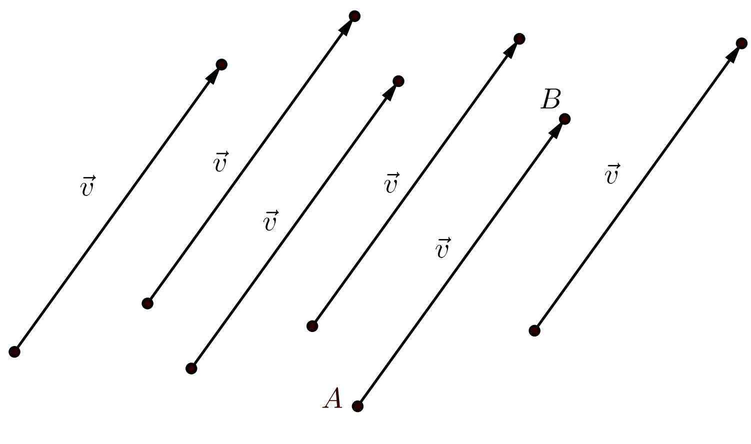


Figura 1.28: Representantes do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Se $A = B$, todo segmento nulo é um representante do vetor $\vec{v}$. A esta classe, denomina-se *vetor nulo* e é denotado por $\overrightarrow{0}$. Assim, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$, para qualquer ponto B do plano.

Proposição 1.23. *Seja A um ponto no plano. Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, existe um único ponto D no plano tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.*

Demonstração. Se $B = C$ tem-se que $D = A$. Se $B \neq C$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, então o segmento orientado BC é um representante do vetor $\vec{v}$. Pelo item (5) da Proposição 1.19, existe um único ponto D, do plano, tal que $AD \equiv BC$ (Figura 1.29). Logo, $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

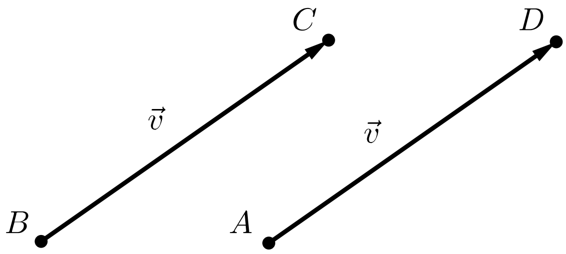


Figura 1.29: $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\square$

Observação 1.24. Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, pela Proposição 1.23, existe um único ponto P no plano tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano.

1.5.1 Características de um vetor

Norma de um vetor

Se CD é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, temos que $d(C, D) = d(A, B)$. Com isto, podemos definir o conceito de *norma* de um vetor.

Definição 1.25. A *norma* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, denotado por $\|\vec{v}\|$, é a distância entre A e B (Figura 1.30). Isto é,

$$\|\vec{v}\| = d(A, B).$$

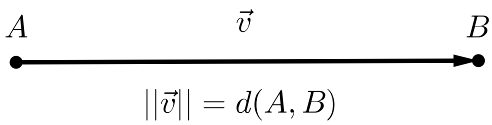


Figura 1.30: Norma do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Observação 1.26. O vetor nulo tem norma 0.

Direção de um vetor

Se CD é um representante do vetor não nulo $\overrightarrow{AB}$, temos que os segmentos CD e AB são paralelos ou colineares. Com isto, podemos definir o conceito de *direção* de um vetor.

Definição 1.27. Se $A \neq B$, a *direção* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o coeficiente angular da reta que contém o segmento AB.

Sentido de um vetor

Se CD é um representante do vetor não nulo $\overrightarrow{AB}$, temos que os segmentos CD e AB possuem o mesmo sentido de percurso. Com isto, podemos definir o conceito de *sentido* de um vetor.

Definição 1.28. Seja $A \neq B$, o *sentido* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o sentido de percurso do segmento AB.

Definição 1.29. Seja $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dois vetores não nulos com a mesma direção. Dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem *sentidos opostos* (ou que $\overrightarrow{CD}$ tem *sentido oposto* de $\overrightarrow{AB}$) se $\overrightarrow{CD}$ possui mesmo sentido que $\overrightarrow{BA}$.

1.5.2 Alguns vetores especiais

Oposto de um vetor

Definição 1.30. O *oposto* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, denotado por $-\vec{v}$, é o vetor $\overrightarrow{BA}$.

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ possui a mesma norma que o vetor $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Além disso, se $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ então $-\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$. Neste caso, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ possuem a mesma direção e sentidos opostos (Figura 1.31).

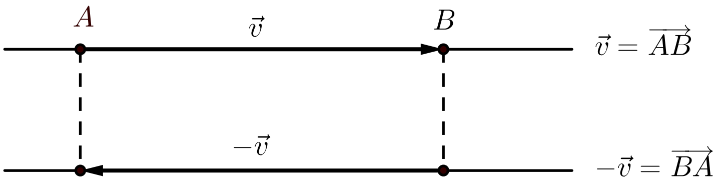


Figura 1.31: Oposto do vetor $\vec{v}$

Vetor unitário

Definição 1.31. Diz-se que um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $\|\vec{v}\| = 1$.

1.5.3 Ângulo entre dois vetores

Pela Proposição 1.23, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, no plano, possuem representantes que têm o mesmo ponto de origem. Com isso, podemos definir o conceito de *ângulo* entre dois vetores.

Definição 1.32. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos do plano. Define-se o *ângulo* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o menor ângulo formado entre os segmentos orientados AB e AC, onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (Figura 1.32).

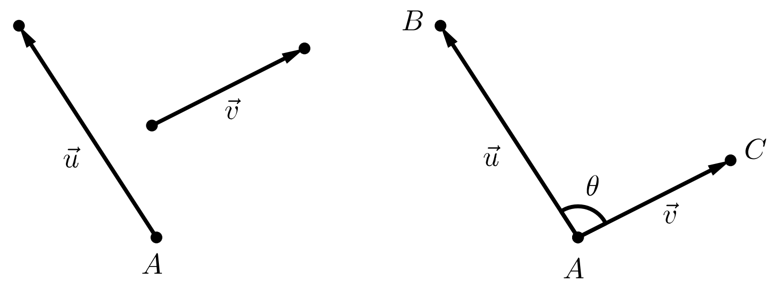


Figura 1.32: Ângulo entre dois vetores

A *medida* do ângulo entre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ é a medida do ângulo formado entre os segmentos orientados AB e AC.

Se θ é a medida do ângulo entre dois vetores, tem-se que $0 \leq \theta \leq \pi$ (Figura 1.33).

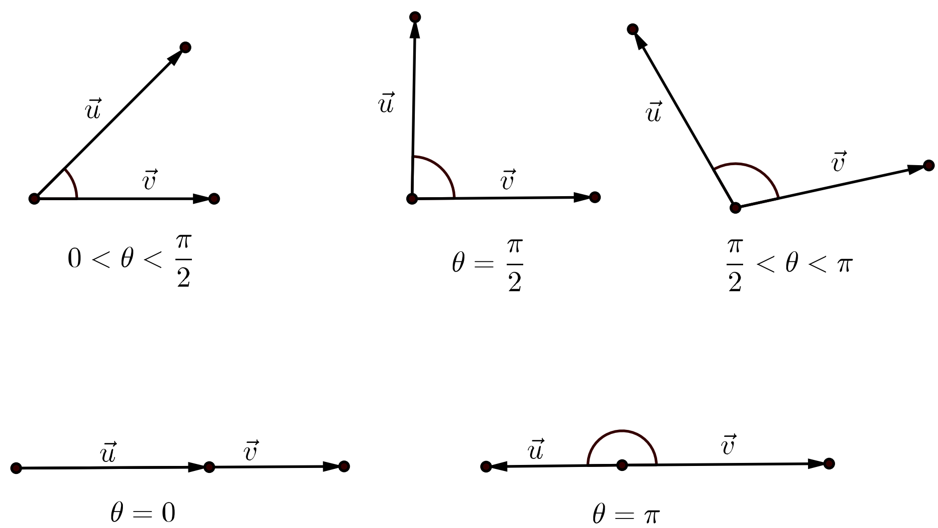


Figura 1.33: Ângulo entre dois vetores

1.5.4 Vetores como pares ordenados

Proposição 1.33. *Sejam* $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ *e* $D = (d_1, d_2)$ *pontos no sistema de eixos ortogonais* Oxy*. Então*

$$AB \equiv CD \quad \textit{se, e somente se,} \quad b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \ \textit{ e } \ b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Demonstração. Como $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, pelo Teorema 1.17, temos

$$AB \equiv CD \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right).$$

Isto é,

$$(a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2).$$

Logo,

$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \ \text{ e } \ a_2 + d_2 = b_2 + c_2$$

ou equivalentemente

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \ \text{ e } \ b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

□

Pela Proposição 1.33, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ são pontos tais que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tem-se

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

Com isto, podemos definir o conceito de *coordenadas de um vetor.*

Definição 1.34. Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos num sistema de eixos ortogonais Oxy, os números reais $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são *as coordenadas do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e, escrevemos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (Figura 1.34).

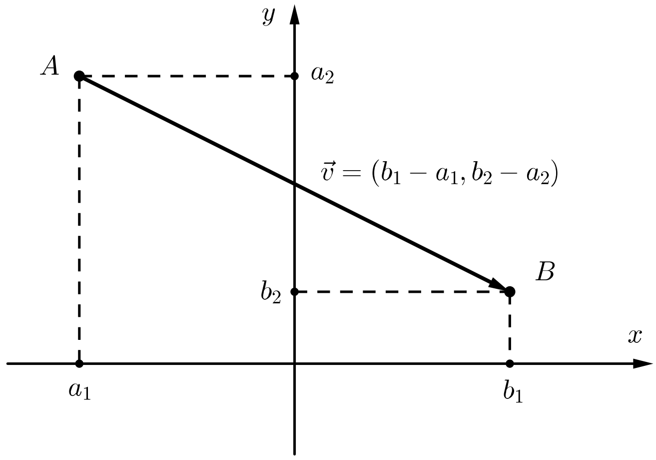


Figura 1.34: Coordenadas do vetor $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Em particular, $\overrightarrow{0} = (0, 0)$.

Exemplo 1.35. Sejam $A = (-3, 2)$ e $B = (4, 1)$ (Figura 1.35), as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ são

$$\vec{v} = (4 - (-3), 1 - 2) = (7, -1)$$

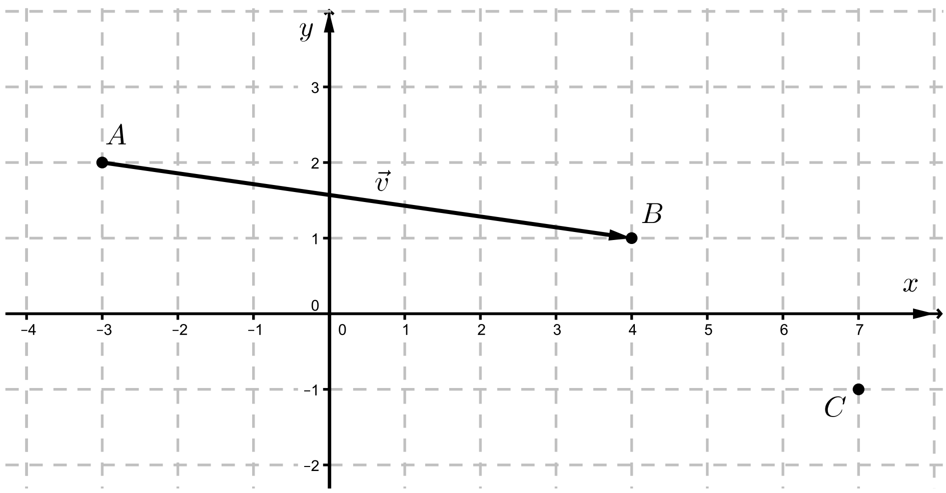


Figura 1.35: $\vec{v} = (7, -1)$

Exemplo 1.36. Sejam $A = (-3, 2)$, $B = (4, 1)$ e $C = (2, 5)$ três pontos no sistema de eixos ortogonais Oxy. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, encontremos as coordenadas do ponto D, tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. De fato, seja $D = (x, y)$. Como

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4 - (-3), 1 - 2) = (7, -1)$$

e

$$\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (x - 2, y - 5),$$

temos

$$(x-2, y-5) = (7, -1).$$

Logo, $x = 9$ e $y = 4$. Portanto, $D = (9, 4)$ (Figura 1.36).

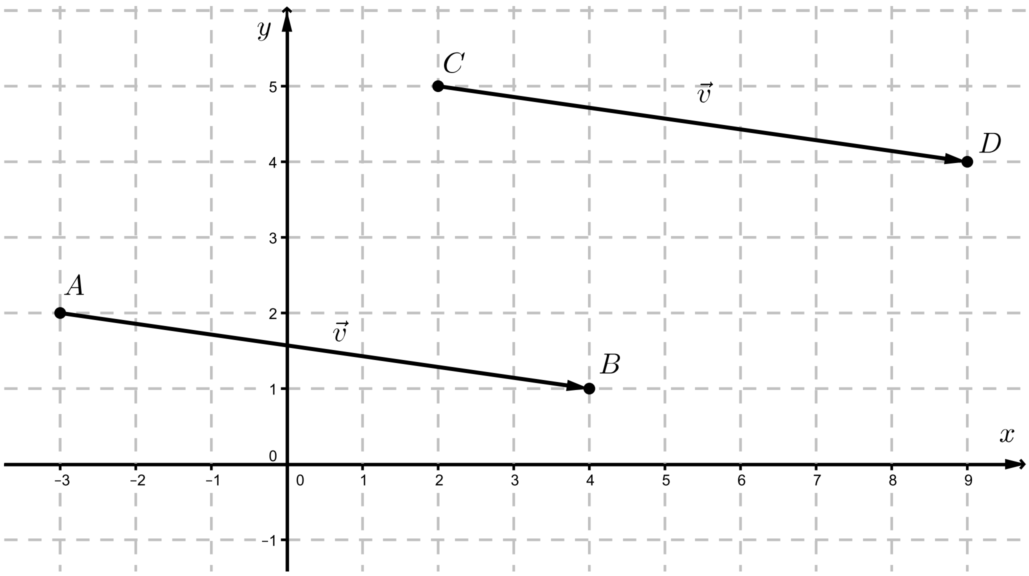


Figura 1.36: $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$

Proposição 1.37. *Seja Oxy um sistema de eixo ortogonais. Para todo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, se P é o único ponto do plano tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano, então as coordenadas de P coincidem com as coordenadas de $\vec{v}$.*

Demonstração. Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ então

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Seja $P = (x, y)$ o ponto do plano tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, onde $O = (0, 0)$ (Figura 1.37). Então

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, y - 0)$$

e, portanto,

$$x = b_1 - a_1 \text{ e } y = b_2 - a_2.$$

Isto mostra, que as coordenadas de P coincidem com as coordenadas de $\vec{v}$.

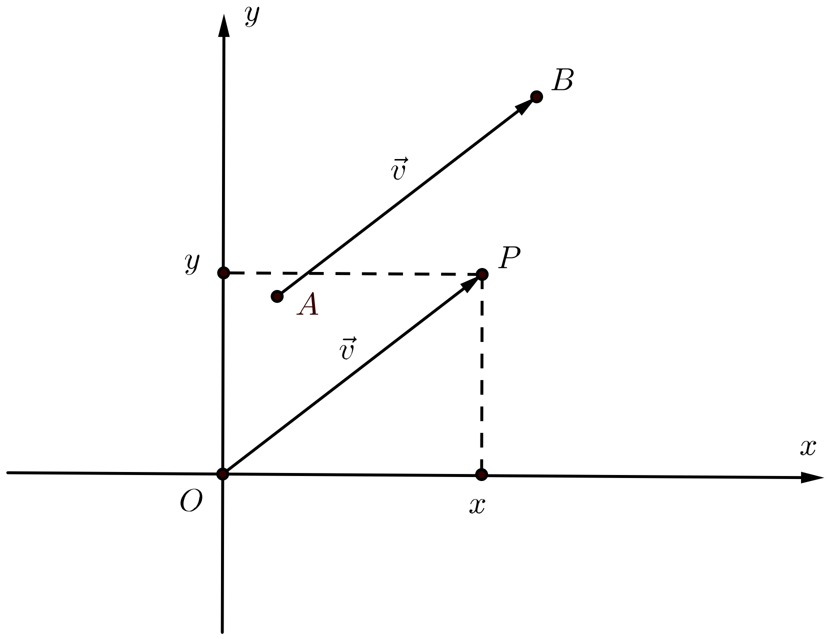


Figura 1.37: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$

$\square$

Observação 1.38. Seja $\vec{v}$ um vetor. Se $P = (x, y)$ é o ponto do plano tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano então $\vec{v} = (x, y)$. Em particular, como a distância de O a P é dada por $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, tem-se

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Também, sendo $-\vec{v} = \overrightarrow{PO}$, segue que $-\vec{v} = (-x, -y)$ e

$$\|-\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 1.39. Pela Observação 1.38, a norma do vetor $\vec{v} = (7, -1)$ é

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Sejam A e B dois pontos representados no sistema de eixos ortogonais Oxy com $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Seja P um ponto do plano tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde $O = (0, 0)$ (Figura 1.37). Utilizando a notação de Grassmann, apresentada no início deste capítulo, temos

$$P = O + \vec{v}, \quad \text{ou seja,} \quad \vec{v} = P - O.$$

Assim,

$$\vec{v} = (x, y) - (0, 0) = (x, y).$$

Capítulo 2

Operações com Vetores no Plano

Neste capítulo, serão definidas as operações de *adição* e *multiplicação de escalares por vetores*, sendo apresentado, também, o conceito de *combinação linear*. Logo, em seguida, definiremos o *produto interno* entre dois vetores no plano, que está diretamente ligado ao comprimento das suas projeções.

Como referências principais para elaboração deste capítulo, utilizou-se principalmente [13], [22] e [20].

2.1 Adição de vetores

Proposição 2.1. *Seja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$. Se C é um ponto qualquer do plano e R o único ponto tal que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QR}$ então*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PR}.$$

Demonstração. Se $A = B$ temos que $P = Q$. Então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Se $B = C$ temos que $Q = R$. Então $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ tem-se que $AB \equiv PQ$ e $BC \equiv QR$. Logo, pelo item (4) da Proposição 1.19, temos que $AP \equiv BQ$ e $BQ \equiv CR$ e, pelo item (3) da mesma proposição, segue que $AP \equiv CR$. Novamente, pelo item (4) da Proposição 1.19, segue que $AC \equiv PR$ e, portanto, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PR}$. □

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{DE}$ dois vetores dados. Sejam C e R os únicos pontos do plano tais que $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QR}$ (Figura 2.1). Pela Proposição 2.1, temos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PR}$. Com isto, podemos definir uma operação de *adição de vetores*.

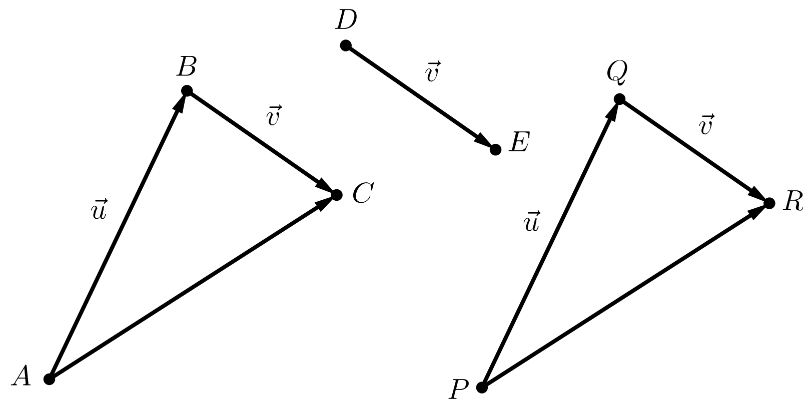


Figura 2.1: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PR}$

Definição 2.2. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{DE}$ dois vetores. Define-se o *vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$* como o vetor

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC},$$

onde C é o único ponto do plano tal que

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}.$$

Isto define uma operação de *adição de vetores.*

Uma maneira de visualizar a adição de vetores geometricamente é da forma: sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do plano, onde $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são seus representantes, respectivamente. A adição $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$. Onde $\overrightarrow{AC}$ é o segmento orientado que fecha a poligonal, tendo A como origem (Figura 2.2).

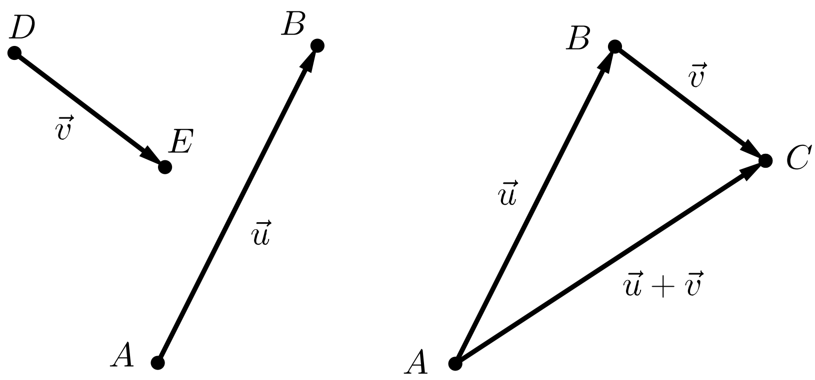
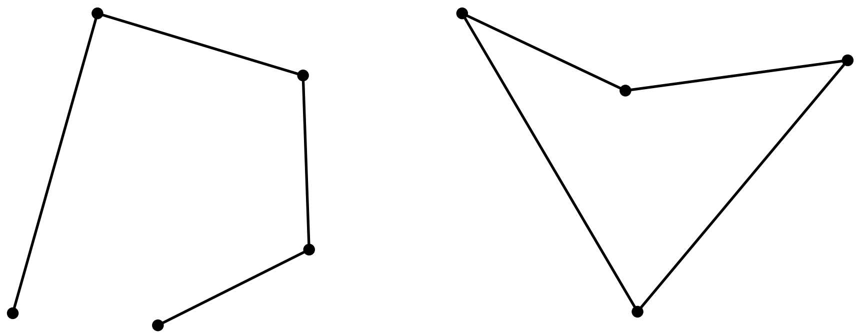


Figura 2.2: Soma de dois vetores

Observação 2.3. Uma *poligonal* é um conjunto de segmentos, consecutivos e não colineares, sendo classificados como:

- *Poligonal fechada* se a extremidade do último segmento estiver coincidindo com a origem do primeiro (Figura 2.3 (a));

- *Poligonal aberta* se a extremidade do último segmento não coincidir com a origem do primeiro (Figura 2.3 (b)).



(a) Poligonal aberta. (b) Poligonal fechada.

Figura 2.3: Poligonais

Outra maneira, também, de visualizar o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é considerá-lo como a diagonal do paralelogramo, cujos lados adjacentes são os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 2.4).

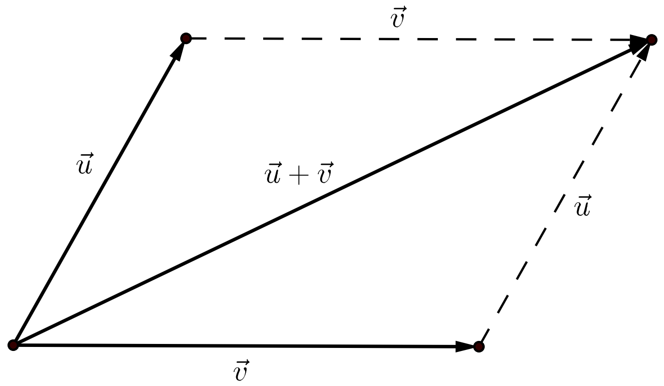


Figura 2.4: Soma de dois vetores

A soma de n *vetores* é feita considerando as imagens geométricas nos n vetores, de forma que a soma é o segmento orientado que fecha a poligonal, tendo como origem, a origem do primeiro vetor da soma (Figura 2.5).

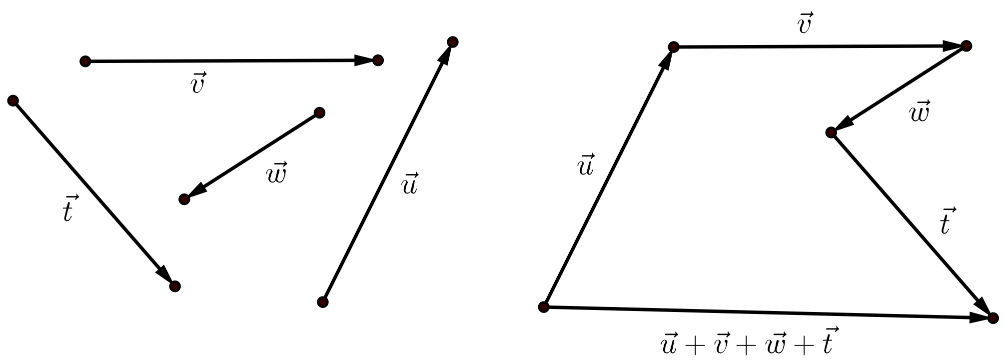


Figura 2.5: Soma de quatro vetores

2.1.1 Adição de vetores em termos das coordenadas

Seja Oxy um sistema de eixos ortogonais. Na seguinte proposição, estabeleceremos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}$, onde C é o ponto do plano como na Definição 2.2, em termos das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DE}$.

Proposição 2.4. *Dados os vetores $\vec{u}=(x,y)$ e $\vec{v}=(x',y')$, a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é dada por*

$$\vec{u}+\vec{v}=(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\,.$$

Demonstração. Sejam $P=(x,y)$ e $Q=(x',y')$ tais que $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{OQ}$, onde O é a origem do plano. Seja também $R=(x_R,y_R)$ o ponto tal que $\vec{v}=\overrightarrow{PR}$ (Figura 2.6).

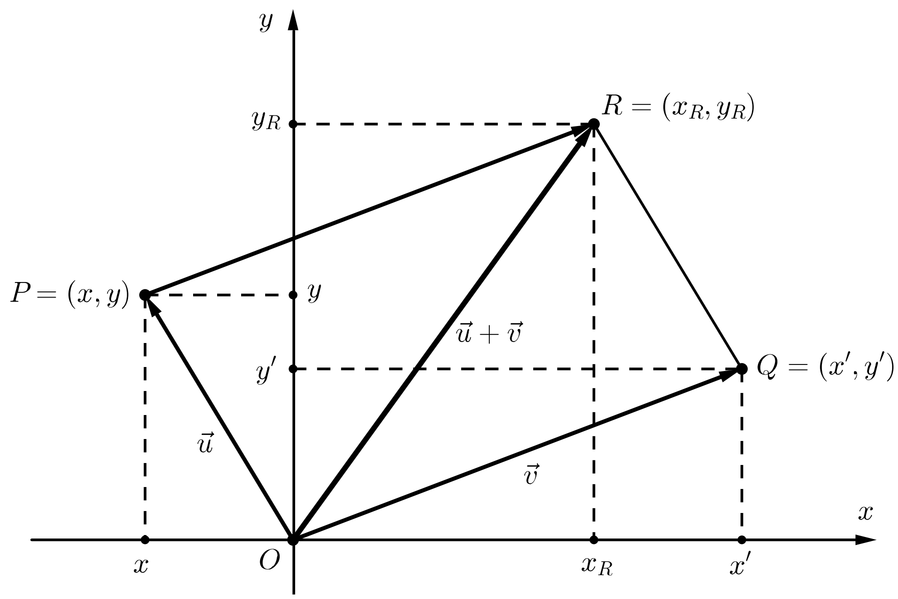


Figura 2.6: Soma de vetores em termos das coordenadas

Como $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$, temos $(x',y')=(x_R-x,y_R-y)$. Então $x_R-x=x'$ e $y_R-y=y'$.

Logo, $x_R = x + x'$ e $y_R = y + y'$. Donde,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR} = (x_R, y_R) = (x + x', y + y').$$

Portanto, $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$. $\square$

2.1.2 Propriedades da adição de vetores

Proposição 2.5. *Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a operação de adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades*:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*Comutativa*);

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (*Associativa*);

(3) $\vec{u} + \overrightarrow{0} = \vec{u}$ (*Existência do elemento neutro aditivo*);

(4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$ (*Existência do elemento oposto*);

Demonstração.

(1) Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$. Então

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(2) Sejam $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$. Então

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \end{aligned}$$

(3) Seja $\vec{u} = (a, b)$. Como $\overrightarrow{0} = (0, 0)$, temos

$$\vec{u} + \overrightarrow{0} = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = \vec{u}.$$

(4) Seja $\vec{u} = (a, b)$. Como $-\vec{u} = (-a, -b)$,temos

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = \overrightarrow{0}.$$

$\square$

Observação 2.6. A Proposição 2.5, estabelece que o conjunto dos vetores $\mathcal{V}$ munido da operação de adição é um *grupo abeliano*.

Exemplo 2.7. Dados $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 0)$, determinemos as somas $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$. De fato, pela definição de adição de vetores em termos das coordenadas, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (-2, 3) = (1 - 2, 2 + 3) = (-1, 5)$$

e

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1, 2) + (-2, 3) + (-1, 0) = (1 - 2 - 1, 2 + 3 + 0) = (-2, 5).$$

2.1.3 Subtração de vetores

Definição 2.8. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a *diferença* $\vec{u} - \vec{v}$ é a soma de $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ (Figura 2.7).

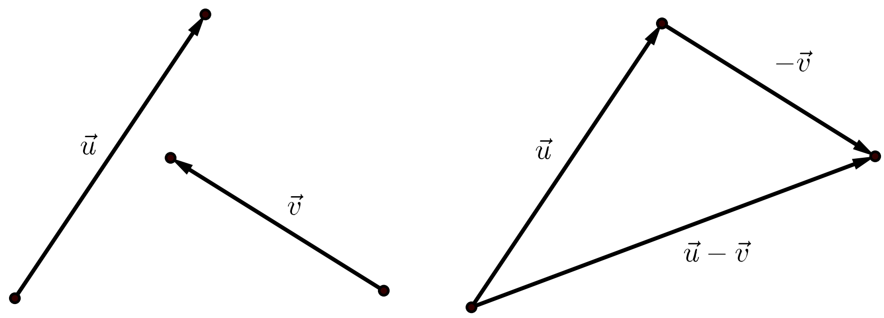


Figura 2.7: Diferença $\vec{u} - \vec{v}$

A diferença de vetores também poder ser obtida se fizermos com que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham mesma origem, desta forma, o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$ é o vetor com origem na extremidade de $\vec{v}$ e extremidade coincidindo com a extremidade de $\vec{u}$ (Figura 2.8).

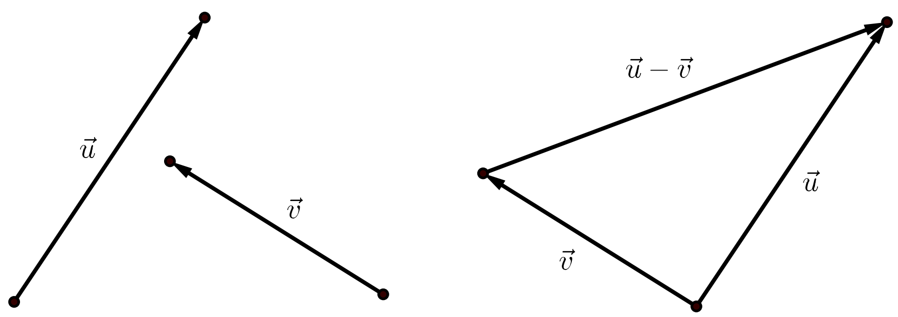


Figura 2.8: Diferença $\vec{u} - \vec{v}$

Exemplo 2.9. Dados $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 0)$ determinemos $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{w} - \vec{u} + \vec{v}$. De fato,

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, 2) - (-2, 3) = (1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$$

e

$$\vec{w} - \vec{u} + \vec{v} = (-1, 0) - (1, 2) + (-2, 3) = (-1 - 1 - 2, 0 - 2 + 3) = (-4, 1).$$

2.2 Multiplicação de escalares por vetores

Proposição 2.10. *Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor e λ um número real. Existe um único ponto C no plano tal que*

(i) *A, B e C são colineares*;

(ii) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;

(iii) *se $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\lambda \neq 0$ então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm o mesmo sentido.*

Demonstração. Se $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\lambda = 0$, consideramos $C = A$. A condição (i) é claramente satisfeita. Provemos agora a condição (ii). Se $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, temos que $A = B$. Então,

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AA}\right\| = 0 = |\lambda| \cdot 0 = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Se $\lambda = 0$, temos

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AA}\right\| = 0 = 0 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Isto termina a prova no caso em que $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\lambda = 0$. Suponhamos agora que $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\lambda \neq 0$. Sejam r a reta que passa pelos pontos A e B e, ω a circunferência com centro A e raio $|\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| > 0$. A circunferência ω, assim definida, interseta r nos pontos C e C', como observa-se na Figura 2.9.

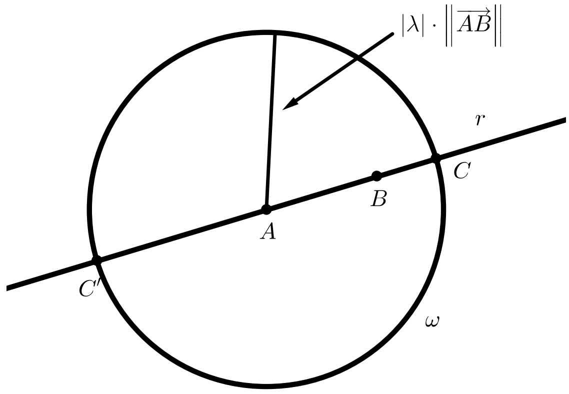


Figura 2.9: Circunferência ω com centro em A e raio $|\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Logo, os pontos A, B, C e C' são colineares e, portanto, C e C' satisfazem a condição (i). Como C e C' pertencem a ω, segue que $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ e $\left\|\overrightarrow{AC'}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ e, portanto, C e C' satisfazem a condição (ii). Como $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC'}$, segue que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC'}$ são opostos. Sendo A, B, C e C' colineares, concluímos que apenas um dos vetores $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC'}$ possui o mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$; e isto prova a condição (iii). □

Corolário 2.11. *Sejam $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se C e F são os únicos pontos do plano correspondentes a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DE}$, respectivamente, satisfazendo (i) (ii) e (iii) da Proposição 2.10, então*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}.$$

Demonstração. Como AB e DE são paralelos ou colineares e A, B e C, D, E e F são colineares, segue que AC e DF são paralelos ou colineares. Sendo $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DE}\right\|$, tem-se

$$|AC| = |\lambda| \cdot |AB| = |\lambda| \cdot |DE| = |DF|.$$

Pelo item (iii) da Proposição 2.10, tem-se que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DF}$ tem o mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$. Logo, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DF}$ possuem o mesmo sentido. Isto é, AC e DF tem o mesmo sentido de percurso. Logo, $AC \equiv DF$ e, portanto, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$. □

Seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ um vetor dado. Sejam C e F os únicos pontos do plano correspondentes a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DE}$, respectivamente, satisfazendo (i) (ii) e (iii) da Proposição 2.10. Pelo Corolário 2.11, temos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ e $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FD}$. Com isto, podemos definir uma operação de *multiplicação de escalares por vetores.*

Definição 2.12. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se o *produto do escalar*

λ *pelo vetor* $\vec{v}$ como o vetor

$$\lambda\vec{v} = \begin{cases} \overrightarrow{AC} & \text{se } \lambda > 0; \\ \overrightarrow{0} & \text{se } \lambda = 0; \\ \overrightarrow{CA} & \text{se } \lambda < 0; \end{cases}$$

onde C é o único ponto do plano tal que:

(i) A, B e C são colineares;

(ii) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;

(iii) se $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\lambda \neq 0$ então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm o mesmo sentido.

Isto define uma operação de *multiplicação de um escalar por um vetor*.

Se $|\lambda| < 1$ diz-se que o vetor $\vec{v}$ sofreu uma *contração* e se $|\lambda| > 1$ diz-se que o vetor $\vec{v}$ sofreu uma *dilatação* (Figura 2.10).

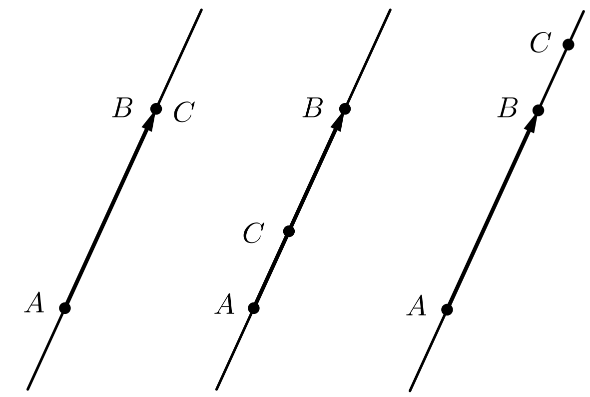


Figura 2.10: Multiplicação de um escalar por um vetor

Casos particulares

A multiplicação de escalares por vetores, apresenta alguns casos particulares:

(1) Dado o vetor $\vec{v}$ e o escalar $\lambda = 0$, temos $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{0}$;

(2) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{0}$ o vetor nulo, temos $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;

(3) Dado o vetor $\vec{v}$, se $\lambda = 1$ temos $\lambda\vec{v} = \vec{v}$, se $\lambda = -1$ temos $\lambda\vec{v} = -\vec{v}$.

Versor

Definição 2.13. Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo. Define-se o *versor* de $\vec{v}$, denotado por *vers* $\vec{v}$, como o vetor

$$vers\ \vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Em particular, *vers* $\vec{v}$ é um vetor unitário, que tem a mesma direção e sentido que $\vec{v}$ (Figura 2.11).

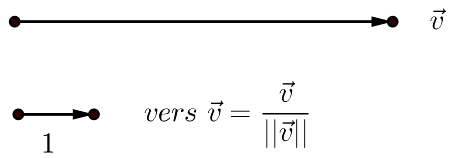


Figura 2.11: Versor do vetor $\vec{v}$: *vers* $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Projeção de um vetor na direção de outro

Definição 2.14. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores com $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$. Define-se a *projeção do vetor* $\vec{u}$ *na direção do vetor* $\vec{v}$, denotada por $\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u}$, como sendo o vetor nulo se $\vec{u} = \overrightarrow{0}$, caso contrário

$$\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta\ vers\ \vec{v},$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 2.12).

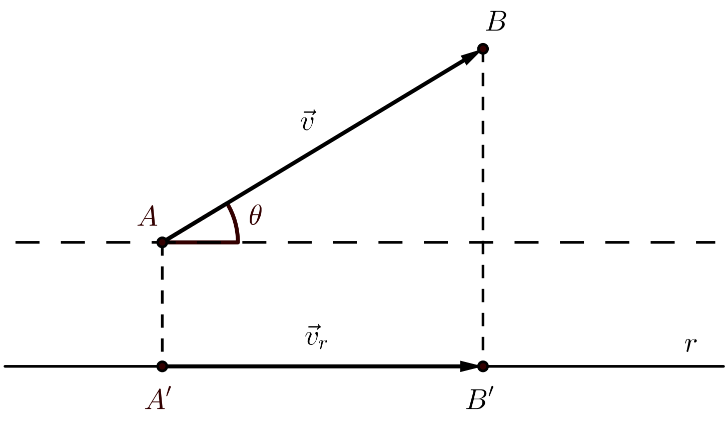


Figura 2.12: Projeção do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$

2.2.1 Multiplicação de escalares por vetores em termos das coordenadas

Seja Oxy um sistema de eixos ortogonais. Na seguinte proposição, estabeleceremos as coordenadas do vetor $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, onde C é o ponto do plano como na

Definição 2.12, em termos de λ e das coordenadas dos pontos A e B.

Proposição 2.15. *Dados o vetor $\vec{v} = (x, y)$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, o vetor $\vec{v}$ pelo escalar λ, é dado por*

$$\lambda\vec{v} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Demonstração. Se $\lambda = 0$, temos que $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{0} = (0, 0)$ e $(\lambda x, \lambda y) = (0, 0)$. Logo, $\lambda\vec{v} = (0, 0) = (\lambda x, \lambda y)$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, temos que $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{0} = (0, 0)$ e $(\lambda 0, \lambda 0) = (0, 0)$. Logo, $\lambda\vec{v} = (0, 0) = (\lambda 0, \lambda 0) = (\lambda x, \lambda y)$. Suponhamos agora que $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$. Sejam $P = (x, y)$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano. Seja $C = (|\lambda|x, |\lambda|y)$. Provemos que C satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 2.12. A condição (ii) da Definição 2.12 se verifica, pois:

$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{(|\lambda|x)^2 + (|\lambda|y)^2} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$$

Para verificar que os pontos O, P e C são colineares (condição (i) da Definição 2.12), começamos observando que:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{PC}\right\| &= \sqrt{(|\lambda|x - x)^2 + (|\lambda|y - y)^2}\\ &= \sqrt{(|\lambda| - 1)^2x^2 + (|\lambda| - 1)^2y^2}\\ &= ||\lambda| - 1|\sqrt{x^2 + y^2}\\ &= ||\lambda| - 1| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\|.\end{aligned}$$

Analisamos os seguintes três casos:

Caso 1: $0 < |\lambda| < 1$. Temos $||\lambda| - 1| = 1 - |\lambda|$ e

$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + (1 - |\lambda|) \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|.$$

Logo, O, P e C são colineares e C está entre O e P.

Caso 2: $\lambda = 1$. Nesse caso, $C = P$ e, portanto, O, P e C são colineares.

Caso 3: $|\lambda| > 1$. Temos $||\lambda| - 1| = |\lambda| - 1$ e

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{PC}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + (|\lambda| - 1) \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|.$$

Logo, O, P e C são colineares e P está entre O e C.

Pelos casos 1,2 e 3, provados anteriormente, segue que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OC}$ tem o mesmo sentido, provando, assim, a condição (iii) da Definição 2.12. Finalmente, se $\lambda > 0$ temos

$$\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} = (|\lambda|x, |\lambda|y) = (\lambda x, \lambda y)$$

e, se $\lambda < 0$ temos

$$\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CO} = (-|\lambda|x, -|\lambda|y) = (-(-\lambda)x, -(-\lambda)y) = (\lambda x, \lambda y).$$

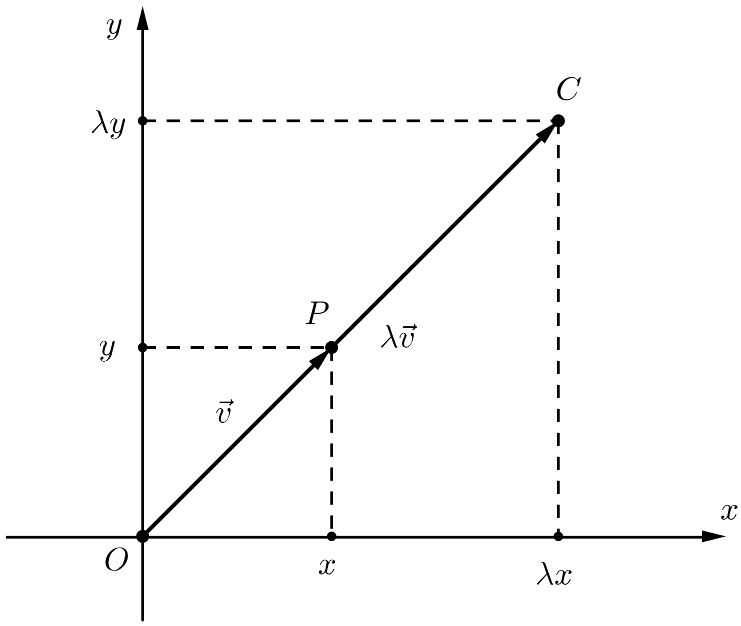


Figura 2.13: Multiplicação de escalares por vetores em coordenadas

□

Exemplo 2.16. Dados $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 0)$, determinemos o vetor $2\vec{v} - 3\vec{w} - 3\vec{u}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} 2\vec{v} - 3\vec{w} - 3\vec{u} &= 2(-2, 3) - 3(-1, 0) - 3(1, 2) \\ &= (-4, 6) + (3, 0) + (-3, -6) \\ &= (-4 + 3 - 3, 6 + 0 - 6) \\ &= (-4, 0). \end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação de escalares por vetores

Proposição 2.17. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quaisquer, e λ e μ escalares. A operação de multiplicação de escalares por vetores satisfaz as seguintes propriedades*:

(1) $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v} = \mu(\lambda\vec{v})$ (*Associativa em relação aos escalares*);

(2) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (*Distributiva do escalar em relação a soma de vetores*);

(3) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ (*Distributiva do vetor em relação a soma dos escalares*);

(4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (*Existência do elemento neutro multiplicativo*).

Demonstração.

(1) Sejam $\vec{v} = (a, b)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então

$$\lambda(\mu\vec{v}) = \lambda(\mu(a, b)) = \lambda(\mu a, \mu b) = (\lambda(\mu a), \lambda(\mu b)).$$

Segue que

$$\lambda(\mu\vec{v}) = ((\lambda\mu)a, (\lambda\mu)b) = (\lambda\mu)(a, b) = (\lambda\mu)\vec{v}$$

e

$$\lambda(\mu\vec{v}) = (\mu(\lambda a), \mu(\lambda b)) = \mu(\lambda a, \lambda b) = \mu(\lambda(a, b)) = \mu(\lambda\vec{v}).$$

Portanto, $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v} = \mu(\lambda\vec{v})$.

(2) Sejam $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda((a, b) + (c, d)) \\
&= \lambda(a + c, b + d) \\
&= (\lambda(a + c), \lambda(b + d)) \\
&= (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d) \\
&= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda c, \lambda d) \\
&= \lambda(a, b) + \lambda(c, d) \\
&= \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.
\end{aligned}$$

(3) Sejam $\vec{v} = (a, b)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)\vec{v} &= (\lambda + \mu)(a, b) \\
&= ((\lambda + \mu)a, (\lambda + \mu)b) \\
&= (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b) \\
&= (\lambda a, \lambda b) + (\mu a, \mu b) \\
&= \lambda(a, b) + \mu(a, b) \\
&= \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}.
\end{aligned}$$

(4) Sejam $\vec{v} = (a, b)$ e $\lambda = 1$. Temos

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = \vec{v}$$

$\square$

Observação 2.18. As proposições 2.5 e 2.17, estabelecem que o conjunto dos vetores $\mathcal{V}$ munido da operação de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2.3 Combinação linear de vetores

Definição 2.19. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no plano, o vetor $\vec{u}$ é *múltiplo* do vetor $\vec{v}$ se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Observação 2.20. Se $\lambda \neq 0$, o $\vec{v}$ também e múltiplo de $\vec{u}$, pois $\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$.

Observação 2.21. O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\vec{v}$, pois $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \vec{v}$. Por consequência, um vetor, diferente do vetor nulo, não pode ser múltiplo do vetor nulo, pois $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, para qualquer escalar λ.

Exemplo 2.22. Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 5)$ e $\vec{v} = (4, -10)$, eles são múltiplos um do outro, pois

$$\vec{v} = (4, -10) = -2(-2, 5) = -2\vec{u}.$$

Proposição 2.23. *Dados os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$, eles são múltiplos um do outro se, e somente se,*

$$ab' - ba' = 0.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\vec{u}$ e $\vec{u}$ são múltiplos um do outro, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Segue que

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

então $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$. Logo,

$$ab' - ba' = a(\lambda b) - b(\lambda a) = \lambda ab - \lambda ab = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos agora que $ab' - ba' = 0$, temos dois casos para analisar, $a \neq 0$ e $a = 0$. Se $a \neq 0$ temos

$$ab' - ba' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab' = ba' \quad \Leftrightarrow \quad b' = \frac{ba'}{a}.$$

Então

$$\frac{a'}{a}\vec{u} = \frac{a'}{a}(a, b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a', b') = \vec{v}.$$

Logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos um do outro. Suponhamos agora que $a = 0$. Temos que

$$ab' - ba' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ba' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ ou } a' = 0.$$

Se $b = 0$, então $\vec{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} = 0\vec{v}$. Se $a' = 0$ e $b \neq 0$, então $\vec{v} = (0, b') = \frac{b'}{b}(0, b) = \frac{b'}{b}\vec{u} = \frac{b'}{b}\vec{u}$. Portanto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos um do outro. $\square$

Definição 2.24. Diz-se que o vetor $\vec{u}$ é *combinação linear* dos vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, se existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tais que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n.$$

Exemplo 2.25. Dado os vetores $\vec{u} = (1, -3)$ e $\vec{v} = (2, 4)$, o vetor $\vec{w} = (-4, 5)$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. De fato, $\vec{w}$ será combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se existirem escalares λ_1 e λ_2, tais que

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v}.$$

Ou seja,

$$(-4, 5) = \lambda_1(1, -3) + \lambda_2(2, 4) = (\lambda_1, -3\lambda_1) + (2\lambda_2, 4\lambda_2),$$

o qual é equivalente ao sistema linear

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= -4, \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 5. \end{aligned}$$

Somando três vezes a primeira equação com a segunda, temos $10\lambda_2 = -7$, ou seja, $\lambda_2 = -\frac{7}{10}$. Segue da primeira equação que $\lambda_1 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) = -4$, ou seja, $\lambda_1 = -\frac{13}{5}$. Portanto,

$$\vec{w} = -\frac{13}{5}\vec{u} - \frac{7}{10}\vec{v}.$$

2.4 Produto Interno entre dois vetores

Definição 2.26. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no plano, o *produto interno entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$*, denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é definido como sendo:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0, \quad \text{se } \vec{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \vec{v} = \overrightarrow{0}$$

e

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta, \quad \text{se } \vec{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ e } \vec{v} \neq \overrightarrow{0},$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Interpretação geométrica do produto interno

Sejam ABC um triângulo retângulo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como na Figura 2.14.

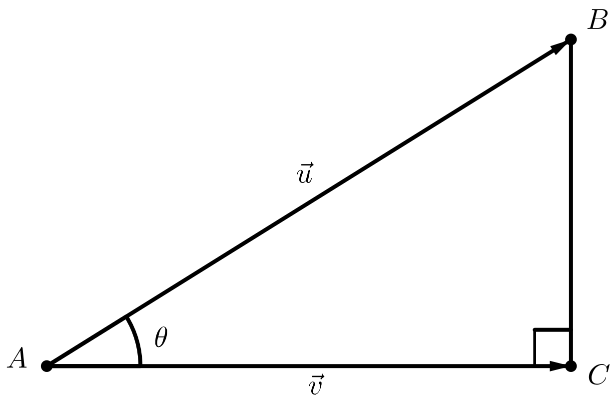


Figura 2.14: Triângulo ABC

Do triângulo ABC, temos

$$|AC| = |AB| \cdot \cos\theta = \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta.$$

Sendo $vers\ \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Então

$$|AC| = \|vers\ \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta.$$

Logo, $|AC|$ é a medida da projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$, pois

$$\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta\ vers\ \vec{v},$$

Assim,

$$\|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \|vers\ \vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \|\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u}\|.$$

Donde,

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \|\vec{u}\| \cdot \|\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u}\|.$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\text{Proj}_{\vec{v}}\ \vec{u}\|.$$

Neste caso, como o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pode ser interpretado como sendo o produto da norma do vetor $\vec{u}$ pela norma da projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

Produto interno em termos das coordenadas

Proposição 2.27. *Dados dois vetores $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$. Em termos das coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy',$$

que é a expressão cartesiana do produto interno entre dois vetores.

Demonstração. Se algum dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for nulo, temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e consequentemente $xx' + yy' = 0$, o que garante a igualdade. Sejam, então, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos, com $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, onde $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$. Então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (x', y') - (x, y) = (x' - x, y' - y).$$

Seja θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como na Figura 2.15.

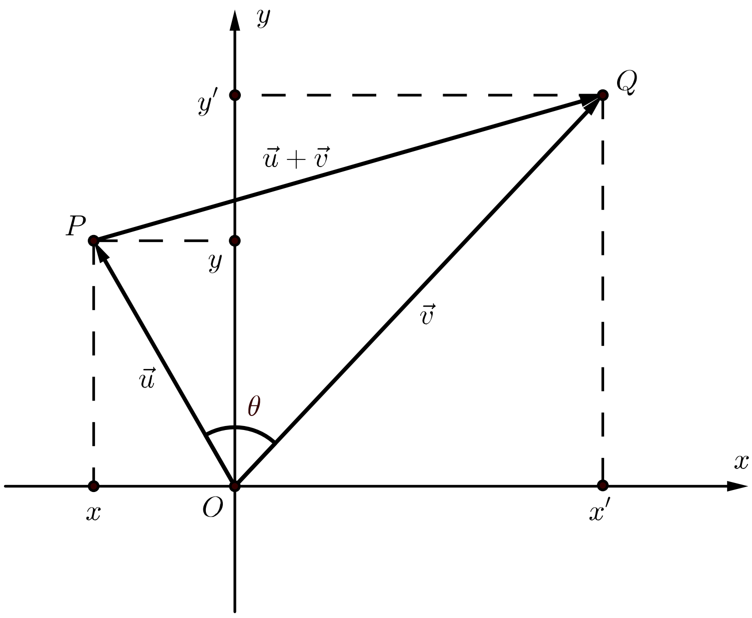


Figura 2.15: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OPQ, temos

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2\,|OP| \cdot |OQ| \cdot \cos\theta,$$

ou seja,

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\
&= (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] \\
&= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2x'x - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2 \\
&= 2(x'x + yy').
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = x'x + y'y.$$

□

Exemplo 2.28. Sejam $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 6)$, o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 6 = 2 - 18 = -16.$$

Observação 2.29. Pela definição de produto interno, se $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{v}\|^2.$$

Se $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, temos que $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 = \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|^2$. Logo, a norma de um vetor $\vec{v}$, qualquer, em termos do produto interno, é dada por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Exemplo 2.30. Dado o vetor $\vec{v} = (4, -5)$ a sua norma é:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \langle (4, -5), (4 - 5) \rangle^{1/2} = (4^2 + (-5)^2)^{1/2} = (16 + 25)^{1/2} = \sqrt{41}.$$

Observação 2.31. Pela definição do produto interno entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Exemplo 2.32. Calculemos a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (10, -5)$ e $\vec{v} = (1, 2)$. Temos que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|},$$

onde

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (10, -5), (1, 2) \rangle = 10.1 - 5.2 = -10 - 10 = 0,$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5},$$

e

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{0}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0.$$

Então

$$\theta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

que é equivalente a $90\,^\circ$.

2.4.1 Vetores ortogonais

Definição 2.33. Diz-se que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* se o ângulo entre eles é reto (Figura 2.16), ou um dos vetores for nulo. Neste caso, denota-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, isto é,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{se, e somente se,} \quad \vec{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \vec{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou a medida do ângulo entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ é } \frac{\pi}{2}.$$

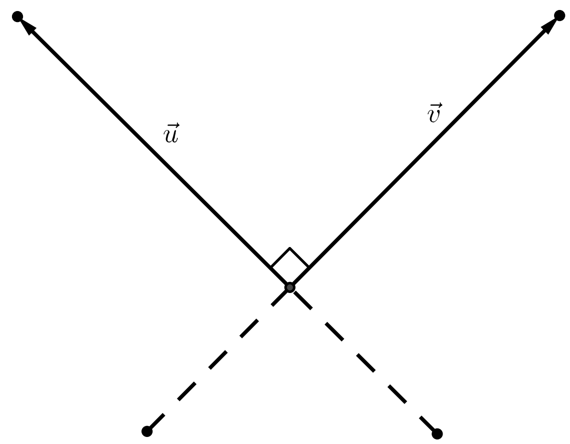


Figura 2.16: $\vec{u} \perp \vec{v}$

Em termos do produto interno, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.34. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$,*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \textit{ se, e somente se, } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Demonstração. Se $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$. Sejam então $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ e θ a medida do ângulo entre eles. Suponhamos inicialmente que $\vec{u} \perp \vec{v}$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\cos\theta = 0$, assim $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = 0$. Donde, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Reciprocamente, suponhamos agora que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Então $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = 0$. Como $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$, segue que $\cos\theta = 0$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e, assim, $\vec{u} \perp \vec{v}$. $\square$

Em termos das coordenadas, se $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$ temos

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0.$$

Exemplo 2.35. Dado o vetor $\vec{u} = \left(3, \frac{2}{5}\right)$, encontremos um vetor, não nulo, que seja perpendicular a $\vec{u}$.

Se $\vec{v} = (a, b)$ é um vetor não nulo. Então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \left(3, \frac{2}{5}\right), (a, b) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot a + \frac{2}{5} \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{15a}{2}.$$

Assim, $\vec{v} = a\left(1, -\frac{15}{2}\right)$, com $a \neq 0$.

2.4.2 Propriedades do produto interno

Proposição 2.36. *Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e o escalar λ, o produto interno satisfaz as seguinte propriedades:*

(1) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$;

(2) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\vec{u} = \overrightarrow{0}$;

(3) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;

(4) $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle$;

(5) $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle$;

(6) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;

(7) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Demonstração.

(1) Seja $\vec{u} = (x, y)$. Então

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle (x, y), (x, y) \rangle = xx + yy = x^2 + y^2 \geq 0.$$

(2) Seja $\vec{u} = (x, y)$.Então

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle (x, y), (x, y) \rangle = xx + yy = x^2 + y^2.$$

Logo, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$. Logo, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.

(3) Sejam $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$. Então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' = x'x + y'y = \langle (x', y'), (x, y) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

(4) Sejam $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \lambda \langle (x, y), (x', y') \rangle \\
&= \lambda(xx' + yy') \\
&= \lambda(xx') + \lambda(yy') \\
&= (\lambda x)x' + (\lambda y)y' \\
&= \langle (\lambda x, \lambda y), (x', y') \rangle \\
&= \langle \lambda(x, y), (x', y') \rangle \\
&= \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

(5) Sejam $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \lambda \langle (x, y), (x', y') \rangle \\
&= \lambda(xx' + yy') \\
&= \lambda(xx') + \lambda(yy') \\
&= x(\lambda x') + y(\lambda y') \\
&= \langle (x, y), (\lambda x', \lambda y') \rangle \\
&= \langle (x, y), \lambda(x', y') \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

(6) Sejam $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $\vec{w} = (x'', y'')$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle (x, y), (x', y') + (x'', y'') \rangle \\
&= \langle (x, y), (x' + x'', y' + y'') \rangle \\
&= x(x' + x'') + y(y' + y'') \\
&= (xx' + xx'') + (yy' + yy'') \\
&= (xx' + yy') + (xx'' + yy'') \\
&= \langle (x, y), (x', y') \rangle + \langle (x, y), (x'', y'') \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \,.
\end{aligned}$$

(7) Sejam $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $\vec{w} = (x'', y'')$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (x, y) + (x', y'), (x'', y'') \rangle \\
&= \langle (x + x', y + y'), (x'', y'') \rangle \\
&= (x + x')x'' + (y + y')y'' \\
&= (xx'' + x'x'') + (yy'' + y'y'') \\
&= (xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'') \\
&= \langle (x, y), (x'', y'') \rangle + \langle (x', y'), (x'', y'') \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \,.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Aplicação de Vetores

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Cálculo Vetorial nos conteúdos do Ensino Médio, mostrando através de alguns exemplos a utilização de vetores na resolução de problemas e, como prova de algumas proposições e teoremas. Algumas atividades foram construídas e outras retiradas de [1], [13] e [22]

3.1 Ponto médio de um segmento

Exemplo 3.1. Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, o *ponto médio* $M = (x_M, y_M)$ do segmento AB é um ponto que dista igualmente das extremidades A e B (Figura 3.1).

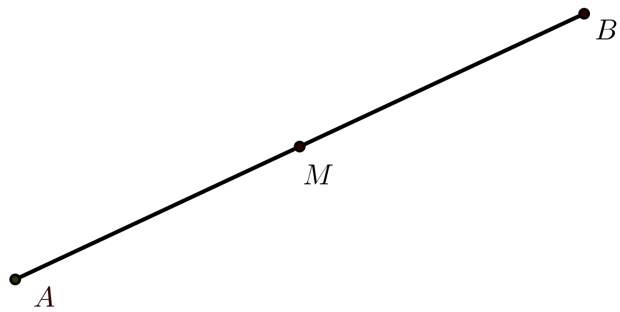


Figura 3.1: Ponto médio M do segmento AB

Determinemos as coordenadas do ponto médio entre A e B. Para isto, consideremos inicialmente o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$. O ponto médio M é equidistante dos ponto A e B, logo $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Resulta que $M - A = B - M$ e

$$(x_M, y_M) - (x_A, y_A) = (x_B, y_B) - (x_M, y_M)$$

o qual é equivalente a

$$(x_M, y_M) + (x_M, y_M) = (x_A, y_A) + (x_B, y_B).$$

Donde,

$$(x_M, y_M) = \frac{(x_A, y_A) + (x_B, y_B)}{2}$$

e, isto prova que,

$$M = \frac{A + B}{2}.$$

3.2 Diagonais de um paralelogramo

Exemplo 3.2. As diagonais de um paralelogramo se cortam em seus pontos médios. De fato, sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD do paralelogramo $ABCD$ como na Figura 3.2.

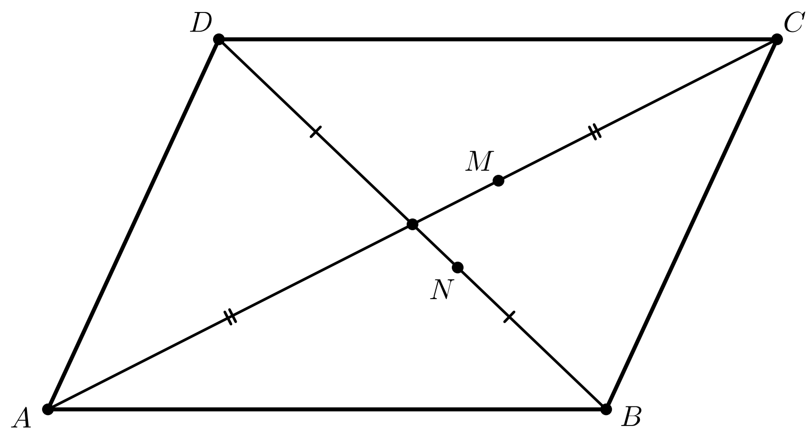


Figura 3.2: Diagonais do paralelogramo $ABCD$

Temos que mostrar que $M = N$. Observa-se que $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ e $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD}$, assim $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$. Como $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ segue que

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}. \tag{3.1}$$

Da mesma forma, tem-se

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}. \tag{3.2}$$

Somando as equações (3.1) e (3.2), resulta

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Porém, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$, então

$$2\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}\right) = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BN}$$

ou equivalentemente,

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}.$$

Donde,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \quad \Leftrightarrow \quad N - A = M - A \quad \Leftrightarrow \quad M = N.$$

3.3 Pontos médios de um quadrilátero

Exemplo 3.3. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo. De fato, seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e seja X, Y, Z e W os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente. Devemos mostrar que $XYZW$ é um paralelogramo como observa-se na Figura 3.3.

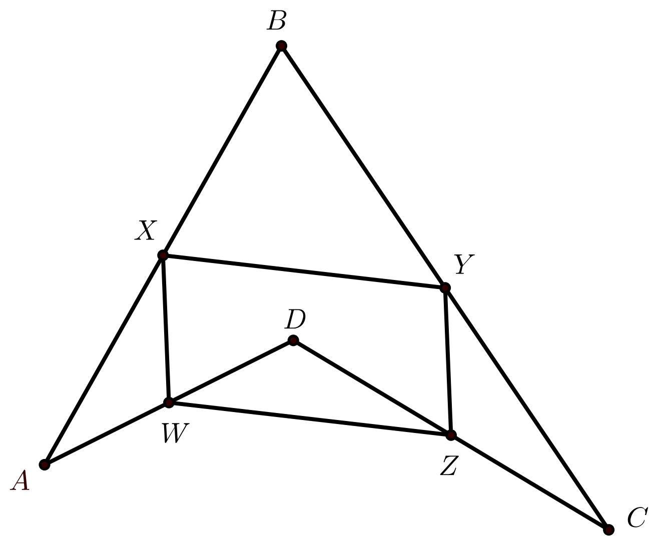


Figura 3.3: Pontos médios do quadrilátero $ABCD$

Para mostrar que $XYZW$ é um paralelogramo, basta mostrar que $XY \equiv WZ$, ou seja $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{WZ}$. Temos que

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

e

$$\overrightarrow{WZ} = \overrightarrow{WD} + \overrightarrow{DZ} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

Logo, $\overrightarrow{XY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{WZ}$. Então $XY \equiv WZ$, e portanto, pelo Teorema 1.17, $XYZW$ é um paralelogramo.

3.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição 3.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano,*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, .$$

Demonstração. Seja θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Temos que

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos\theta| \, .$$

Como $|\cos\theta| \leq 1$, tem-se

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \, .$$

□

3.5 Desigualdade triangular

Proposição 3.5 (Desigualdade triangular)**.** *Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano,*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \, . \tag{3.3}$$

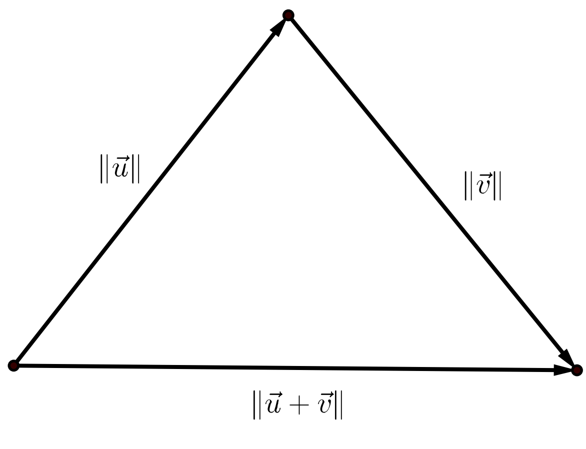


Figura 3.4: Desigualdade Triangular

Demonstração. Temos que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \quad = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \, .$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ e, assim,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 .$$

Portanto,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| .$$

□

3.6 Diagonais de um losango

Exemplo 3.6. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então o paralelogramo é um losango. De fato, considere o paralelogramo $ABCD$ com $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. As diagonais do paralelogramo são $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ como na Figura 3.5. Sendo estas perpendiculares, tem-se

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = 0.$$

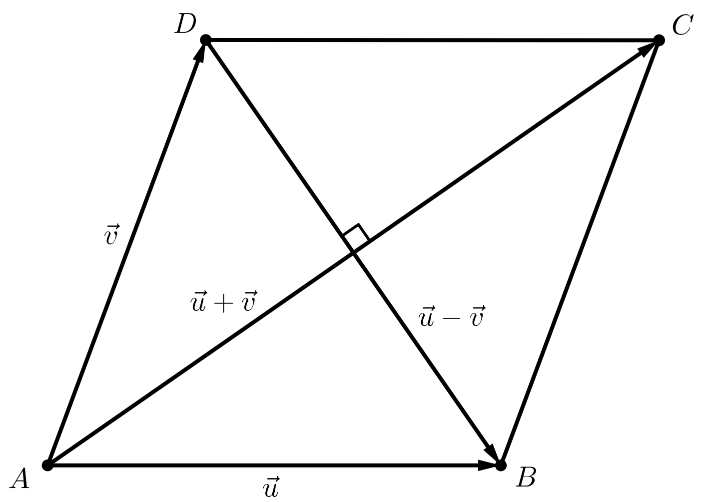


Figura 3.5: Diagonais do losango $ABCD$

Como

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 ,$$

segue que

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 .$$

Isto é, os lados adjacentes do paralelogramo têm a mesma medida. Portanto, $ABCD$ é um losango.

3.7 Base média de um triângulo

Exemplo 3.7. Se M e N os pontos médios dos lados AB e AC de um triângulo, respectivamente, então MN é paralelo a AC e $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$. De fato, sejam ABC um triângulo, M o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado BC, como na Figura 3.6.

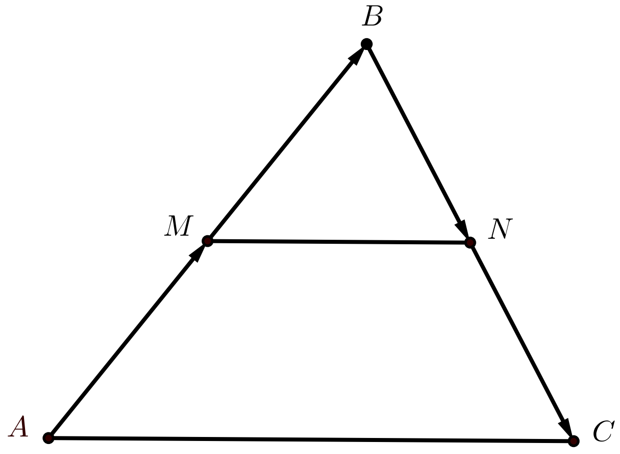


Figura 3.6: Base média MN do triângulo ABC

Como $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN}$, temos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\right).$$

Sendo $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MN}$, segue que

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$$

e, portanto, $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$. Em particular, $\overrightarrow{MN}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AC}$. Consequentemente MN é paralelo a AC.

3.8 Mediana de Euler

Exemplo 3.8. O segmento de reta que une os pontos médios das diagonais de um trapézio, chamado de *mediana de Euler*, é paralelo às bases e também igual à semi-diferença entre as bases. De fato, seja $ABCD$ um trapézio e sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente, como na Figura 3.7.

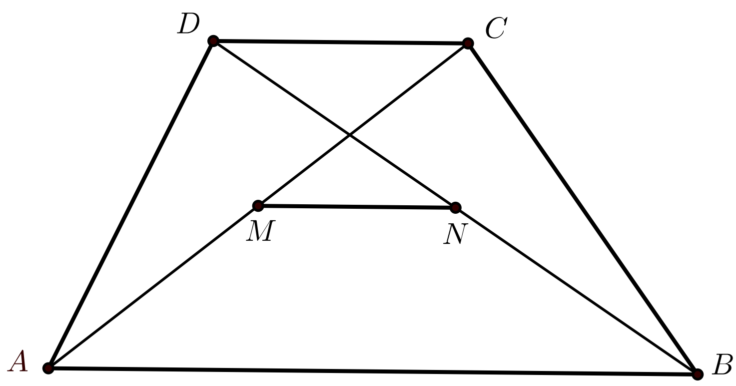


Figura 3.7: Mediana de Euler

Como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BN}$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{NB} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{NB}. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{NB}$, segue que

$$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{MC}. \tag{3.4}$$

Temos também,

$$2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \tag{3.5}$$

e

$$2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}. \tag{3.6}$$

Subtraindo a Equação 3.5 pela Equação 3.6, temos

$$2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$$

e, portanto,

$$2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}. \tag{3.7}$$

De (3.4) e (3.7), temos

$$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}. \tag{3.8}$$

Como

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0},$$

de (3.8), segue que

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}}{2}.$$

Portanto, como AB e CD são paralelos, temos que MN é paralelo a AB e a CD; mais ainda,

$$|MN| = \frac{|AB| - |CD|}{2}.$$

3.9 Teorema de Pitágoras

Exemplo 3.9. (Teorema de Pitágoras) A soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, com $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ como na Figura 3.8.

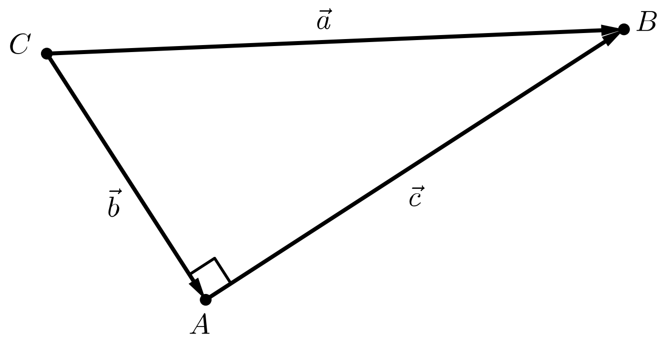


Figura 3.8: Triângulo retângulo ABC

Temos que $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Então

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\|^2 = \left\|\vec{b} + \vec{c}\right\|^2 &= \left\langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{b} + \vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{b} + \vec{c} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \\
&= \left\|\vec{b}\right\|^2 + 2\left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle + \|\vec{c}\|^2.
\end{aligned}$$

Como $\vec{b}$ é ortogonal a $\vec{c}$, temos $\left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = 0$. Portanto,

$$\|\vec{a}\|^2 = \left\|\vec{b}\right\|^2 + \|\vec{c}\|^2.$$

3.10 Coordenadas do baricentro

Exemplo 3.10. Se ABC é um triângulo e D, E e F são os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, como na Figura 3.10. Se G é o baricentro do triângulo ABC, então

(i) as medianas se intersetam na proporção de 2 para 1; isto é, $2\,|GZ| = |BG|$, $2\,|GX| = |CG|$ e $2\,|GY| = |AG|$

(ii) as coordenadas de G são dadas em função apenas dos vértices A, B e C.

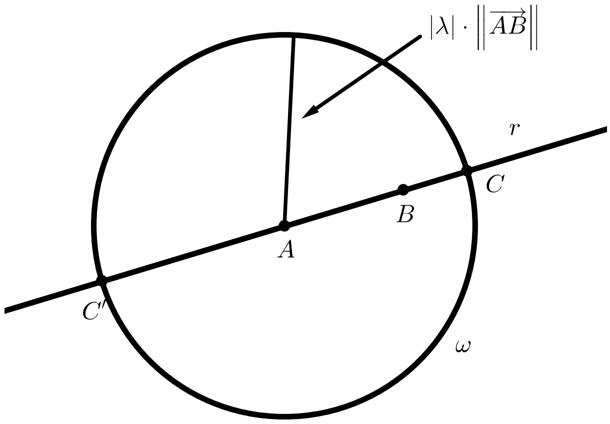


Figura 3.9: Baricentro do triângulo ABC

Será mostrado apenas que $2\,|GZ| = |BG|$, as outras igualdades são verificadas de modo análogo. Pelo vértice C traçasse a reta r paralela a mediana AY. Seja W a intersecção da reta r com a reta s que contém a mediana BZ, como na Figura 3.10.

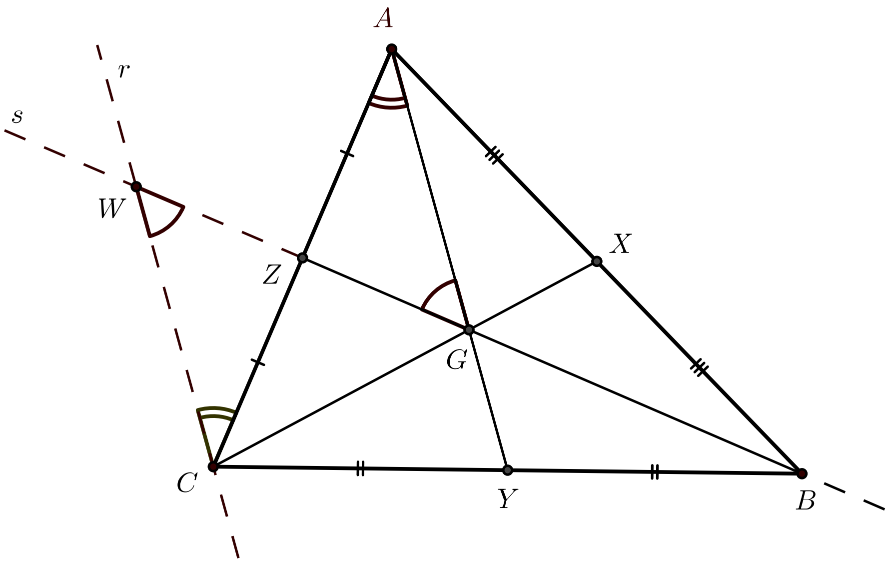


Figura 3.10: $|GZ| = |WZ|$

O triângulo AZG é congruente ao triângulo CZW, pelo caso ângulo-lado-ângulo. Segue que

$$|GZ| = |WZ|,$$

então

$$|GW| = 2|ZG|.$$

Como os triângulos BYG e BCW são semelhantes, pois os ângulos respectivos são congruentes, temos

$$\frac{|BG|}{|BW|} = \frac{|BY|}{|BC|} = \frac{1}{2},$$

donde

$$|BG| = \frac{|BW|}{2} = \frac{|BG| + |GW|}{2} = \frac{|BG| + 2|GZ|}{2}$$

e, portanto,

$$|BG| = 2|GZ|.$$

O que prova o item (i). Provemos agora o item (ii). Seja O a origem do plano. Como $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{XB}$ e $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, temos $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB}$, donde

$$\overrightarrow{XB} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2}. \tag{3.9}$$

Como $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB}$, de (3.9), tem-se

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2}$$

e, portanto,

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{2}. \tag{3.10}$$

Temos também que $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GX}$ e $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG}$, temos $\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{GX} = \overrightarrow{OG}$, donde

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OX}\right) = \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OX}.$$

e, portanto,

$$\overrightarrow{OX} = \frac{3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}}{2}. \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11), segue que

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}.$$

Assim, concluímos que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Portanto,

$$G = \frac{A + B + C}{3}.$$

Capítulo 4

Vetores na Matriz Curricular da Educação Básica

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de inserção do ensino de vetores na *Matriz Curricular de Matemática para o Ensino Médio*, abordando algumas razões que justificam a introdução do *Cálculo Vetorial* nas séries que integram essa modalidade de ensino.

Para a elaboração desta proposta foi considerado, principalmente, As Matrizes de Referência: Tópicos e Descritores do Plano de Desenvolvimento da Educação: PDE/SAEB 2011 [7], as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - PCN+ [3] e, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias [6].

4.1 O ensino de Geometria Analítica

A partir do século XIX a Geometria Analítica se destaca dentro da matemática, pois possibilita a articulação entre a geometria e a álgebra. Problemas algébricos podem ser observados por métodos geométricos e, por sua vez, problemas geométricos podem ser resolvidos puramente por métodos algébricos.

> O final do século XIX e princípio do século XX assistiram a grandes transformações das ciências, de uma forma geral, e da matemática, em particular. O surgimento da chamada física moderna com a teoria da relatividade proposta por Einstein e a mecânica quântica proposta por Schrödinger fez com que a matemática adotasse um tratamento, primordialmente, "vetorial" e "matricial". [1, pág. 16]).

Em suas aulas, o professor deve mediar o entendimento de equações por meio de figuras geométricas e figuras geométricas por meio de equações, deixando de lado a apresentação, sem explicação, de fórmulas fundamentadas somente no raciocínio lógico, onde somente resulta a memorização excessiva, por parte do aluno, e não contribui para uma construção sólida dos conceitos matemáticos propostos.

> O trabalho com a Geometria Analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundamentadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico da Geometria analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos) [6, pág. 77]).

Muitos alunos do Ensino Médio têm dificuldades de relacionar a representação gráfica de curvas planas com sua representação geométrica. Neste caso, a Geometria Analítica faria a ponte entre tais representações, dando significado as representações e contribuindo na construção conceitual dentro dos processos cognitivos envolvidos.

Como agravante, o estudo de vetores no Ensino Médio não está inserido nos conteúdos de matemática. A grande maioria dos livros didáticos de matemática não abordam o tema vetor e uma pequena minoria o apresenta em textos de *leitura optativa*, como visto no volume 2 da coleção Matemática: Contexto & Aplicações de Luiz Roberto Dante [11, pág. 133-137], livro este aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012 [5]. Sua abordagem está na matriz curricular da disciplina de física [2, pág. 27] e muitas aplicações na geometria plana e espacial não são vistas, o que deixa o cálculo de áreas e volumes com a marca da memorização de fórmulas.

> Expressar-se corretamente na linguagem física requer identificar as grandezas físicas que correspondem às situações dadas, sendo capaz de distinguir, por exemplo, calor de temperatura, massa de peso, ou aceleração de velocidade. Requer também saber empregar seus símbolos, como os de vetores ou de circuitos, fazendo uso deles quando necessário [2, pág. 27].

Nem mesmo na Geometria Analítica, conteúdo da terceira série do Ensino Médio, menciona vetores. Os conceitos de coordenadas e distâncias entre pontos são vistos somente do ponto de vista algébrico, deixando a construção geométrica de distância, por exemplo, limitadas ao uso de Teorema de Pitágoras.

A abordagem das noções de vetores, nas aulas de matemática, contribuiria para a correção de que vetores é um conteúdo somente dos conteúdos da física e contribuiria, ainda mais, para reforçar a interdisciplinaridade entre as duas disciplinas.

> A interdisciplinaridade e a contextualização devem assegurar a transversalidade do conhecimento de diferentes disciplinas e eixos temáticos, perpassando todo o currículo e propiciando a interlocução entre os saberes e os diferentes campos do conhecimento [4, pág. 68].

Outro princípio importante é a *contextualização* [21, pág. 51], que amplia as possibilidades de interação entre as disciplinas ou entre as áreas nas quais as disciplinas estão agrupadas. Desta forma, as Orientações Curriculares Nacionais para a Área de Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias, nos diz que:

> É desejável, também, que o professor de matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no Ensino Médio somente nas aulas de física [6, pág. 77].

e também:

> Uma introdução à geometria vetorial e às transformações geométricas no plano e no espaço – isometria e homotetia – é também mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico [6, pág. 93].

Desta forma, a abordagem matemática de vetores e a inserção deste tópico na matriz curricular de matemática, dentro da Geometria Analítica, se mostra uma importante ferramenta no fortalecimento da construção de conhecimento para os alunos do Ensino Médio.

4.2 Descritores do PDE/Saeb e temas estruturadores

Os *temas e descritores* do Plano de Desenvolvimento da Educação - PDE para o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - Saeb [7], quanto a terceira séria do Ensino Médio, estão agrupados de forma que seus descritores, identificados com a letra D, estão neles distribuídos de acordo com as habilidades gerais que se buscam avaliar.

> O descritor é uma associação entre conteúdos curriculares e operações mentais desenvolvidas pelo aluno, que traduzem certas competências e habilidades. Os descritores:
>
> - indicam habilidades gerais que se esperam dos alunos;
> - constituem a referência para seleção dos itens que devem compor uma prova de avaliação. [7, pág. 18].

Os temas e descritores do PDE/Saeb são:

- **Tema I: Espaço e Forma**

D1 Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D2 Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D3 Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D4 Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D5 Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D6 Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D7 Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D8 Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D9 Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 Reconhecer, dentre as equações do $2^{\underline{o}}$ grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

- **Tema II: Grandezas e Medidas**

  D11 Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

  D12 Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

  D13 Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

- **Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções**

  D14 Identificar a localização de números reais na reta numérica.

  D15 Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

  D16 Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

  D17 Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

  D18 Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

  D19 Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.

  D20 Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

  D21 Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

  D22 Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.

  D23 Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.

  D24 Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.

  D25 Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

  D26 Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

  D27 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

  D28 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

  D29 Resolver problema que envolva função exponencial.

D30 Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cos-seno, tangente), reconhecendo suas propriedades.

D31 Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz.

D32 Resolver problema de contagem utilizando o princípio multi-plicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

D33 Calcular a probabilidade de um evento.

- **Tema IV: Tratamento da Informação**

D34 Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D35 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Como observado, nenhum descritor relaciona diretamente o tema vetores. No Tema I: Espaço e Forma, temos cinco descritores que estão ligados a Geometria Analítica: para pontos no plano cartesiano temos o descritor D6; ao estudo da reta temos os descritores D7, D8 e D9 e; ao estudo da circunferência temos o descritor D10.

No Ensino Médio, de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, os *temas estruturados* desenvolvidos para as três séries são: *Álgebra: números e funções*; *Geometria e medidas* e; *Análise de dados.*

> Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização [3, pág. 120].

Cada tema estruturador está composto de *unidades temáticas* que reúnem uma ou mais conteúdos, da matemática a ser trabalhada no Ensino Médio, estando estes distribuídos da seguinte forma:

- **Tema I: Álgebra: números e funções**

1. Variações de grandezas: noção de função; funções analíticas e não analítica; representação e análise gráfica; sequências numéricas: progressões e noção

de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.

2. Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

- **Tema II: Geometria e medidas**

  1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.
  2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação;
  3. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.
  4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- **Tema III: Análise de dados**

  1. Estatística: descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão.
  2. Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.
  3. Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades.

Na unidade temática Geometria Analítica, tem-se listado os objetivos e/ou habilidades que devem ser alcançados/construídos pelos alunos [3, pág. 125]. Não se tem diretamente abordado o tema vetores, sendo toda informação dada, ligada a formação geral do aluno. Sendo da seguinte forma listados:

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.

- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

4.3 Descritor para vetores: D6a

Como visto nas seções anterior, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio orientam que se faça o estudo do tema vetores no Ensino Médio, inserindo-o nos tópicos da geometria analítica e buscando uma aproximação da matemática e a física, dentro das aplicações práticas e de resoluções de problemas que podem ser desenvolvidas, tanto a interdisciplinaridade quando a transdisciplinaridade podem ser buscadas nas várias aplicações que os vetores têm.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias não destacam os vetores nos objetivos as serem trabalhasos e, o PDE/Saeb não utiliza o tema vetor nas avaliações que realizam com os alunos da terceira série do Ensino Médio. Dentro deste cenário, os autores de livros didáticos de matemática, observados no Guia de Livros Didáticos - PNLD 2012 [5], não inserem os vetores dentro do material proposto para as escolas, que não o ensinam dentro da matemática e, que por sua vez, têm o livro didático como a base de sua matriz curricular.

A "proposta" deste trabalho é a inserção dos vetores na avaliação anual do PDE/Saeb, com um novo descritor "D6a" entre os descritores D6 e D7, dentro do Tema I: Espaço e Forma:

D6a	Identificar um vetor no plano e resolver problemas que envolvam as operações de adição, multiplicação por um escalar e produto interno, reconhecendo as propriedades relacionadas.

Assim, as escolas teriam que ensinar este tema ao aluno, acarretando uma demanda de livros didáticos que tem a Geometria Analítica trabalhada com uma base vetorial. Introduz-se as noções fundamentais do Cálculo Vetorial e, forma-se uma geração de estudantes dominando as operações e propriedades básicas com vetores. Desta forma, a Geometria Analítica deixa de ser apresentada com fórmulas fundamentadas somente no raciocínio lógico e, passa-se para uma construção sólida dos temas estudados.

Esta proposta não é pioneira, em relação a inserção do ensino de vetores na Educação Básica, pois outros trabalhos já foram e ainda estão sendo desenvolvidos com essa temática; como por exemplo, na Biblioteca Digital do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, tem as dissertações [8], [9], [14], [15], [16], [17], [18] e [19].

Diante disto, no Apêndice A, apresentamos uma proposta de conteúdos para a introdução ao estudos de vetores, que acreditamos, deveria ser trabalhada na disciplina de Matemática da primeira série do Ensino Médio. A definição de um *vetor*, não é abordada formalmente com a relação de “equipolência” entre segmentos orientados (como foi visto no Capítulo 1), apenas é apresentada de forma totalmente “intuitiva”, onde se busca adequar o conceito de vetor à faixa etária ou nível de desenvolvimento cognitivo, correspondente dos alunos. Assim, colocamos a ideia de um *vetor* como sendo um segmento orientado do plano.

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta para a Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio, onde foi sugerida a inserção do tema vetores em sua estrutura. Desta forma o estudo da Geometria Analítica ficaria dividido na primeira e na terceira série desta modalidade de ensino.

Esta dissertação começou com um estudo formal da teoria de vetores no plano, finalizando com uma proposta para dar suporte do ensino deste conteúdo e fortalecer o ensino/aprendizagem da Geometria Analítica. Espera-se que o conteúdo deste material colabore com aperfeiçoamento dos professores do Ensino Médio, para compreender melhor esses conceitos.

Neste trabalho, o principal agente inovador da proposta é o professor, é ele quem irá construir dentro de sua unidade de ensino, a proposta pedagógica que será trabalhada durante o ano escolar.

É necessário modificar o ensino de matemática nos planejamentos pedagógicos, que se direcionam somente na aritmética e na álgebra e, cada vez mais, distanciam-se dos campos da geometria. O professor deve trabalhar de maneira construtiva com os temas, buscando fortalecer os princípios fundamentas das formas e deixando de lado as fórmulas mágicas e prontas, que são dadas pelos livros didáticos.

Os professores devem utilizar este material não como um fim, mas como um suporte nos seus planejamentos pedagógicos, buscando inquirir, sobre o que querem aprender e a forma que devam ensinar. Esta é uma sugestão e, espera-se que seja produtiva para o ensino/aprendizagem de matemática nas escolas de Educação Básica.

Referências Bibliográficas

[1] Avritzer, Dan. *Geometria analítica e álgebra linear*: *uma visão geométrica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Ensino Médio. Parte III*: *Ciências da Natureza*, *Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[3] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Ciências da Natureza*, *Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

[4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília, 2013.

[5] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de Livros Didáticos - PNLD 2012*: *Matemática*. Brasília, 2011. Disponível em: < http://www.abrelivros.org.br/home/images/stories/GuiaPNLD2012_MATEMATICA.pdf >. Acesso em: 8 de dezembro de 2013.

[6] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: *Ciências da Natureza*, *Matemática e suas Tecnologias v. 2*. Brasília, 2008.

[7] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *PDE*: *Plano de Desenvolvimento da Educação* (*Ensino Médio*) *– matrizes de referência*, *tópicos e descritores*. Brasília, 2008. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf >. Acesso em: 8 de dezembro de 2013.

[8] Cabral, Raquel Montezuma Pinheiro. *Introdução ao estudo de vetores no Ensino Médio*: *um ganho significativo para o estudo da geometria analítica*. 2014. 84 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Centro de Ciências,

Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1255 >. Acesso em: 9 de março de 2015.

[9] CHAGAS, Alexandre Silva das. *O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no Ensino Médio*. 2014. 85 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio da Janeiro. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1401 >. Acesso em: 9 de março de 2015.

[10] CORRIDA DE VETORES. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/gaal/exercicios/corrida_vetores.html >. Acesso em: 23 de março de 2015.

[11] Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contextos e aplicações – Volumes 2*. São Paulo: Ática, 2011.

[12] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[13] Gómez, J. J.; Frensel, K. R.; Santos, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] LEMOS, Magda Braga Chaves. *Vetores no Ensino Fundamental: uma sequência didática para o 9º ano*. 2014. 48 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1103 >. Acesso em: 9 de março de 2015.

[15] LINDOSO, José Ribamar Penha. *Uma nova abordagem da geometria no Ensino Médio usando vetores*. 2013. 97 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/446 >. Acesso em: 9 de março de 2015.

[16] OLIVEIRA, Fernando Pereira de. *Vetores: uma abordagem para o Ensino Médio*. 2014. 67 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luis. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1500 >. Acesso em: 9 de março de 2015.

[17] SILVA, Robson Vieira. *Geometria Analítica no Ensino Médio: uma proposta com tratamento vetorial*. 2013. 75 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitó-

ria. Disponível em: $<$ http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/478 $>$. Acesso em: 9 de março de 2015.

[18] SILVA, Wellington Manoel Santos da. *Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da geometria analítica no Ensino Médio*. 2013. 156 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió. Disponível em: $<$ http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/383 $>$. Acesso em: 9 de março de 2015.

[19] UCHÔA, Crispiano Barros. *Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do Ensino Básico*. 2014. 41 f. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: $<$ http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/12345678 9/1370 $>$. Acesso em: 9 de março de 2015.

[20] Lima, E. L.; Carvalho P. C. P.; Wagner, E; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática)

[21] MATO GROSSO, Secretaria de Estado de Educação. *Currículo e Avaliação no Ensino Médio / Marise Nogueira Ramos ... [et al.]*. Cuiabá: Tanta Tinta, 2004. (Série Ensino e Currículo; vol. 1)

[22] Venturi, Jacir J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica - 9ª edição atualizada.* Disponível em: $<$ http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf $>$. Acesso em: 4 de novembro de 2013.

Apêndice A

Conteúdo da Proposta

Vetores no Plano

A Geometria Analítica realiza a articulação entre a geometria e a álgebra. Seus estudos iniciais são ligados ao matemático francês René Descartes (1596 – 1650), que criou um sistema de coordenadas, conhecido hoje como *sistema de coordenadas cartesianas* ou simplesmente *plano cartesiano*.

O conceito de *vetor* surgiu, inicialmente, dentro dos trabalhos do holandês Simon Stevin (1548 – 1620) em sua publicação *Estática e Hidrostática* de 1586. Sendo que sua sistematização só ocorre no século XIX com os trabalhos do irlandês Willam Hamilton (1788 – 1856), com seus trabalhos da *Teoria Vetorial*.

Nestas notas é apresentado, inicialmente, a definição de distância entre pontos no plano, que será utilizada posteriormente no cálculo da norma de um vetor. Em seguida, define-se as operações de adição de vetores e multiplicação de um escalar por um vetor, onde são exploradas suas propriedades algébricas e geométricas. Finalmente, é visto os conceitos de norma e ângulo entre dois vetores, os quais são necessários para a definição de produto interno, que é aplicado na verificação de ortogonalidade entre vetores.

Supõe-se que o leitor já deve ter conhecimento das noções de conjuntos, conjuntos numéricos e geometria plana, que são frequentemente estudados no ensino fundamental.

1. Distância entre pontos

Sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ dois pontos no plano cartesiano. A *distância* entre os pontos A e B, ou a *medida* do segmento AB, denotada por $d(A, B)$, é determinada pelas suas coordenadas, da seguinte forma:

Caso 1: O segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.

Neste caso, a distância $d(AB)$ é o módulo da diferença das abscissas (Figura 1):

$$\boxed{d(AB) = |x_b - x_a|.}$$

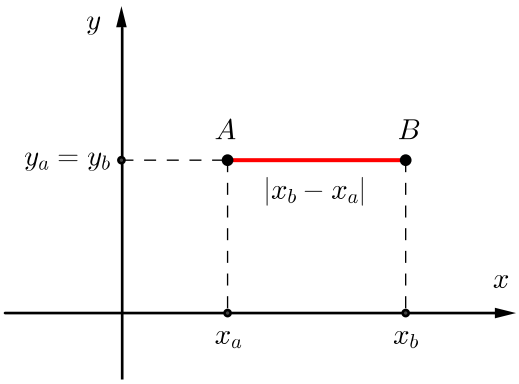


Figura 1: Segmento AB paralelo ao eixo das abscissas

Caso 2: O segmento AB é paralelo ao eixo das ordenadas.

Neste caso, a distância $d(AB)$ é o módulo da diferença das ordenadas (Figura 2):

$$\boxed{d(AB) = |y_b - y_a|.}$$

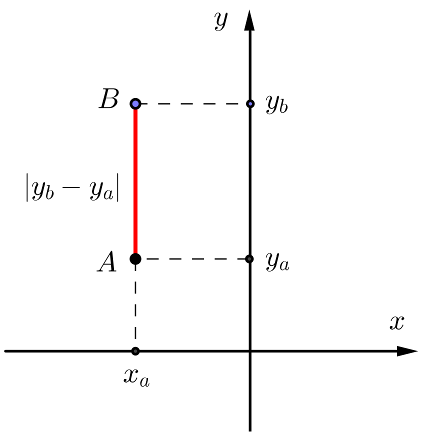


Figura 2: Segmento AB paralelo ao eixo das ordenadas

Caso 3: O segmento AB é um segmento qualquer no plano cartesiano, não necessariamente paralelo a nenhum dos eixos.

Neste caso, consideramos o ponto $C = (x_b, y_a)$ obtendo, assim, o triângulo retângulo ACB, como mostra-se na Figura 3.

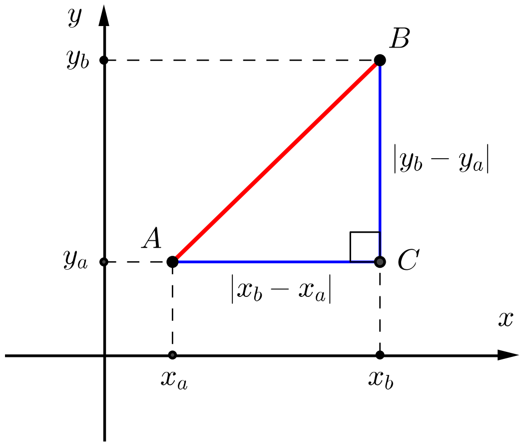


Figura 3: Segmento AB não paralelo a nenhum dos eixos

Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo ACB, tem-se

$$d(A,B)^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Portanto,

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.}$$

Exemplo 1:

Dados os pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (5, 1)$ (Figura 4). A distância ente A e B é

$$d(A,B) = \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}.$$

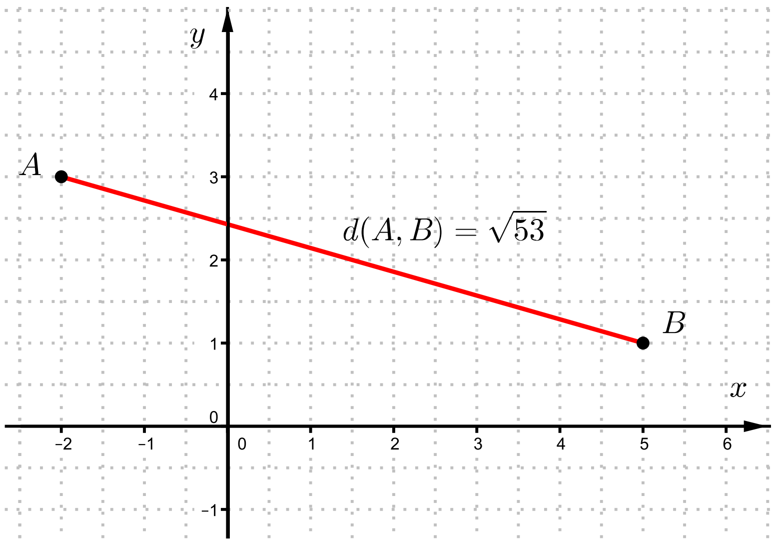


Figura 4: Distância entre os pontos A e B

Atividade 1

Em cada caso, represente os pontos A e B no plano cartesiano e calcule a distância $d(AB)$:

a) $A = (2, 0)$ e $B = (-3, 0)$;

b) $A = (0, 0)$ e $B = (0, 8)$;

c) $A = (1, -1)$ e $B = (1, 3)$;

d) $A = (1, 4)$ e $B = (-3, 4)$;

e) $A = (1, 7)$ e $B = (1, 8)$;

f) $A = (3, 1)$ e $B = (0, 5)$;

g) $A = (2, 3)$ e $B = (-1, 3)$;

h) $A = (-2, 1)$ e $B = (-2, 2)$;

i) $A = (4, 2)$ e $B = (2, 3)$.

2. Vetores

Um *vetor* é um ente matemático determinado por segmentos orientados, com a seguinte propriedade: dois segmentos orientados contidas em duas retas paralelas tais que, quando estas retas são movidas uma em direção à outra até coincidirem, caso ocorra que os pontos iniciais e finais destes segmentos também coincidam, eles representarão o mesmo ente (Figura 5). Assim, um vetor pode ser representado por infinitos segmentos orientados diferentes.

Usualmente, usa-se uma flecha acima do segmento orientado AB para representar o vetor AB ou uma letra minúscula com uma flecha acima. Assim, o vetor AB pode ser representado por $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$; isto é,

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AB}.}$$

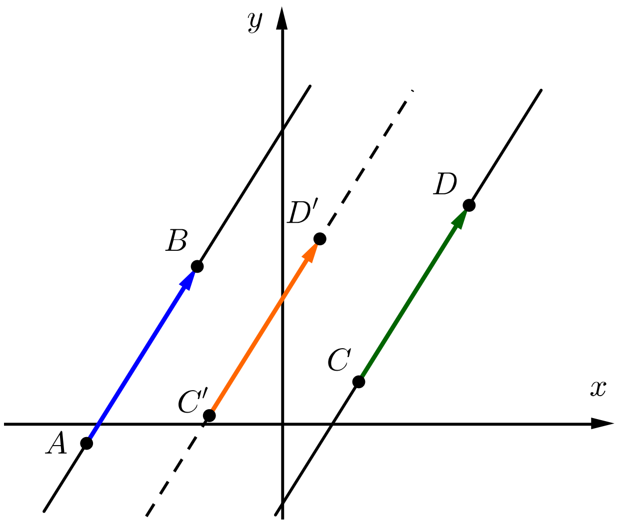


Figura 5: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$

A Figura 6, mostra onze segmentos orientados, os quais representam um mesmo vetor $\vec{u}$.

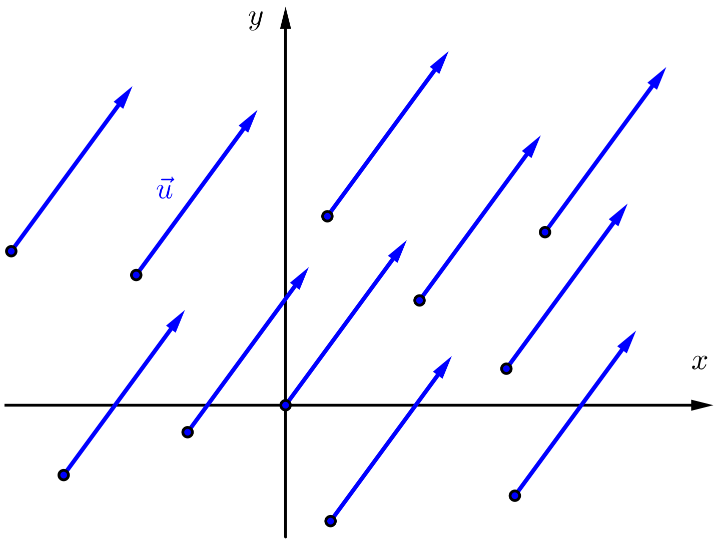


Figura 6: Representações de $\vec{u}$

2.1 Coordenadas de um vetor

Se $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, definimos as *coordenadas do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ como os números $x_b - x_a$ e $y_b - y_a$ e, escrevemos

$$\boxed{\vec{u} = (x_b - x_a, y_b - y_a).}$$

Observe que as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, podem ser determinadas fazendo-se a diferença $B - A$, pois

$$B - A = (x_b, y_b) - (x_a, y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a).$$

Logo,

$$\boxed{\vec{u} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a).}$$

Exemplo 2:

Seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (-5, 2)$ e $B = \left(1, \frac{3}{4}\right)$. Neste caso,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{3}{4}\right) - (-5, 2) = \left(1 - (-5), \frac{3}{4} - 2\right) = \left(1 + 5, \frac{3-8}{4}\right) = \left(6, -\frac{5}{4}\right).$$

Logo, as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ são 6 e $-\frac{5}{4}$.

Observação: Sejam $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $P = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ e $O = (0, 0)$. Neste caso, tem-se que os segmentos orientados AB e OP representam o mesmo vetor, isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}.}$$

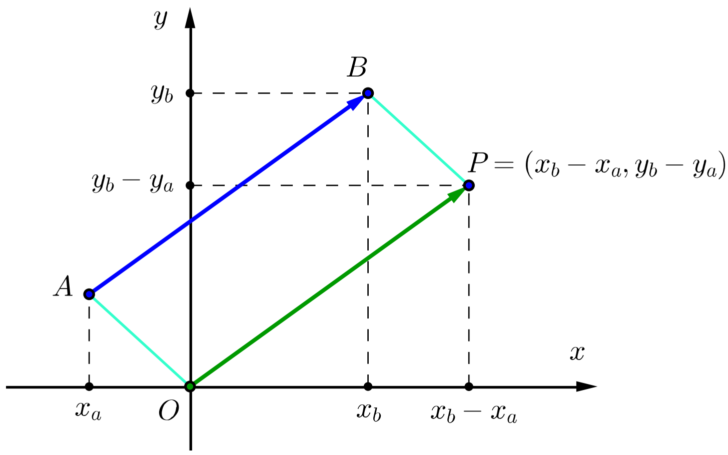


Figura 7: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$

Na Figura 7, observe-se que

$$B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a) = P - O$$

e o ponto P é o único ponto, tal que suas coordenadas coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$. Assim, todo vetor pode ser representado por um segmento orientado tendo seu ponto inicial a origem do plano cartesiano.

Mais precisamente, o vetor $\vec{u}$ com coordenadas x e y, será representado pelo segmento orientado OP, onde $O = (0, 0)$ e $P = (x, y)$ e, escrevemos $\vec{u} = (x, y)$ (Figura 8).

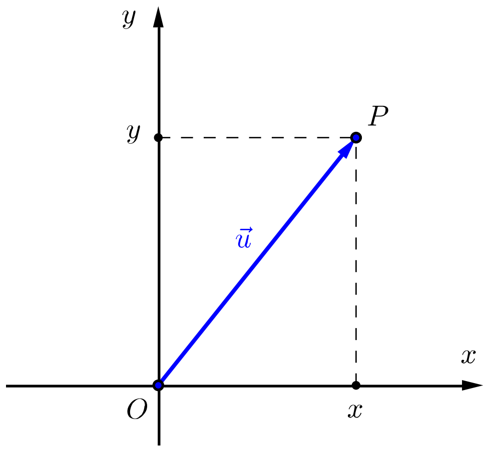


Figura 8: $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$

Exemplo 3:

Sejam $A = (-5, 2)$ e $B = \left(1, \frac{3}{4}\right)$. No Exemplo 2, temos visto que as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ são 6 e $-\frac{5}{4}$. Neste caso, o vetor $\vec{u}$ pode ser representado pelo segmento orientado OP, onde $O = (0, 0)$ e $P = \left(6, -\frac{5}{4}\right)$. Em particular, $\vec{u} = \left(6, -\frac{5}{4}\right)$ (Figura 9).

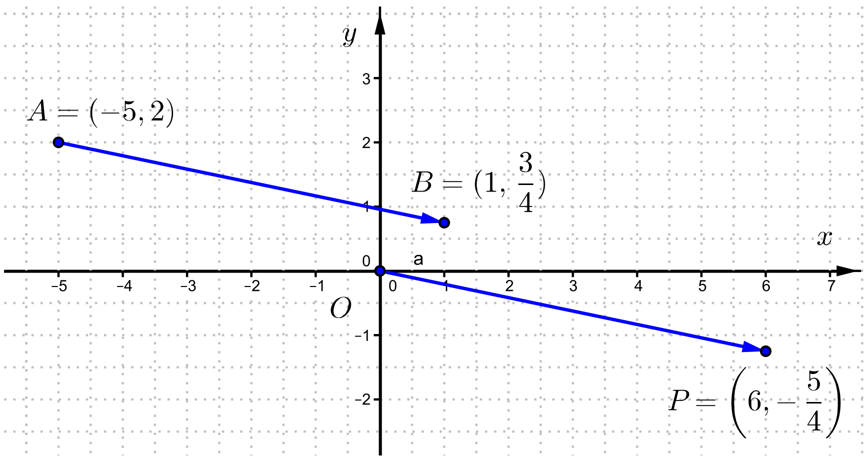


Figura 9: $\vec{u} = \left(6, -\frac{5}{4}\right)$

Exemplo 4:

Dados os pontos $A = (2, 3)$, $B = (-1, 1)$, $C = (5, 1)$ e $D = (2, -1)$, os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ são iguais. De fato,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1 - 2, 1 - 3) = (-3, -2)$$

e

$$\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (2 - 5, -1 - 1) = (-3, -2).$$

Como $\vec{u} = (-3, -2) = \vec{v}$, segue que $\vec{u} = \vec{v}$ (Figura 10).

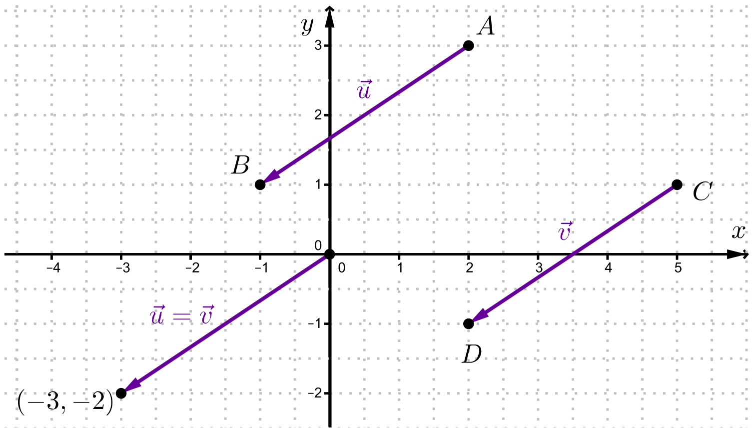


Figura 10: $\vec{u} = \vec{v}$

2.2 Vetor nulo

Define-se o *vetor nulo* $\overrightarrow{0}$, como sendo o vetor cujas coordenadas são as mesmas da origem do plano cartesiano. Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{0} = (0, 0).}$$

2.3 Vetor oposto

Dado o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, o seu *oposto*, denotado por $-\vec{u}$, é o vetor $\overrightarrow{BA}$ (Figura 11), isto é,

$$\boxed{-\vec{u} = \overrightarrow{BA}.}$$

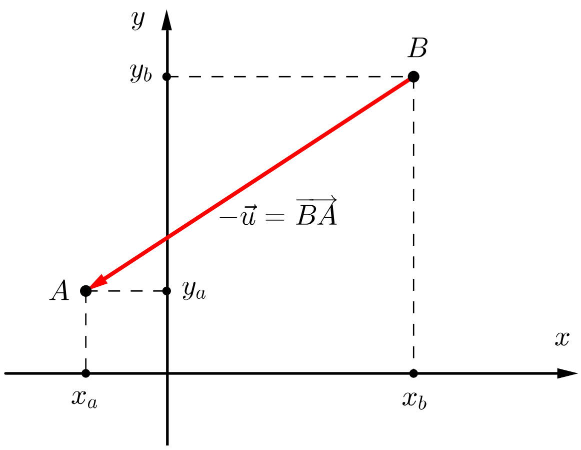


Figura 11: Vetor oposto

Dado o vetor $\vec{u} = (x, y)$, tem-se que

$$\boxed{-\vec{u} = (-x, -y).}$$

Exemplo 5:

Dado o vetor $\vec{u} = (3, -2)$, o seu vetor oposto é o vetor $-\vec{u} = (-3, 2)$ (Figura 12).

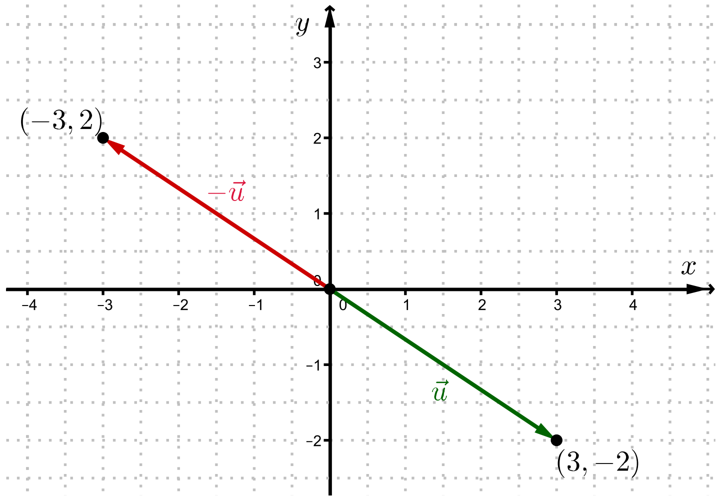


Figura 12: Vetor oposto $-\vec{u} = (-3, 2)$

Atividade 2

(1) Dados os pontos A e B, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$, onde:

a) $A = (-2, -1)$ e $B = (1, -2)$;

b) $A = (2, -1)$ e $B = (-1, 1)$;

c) $A = (-1, 5)$ e $B = (3, 4)$;

d) $A = (3, -1)$ e $B = (7, 5)$.

(2) Determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, onde:

a) $A = (1, -1)$ e $B = (1, 1)$;

b) $A = (-2, 0)$ e $B = (1, 3)$;

c) $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 0)$;

d) $A = (2, -2)$ e $B = (2, 2)$.

(3) Em cada caso, verifique se os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$ são iguais:

a) $C = (1, -1)$, $D = (1, 3)$, $A = (-1, 5)$ e $B = (2, 2)$;

b) $C = (1, 4)$, $D = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$ e $B = (1, 8)$;

c) $C = (1, -1)$, $D = (-2, 3)$, $A = (3, 1)$ e $B = (0, 5)$;

d) $C = (2, 3)$, $D = (-1, 3)$, $A = (-2, 1)$ e $B = (2, 2)$.

3. Adição de vetores

Dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$, define-se a *soma* destes vetores da seguinte forma:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v).}$$

A operação que a cada par de vetores associa a sua soma denomina-se *adição de vetores*.

Exemplo 6:

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$ (Figura 13), a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (-2, 3) = (1 - 2, 2 + 3) = (-1, 5).$$

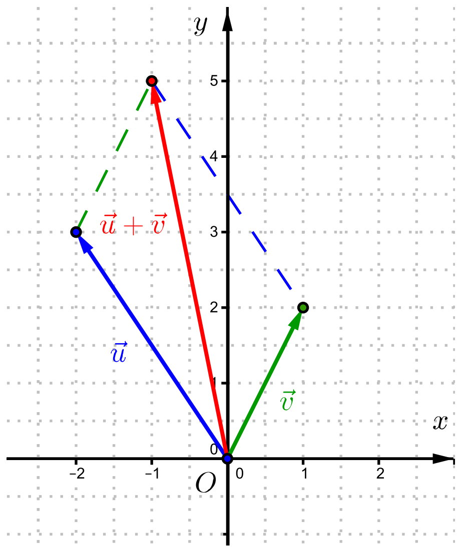


Figura 13: $\vec{u} + \vec{v}$

3.1 Interpretação geométrica de $\vec{u} + \vec{v}$

Geometricamente, o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a diagonal do paralelogramo que tem como lados adjacentes os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 14). Isto é conhecido como a *Regra do Paralelogramo*.

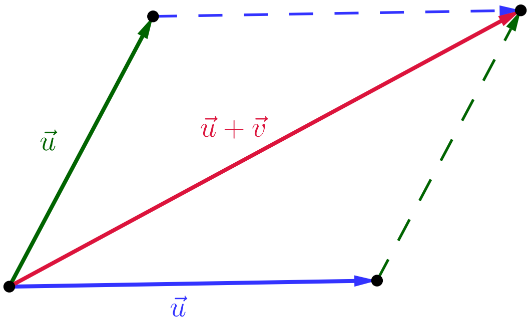
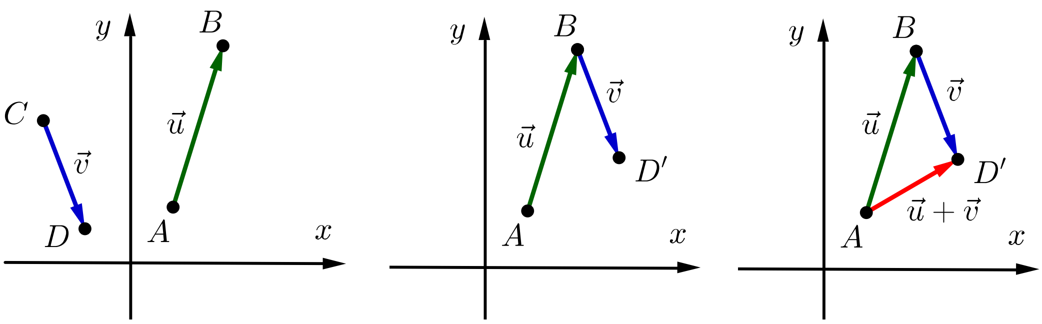


Figura 14: Soma de dois vetores: Regra do Paralelogramo

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, outra maneira de caracterizar o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é representa-lo como o segmento orientado AD', onde $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD'}$, que fecha a poligonal tendo o ponto A como sua origem. Isto é conhecido como a *Regra da Poligonal.*

Quando realizamos a soma de dois vetores, transportamos a origem do segundo vetor até coincidir com a extremidade do primeiro. O vetor soma é determinado pelo segmento orientado, que fecha o triângulo, tal que sua origem coincida com a origem do primeiro vetor da soma e sua extremidade coincida com a extremidade do segundo.

Na Figura 15 (a), temos dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Afim, de obter a soma deles, inicialmente colocamos o segmento orientado CD movida paralelamente ate que o pontos inicial deste segmento coincida com o ponto final de B, isto é, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD'}$ (veja Figura 15 (b)). Em seguida, fechamos o triângulo com o segmento orientado $\overrightarrow{AD'}$ (veja Figura 15 (c)) e, assim, obtemos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD'}$.



(a) Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (b) $\vec{v} = \overrightarrow{BD'}$. (c) $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD'}$

Figura 15: Soma de dois vetores: Regra da Poligonal

É conveniente quando se procura encontrar o vetor soma, em que estão envolvidos vários vetores, identifica-los com sua origem coincidindo com a origem do plano cartesiano.

A soma de três ou mais vetores é obtida, realizando a soma dos dois primeiros vetores, utilizando o procedimento descrito anteriormente e, o resultante é somado com o terceiro vetor, encontrando o vetor soma dos três primeiros. Repete-se o procedimento com o quarto, quinto, etc, de forma que o vetor soma desejado é o segmento orientado que fecha a poligonal, tendo como origem, a origem do primeiro vetor (Figura 16).

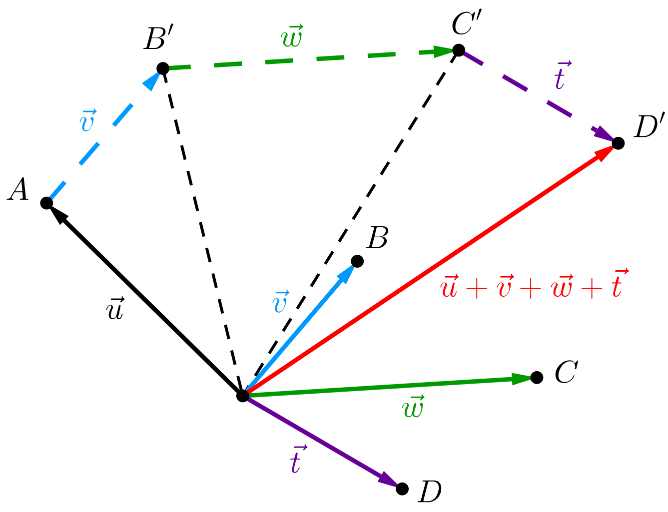


Figura 16: Soma de quatro vetores: $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{t}$

Em particular, se $\vec{u}=(x_u,y_u)$ e $\vec{v}=(x_v,y_v)$, tais que, $\vec{u}=\overrightarrow{OR}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$. O vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{OQ}$, onde $O=(0,0)$ e $Q=(x_u+x_v,y_u+y_v)$ (ver Figura 17).

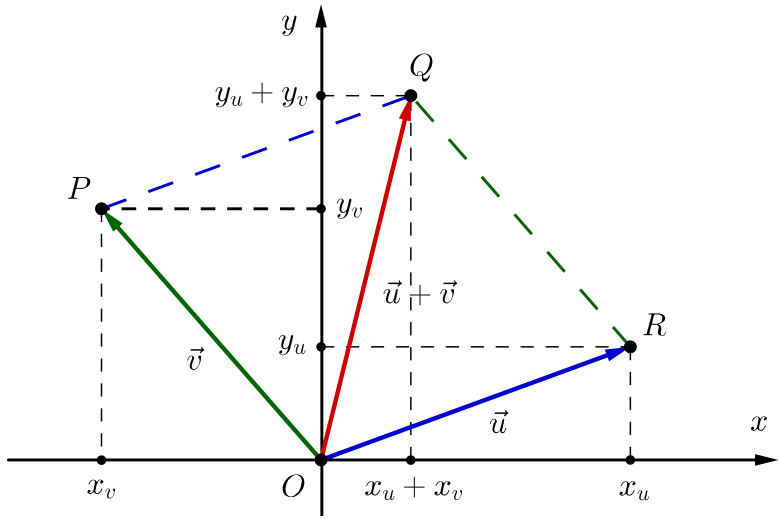


Figura 17: Soma de dois vetores em coordenadas

Na Figura 17, os vetores $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{RQ}$ e o quadrilátero $OPQR$ é um paralelogramo tendo como vetor $\overrightarrow{OQ}$ sua diagonal principal.

3.2 Propriedades da adição de vetores

Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a operação de adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativa);

(2) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ (existência do elemento neutro aditivo);

(3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$ (existência do elemento oposto);

(4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).

3.3 Subtração de vetores

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a *diferença* $\vec{u} - \vec{v}$ é a soma de $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$ (Figura 18), ou seja,

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).}$$

A operação que a cada par de vetores associa a sua diferença denomina-se *subtração de vetores*.

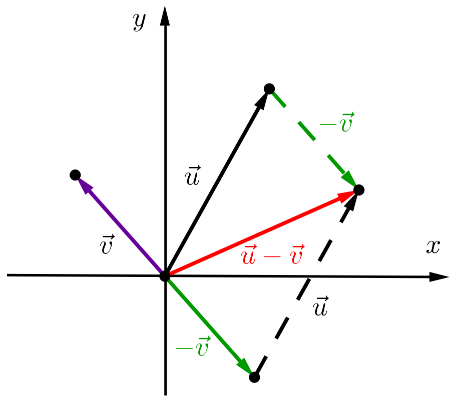


Figura 18: Diferença $\vec{u} - \vec{v}$

O vetor diferença, também poder ser obtido como o vetor com origem na extremidade de $\vec{v}$ e extremidade coincidindo com a extremidade de $\vec{u}$ (ver Figura 19).

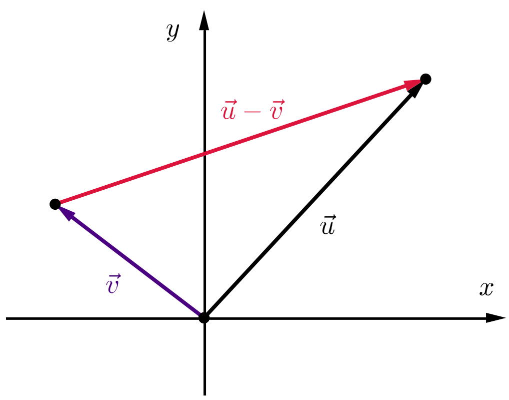


Figura 19: Diferença $\vec{u} - \vec{v}$

Exemplo 7:

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$ (Figura 20), temos que

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, 2) - (-2, 3) = (1 + 2, 2 - 3) = (3, -1).$$

Em particular, as coordenadas dos vetores $\vec{u} - \vec{v}$ são 3 e -1.

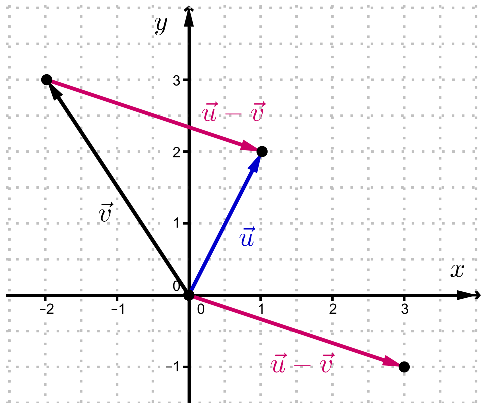


Figura 20: $\vec{u} - \vec{v}$

Atividade 3

(1) Dados os pontos $A = (3, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (2, 0)$, $E = (-4, 2)$, $F = (-3, 5)$, $G = (3, -1)$ e $H = (-1, 0)$, calcule e represente graficamente os vetores:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;

b) $\vec{v} = \overrightarrow{WF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE}$;

c) $\vec{w} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + \overrightarrow{EF}$;

d) $\vec{t} = \overrightarrow{CF} - \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$.

(2) Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (1, 7)$, $\vec{w} = (-1, 1)$ e $\vec{t} = (2, -3)$, calcule:

a) $\vec{u} + \vec{v}$;

b) $\vec{v} + \vec{w}$;

c) $\vec{u} - \vec{t}$;

d) $\vec{t} - \vec{v}$;

e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$;

f) $-\vec{v} + \vec{w} - \vec{t}$.

(3) Sendo $A = (2,0)$, $B = (3,-2)$ e $C = (-1,2)$, determine as coordenadas do ponto D, tal que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

(4) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um triângulo, como mostra-se na Figura 21. Encontre o vetor $\vec{w}$, sendo $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (-3, \frac{3}{4})$.

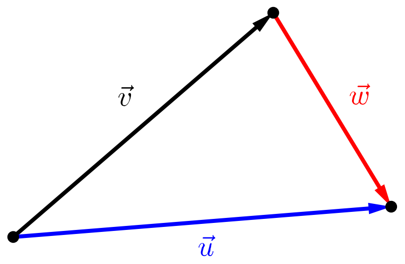


Figura 21: Triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

4. Multiplicação por escalar

Dados o vetor $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se o *produto* de λ com $\vec{u}$, como o vetor $\lambda \cdot \vec{u}$, determinado da seguinte forma:

$$\boxed{\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x_u, \lambda y_u).}$$

A operação que associa ao escalar λ e o vetor $\vec{u}$ o seu produto $\lambda \cdot \vec{u}$, denomina-se *multiplicação por escalar*.

Exemplo 8:

Dado o vetor $\vec{u} = (-4,2)$ (Figura 22), temos que

$$-2\vec{u} = -2(-4,2) = (8,-4).$$

Em particular, as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ são 8 e -4.

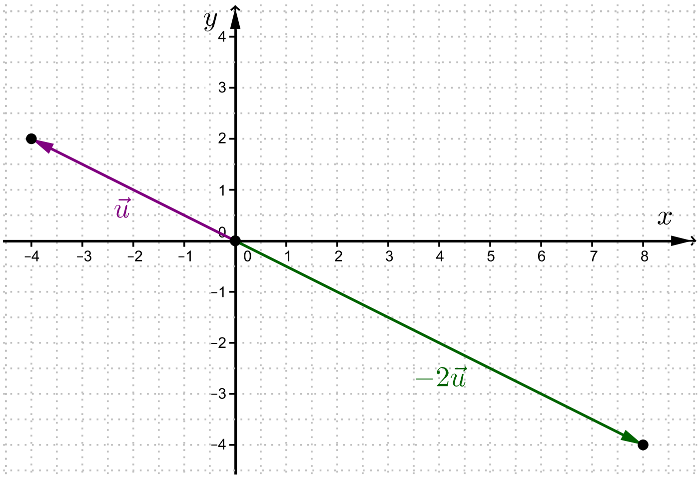


Figura 22: Vetores $\vec{u}$ e $-2\vec{u}$

Exemplo 9:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-2,3)$ e $\vec{w} = (-1,0)$ (Figura 23), tem-se que

$$2\vec{v} - 3\vec{w} - 3\vec{u} = (-4,6) + (3,0) + (-3,-6) = (-4,0).$$

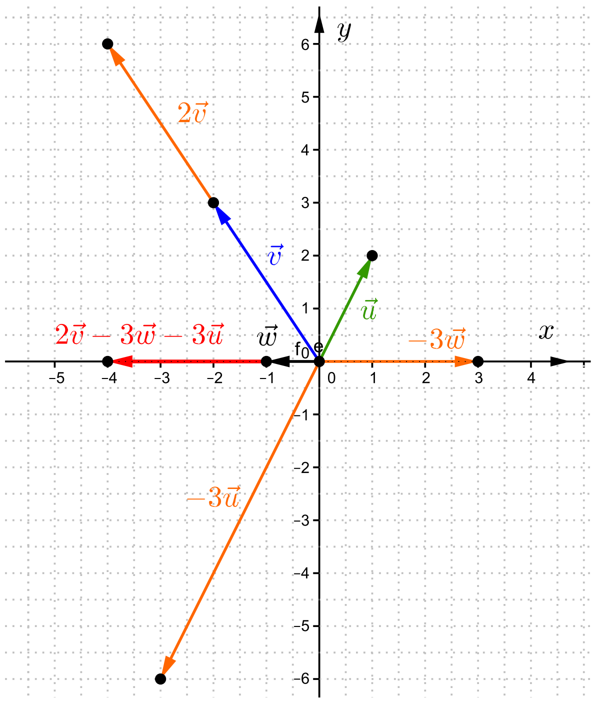


Figura 23: Vetor $2\vec{v} - 3\vec{w} - 3\vec{u}$

O produto $\lambda \cdot \vec{u}$ (Figura 24) apresenta as seguintes situações:

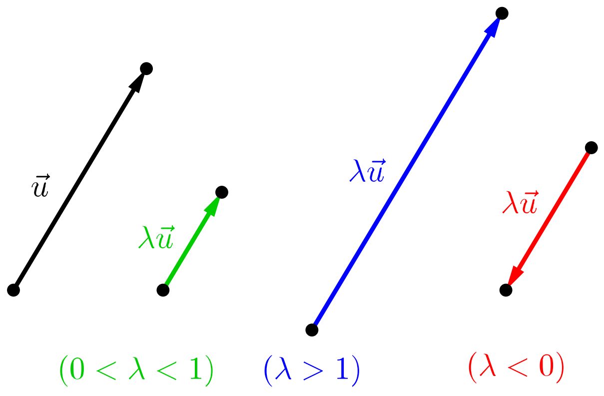


Figura 24: Multiplicação por escalar

Caso 1: $\lambda > 0$.

Neste caso, $\vec{u}$ e $\lambda \cdot \vec{u}$ têm o mesmo sentido.

Caso 2: $\lambda < 0$.

Neste caso, $\vec{u}$ e $\lambda \cdot \vec{u}$ têm sentidos opostos.

Caso 3: $|\lambda| < 1$.

Neste caso, diz-se que o vetor $\vec{u}$ sofreu uma *contração*.

Caso 4: $|\lambda| > 1$.

Neste caso, diz-se que o vetor $\vec{u}$ sofreu uma *dilatação*.

4.1 Propriedades da Multiplicação por escalar

Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e, escalares λ e μ, a operação de multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u} = \mu(\lambda\vec{u})$ (associativa em relação aos escalares);

(2) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (distributiva do escalar em relação a soma de vetores);

(3) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (distributiva do vetor em relação a soma dos escalares);

(4) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (existência do elemento neutro multiplicativo).

Atividade 4

(1) Dados os pontos $A = (3, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (2, 0)$, $E = (-4, 2)$, $F = (-3, 5)$, $G = (3, -1)$ e $H = (-1, 0)$, calcule e represente graficamente os vetores:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{CD}$;

b) $\vec{v} = \overrightarrow{WF} - 2\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE}$;

c) $\vec{w} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF}$;

d) $\vec{t} = \overrightarrow{CF} - \left(3\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{DC}\right)$.

(2) Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (1, 7)$, $\vec{w} = (-1, 1)$ e $\vec{t} = (2, -3)$, calcule:

a) $2\vec{u} + 2\vec{v}$;

b) $-3\vec{v} + 4\vec{w}$;

c) $7\vec{t} - 4\vec{v}$;

d) $-15\vec{u} - 7\vec{v} - 8\vec{t} + 24\vec{w}$;

e) $-2\vec{u} + 6\vec{v} + 2\vec{w} - 11\vec{t}$;

f) $-3\vec{v} + 7\vec{w} - 4\vec{t}$;

g) $\frac{5}{3}\vec{u} - \vec{t}$;

h) $9\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{t} - \frac{4}{10}\vec{v} - \frac{11}{10}\vec{w}$.

5. Produto Interno de dois vetores

Dados os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$, define-se o *produto interno* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, da seguinte forma:

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v.}$$

Exemplo 10:

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 6)$, o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 6 = 2 - 18 = -16.$$

5.1 Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e escalares λ, o produto interno satisfaz as seguinte propriedades:

(1) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ (o produto interno de um vetor com si próprio é não negativo);

(2) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \overrightarrow{0}$;

(3) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (comutativa);

(4) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (distributiva em relação a soma);

(5) $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (distributiva do escalar).

Antes de uma definição geométrica do produto interno se faz necessário as definições de *norma de um vetor* e de *ângulo entre vetores*.

5.2 Norma de um vetor

Dado o vetor $\vec{u} = (x, y)$, define-se a *norma* de $\vec{u}$, da seguinte forma:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Isto é,

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.}$$

Exemplo 11:

Dado o vetor $\vec{u} = (7, -1)$, temos que sua norma é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

5.3 Ângulo entre vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos do plano. Define-se o *ângulo* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o menor ângulo formado entre os segmentos orientados AB e AC, onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (Figura 25).

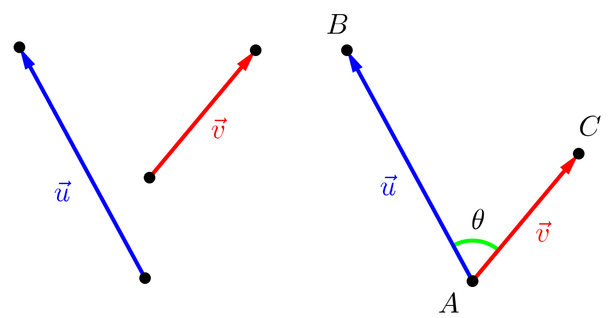


Figura 25: Ângulo entre dois vetores

Se θ é a medida do ângulo entre dois vetores, tem-se que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (Figura 26).

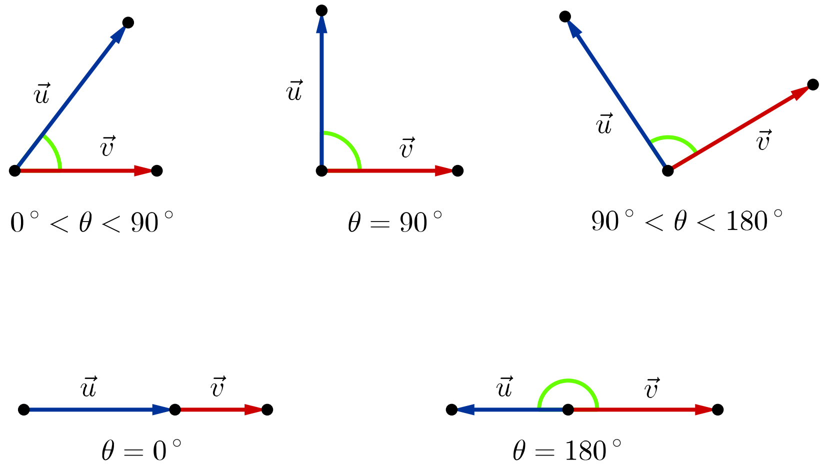


Figura 26: ?ngulo entre dois vetores

Observação: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos no plano. Utilizando a norma e ângulo, o produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pode ser determinado por:

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta,}$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Neste caso,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.}$$

Exemplo 12:

Calculemos a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (10, -5)$ e $\vec{v} = (1, 2)$. Temos que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|},$$

onde

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (10, -5), (1, 2) \rangle = 10.1 - 5.2 = -10 - 10 = 0,$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(10^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5},$$

e

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{0}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0.$$

Então, $\theta = 90^\circ$.

5.4 Vetores ortogonais

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, são ortogonais se o ângulo θ entre eles é reto (Figura 27), ou seja

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90^\circ.}$$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais o ângulo entre eles é 90°, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 90^\circ = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0 = 0.$$

Também, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ tem-se $\cos\theta = 0$, ou seja, $\theta = 90^\circ$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Logo, em termos do produto interno, temos

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.}$$

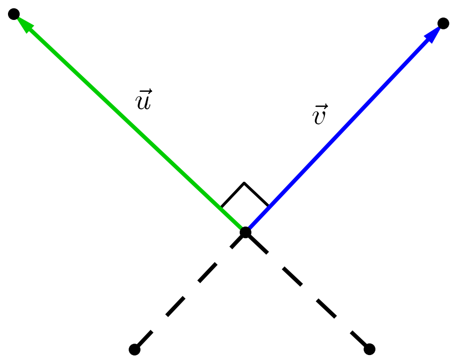


Figura 27: $\vec{u} \perp \vec{v}$

Exemplo 13:

Sejam $\vec{u} = (3, -9)$ e $\vec{v} = (6, 2)$. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, pois

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3 \cdot 6 - 9 \cdot 2 = 18 - 18 = 0.$$

Atividade 5

(1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule o produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, onde:

a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$;
b) $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (0, 4)$;
c) $\vec{u} = (-1, 5)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$;
d) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$;
e) $\vec{u} = (1, 4)$ e $\vec{v} = (-3, 5)$;
f) $\vec{u} = (\frac{2}{3}, 7)$ e $\vec{v} = (4, \frac{1}{5})$;
g) $\vec{u} = (0, -\frac{7}{8})$ e $\vec{v} = (11, -\frac{4}{3})$.

(2) Para cada um dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da Questão 1, calcule $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$ e o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(3) Diz-se que um vetor $\vec{u}$ é um *vetor unitário* se $||\vec{u}|| = 1$. Verifique quais dos seguintes vetores são unitários:

a) $\vec{u} = (1, 0)$;
b) $\vec{v} = (1, 1)$;
c) $\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(4) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verifique em quais casos se tem $\vec{u} \perp \vec{v}$:

a) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 2)$;
b) $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{v} = (6, -4)$;
c) $\vec{u} = (-5, 2)$ e $\vec{v} = (2, 3)$;
d) $\vec{u} = (-1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -1)$;
e) $\vec{u} = (2, -\pi)$ e $\vec{v} = (\pi, -2)$;
f) $\vec{u} = (\pi, -5)$ e $\vec{v} = (10, 2\pi)$.

6. Atividade lúdica: Corrida de Vetores

É um jogo que se assemelha a uma corrida de automóveis. Cada veículo é representado por um ponto em uma folha quadriculada, que é a extremidade de um vetor. O objetivo do jogo é completar uma volta em torno da pista. Os sistemas de coordenadas utilizados devem ter seus eixos paralelos às linhas do papel quadriculado, com sentidos positivos fixados, sendo os mesmos durante todo o jogo. A única coisa a mudar de jogada para jogada é a origem do sistema.

As regras do jogo foram retiradas do site do Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, que está inclusa como atividade na disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear (cf. [10]).

6.1 Véspera da corrida

- Desenhe, num papel quadriculado uma pista de corrida, indicando o sentido de percurso e a linha de partida. Recomenda-se pelo menos 4 quadradinhos de largura, em média para a pista. A linha de partida deve conter 4 ou 5 pontos, para que de 2 a 5 jogadores possam escolher de onde vão largar.

- Realiza-se um sorteio para saber qual a ordem em que os jogadores vão atuar. Cada um deles deve ter uma caneta (ou lápis), todos de cores diferentes. Na ordem sorteada, cada um escolhe um ponto da linha de partida.

- Este ponto servirá de origem de um sistema de coordenadas para o jogador que o escolheu, com eixos paralelos ao quadriculado do papel, onde o corredor marcará um dos vetores iniciais (1,0), (0,1), (-1,0) ou (0,-1), conforme sua preferência, no sentido de percurso da pista. Depois de todos os participantes marcarem sua origem e seu vetor inicial, eles movimentarão seus "carros", na ordem do sorteio.

6.2 Regras

1) O movimento depende apenas do vetor anterior, respeitando o desenho da pista (regra 4) e as "ultrapassagens" ou "fechadas" (regra 5).

2) O ponto onde está seu carro, isto é, a extremidade final do seu último vetor desenhado, é agora a origem do sistema de coordenadas no qual você vai desenhar o próximo vetor. Os eixos sempre têm mesma direção e sentido.

3) Você pode "manter a velocidade", "acelerar" ou "frear", modificando no máximo uma coordenada em relação a seu vetor anterior, em apenas uma das direções (por exemplo, se sua velocidade anterior foi (3,5), sua velocidade agora poderá ser apenas uma entre as 5 escolhas possíveis: (3,5), (3,4), (3,6), (2,5) ou (4,5). Desenhe a nova posição do seu carro, isto é seu vetor.

4) Os movimentos devem respeitar a pista desenhada. Se, usando a regra 3, não for possível que a extremidade final do vetor fique dentro da pista, o jogador deve identificar uma jogada anterior na qual poderia ter evitado a batida, e continuar jogando a partir dali, modificando a trajetória de modo a ficar dentro da pista. Isto poderá atrasar este jogador em umas três ou quatro jogadas, dependendo do formato da pista e da velocidade que estava quando bateu.

5) Não é permitido passar por cima de um ponto (carro) já desenhado (portanto, podem ocorrer "ultrapassagens" e "fechadas"). Por exemplo, para jogar um "(2,4)", a setinha desenhada passará por cima do ponto "(1,2)". Se já houver um carro (ponto) ali, o movimento "(2,4)" estará proibido.

6) Ganha quem completar primeiro uma volta na pista, sendo que na última jogada o carro (ponto) ainda deverá estar dentro da pista.

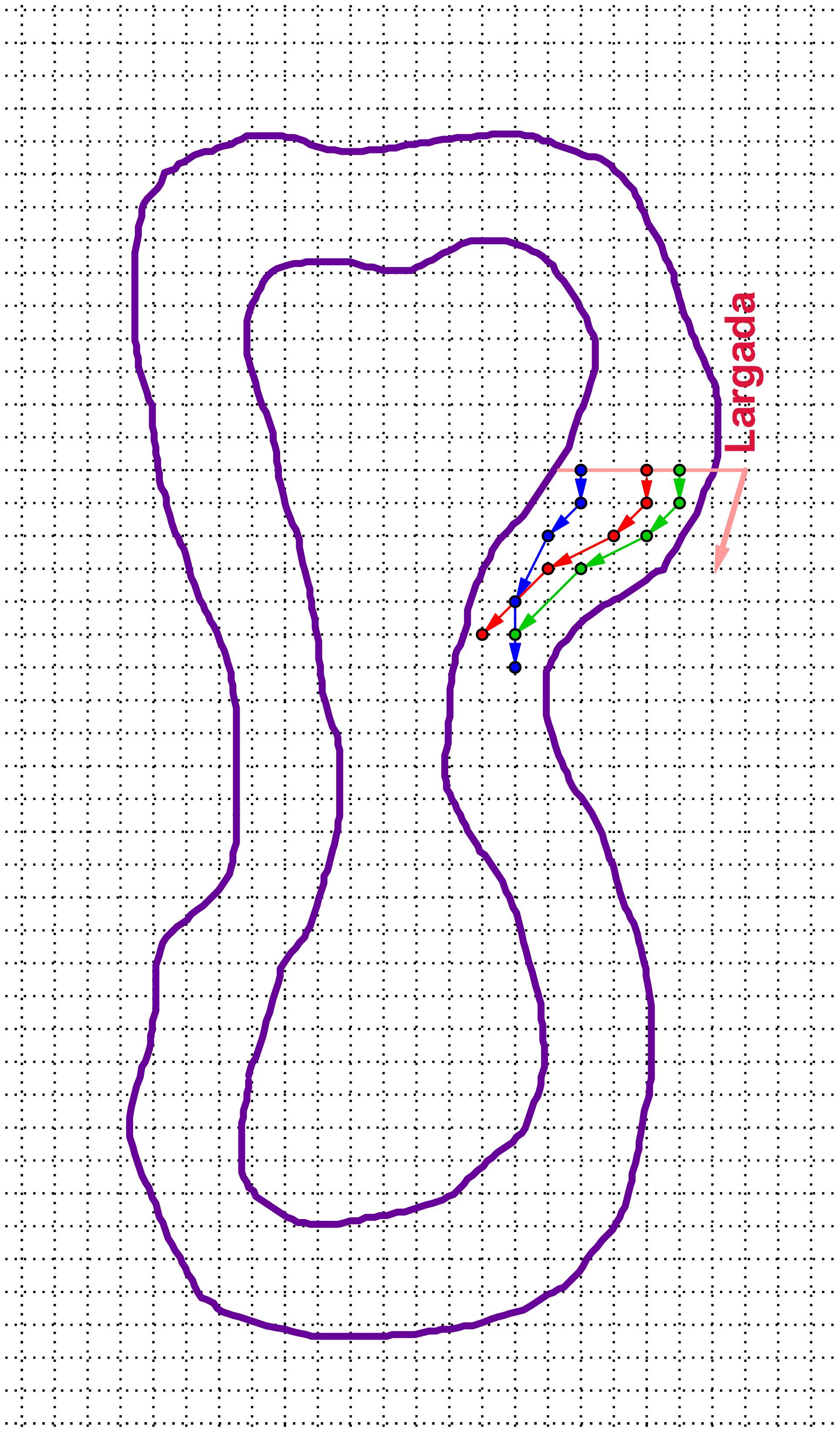


Figura 28: Corrida de Vetores