Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton †

por

Aurílio da Silva Guedes

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

sob coorientação do

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton

por

Aurílio da Silva Guedes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Plana e Cálculo

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos Bocker - UFPB (Orientador)

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Coorientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. José Vicente Moreira - Unipê

Dezembro/2013

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me proporcionado saúde, força e persistência para enfrentar todos os desafios desta jornada.

A minha mãe Dona Nenen, que sempre me deu carinho, apoio e incentivo para nunca desistir. Aos meus filhos Iago, Gustavo e Júlia, que são o meu norte, e (cada um a seu modo) entenderam a minha ausência durante este Mestrado.

Ao meu irmão Aurélio, que mesmo distante, sempre torceu por mim.

Aos meus amigos Eduardo, Suelânio, Chico, Irazê, Henrique e Pedro Junior, que quando precisei, sempre levantaram minha cabeça.

A minha namorada Julianna Rossy, que esteve comigo em todas as horas, incentivando o término deste trabalho.

Aos professores Bocker e Gilmar pela paciência e orientações.

A todos os companheiros do PROFMAT, pela acolhida e pela família que formamos.

Ao meu grupo de estudo: Hebert, Fernando, Geraldo e Sívio, que com os quais passei várias horas de estudo, inclusive aos domingos e feriados. E em especial ao Professor Ambrósio Elias, que já era meu amigo, e nesse período passou a ser um Pai, com puxões de orelha e broncas por chegar atrasado nas reuniões de estudo. Muito obrigado por tudo, de coração, sem você eu não teria concluído este mestrado.

Enfim, a todos que de uma maneira ou de outra, contribuíram para realização deste trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria das Neves da Silva Guedes (Dona Nenen), que é a mulher da minha vida, minha inspiração e esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis. Como também aos meus três filhos: Iago, Gustavo e Júlia, que são a minha razão de existir.

Resumo

Este trabalho inicia-se com a apresentação do conceito de área de figuras planas fechadas poligonais. Respeitando o aspecto histórico, exibimos o Método da Exaustão, proposto por Arquimedes, com concentração nas áreas de regiões circulares delimitada por curvas parabólicas. Chegando próximo da modernidade introduzimos os conceitos de limites, continuidade, derivada e integrais convergindo para o chamado *Teorema Fundamental do Cálculo* e sua aplicação no cálculo de áreas de uma forma mais amigável que o método de Arquimedes.

Abstract

This work starts with the presentation of the concept of flat figures closed polygonal area. Respecting the historical aspect, we display the method of exhaustion, proposed by Archimedes, with concentration in the areas of circular regions bounded by parabolic curves. Arriving near the modernity we introduced the concepts of limit, continuity, derivative and integrals converging on the so-called *Fundamental Theorem of calculus* and its application in the calculation of areas in a more friendly than the method of Archimedes.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Na Geometria plana, uma das partes mais importantes é o cálculo de áreas de figuras planas fechadas. No primeiro capítulo deste trabalho, abordamos o cálculo destas áreas. Na obra de Euclides, a ideia de área estava associada ao conceito de igualdade entre figuras (equivalência), ou seja, duas figuras são equivalentes quando têm a mesma grandeza (ou mesma área). Outro recurso utilizado é a decomposição de uma figura em outras cujas áreas sejam conhecidas. Se P é uma figura plana que pode ser decomposta em n polígonos P_1,P_2,$\cdots$,P_n, tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos polígonos P_i. Tomando o quadrado unitário como unidade de medida, apresentamos modos de determinar as áreas de algumas figuras planas fechadas.

No segundo capítulo, abordamos o Método de Exaustão de Arquimedes, o qual antecipou o cálculo integral, 2000 anos antes de ter sido "criado" por Newton e Leibniz. No cálculo de áreas pode-se dizer que o Método de Exaustão consiste em buscar aproximações sucessivas da área a ser medida, por falta e por excesso, a partir de outras já conhecidas. Aplicamos o Método de Exaustão na área do círculo, na área de segmentos parabólicos e na quadratura da parábola.

E, fechando esta dissertação, no terceiro capítulo abordamos os conceitos de limite de função, função contínua, derivada, primitiva e integral definida, culminando com o Teorema Fundamental do Cálculo e sua aplicação para o cálculo de áreas de figuras planas fechadas.

Capítulo 1

Desenvolvimento dos Conceitos de Áreas de Figuras Planas: Triângulos, Quadriláteros e Polígonos em Geral

1.1 Uma Abordagem Histórica

Ao pensar na origem do conceito de área me pergunto se esse conceito teria sido construído pelo homem ou se, assim como o senso numérico, é um conceito inerente ao ser humano, antes mesmo que ele pudesse ter consciência disso.

Há indícios históricos de que ocorreram sociedades avançadas, que se instalaram ao longo dos rios Nilo, no Egito, Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, Indo e Ganges, no centro-sul da Ásia e, Huang ho e Yangtzé na Ásia oriental. Essas sociedades, conhecidas por suas habilidades em engenharia, drenagem de pântanos e irrigação, construíram obras de defesa contra inundações, grandes edifícios e estruturas por meio de projetos que requeriam muita geometria prática.

Essas civilizações foram responsáveis pelo desenvolvimento de muitas tecnologias da época e consequentemente de conhecimentos matemáticos, tais como o cálculo de um calendário adequado e a elaboração de um sistema de pesos e medidas para ser utilizado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos.

Alguns dos principais documentos históricos atestam os conhecimentos geométricos das antigas civilizações através dos papiros de Moscou (ou Golenishev) e Rhind (ou Ahmes), datados de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente.

Análises desses papiros constataram que os egípcios tinham vários conhecimentos geométricos e resolviam problemas relacionados à geometria. De acordo com EVES (1995, p.75), vinte e seis dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind são geométricos. E segundo BOYER (1974, p.13), o papiro Ahmes contém alguns problemas geométricos, como o problema 51, que mostra o cálculo da área de um triângulo isósceles através da multiplicação da metade da medida da base pela medida da altura, e o problema 52 que trata da área do trapézio isósceles de modo semelhante.

Há também indícios de que egípcios e babilônios dispunham de métodos eficientes para o cálculo da área do círculo e conheciam regras gerais para calcular a área de triângulos, retângulos e trapézios, e as utilizavam para calcular, de forma aproximada, as medidas dos terrenos cultivados, mesmo quando tinham a forma de figuras mais complexas. Em geral a unidade de medida utilizada era um quadrado, mas em algumas situações a estratégia utilizada era decompor a superfície em triângulos ou retângulos e calcular a sua área como a soma das áreas das regiões resultantes desta decomposição.

Não se sabe ao certo porque o quadrado foi escolhido para unidade de área, talvez por ser a figura plana mais simples. Dentre as muitas versões apresentadas, uma delas é que a escolha foi inspirada pela maneira de se tecer uma cesta, arte que precedeu a fiação. Outra, que foi o resultado do uso de ladrilhos de mosaicos hindus e chineses ou sugeridas pelos padrões quadriculados que decoravam a cerâmica produzida pelos babilônios.

Na Grécia antiga, por volta de 300 a.C. , o geômetra grego Euclides produzia sua obra prima intitulada Os Elementos, que reuniu de modo sistematizado os principais conhecimentos de seus precursores. A maior parte do conteúdo da obra se refere à geometria, entretanto também contempla teoria dos números e álgebra elementar ou geométrica. Essa obra tem grande influência na forma como tratamos a geometria nos currículos escolares da educação básica.

Na obra de Euclides, a ideia de área está associada ao conceito de igualdade entre figuras (equivalência). Isto pode ser observado quando enuncia que triângulos com bases iguais, situados entre as mesmas paralelas são figuras iguais (equivalentes), e que paralelogramos com bases iguais situadas entre as mesmas paralelas também são figuras iguais. Ou seja, duas figuras são equivalentes quando têm a mesma grandeza (ou mesma área).

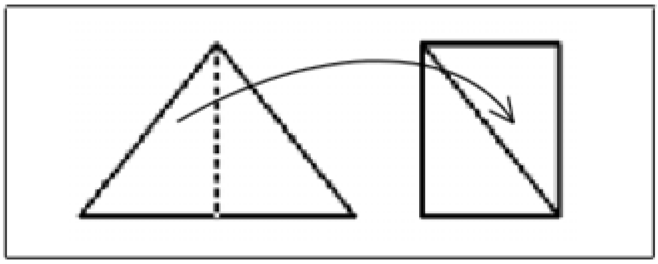


Figura 1.1: Figuras de áreas equivalentes

1.2 Alguns Conceitos de Área

- Medir uma grandeza (superfície) significa compará-la com outra de mesma especie, tomada como unidade. O resultado dessa comparação é um número, esse número é a medida. (Eduardo Wagner)
- Área de uma superfície limitada é o número real positivo associado à superfície de tal forma que:

  i. As superfícies equivalentes estão associadas a áreas iguais e reciprocamente.
  ii. A uma soma de superfícies está associada uma área que é a soma das áreas das superfícies parcelas.
  iii. Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) do que a área da outra.

  (GELSON IEZZI)

Nos atuais parâmetros escolares do Brasil, prevalece o conceito de área como grandeza, assim, vejo um bom conceito de área como o saber matemático que permite comparar e medir uma superfície. Falando em superfície, vou me referir a uma porção do plano limitada por uma figura plana fechada. Medir uma superfície significa obter um número que represente a porção do plano ocupada por essa região, comparada com uma outra fixada. Essa medida é chamada de área.

Assim, para medir a superfície de uma região é necessário uma outra superfície como unidade de medida e verificar quantas vezes essa unidade cabe dentro dessa região a ser medida. Em geral, toma-se um quadrado como unidade de medida e o número de vezes obtido é a área da região medida. Outro recurso utilizado é a decomposição de uma figura em outras cujas áreas sejam conhecidas.

Essas estratégias têm suas origens nos antigos modos de medir, mas podem ser escritas em linguagem formal, como em LIMA (1991, p.21), através das seguintes propriedades:

Seja P um polígono do plano. A cada polígono P pode-se associar um número real não negativo, chamado de área de P, com as seguintes propriedades:

- Polígonos congruentes têm áreas iguais.
- Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de P é igual a 1.
- Se P é uma figura plana que pode ser decomposta em n polígonos P_1,P_2, $\cdots$, P_n, tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos polígonos P_i.

A partir dessas ideias vamos apresentar modos de determinar as áreas de algumas figuras planas. Para tanto, assumiremos como unidade de medida um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (u.c.), que será chamado de quadrado unitário. Assim, a área desse quadrado unitário será igual a uma unidade de área (u.a.).

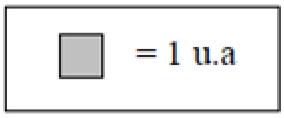


Figura 1.2: Unidade de área

1.2.1 Área do Retângulo

Lema: Seja **n** um número inteiro positivo, o quadrado Q de lado $\frac{1}{n}$, tem área igual a $\frac{1}{n^2}$. Decompondo o quadrado unitário por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos a Q, estes n^2 quadrados congruentes a Q formam um quadrado de área 1. Daí, a área de Q deve satisfazer a condição $n^2 \times A(Q) = 1$, então segue-se que $A(Q) = \frac{1}{n^2}$.

Como o quadrado pode ser definido como um retângulo que possui todos os lados iguais, sua área pode ser obtida de modo análogo a área do retângulo.

Assim, podemos expressar a área do quadrado Q, cujo lado mede a da seguinte forma:

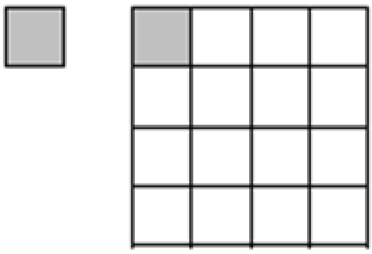


Figura 1.3: Quadrado com 16 unidades de área

Área do quadrado $Q = a^2$.

O retângulo é o quadrilátero que possui quatro ângulos retos e lados opostos paralelos.

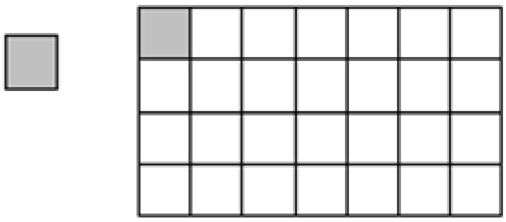


Figura 1.4: Retângulo com 28 unidades de área

Teorema 1 *Dado um retângulo de lados a e b racionais ou não, sua área será $S = ab$.*

Demonstração:

Para ver isso, dividiremos a prova em duas partes. A primeira é supor que a e b são racionais positivos, isto é:

$$a = \frac{m_1}{n_1} \text{ e } b = \frac{m_2}{n_2} \tag{1.1}$$

onde m_1, n_1, m_2 e n_2 são inteiros positivos. De 1.1, segue-se que:

$$a = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} \text{ e } b = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2 n_1}{n 2_2 n_1}. \tag{1.2}$$

A grandeza $\frac{1}{m} = \frac{1}{n_1 n_2}$ é a medida comum dos dois lados. Assim, podemos reescrever as expressões dadas em 1.2 por

$$a = \frac{m_1 n_2}{m} \text{ e } b = \frac{m_2 n_1}{m}. \tag{1.3}$$

Para concluir este caso, subdividimos o retângulo em pequenos quadrados de lado $\frac{1}{m}$, cuja área de cada quadrado é $\frac{1}{m^2}$. Observe que o número total N desses quadrados é dado por

$$N = \frac{a}{\frac{1}{m}} \frac{b}{\frac{1}{m}} = abm^2 = m_1 n_2 m_2 n_1.$$

A última igualdade foi obtida usando (1.3). Logo a área S do retângulo é igual ao número total de "quadradinhos" vezes a área de cada "quadradinho", ou seja

$$S = N \frac{1}{m^2} = m_1 n_2 m_2 n_1 \frac{1}{m^2} = \frac{m_1 n_2 m_2 n_1}{n_1^2 n_2^2} = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = ab.$$

Para o caso em que a e b são irracionais, usamos o fato de que existem sequências de racionais (x_n) e (y_n) tais que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n \to \infty} y_n = b. \tag{1.4}$$

Seja S_n a área do retângulo de lados x_n e y_n. Sendo esses lados racionais, pelo item anterior, temos $S_n = x_n y_n$. Definindo:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

mostraremos que $S = ab$ com a e b irracionais. De fato, usando as expressões (1.4), temos:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} x_n y_n = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n = ab.$$

■

1.2.2 Área do Paralelogramo

O paralelogramo é o quadrilátero que tem lados opostos paralelos, assim como o retângulo. Entretanto, ao tentarmos sobrepor quadrados unitários para obter sua área, nos deparamos com algumas limitações, pois os seus ângulos internos podem não ser retos.

Figura 1.5: Paralelogramo

Para definir a área do paralelogramo recorremos à decomposição, de modo a compará-la com outra área já conhecida, no caso o retângulo.

Em um paralelogramo, quando se toma um de seus lados como base, chama-se altura do paralelogramo à distância entre essa base e o seu lado oposto.

No paralelogramo $ABCD$, tomando-se AB como base de medida a, o segmento EF, de medida b, representa a sua altura (Figura 1.6).

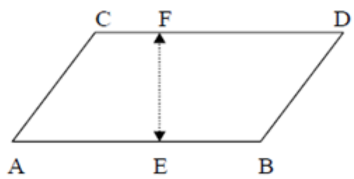


Figura 1.6: Paralelogramo ABCD

Para obter a área do paralelogramo efetuamos um corte ao longo de sua altura EF, e em seguida recompomos as partes de modo a formar um retângulo.

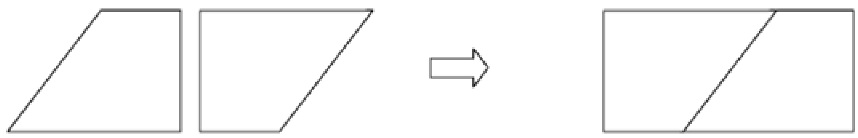


Figura 1.7: Paralelogramo X Retângulo

O retângulo formado tem as dimensões a e b, e sua área é dada por ab. Assim, podemos dizer que a área do paralelogramo corresponde ao produto do comprimento de uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

1.2.3 Área do Triângulo

A área do triângulo pode ser obtida diretamente a partir da área do paralelogramo, visto que triângulos congruentes têm mesma área, e todo paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos congruentes.

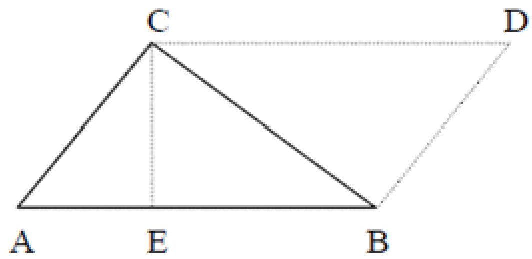


Figura 1.8: Triângulo X Paralelogramo

No triângulo ABC e no paralelogramo $ABCD$, a base AB tem medida b e a altura correspondente CE tem medida a.

A área de $ABCD = ab$, e os triângulos ABC e BCD são congruentes, portanto a área do triângulo ABC é a metade da área de $ABCD$. Ou ainda, a área de um triângulo é a metade do produto da medida de uma base pela altura correspondente.

Área do triângulo $ABC = \frac{1}{2}ab$.

Podemos representar a área de uma maneira mais amigável, quando o triângulo tem uma característica especial, exemplos:

Área do Triângulo Equilátero

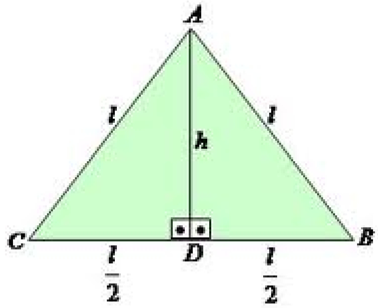


Figura 1.9: Triângulo Equilátero

Considerando o triângulo equilátero ABC de lado l e altura h, vamos calcular primeiro o valor de h, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADB:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$4l^2 = 4h^2 + l^2$$

$$4h^2 = 3l^2$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Como a área do triângulo é dada por $A = \frac{1}{2}lh$, segue-se que:

$$A = \frac{1}{2}l\frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

Fórmula de Herão

Essa fórmula é bastante usada para calcular a área de um triângulo conhecendo-se a medida dos seus lados.

Considere-se o seguinte triângulo de vértices A, B e C, ângulos internos (A, B e C) e lados a, b e c.

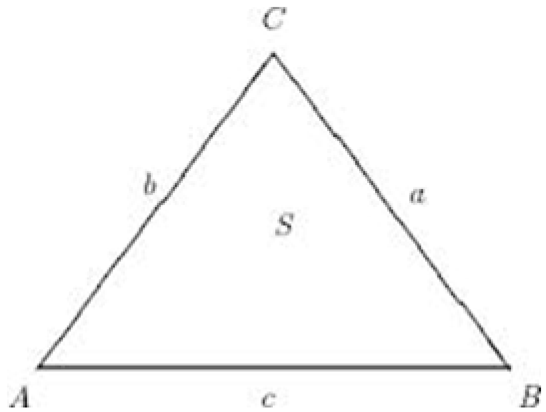


Figura 1.10: Triângulo ABC

A fórmula de Herão da área S de um triângulo é:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

em que p é o semi-perímetro do triângulo:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Demonstração:

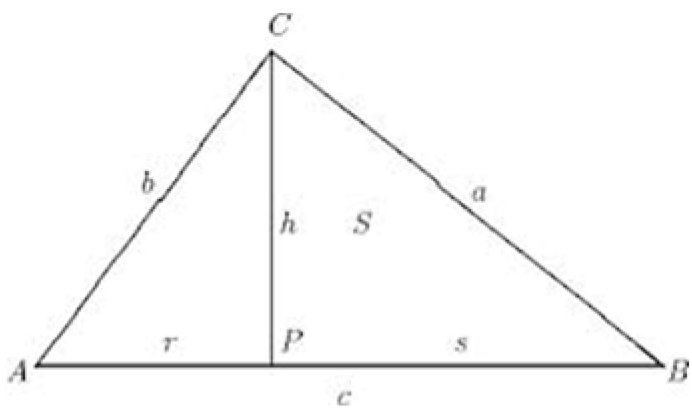


Figura 1.11: Demonstração da Fórmula de Herão

Seja $CP = h$ a altura do triângulo ABC traçada sobre o lado AB (Figura 1.11). O ponto P, projeção do vértice C sobre o lado AB, divide-o em dois segmentos $AP = r$ e $PB = s$, tais que $AB = c = r + s$. O teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ACP traduz-se em:

$$b^2 = r^2 + h^2 \tag{1.5}$$

e aplicado ao triângulo BCP em

$$h^2 = a^2 - s^2 \tag{1.6}$$

de $r = c - s$, obtemos

$$r^2 = c^2 - 2cs + s^2 \tag{1.7}$$

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5) vem:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cs \tag{1.8}$$

donde

$$s = \frac{1}{2c}(c^2 + a^2 - b^2) \tag{1.9}$$

Eliminando s em (1.6), tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
h^2 &= a^2 - \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right]^2 \\
&= \frac{4c^2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{1}{4c^2}[2ac - (c^2 + a^2 - b^2)][2ac + (c^2 + a^2 - b^2)] \\
&= \frac{1}{4c^2}[b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)][(a^2 + 2ac + c^2) - b^2] \\
&= \frac{1}{4c^2}[b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] \\
&= \frac{1}{4c^2}[b - (a - c)][b + (a - c)][a + c - b][a + c + b] \\
&= \frac{1}{4c^2}[a + b + c][a + c - b][a + b - c][b + c - a]
\end{aligned}$$

sendo $p = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow a+b+c = 2p$; $a+c-b = 2-2b = 2(p-b)$; $a+b-c = 2p-2c = 2(p-c)$ e $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{1}{4c^2}[2p][2(p-a)][2(p-b)][2(p-c)] \\ &= \frac{4}{c^2}p(p-a)(p-b)(p-c) \end{aligned}$$

Daí: $h = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Como a área S é igual a

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{c}{2}\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

■

1.2.4 Área de um Polígono Qualquer

Conhecidas as áreas do retângulo, quadrado, paralelogramo e triângulo, podemos utilizá-las para obter a área de um polígono qualquer, subdividindo-o de forma conveniente em figuras cuja área já sabemos calcular. A área do polígono que se quer encontrar será a soma das áreas das figuras em que este foi subdividido.

Tomemos primeiro como exemplo um trapézio $ABCD$.

Exemplo 1:

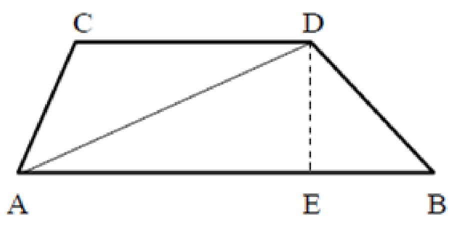


Figura 1.12: Polígono Convexo

Consideremos as bases $AB = b_1$ e $CD = b_2$ e a altura do trapézio $DE = a$.

O segmento de reta AD divide o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases

b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura a. A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos:

Área do trapézio $ABCD = \dfrac{ab_1}{2} + \dfrac{ab_2}{2} = \dfrac{a(b_1+b_2)}{2}$.

Agora, tomemos como segundo exemplo um losango $ABCD$.

Exemplo 2:

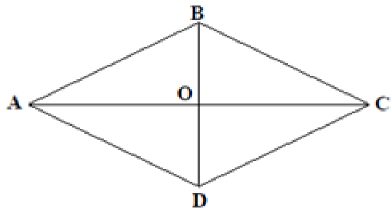


Figura 1.13: Losango ABCD

No losango $ABCD$, consideremos as diagonais $AC = d_1$ e $BD = d_2$. Note que a diagonal AC subdivide o losango em dois triângulos congruentes, ABC e ACD, com base comum $AC = d_1$ e alturas BO e DO iguais a $\dfrac{d_2}{2}$.

Desse modo, a área do losango será dada por:

Área do losango $ABCD = 2\left(\dfrac{d_1\dfrac{d_2}{2}}{2}\right) = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

Exemplo 3: Área de Polígonos Regulares

Um polígono é chamado regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos internos são congruentes. Para se obter a área de uma superfície limitada por um polígono regular, é preciso considerar que todo polígono regular de lado l , pode ser dividido em n triângulos iguais, sendo n o número de lados do polígono. Cada triângulo tem como base o lado l do polígono e altura igual ao apótema $\underline{a}$ do polígono. Lembrando: Apótema de um polígono regular é o segmento de reta que une o centro desse polígono ao ponto médio de qualquer um de seus lados.

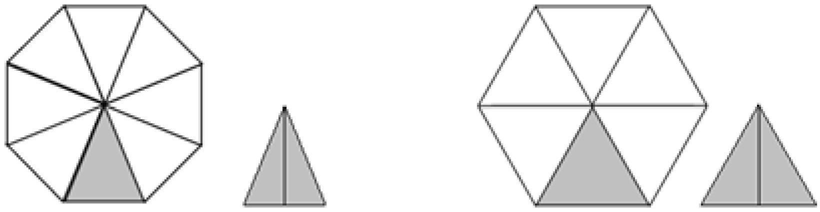


Figura 1.14: Polígonos Regulares

Desse modo, a área de um polígono regular pode ser obtida multiplicando-se a área de cada triângulo pelo número de lados n do polígono, o que resulta em:

Área do polígono $= n\left(\dfrac{l \cdot a}{2}\right)$

Sendo $n \cdot l = 2p$ (perímetro), vem que:

Área do polígono $= \dfrac{2 \cdot p \cdot a}{2}$

Área do polígono $= p \cdot a$, sendo $p =$ semiperímetro.

Exemplo 4: Área de Polígonos Irregulares

Um polígono irregular não tem todos os seus lados iguais, consequentemente seus ângulos internos também não são congruentes. Podemos decompor qualquer polígono irregular em polígonos de áreas conhecidas. Observe o exemplo da figura ao abaixo. Temos que a área desse polígono irregular será igual a soma das áreas dos triângulos T_1, T_2, T_3 e T_4, ou seja:

$A_p = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

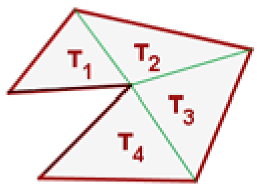


Figura 1.15: Polígono Irregular

Capítulo 2

O Método de Exaustão de Arquimedes

2.1 Uma Abordagem Histórica

Arquimedes (Arkhimedes), matemático grego, nascido em Siracusa na Sicília em 287 a.C.. Estudou, desde jovem, em Alexandria (Egito) onde conviveu com os grandes geômetras da época. Habituado, com as costumes da sociedade aristocrática em que vivia, a não valorizar o trabalho manual, procurando sempre uma justificativa lógica para as conclusões que obtinha dos engenhos mecânicos que construía. As atividades de seu pai, o astrônomo Fídias, influenciaram, sem dúvida, na vocação e formação científica de Arquimedes.

Dotado de uma inteligência prodigiosa, Arquimedes assimilou rapidamente todos os conhecimentos adquiridos pela humanidade até aquele momento e, através de uma admirável série de descobertas, ampliou-os grandemente.

Arquimedes proeminente matemático e inventor grego, escreveu importantes trabalhos sobre a geometria plana e sólida, aritmética e mecânica. Sem dúvida o maior gênio da Antigüidade clássica e um dos maiores de todos os tempos, Arquimedes reúne todas as características que o imaginário popular atribui a um verdadeiro sábio.

Seus métodos anteciparam o cálculo integral, 2000 anos antes de ter sido "criado"por Newton e Leibniz. Arquimedes também provou que o volume de uma esfera corresponde a dois terços do volume do cilindro circunscrito. Evidentemente ele considerou este como seu maior feito, pois pediu que sua lápide tivesse uma esfera circunscrita por um cilindro.

Em Geometria, o sábio teve o mérito de conceber métodos gerais para calcular as áreas de figuras planas curvilíneas e os volumes de sólidos delimitados por superfícies curvas. Aplicou tais sistemas a vários casos particulares: à esfera, ao círculo, ao segmento de parábola, à área compreendida entre dois raios e dois passos sucessivos de uma espiral, aos segmentos esféricos, às superfícies geradas pelas revoluções em torno dos eixos principais dos retângulos (ou melhor, os cilindros), a entidades geométricas produzidas pela revolução dos triângulos (ou seja, os cones), das parábolas (parabolóides), das hipérboles (hiperbolóides) e das elipses (elipsóides). Arquimedes tinha, portanto, um sistema de cálculo integral dois mil anos antes de Newton e Leibniz.

Arquimedes não antecipa apenas o cálculo integral, na verdade, uma das suas mais conhecidas e importantes descobertas matemáticas é a construção da famosa espiral de Arquimedes.

Além disso, fez surgir a ideia de infinitamente grande ao querer contar os grãos de areia da praia de Siracusa. Esta abordagem da ideia de infinito surge também numa das suas obras, onde se propõe avaliar o número de grãos de areia que seria preciso para encher uma esfera grande como o Universo. Para resolver este problema, teve de ultrapassar duas dificuldades: a primeira, dar as dimensões do universo; a segunda, criar um modo de escrever o número colossal dos grãos de areia. Tarefa tanto mais difícil quanto à escrita grega dos números só permitia escrever números inferiores à miríade das miríades (100.000.000).

2.2 O Método de Exaustão

Arquimedes também apresentou uma demonstração para a área do círculo a partir do método da exaustão, também conhecido por Princípio de Eudoxo-Arquimedes, pois tem como base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), que foi o matemático que mais explorou esse método na antiguidade (PINTO, 2004).

Eudoxo define uma teoria de proporções que é aplicável tanto em grandezas mensuráveis quanto em grandezas incomensuráveis, tornando ultrapassada a teoria aritmética dos pitagóricos.

Para chegarmos na teoria das proporções de Eudoxo, vamos observar algumas definições de Euclides:

Definição 3 do Livro V: Uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo.

Definição 4 do Livro V: Diz-se que tem uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra.

Definição 5 do Livro V: Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos. Esta definição é consolidada na Definição 6, do mesmo Livro: Grandezas que têm a mesma razão dizem-se proporcionais.

A notação atual, que traduz as definições de Euclides, pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados os inteiros m e n, sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$. Note-se que a definição de Eudoxo de igualdade de razões conduz-nos ao processo de redução ao mesmo denominador, ou seja: $ad = bc$, que não é mais do que a multiplicação cruzada, usada hoje na manipulação de frações, o que formalmente não era feito pelos gregos à época de Euclides (Boyer, 1996).

Do ponto de vista lógico, estas duas definições reduzem a noção de proporção entre dois pares de grandezas homogêneas à noção de ordem entre múltiplos dessas grandezas (Sá, 2000).

Definição 7 do Livro V: Quando, dos equimúltiplos, o múltiplo da primeira grandeza excede o múltiplo da segunda, mas o múltiplo da terceira não excede o múltiplo da quarta, diz-se que a primeira tem uma razão maior para segunda do que a terceira para quarta. Esta definição significa que se para quaisquer dois números naturais m e n, quando for verdadeira a desigualdade $ma > nb$, e quando for falsa a desigualdade $mc > nd$, então diz-se que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (Sá, 2003).

Para finalizar essa breve passagem pela teoria das proporções de Euxodo, devemos falar na demonstração, no caso de triângulos, da proposição 1 do Livro VI de Euclides: Triângulos e paralelogramos sob a mesma altura estão entre si como as suas bases, apresentada por Sá (2000), usando os equimúltiplos, contornando deste modo a incomensurabilidade que fez com que a demonstração apresentada pelos pitagóricos deixasse de ser aceita.

Elementos X, 1: Dadas duas grandezas desiguais, se da maior subtrair-se uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

De fato. Consideremos a e b duas grandezas do mesmo tipo (2.1a) e suponha-se, sem perda de generalidade, que $a > b$. Atendendo à definição 4 de Elementos V, existe um número natural n, tal que $nb > a$.

(a) a>b **(b)** b>na

Figura 2.1: Segmentos de reta

Nestas condições, tomemos as grandezas a e nb (2.1b). Se a a retirarmos mais da metade, e a nb retirarmos b (que é menos do que a metade de nb), restam-nos duas grandezas: $a_1 < \frac{1}{2}a$ e $(n-1)b$, tais que $(n-1)b > a_1$ (2.2a). Se, por um processo idêntico ao anterior, a a_1 se retirar mais da metade e a $(n-1)b$ retirar novamente b (que é menos do que metade de $(n-1)b$) ficaremos com duas grandezas: $a_2 < a_1$ e $(n-2)b$, tais que $(n-2)b > a_2$.

(a) $(n-1)b > a_1$ **(b)** n-2 passos

Figura 2.2: Demonstração do Método da Exaustão

Ao fim de $(n-2)$ passos, obtemos uma grandeza a_{n-2} tal que $2b > a_{n-2}$. Se a a_{n-2} mais da metade, e a $2b$ retirar b, sobra uma grandeza a_{n-1} tal que $b > a_{n-1}$ (pois a $2b$ retirou-se exatamente a metade). Assim, ao fim de $(n-1)$ passos, obtém-se uma grandeza a_{n-1} menor do que b, a menor das grandezas inicialmente dadas (2.2b), o que prova o método da exaustão (princípio de Eudoxo-Arquimedes).

No cálculo de áreas pode-se dizer que o método da exaustão consiste em buscar aproximações sucessivas da área a ser medida, por falta e por excesso, a partir de outras já conhecidas.

Chamaremos de S a área da figura a seguir, cuja área se deseja obter.

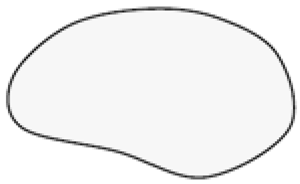


Figura 2.3: Figura de área S

Chamaremos de A a área do polígono interno a S, e de B a área do polígono externo a S.

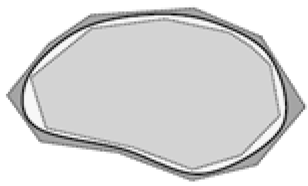


Figura 2.4: Polígono interior de área A

Podemos dizer que a área A é a aproximação por falta e B é a aproximação por excesso da área S. Ou seja: $A \leq S \leq B$.

2.2.1 O Método de Exaustão e a Área do Círculo

Elementos XII, 2 : Círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Podemos reescrever Elementos XII, 2 da seguinte forma : A razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre as áreas de dois quadrados cujos lados são os diâmetros dos círculos.

Consideremos duas circunferências de áreas A e a , e diâmetros D e d, respectivamente, conforme figura abaixo.

Nestas condições, a proporção nos diz que: $\dfrac{A}{a} = \dfrac{D^2}{d^2}$.

Sejam R e r, tais que $D = 2R$ e $d = 2r$. Assim, as áreas das circunferências serão dadas por $A = \pi R^2$ e $a = \pi r^2$, e as áreas dos quadrados serão $D^2 = (2R)^2$ e $d^2 = (2r)^2$.

Segue-se que: $\dfrac{A}{a} = \dfrac{D^2}{d^2} \iff \dfrac{\pi R^2}{\pi r^2} = \dfrac{(2R)^2}{(2r)^2} \iff \dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{R^2}{r^2}$ ok !

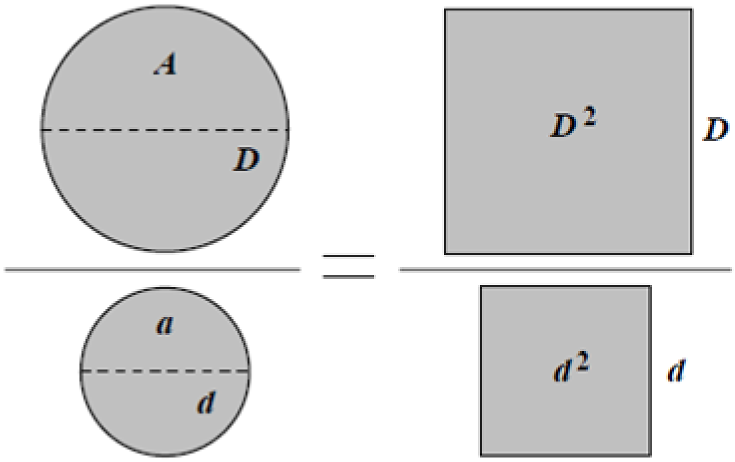


Figura 2.5: Relações nas circunferências

Demonstração por absurdo (Euclides)

Consideremos dois círculos de áreas A e a, e diâmetros D e d, respectivamente. Suponhamos que a proposição é falsa, então o círculo de área A está para uma certa área X (diferente de a) assim como D^2 está para d^2, ou seja, $\dfrac{A}{X} = \dfrac{D^2}{d^2}$.

Temos dois casos a considerar: $X < a$ ou $X > a$. Consideremos o caso $X < a$. Vamos aplicar o método da exaustão (Elementos X, 1) às quantidades a e $a - X$ ($a > a - X$). Para isso inscreveremos no círculo de área a um quadrado, e chamaremos de E, F, G e H os seus vértices (2.6a).

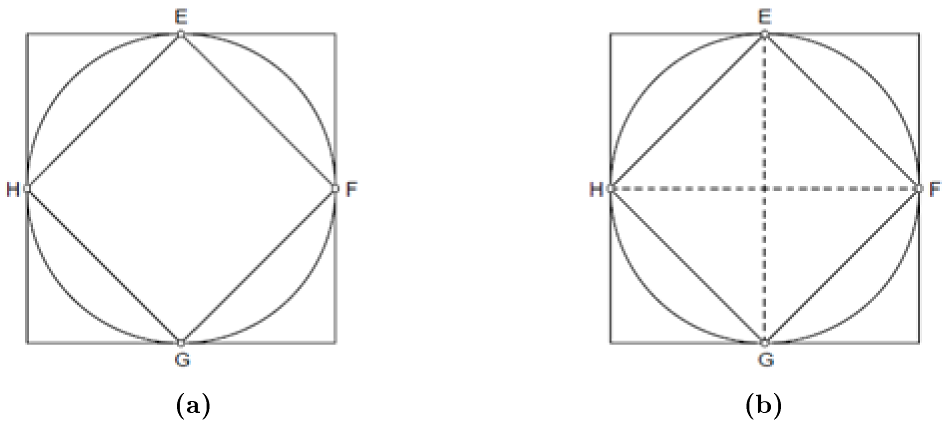
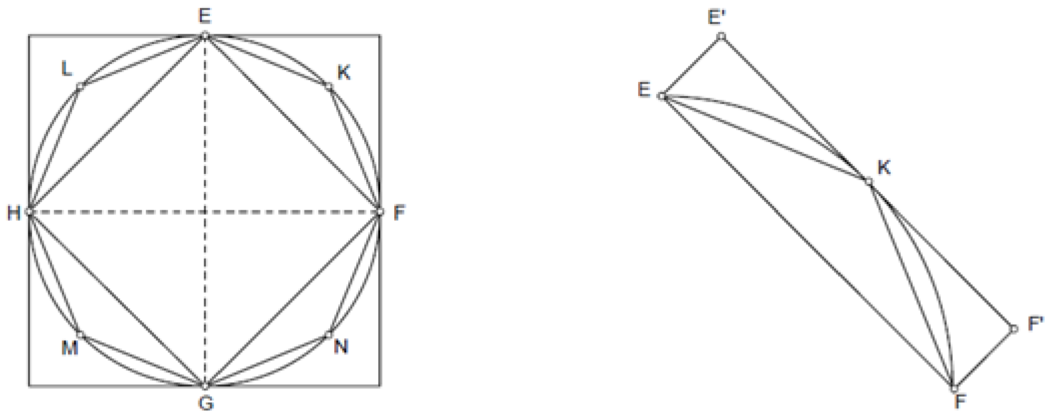


Figura 2.6: Utilização do Método da Exaustão

Se pelos pontos E, F, G e H traçarmos retas tangentes ao círculo, obteremos um quadrado (2.6b) cuja área facilmente se verifica ser o dobro da do quadrado inicial, pelo que a área deste último será superior a metade da área do círculo. Consideremos agora os pontos K, L, M e N, pontos médios de cada um dos arcos EF, FG, GH e HE, respectivamente, e tracemos os segmentos de reta que unem os pontos K, L, M e N com os extremos dos arcos de que eles são pontos médios (2.7a).



(a) (b)

Figura 2.7: Continuação do Método da Exaustão

Se por K traçarmos a tangente ao círculo obtemos o retângulo $EE'F'F$ (2.7b) cuja área será o dobro da do triângulo EFK, o que significa que esta última será superior a metade da área do segmento de círculo EFK, o que é análogo com cada um dos triângulos FNG, GMH e HLE (2.7a).

Continuando o processo de inscrever polígonos no círculo, acaba-se obtendo, pelo princípio de Eudoxo-Arquimedes, um polígono cuja área chamaremos de p, subtraída a a (área do círculo) resultará numa quantidade inferior a $a - X$, ou seja, $a - p < a - X$. Então, podemos concluir que $p > X$. Consideremos o polígono semelhante aquele, mas inscrito no círculo de diâmetro D. Seja P a área deste último polígono. Então, $\dfrac{P}{p} = \dfrac{D^2}{d^2}$, o que já foi provado também por Euclides em Elementos XII, 1.

Estamos supondo também que $\dfrac{D^2}{d^2} = \dfrac{a}{X}$, logo $\dfrac{P}{p} = \dfrac{a}{X}$. Porém $P < A$, sendo P a área de um polígono inscrito num círculo de área A, onde $p < X$, sendo contrário ao que tínhamos visto.

Logo, a hipótese de ser $X < a$ não se poderá verificar.

O caso $X > a$ reduz-se ao anterior trocando o papel dos círculos de área A e a. De fato, $\frac{a}{X} = \frac{D^2}{d^2}$ é equivalente a $\frac{X}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, e existirá uma certa área Y, tal que $\frac{X}{A} = \frac{a}{Y}$.

De $X > a$, conclui-se que $Y < a$, estando assim reduzidos ao caso anterior. Logo $X > a$ leva também a uma contradição. Portanto, temos que $X = a$, como queríamos demonstrar.

O método da exaustão foi descoberto, demonstrado e aplicado. Antes de aplicá-lo é preciso conhecer o resultado que se quer provar. No caso da área do círculo, Arquimedes já considerava a seguinte equivalência:

Um círculo equivale (em área) a um triângulo retângulo que tem altura igual ao seu raio e a base igual ao comprimento da sua circunferência.

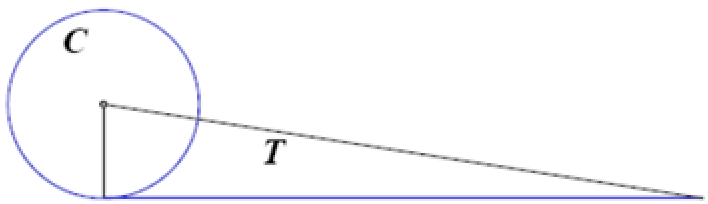


Figura 2.8: Círculo equivalente a um triângulo (em área)

Em notação atual, essa equivalência pode ser escrita da seguinte forma:

Área do círculo $= \frac{(2 \cdot \pi \cdot r)r}{2}$. Ou ainda,

Área do círculo $= \pi r^2$

O método da exaustão pode ser aplicado para demonstrar essa igualdade. Para tanto, consideremos C a área do círculo, e T a área do triângulo, e desse modo temos três possibilidades de comparação entre essas áreas: $C > T$, $C < T$ ou $C = T$.

Faremos aproximações da área do círculo, por falta e por excesso, através de polígonos regulares inscritos e circunscritos, e mostraremos que as duas primeiras possibilidades são absurdas, concluindo então que $C = T$.

1º caso: $C > T$

Temos então duas grandezas de mesma natureza (área), C e $C - T$, às quais aplicaremos o método da exaustão. Vamos retirar da maior que é C, um quadrado inscrito cuja área é P_1, que é maior do que a metade da área de C . A área restante será $C - P_1$.

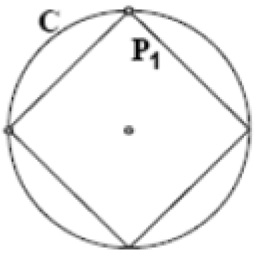


Figura 2.9: 1º caso: $C > T$

Repetindo o processo, da área restante $C - P_1$, vamos retirar quatro triângulos isósceles, que correspondem a uma parte maior do que sua metade.

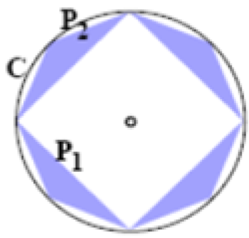


Figura 2.10: Retirar triângulos isósceles de $C - P_1$

Notemos que a área dos triângulos somada à área do quadrado P_1 retirado anteriormente, corresponde à área de um octógono regular, cuja área chamaremos de P_2. Segue-se que a área restante será então $C - P_2$.

Repetindo este processo um número finito de vezes, obteremos um polígono regular de área P_n inscrito no círculo C, tal que a área restante será $C - P_n$ é menor do que as duas áreas C e $C - T$ consideradas inicialmente. Assim, como $C - P_n < C - T$, concluímos que $T < P_n$.

2º caso: $C < T$

Consideremos agora P_1 a área do quadrado circunscrito ao círculo C. Usaremos o método da exaustão às grandezas $T - C$, que é a menor delas, e P_1, um quadrado circunscrito ao círculo C.

Do quadrado P_1 subtraímos a área do círculo C, que é maior do que a metade da área do quadrado. A área restante será $P_1 - C$.

Repetindo o processo, da área restante $P_1 - C$, vamos retirar quatro triângulos isósceles, que é maior do que a sua metade.

Notemos que a área restante corresponde à diferença entre a área do octógono regular circunscrito e a área de C. Chamando de P_2 a área do octógono, a área

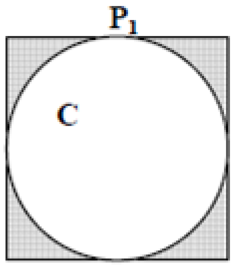


Figura 2.11: 2º caso: $C < T$

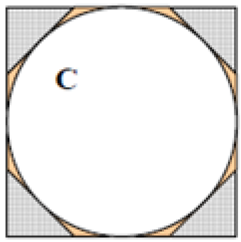


Figura 2.12: Retirar triângulos isósceles de $P_1 - C$

restante pode ser representada por $P_2 - C$.

Repetindo este processo um número finito de vezes, obteremos um polígono regular de área P_n circunscrito ao círculo C, tal que a área restante será $P_n - C$ é menor do que as duas áreas consideradas inicialmente. Assim, como $P_n - C < T - C$, concluímos que $P_n < T$.

Por outro lado, considerando que P_n é um polígono regular circunscrito ao círculo C, pode-se afirmar que o apótema a de P_n é maior do que o raio r do círculo C, e que o perímetro P do polígono regular P_n é maior do que o comprimento C da circunferência. Assim, segue-se que $\frac{aP}{2} > \frac{rC}{2}$.

Ocorre que $\frac{aP}{2}$ corresponde à área do polígono regular circunscrito P_n e $\frac{rC}{2}$ corresponde à área do triângulo T, o que nos leva a $P_n > T$. Isso mostra que a conclusão anterior $P_n < T$, é absurda e nesse caso, também é absurda a afirmativa inicial $C < T$.

Lembrando das três possibilidades apresentadas no inicialmente nesta demonstração, $C > T$, $C < T$ e $C = T$, como o 1º e o 2º caso são absurdos, podemos concluir que $C = T$, ou seja, a área do círculo $= \pi \cdot r^2$.

2.2.2 O Método de Exaustão e a Área de Uma Figura Plana Delimitada Pelos Eixos Coordenados e Um Segmento Parabólico

Nessa parte desse TCC, quero verificar o método de Arquimedes e a sua funcionalidade para determinar a área de um segmento parabólico. No caso, utilizarei a soma de Riemann junto com a teoria de limite no infinito para comprovar os resultados obtidos por Arquimedes no século II a.C..

1) Vamos decompor o segmento da parábola contido em um quadrado de 1 cm de lado, em duas partes, e ficaremos com a figura 2.13:

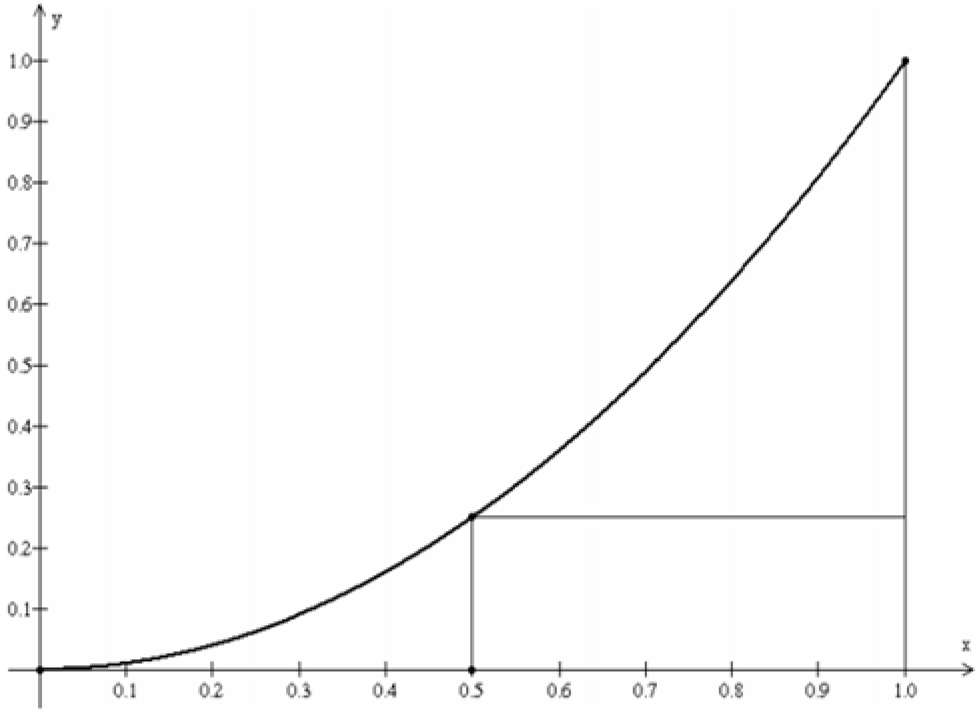


Figura 2.13: Segmento de parábola dividido em duas partes

Cálculos:

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,125\ cm^2$

2) Agora, decompondo em três partes, temos a figura 2.14:

Cálculos:

a) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$

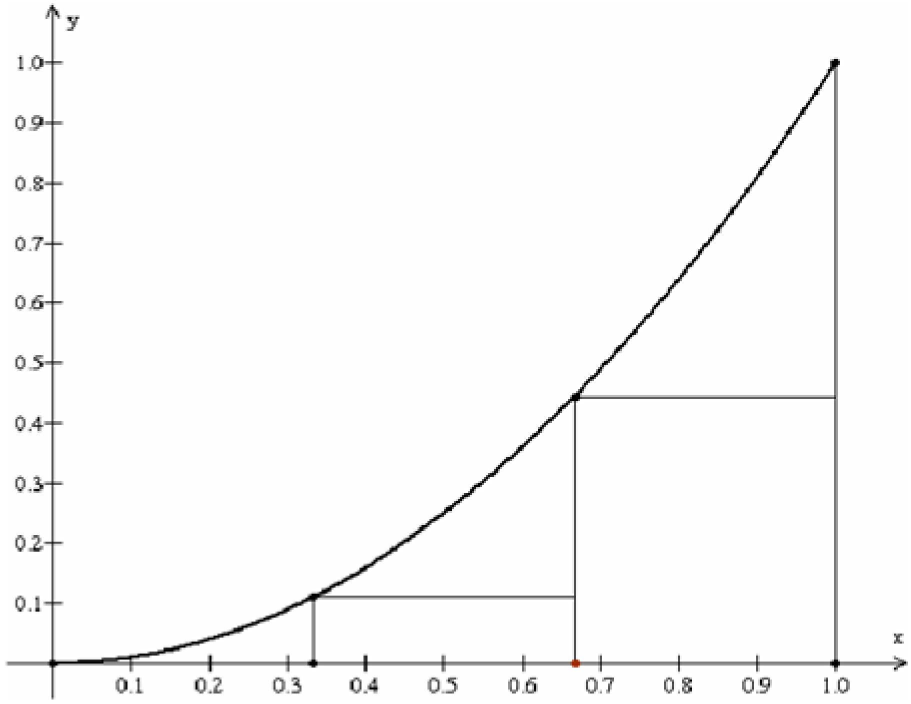


Figura 2.14: Segmento de parábola dividido em três partes

b) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$

Logo, $\frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{5}{27} = 0,185\ cm^2$

Usando indução, chegaremos numa fórmula que nos permitirá calcular a área do segmento de parábola. Assim, decompondo o segmento de parábola em $n-1$ partes, n natural, teremos:

$$S_n = \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2)$$

Agora, vamos provar:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Para $n = 2$, temos: $\frac{2(2-1)(2\cdot 2-1)}{6} = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{6} = 1$ OK!

Supor que vale para algum $n-1$ e provar que vale para n.

$$
\begin{aligned}
(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 &= \frac{(n+1)(n)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+n^2 \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)+6n^2}{6} \\
&= \frac{n[(n-1)(2n-1)+6n]}{6} \\
&= \frac{n[2n^2-3n+1]}{6} \\
&= \frac{n\left[2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Tomando n suficientemente grande, $n \to \infty$ (n tendendo ao infinito), teremos:

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\right)$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Portanto, se dividirmos o segmento $[0,1]$ em infinitas partes, a área de segmento da parábola será, aproximadamente, $\frac{1}{3}$ da área total do quadrado que contém esse segmento de parábola. A conclusão de Arquimedes que a área de segmento de parábola é $\frac{1}{3}$ da área total do quadrado que a contém se sustenta tanto no campo experimental quanto no teórico.

Agora, seja $P(x)$ um polinômio do 3º grau, e $P(x+1) = P(x) + x^2$. Tomando $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, teremos:

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d = ax^3 + bx^2 + cx + d + x^2$$

$$a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + cx + c + d =$$
$$ax^3 + (b+1)x^2 + cx + d$$

$$ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a + b + c + d =$$
$$ax^3 + (b+1)x^2 + cx + d$$

$$\begin{cases} 3a + b = b + 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3} \\ 3a + 2b + c = c \Rightarrow 1 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \\ a + b + c + d = d \Rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Logo $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} + d$, com d qualquer. Seja $d = 0$.
Se $P(x+1) = P(x) + x^2$, segue-se que:
$x^2 = P(x+1) - P(x)$, logo
$1^2 = P(2) - P(1)$
$2^2 = P(3) - P(2)$
....
$(n-1)^2 = P(n) - P(n-1)$
$+$
———————————————————————-

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = P(n) - P(1)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

2.2.3 O Método de Exaustão e a Área Abaixo da Função Cúbica

Agora, vamos calcular a área abaixo da cúbica $y = x^3$ no intervalo de 0 a 1. Decompondo o segmento da função em $n-1$ partes, n natural, teremos, de acordo com a figura 2.15

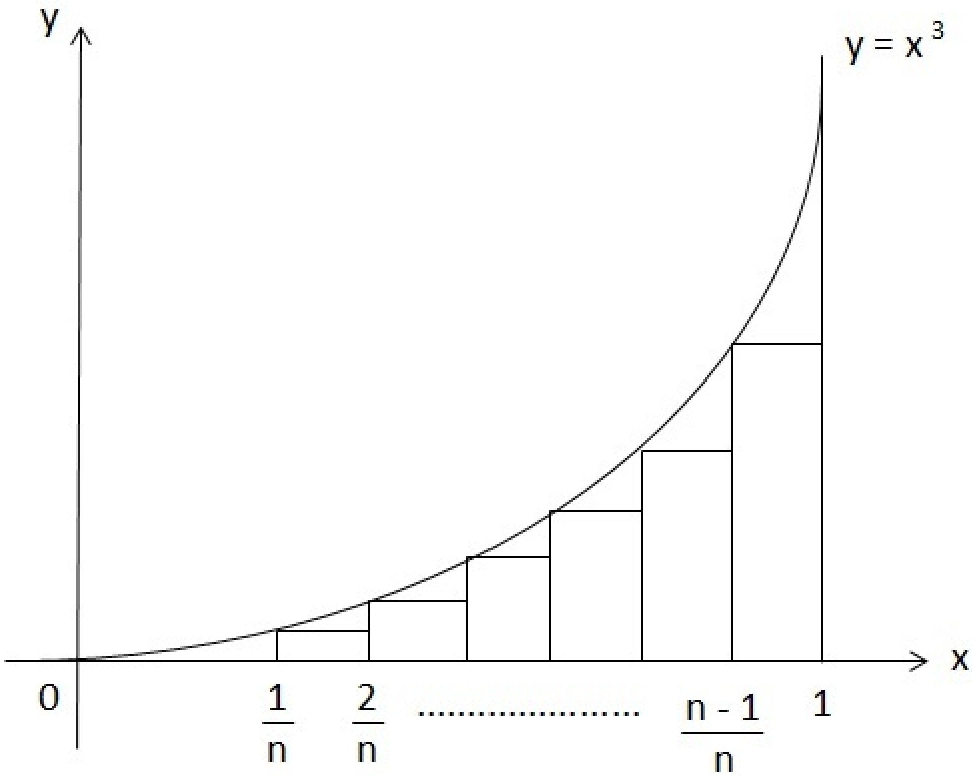


Figura 2.15: Segmento de parábola dividido em n-1 partes

$$S_n = 0 + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right] + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3)$$

Agora, seja $P(x)$ um polinômio do 4º grau, e $P(x+1) = P(x) + x^3$. Tomando

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, teremos:

$$a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e = \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e + x^3$$

$$a(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + b(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + c(x^2 + 2x + 1) + \\ dx + d + e = ax^4 + (b+1)x^3 + cx^2 + dx + e$$

$$ax^4 + (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 + (4a+3b+2c+d)x \\ + a + b + c + d + e = ax^4 + (b+1)x^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\begin{cases} 4a + b = b + 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4} \\ 6a + 3b + c = c \Rightarrow \dfrac{3}{2} + 3b = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \\ 4a + 3b + 2c + d = d \Rightarrow 1 - \dfrac{3}{2} + 2c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{1}{4} \\ a + b + c + d + e = e \Rightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + d = 0 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Logo $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 0 \cdot x + e$, com e qualquer. Seja $e = 0$.
Então, $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.
Se $P(x+1) = P(x) + x^3$, segue-se que:
$x^3 = P(x+1) - P(x)$, logo
$1^3 = P(2) - P(1)$
$2^3 = P(3) - P(2)$
....
$(n-1)^3 = P(n) - P(n-1)$
$+$
———————————————————-

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = P(n) - P(1)$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots (n-1)^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots (n-1)^3 = \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4}$$

Como $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3)$, teremos: $S_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4}$

Tomando n suficientemente grande, $n \to \infty$ (n tendendo ao infinito), teremos:

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Usando um procedimento análogo aos utilizados para obter as áreas abaixo dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ no intervalo $[0, 1]$, é possível obter a área abaixo do gráfico da função $h(x) = x^n$ para qualquer natural com n maior que ou igual a 4, no intervalo $[0, 1]$.

2.2.4 O Método de Exaustão e a Quadratura da Parábola

Outra aplicação do método da exaustão é na quadratura da parábola. Na matemática grega, o cálculo de áreas e volumes eram feitos por comparação com áreas conhecidas, como por exemplo, a área do quadrado, já mencionada em parágrafos anteriores. Quadratura (ou quadrar) era o nome dado a esse cálculo. Medir uma figura geométrica, para os matemáticos gregos, não era encontrar um número, mas sim uma figura conhecida com o mesmo comprimento, área ou volume da primeira. Nessa linha de raciocínio, o que se coloca não é o problema de calcular a medida de uma área, mas o problema de determinar a relação entre duas áreas: a área que se quer determinar e uma área já determinada. As secções cônicas eram conhecidas havia mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso foi feito no cálculo de suas áreas. A prova pelo método de exaustão é longa e elaborada, mas Arquimedes provou rigorosamente que a área K de uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico é igual a quatro terços da área de um triângulo T, tendo a mesma base e a mesma altura de uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico.

É nesse tratado que encontramos o hoje usualmente chamado de axioma de Arquimedes: "Que o excesso pelo qual a maior de duas áreas diferentes excede a menor pode, sendo somada a si mesma, vir a exceder qualquer área finita dada". Isto é basicamente o mesmo axioma da exaustão que Arquimedes admitiu que um lema semelhante a esse já era usado por geômetras antes, "pois é por seu uso que demonstraram que círculos estão para si na razão dupla de seus diâmetros, e que as esferas estão entre si na razão tripla de seus diâmetros; e ainda que toda pirâmide é um terço do prisma de mesma base que a pirâmide e mesma altura; também, que todo cone é um terço do cilindro de mesma base que o cone e mesma altura." (Boyer, 1996).

Para demonstrar esse resultado, Arquimedes usa o método de exaustão. Inscreve na figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico um triângulo de mesma base e altura. A seguir, em cada uma das figuras planas delimitadas pelos eixos coordenados e um segmento parabólico resultantes, inscreve igualmente um triângulo, e continua a inscrever triângulos nas figuras planas delimitadas pelos eixos coordenados e um segmento parabólico resultantes em cada etapa. Prova então que para cada triângulo, os dois triângulos construídos sobre seus lados têm área total igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo dado. Dessa forma ele exaure a figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico, removendo sucessivamente esses triângulos inscritos. A área total pode ser aproximada por uma soma de áreas que, agrupadas adequadamente, levam a uma progressão geométrica em que cada termo, exceto o primeiro, é $\frac{1}{4}$ do anterior. A soma de tal progressão geométrica é $\frac{4}{3}$ da área do primeiro termo. Cuidadosamente, Arquimedes mostra que a área de uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico não pode exceder da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser menor do que esse valor. Assim sendo, Arquimedes chega à conclusão desejada e, evitando a armadilha dos infinitésimos e das operações com limites, atinge um nível de rigor insuperado até o século XVIII.

Arquimedes define o que significa base, altura e vértice de uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico: a base é a reta que interrompe a parábola, a altura é a perpendicular máxima que pode ser traçada da curva até a base, e o vértice o ponto através do qual a altura é traçada. As outras alturas dos outros triângulos traçados são obtidas por intersecções da curva (parábola) com retas paralelas à altura máxima da parábola. Essas retas são traçadas tendo como referência de partida, os respectivos pontos médios em que foi dividida a base da parábola (Figura 2.16).

Esclarecido como formar o polígono inscrito na parábola, este polígono se aproxima da parábola, isto é, pode ser inscrito nesta um polígono de tal forma que os segmentos restantes sejam menores do que qualquer grandeza determinada. Arquimedes inscreve sucessivos triângulos na figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico, calcula a área desses triângulos e vai obtendo valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos. Assim, demonstra que a área de uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triangulo com a mesma base e altura do segmento. No entanto, Arquimedes não prolonga as somas até o infinito. Ele deduz o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior e, nem menor do que esses $\frac{4}{3}$. Segue-se que, nomeando as partes resultantes do processo de quadratura da parábola temos: seja P uma figura plana delimitada pelos eixos coordenados e um segmento parabólico e T_0 o triângulo inscrito (Figura 2.16); nos dois segmentos restantes são inscritos outros dois triângulos, t_{01} e t_{02}, de mesma base e altura. Seja a soma destes T_1. Nas quatro figuras planas delimitadas pelos eixos coordenados e um segmento parabólico formadas, são inscritos os triângulos t_{11}, t_{12}, t_{13}, e t_{14}, cuja soma é T_2.

Precisamos demonstrar, usando as propriedades da parábola, que $T_1 = \frac{T_0}{4}$, $T_2 = \frac{T_1}{4}$ e assim sucessivamente, ou seja, os "pedaços" que são acrescidos ao triângulo não só se tornam cada vez mais menores, mas cada um é igual a $\frac{1}{4}$ do anterior.

Para isso, considere a figura 2.17. Por meio de convenientes rotações e translações podemos supor que qualquer parábola assume a forma $y = ax^2$, com $a > 0$. Suponha o segmento parabólico limitado pela reta $y = b$, com $b > 0$. Mostraremos que $T_1 = \frac{T_0}{4}$ (os demais triângulos seguem os mesmos cálculos).

Da figura 2.17, temos que: $T_0 = \dfrac{2b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}}{2} = b\sqrt{\frac{b}{a}}$.

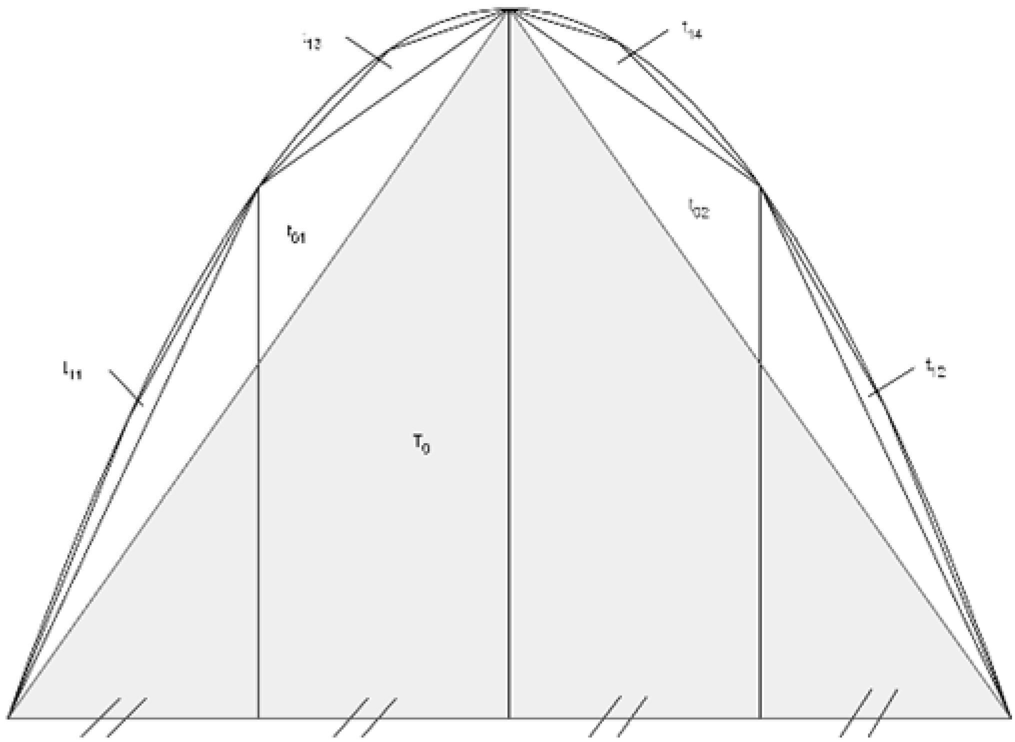


Figura 2.16: Quadratura da Parábola

Em D, temos que:
$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ e $y = \sqrt{\frac{b}{4}}$. Daí, o ponto $D = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{4}\right)$.

A reta r passando pelos pontos A e C é dada pela forma $r : y = mx$, onde A é a origem, $m = \dfrac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{ab}$.

Seja s, a reta perpendicular à r passando por D. Temos que $s : y = -\frac{1}{m}x + k$, ou seja, $s : y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + k$. Como o ponto D é ponto da reta, segue-se que $\frac{b}{4} = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{ab}} + k \Rightarrow k = \frac{2+ab}{4a}$.

Assim, $s : y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$.

O ponto F é a intersecção das retas r e s. Ou seja: $\sqrt{ab} \cdot x = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$.

Ou ainda, $x = \dfrac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a \cdot (1+ab)}$.

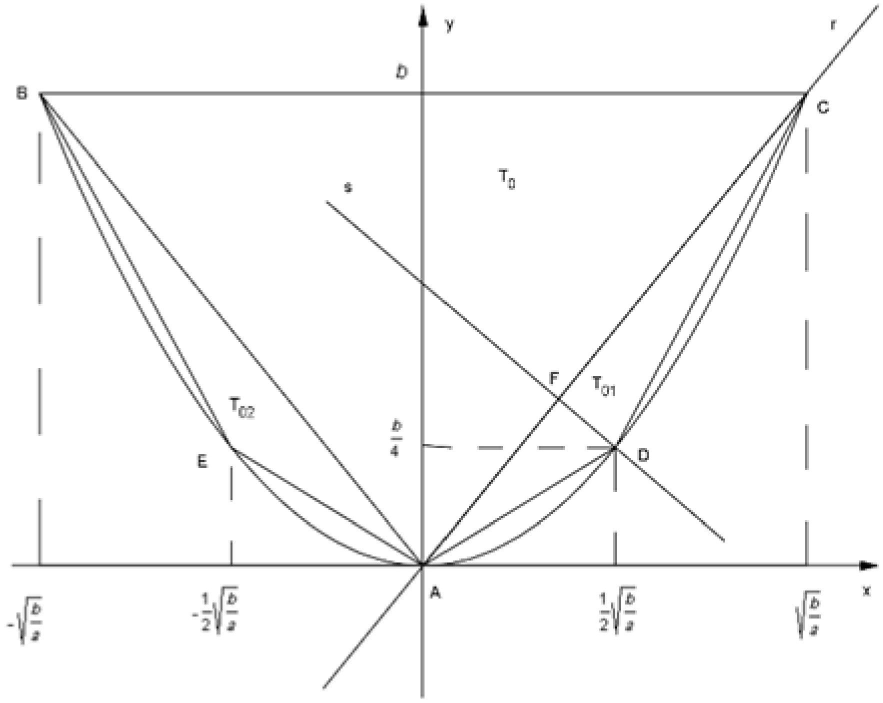


Figura 2.17: Desenvolvimento do processo de quadratura

Segue-se que $y = \sqrt{ab} \cdot x = \sqrt{ab} \cdot \left[\dfrac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a \cdot (1+ab)} \right] = \dfrac{b \cdot (2+ab)}{4 \cdot (1+ab)}$

Portanto, temos que $F = \left(\dfrac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a \cdot (1+ab)}, \dfrac{b \cdot (2+ab)}{4 \cdot (1+ab)} \right)$.

Para calcular a área do triângulo $t_0 1$, encontraremos primeiro sua altura h, que é a distância do ponto D ao ponto F:

$$h = d(D,F) =$$

$$\sqrt{\left[\frac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a \cdot (1+ab)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} \right]^2 + \left[\frac{b \cdot (2+ab)}{4 \cdot (1+ab)} - \frac{b}{4} \right]^2}$$

Calculando h, teremos:

$$h^2 = \frac{(2+ab)^2 \cdot ab}{16a^2 \cdot (1+ab)^2} - \frac{2 \cdot (2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a \cdot (1+ab)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} + \frac{b^2 \cdot (2+ab)^2}{16 \cdot (1+ab)^2} - \frac{2 \cdot b \cdot (2+ab)}{4 \cdot (1+ab)} \cdot \frac{b}{4} + \frac{b^2}{16}$$

$$h^2 = \frac{(2+ab)^2 \cdot ab}{16a^2 \cdot (1+ab)^2} - \frac{(2+ab) \cdot b}{4a \cdot (1+ab)} + \frac{b}{4a} + \frac{b^2 \cdot (2+ab)^2}{16 \cdot (1+ab)^2} - \frac{b^2 \cdot (2+ab)}{8 \cdot (1+ab)} + \frac{b^2}{16}$$

$$h^2 = \frac{(2+ab)^2 ab - 4ab(1+ab)(2+ab) + 4ab(1+ab)^2}{16a^2(1+ab)^2} + \frac{a^2b^2(2+ab)^2 - 2a^2b^2(1+ab)(2+ab) + a^2b^2(1+ab)^2}{16a^2(1+ab)^2}$$

$$h^2 = \frac{(2+ab)^2 \cdot (ab + a^2b^2) + (1+ab)^2(4ab + a^2b^2)}{16a^2(1+ab)^2} + \frac{(1+ab)(2+ab)[-4ab - 2a^2b^2]}{16a^2(1+ab)^2}$$

$$h^2 = \frac{(2+ab)^2 \cdot [ab \cdot (1+ab)] + (1+ab)^2 \cdot [ab \cdot (4+ab)]}{16a^2(1+ab)^2} + \frac{(1+ab) \cdot (2+ab) \cdot [-2ab \cdot (2+ab)]}{16a^2(1+ab)^2}$$

$$h^2 = \frac{(1+ab) \cdot [ab \cdot (2+ab)^2 + (1+ab) \cdot ab \cdot (4+ab)] +}{16a^2(1+ab)^2} \quad \frac{[(2+ab)^2 \cdot (-2ab)]}{16a^2(1+ab)^2}$$

$$\begin{aligned}h^2 &= \frac{(1+ab)\cdot[-ab\cdot(2+ab)^2+(1+ab)\cdot ab\cdot(4+ab)]}{16a^2(1+ab)^2}\\ &= \frac{[ab\cdot[-(2+ab)^2+(1+ab)\cdot(4+ab)]]}{16a^2(1+ab)}\\ &= \frac{b\cdot(-4-4ab-a^2b^2+4+ab+4ab+a^2b^2)}{16a(1+ab)}\\ &= \frac{a\cdot b^2}{16a(1+ab)}\end{aligned}$$

Enfim, temos que h vale: $h = \dfrac{b}{4\cdot\sqrt{1+ab}}$. A base do mesmo triângulo é dada por:

$$d(A,C) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}}$$

Assim, a área do triângulo t_01 é igual a:

$$A_{t_{01}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+ab^2}{a}}\cdot\frac{b}{4\cdot\sqrt{1+ab}}.$$

Daí, a área dos triângulos $A_{t_{01}} + A_{t_{02}} = T_1$, onde

$$T_1 = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}}\cdot\frac{b}{4\cdot\sqrt{1+ab}} = \frac{b}{4}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{T_0}{4}$$

O processo é essencialmente o mesmo para provar que $T_2 = \dfrac{T_1}{4}, T_3 = \dfrac{T_2}{4}, ...$ e assim por diante.

Voltando ao cálculo da área do segmento parabólico, basta perceber que o polígono construído (2.16) se aproxima efetivamente do segmento da parábola e que $T_0+T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n+\cdots = \dfrac{4}{3}T_0$. Ou ainda, $T_0+\dfrac{T_0}{4}+\dfrac{T_0}{4^2}+\dfrac{T_0}{4^3}+\cdots+\dfrac{T_0}{4^n}+\cdots \to \dfrac{4}{3}T_0$.

Em linguagem atual, repetindo o processo infinitamente, teríamos

$$T_0\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\right) = T_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = T_0\cdot\frac{4}{3},$$

pois a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ converge para $\dfrac{4}{3}$, já que é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{4}$. Sendo assim, como a soma dos termos de uma P.G. infinita de razão q, com $-1 \leq q \leq 1$ é dada por $S_n = \frac{a_1}{1-q}$, segue-se que: $S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ converge.

É importante ressaltar que mesmo não pensando em infinito (soma de infinitos termos) em sua época, Arquimedes encontra a soma exata da série.

Capítulo 3

Cálculo de Áreas Aplicando o Conceito de Integral Definida

3.1 Limite de Uma Função

3.1.1 Noção intuitiva de Limite

Uma relação f de A em B recebe o nome de função definida em A com imagens em B, ou aplicação de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

Seja a função $f(x) = \dfrac{(2x+1)\cdot(x-1)}{x-1}$ definida para todo x real e x diferente de 1. Se x é diferente de 1, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$, obtendo $f(x) = 2x + 1$.

Estudemos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferente de 1.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores do que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,99
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Tabela 3.1: Valores de x próximo de 1, com $x < 1$

Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores do que 1, temos:

Observemos que em ambas as tabelas, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará $f(x)$.

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Tabela 3.2: Valores de x próximo de 1, com $1 < x$

Notemos na primeira tabela que:
$x = 0,9 \Rightarrow f(x) = 2,8$, isto é, $x - 1 = -0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$.
$x = 0,99 \Rightarrow f(x) = 2,98$, isto é, $x - 1 = -0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,02$.
$x = 0,999 \Rightarrow f(x) = 2,998$, isto é, $x - 1 = -0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,002$.
E a segunda tabela nos mostra que:
$x = 1,1 \Rightarrow f(x) = 3,2$, isto é, $x - 1 = -0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$.
$x = 1,01 \Rightarrow f(x) = 3,02$, isto é, $x - 1 = -0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$.
$x = 1,001 \Rightarrow f(x) = 3,002$, isto é, $x - 1 = -0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$.
Portanto, pelas duas tabelas vemos que:
$|x - 1| = 0,1 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,2$.
$|x - 1| = 0,01 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,02$.
$|x - 1| = 0,001 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,002$.
Observemos que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isso tornarmos x suficientemente próximo de 1.

Um outro modo de dizermos isto é: podemos tornar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno.

3.2 Definição e Propriedades

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Consideremos as situações a seguir:

Na situação (a), f não está definida em p, mas existe L que satisfaz a propriedade:

- Para todo $\epsilon > 0$ dado , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \tag{3.1}$$

Na situação (b), f está definida em p, mas não é contínua em p, entretanto existe L satisfazendo (3.1); observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial.

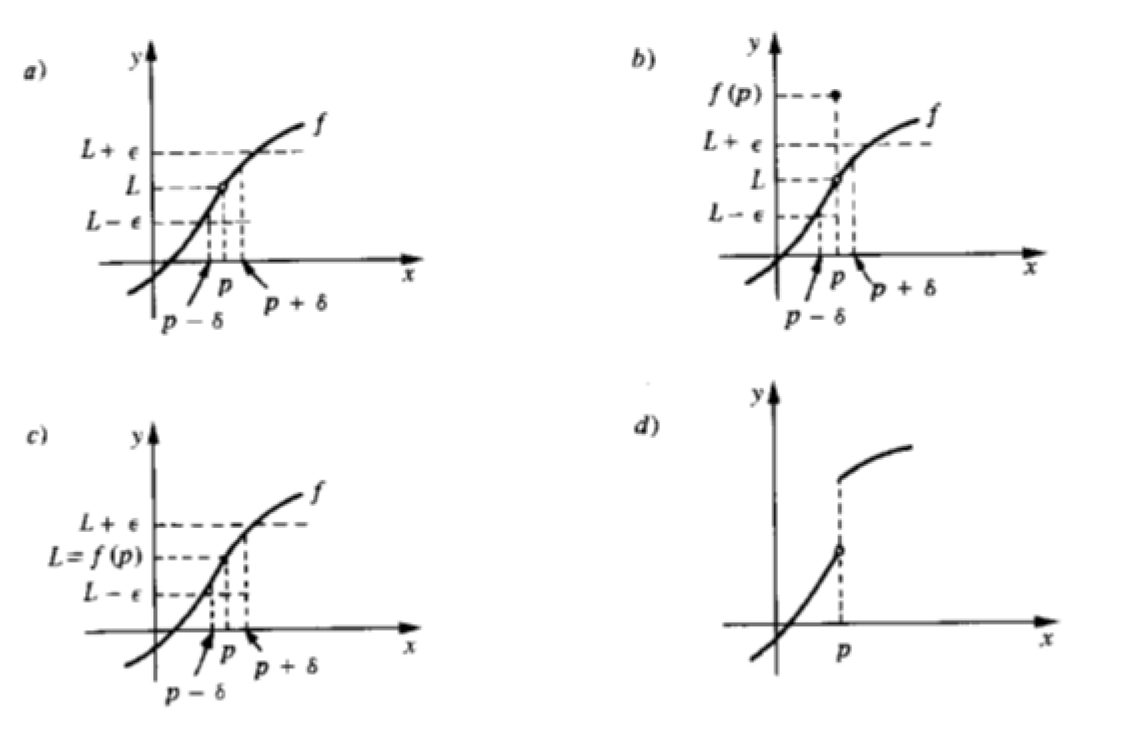


Figura 3.1: Ideia de limite

Na situação (c), f é contínua em p, assim $L = f(p)$ satisfaz (3.1). Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo (3.1) em p.

A propriedade (3.1) é equivalente a:

- Para todo $\epsilon > 0$ dado , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Observe que $0 < |x - p| < \delta \iff p - \delta < x < p + \delta, x \neq p$.

Definição 2 *Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.*

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Assim,

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que, para* $x \in D_f, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

3.2.1 Unicidade do Limite

Vamos provar a seguir que existe no máximo um número L satisfazendo a propriedade acima. De fato, suponhamos que L_1 e L_2, satisfaçam, em p, a propriedade acima; então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$

$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$, tomando-se $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $0 < |x-p| < \delta$, então $|L_1-L_2| = |L_1-f(x)+f(x)-L_2| \lg |L_1-f(x)|+|f(x)-L_2| < 2\epsilon$, como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue-se que $L_1 = L_2$.

De acordo com a definição a seguir, o único número L (caso exista) satisfazendo (3.1) é o limite de $f(x)$, para x tendendo a p: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

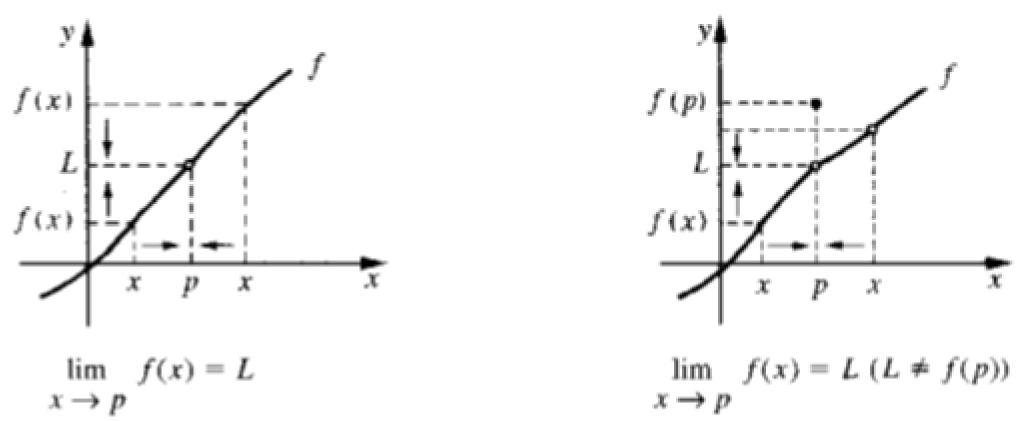


Figura 3.2: Unicidade do Limite

Observações:

1) Suponhamos f definida em p. Comparando as definições de limite e continuidade, resulta: f contínua em $p \iff \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

2) O limite de f em p não depende do valor (caso f esteja definida em p) que f assume em p, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p. Quando estivermos interessados no limite de f em p, basta olharmos para os valores que f assume num "pequeno" intervalo aberto contendo p; o conceito de limite é um conceito local.

3) Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$, tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r <$

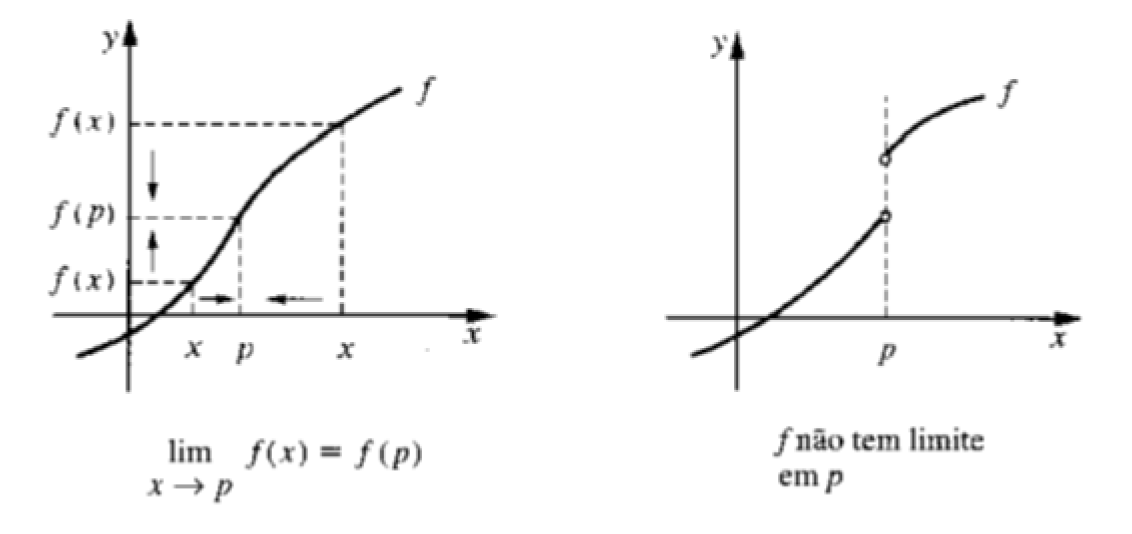


Figura 3.3: $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e f não tem limite

$x < p + r$, com $x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \to p} f(x)$ também existirá e $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x)$.

3.3 Continuidade a partir da Definição de Limite

Sejam f e g funções de gráficos

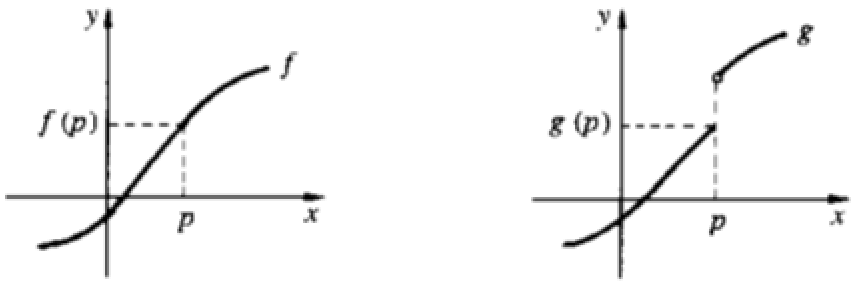


Figura 3.4: Função contínua x Função não contínua

Observe que f e g se comportam de modo diferente em p; o gráfico de f não apresenta "salto" em p , ao passo que o de g, sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

Vejamos as situações apresentadas a seguir.

A função f satisfaz em p a propriedade:

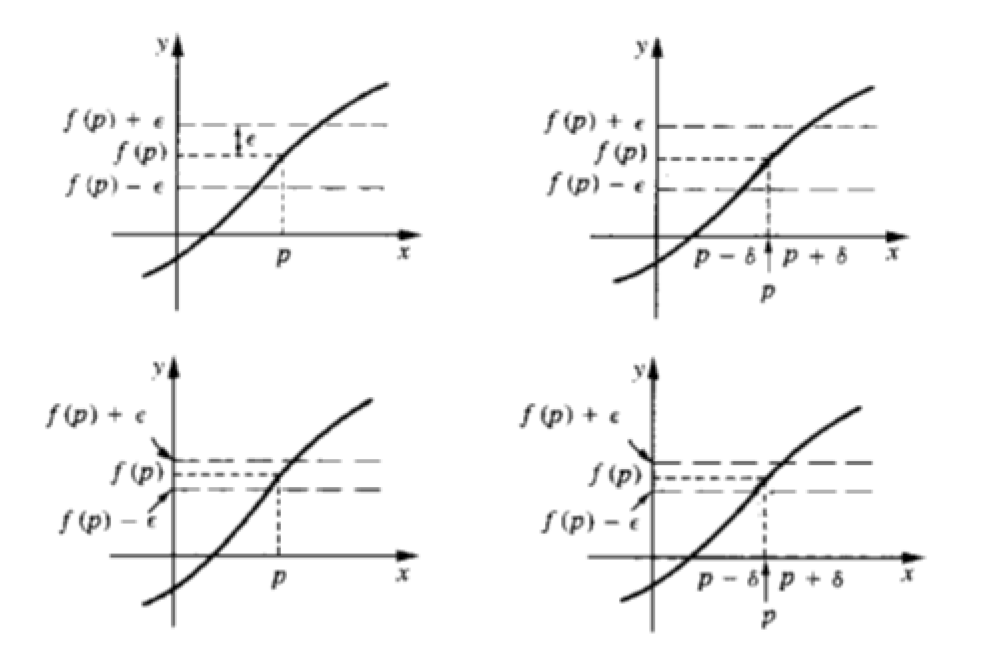


Figura 3.5: Propriedade da função contínua

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p)-\epsilon$ e $f(p)+\epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p-\delta, p+\delta[$, com x no domínio de f.

Ou de forma equivalente:

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \tag{3.2}$$

Entretanto, a função g não satisfaz em p tal propriedade:

Para o $\epsilon > 0$ acima, não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação "Para todo $x \in D_f, p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow g(p) - \epsilon < g(x) < g(p) + \epsilon$".

Qualquer que seja o $\delta > 0$ que se tome, quando x percorre o intervalo $]p-\delta, p+\delta[$, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \epsilon$ e $g(p) + \epsilon$.

A propriedade (3.2) distingue os comportamentos de f e g em p. Adotaremos a propriedade (3.2) como definição de função contínua em p.

Definição 3 *Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos f contínua em p $\iff$ para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$.*

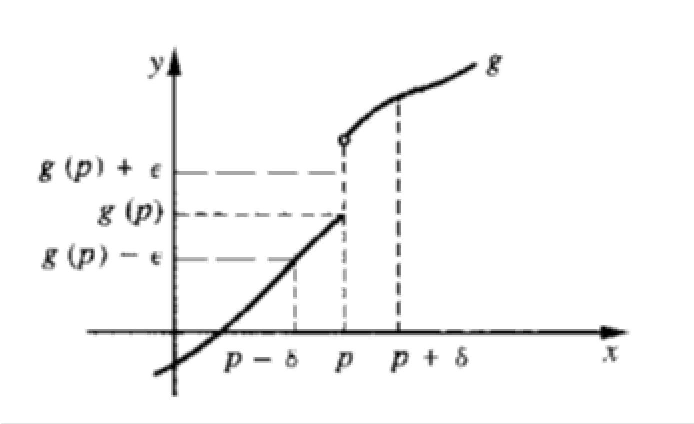


Figura 3.6: g não contínua em p

Observação: Sabemos que $|x-p|<\delta \iff p-\delta<x<p+\delta$ e $|f(x)-f(p)|<\epsilon \iff f(p)-\epsilon<f(x)<f(p)+\epsilon$.

A definição anterior pode, então, ser reescrita, em notação de módulo, na seguinte forma:

f contínua em $p \iff$ para todo $\epsilon>0$ dado, existe $\delta>0$, tal que, para todo $x\in D_f$, $|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(p)|<\epsilon$.

Dizemos que f é contínua em $A\subset D_f$, se for contínua em todo $p\in A$. Dizemos, simplesmente, que f é uma função contínua em todo p de seu domínio.

Exemplo 1 *Mostar que $f(x)=x^3$ é contínua em 1.*

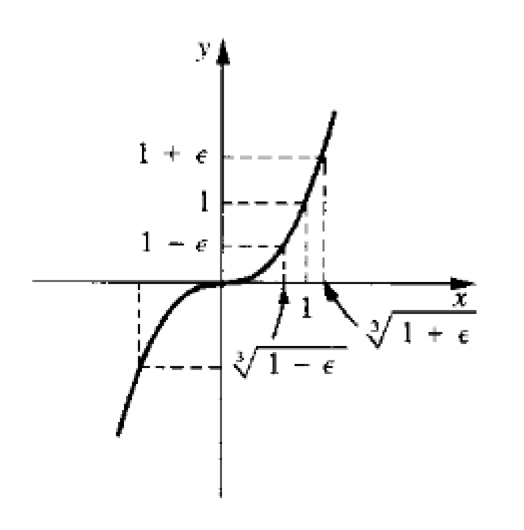


Figura 3.7: Exemplo de função contínua

Solução: Precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe um intervalo aberto I, contendo 1, tal que $x \in I \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$.

Resolvendo a inequação $f(1) - \epsilon < f(x) < (1) + \epsilon$, teremos:

$f(1) - \epsilon < f(x) < (1) + \epsilon \iff 1 - \epsilon < x^3 < 1 + \epsilon \iff \sqrt[3]{1-\epsilon} < x < \sqrt[3]{1+\epsilon}$.

Tomando-se $I =]\sqrt[3]{1-\epsilon}, \sqrt[3]{1+\epsilon}[, 1 \in I, x \in I \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < (1) + \epsilon$.

Logo, $f(x) = x^3$ é contínua em 1.

3.4 Derivabilidade de Uma Função

3.4.1 Motivação

Os problemas considerados fundamentais no desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral dizem respeito ao cálculo de áreas (quadratura) e do traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva.

Nos problemas de áreas, também conhecidos como quadratura, Arquimedes utilizou o "Método de Exaustão" (mencionado no capítulo 2 dessa dissertação).

Já o problema da tangente diz respeito ao traçado da reta tangente a uma curva num determinado ponto. A dificuldade de se encontrar tal reta, reside no fato de determinar qual é a inclinação dessa reta, especificamente naquele ponto da curva, pois por um ponto pode-se traçar infinitas retas.

Esses dois problemas (quadratura e tangente) aparentemente sem relação, deram origem, respectivamente, a dois conceitos matemáticos essenciais do Cálculo: a integral e a derivada.

Sejam f uma função e p um ponto do seu domínio. Limites do tipo $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ ocorrem de modo natural tanto na Geometria quanto na Física.

Consideremos, por exemplo, o problema de definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular. Consideremos, então, a reta s_x que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.

Coeficiente angular de $s_x = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

Quando x tende a p, o coeficiente angular de s_x tende a $f'(p)$, onde:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Perceber que $f'(p)$ é apenas uma notação para indicar o valor do limite acima.

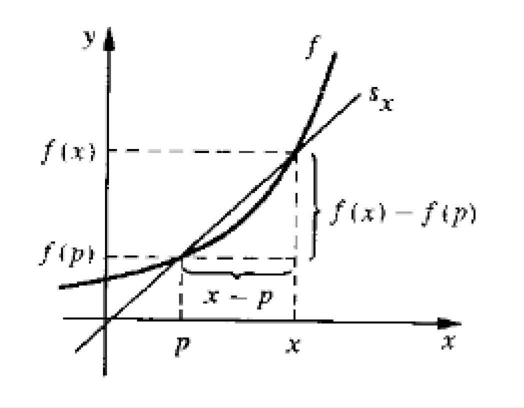


Figura 3.8: Reta Secante

Assim, a medida que x vai se aproximando de p, a reta s_x vai tendendo para a posição da reta T de equação:

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \tag{3.3}$$

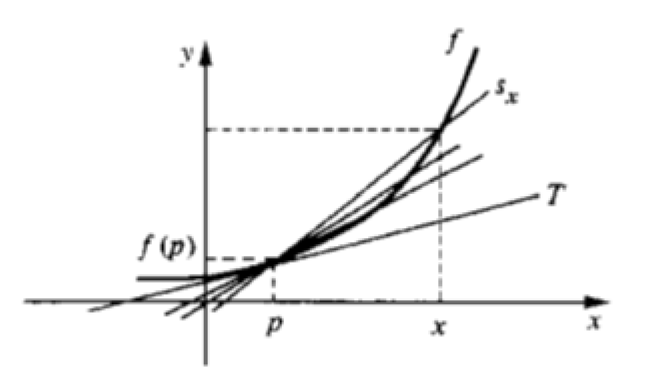


Figura 3.9: Aproximações da reta secante

É natural, então, definir a reta tangente em $(p, f(p))$ como sendo a reta de equação (3.3).

Suponhamos, agora, que $s = f(t)$ seja a equação horária do movimento de uma partícula vinculada a uma reta orientada na qual se escolheu uma origem. Isto significa dizer que a função f fornece a cada instante a abscissa ocupada pela partícula na reta. A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é definida pelo quociente $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

A velocidade (instantânea) da partícula no instante t_0 é definida como sendo o limite:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Esse exemplo é suficiente para levar-nos a estudar de modo puramente abstrato as propriedades do limite:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

3.4.2 Derivada de uma função

Definição 4 *Sejam f uma função e p um ponto qualquer de seu domínio. O limite $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p, e indica-se por $f'(p)$. Assim, $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.*

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $A \subset D$ se for derivável em cada $p \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função derivável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto de seu domínio.

Observação: Segue-se que, das propriedades dos limites que:
$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$.
Assim, $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ ou $f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$.
E conforme visto na introdução acima, a reta de equação:

$$y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

é por definição, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Assim, a derivada de f, em p , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p.

3.4.3 Propriedades da Derivada

Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então, as funções $f + g$, kf e fg são deriváveis em p e tem-se:

1. $(f + g)'(p) = (f)'(p) + (g)'(p)$;

2. $(kf)'(p) = k(f)'(p)$;

3. $(f.g)'(p) = (f)'(p)(g)(p) + (f)(p)(g)'(p)$;

4. $\left(\dfrac{f(p)}{g(p)}\right)' = \dfrac{(f)'(p)(g)(p) - (f)(p)(g)'(p)}{(g(p))^2}$ com $g(p) \neq 0$.

5. Regra da Cadeia: Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis e tais que para todo x no domínio de g, $g(x)$ pertença ao domínio de f. Suponhamos ainda que $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \neq 0$ para todo x e Δx no domínio de g, com $\Delta x \neq 0$. Nestas condições, a composta $y = f(g(x))$ é derivável e vale a regra da cadeia:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exemplo 2 *Seja $f(x) = x^2$. Calcule $f'(x)$.*

Solução:
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)^2 - x^2}{h}$
Como $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$, com $h \neq 0$
Segue-se que $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.
Portanto, se $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Deve-se observar que $f'(x) = 2x$ é a fórmula que fornece a derivada de $f(x) = x^2$, em todo x real. Então, se for preciso calcular por exemplo $f'(5)$, basta fazer: $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

3.5 Definição de Primitiva

Seja f uma função definida num intervalo I . Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Para todo x em I.

Exemplo 3 $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ *é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$, pois, para todo x em $\mathbb{R}$, $F'(x) = \left[\dfrac{1}{3}x^3\right]' = x^2$.*

Observe que, para toda constante k, $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ é também uma primitiva de $f(x) = x^2$.

Exemplo 4 *Para toda constante k, $F(x) = 2x + k$ é primitiva, em $\mathbb{R}$, da função $f(x) = 2$, pois $F'(x) = (2x + k)' = 2$ para todo x.*

Sendo F uma primitiva de f em I, então, para toda constante k, $F(x) + k$ é, também, primitiva de f. Por outro lado, se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Segue que as primitivas de f em I são as funções da forma $F(x) + k$, com k constante. Diremos que $y = F(x) + k$, k constante, é a família das primitivas de f em I.

A notação $\int f(x)dx$ será usada para representar a família das primitivas de f.

$\int f(x)dx = F(x) + k$.

Na notação $\int f(x)dx$, a função denomina-se integrando. Uma primitiva de f será também, uma integral indefinida de f. É comum referir-se a $\int f(x)dx$ como integral indefinida de f.

Observação: O domínio da função f que ocorre em $\int f(x)dx$ deverá ser sempre um intervalo; nos casos em que o domínio não for mencionado, ficará implícito que se trata de um intervalo.

3.6 Definição de Integral Definida

Definição 5 (Integral de Riemann) *Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando $max\{\Delta x_i\} \to 0$, e escreveremos:*

$$\lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

Se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ϵ, mas não da particular escolha de c_i, tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$ com $max\{\Delta x_i\} < \delta$.

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se integral (de Riemann) de f em $[a,b]$, e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Então, por definição , teremos que: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então dizemos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a,b]$. É comum referirmo-nos como integral definida de f em $[a,b]$.

3.6.1 Propriedades da Integral

Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e k uma constante, então:

- $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e, temos então $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- kf é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;
- Se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Se $c \in]a,b[$ e f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3.6.2 Teorema Fundamental do Cálculo

De acordo com a definição de integral, se f for integrável em $[a,b]$, o valor do limite: $\lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

Será sempre o mesmo, independentemente da escolha dos c_i, e igual a $\int_a^b f(x)dx$. Assim, se, para uma particular escolha dos c_i, tivermos: $\lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$, então teremos:

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

Suponhamos agora, que f seja integrável em $[a,b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a,b]$, isto é , $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Sabe-se que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue, então, pelo Teorema do Valor Médio, que, para uma conveniente escolha de c_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos:

$F(b) - F(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F'(c_i^*)\Delta x_i$, ou ainda

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i \tag{3.4}$$

Se, para cada partição P de $[a,b]$, os c_i^* forem escolhidos como em (3.4), teremos:

$$\lim_{max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

E, portanto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Fica provado assim o Teorema Fundamental do Cálculo:

Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Exemplo 5 *Calcule* $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx$.

Como a primitiva de x^2 é $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, e f é contínua em $[1,2]$, segue-se que: $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

3.7 Cálculo de Áreas

Seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x)$ em $[a,b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

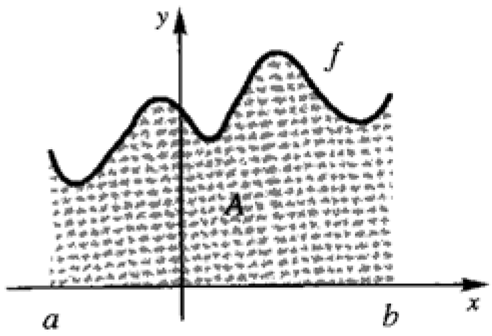


Figura 3.10: Região do gráfico limitada por $f(x)$ no intervalo $[a, b]$

Seja, então, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam c_i^* e c_i^{**} em $[x_{i-1}, x_i]$, tais que $f(c_i^*)$ é o valor mínimo e $f(c_i^{**})$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$.

Uma boa definição para a área A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i$ seja uma aproximação por falta da área de A, e que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i^{**})\Delta x_i$ seja aproximação por excesso, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i^*)\Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i^{**})\Delta x_i$$

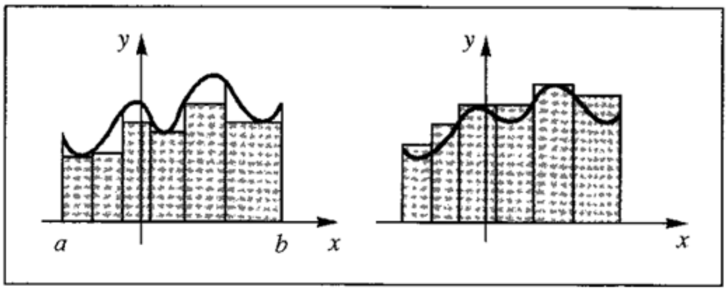


Figura 3.11: Aproximações por falta e excesso

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$, quando $max\{\Delta x_i\} \to 0$, nada mais natural (ver geometricamente) definir área de A por: $A = \int_a^b f(x)dx$ se for negativa em $[a, b]$, da mesma forma define-se a área de A no caso em que f é uma função integrável qualquer.

3.7.1 Aplicações do Cálculo de Áreas

Exemplo 6 *Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.*

Solução:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

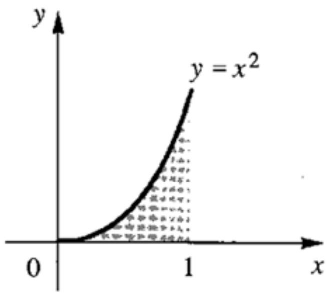


Figura 3.12: $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$

Exemplo 7 *Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.*

Solução:

$$A = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Obs.: $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = 0 = \text{área } A_2 - A_1.$

Exemplo 8 *Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.*

Solução: As curvas $y = x$ e $y = x^2$ interceptam-se nos pontos de abscissas 0 e 1. Então:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1.$$

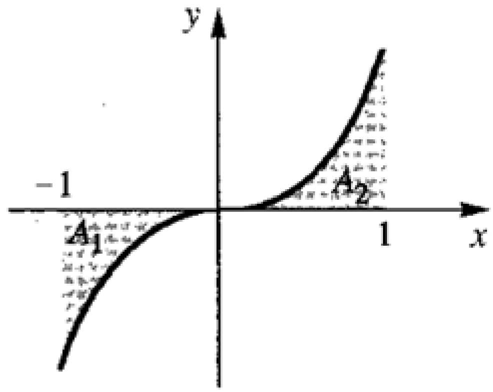


Figura 3.13: $y = x^3$ no intervalo $[-1, 1]$

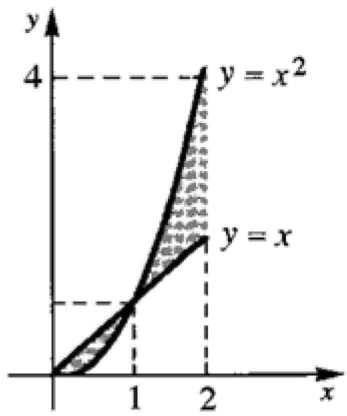


Figura 3.14: Área entre as funções $y = x$ e $y = x^2$

O texto da forma disposta, foca a evolução histórica do cálculo de áreas de regiões fechadas planas com detalhes. Assim, esperamos que o mesmo seja útil para os professores que atuam no ensino médio e fundamental.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Densidade dos Números Racionais em $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}$ existem subconjuntos importantes para além do conjunto $\mathbb{N}$.

Definição 6 *(Conjunto dos Números Inteiros-$\mathbb{Z}$)*
$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}; x = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Definição 7 *(Conjunto dos Números Racionais-$\mathbb{Q}$)*
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}; x = p \times q^{-1}; p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$

Proposição 1 *Nenhum racional é solução de $x^2 = 2$.*

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Considere $r > 0$ pois $(-x)^2 = x^2$.
Tem-se $r = \dfrac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}; p, q$ primos entre si.
De $r^2 = 2$ tem-se $\dfrac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ é par $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}; p = 2k$.
Assim $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$ é par.
É impossível p e q serem pares pois p e q são primos entre si. Não existe solução da equação em $\mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Proposição 2 *Existe pelo menos um número real que é solução de $x^2 = 2$.*

Demonstração:

- Seja $A \neq \emptyset$ uma vez que $1 \in A$.

- A é majorado ($x < 2$ qualquer que seja $x \in A$ pois se $x \geq 2$ tem-se $x^2 \geq 2^2 > 2$ e $x \notin A$).

Do axioma do supremo conclui-se que existe um número real $s = supA$ e como $1 \in A$, $s \geq 1$.

Ora pela propriedade tricotômica:

$s^2 < 2 \vee s^2 > 2 \vee s^2 = 2$.

Por absurdo, usando que se $x \in \mathbb{R}$, então $\exists n_x \in \mathbb{R}$ tal que $x < n_x$ (propriedade arquimediana). Pode-se mostrar que não se tem $s^2 > 2$ nem $s^2 < 2$. Tem-se, pois $s^2 = 2$ em que

$$s = sup\{x \in \mathbb{R}; x > 0 \vee x^2 \leq 2\}$$

.

Representado-se s por $\sqrt{2}$. ■

Teorema 8 *(Propriedade de densidade)*

Sejam $a, b \in \mathbb{R}; a < b$. Existe um número racional u e um número irracional v tais que $u, v \in]a, b[$.

Demonstração: Considere $a = 0$. A propriedade arquimediana garante a existência de $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$m \times b > 1 \text{ e } n.b > \sqrt{2}.$$

Nestas condições sendo

$$r = \frac{1}{m} \text{ e } s = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

, então r é um número racional e s um número irracional tais que

$$r, s \in]0, b[.$$

Considere $a > 0$. Procure um racional $u \in]a, b[$ partindo da existência de um racional no intervalo de extremo inferior zero. Fazendo $c = b - a$ existe $r \in]0, c[; r \in \mathbb{Q}$. Ora

$$r < c = b - a \Rightarrow a + r < b.$$

Seja $A = \{k \in \mathbb{N}; k \times r > a\}$.

Como $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ o conjunto A tem elemento mínimo $k_0 = minA$. Seja $u = k_0 \times r$.

Tem-se $u \in \mathbb{Q}$ $(r \in \mathbb{Q}, k_0 \in \mathbb{N})$ e $a < u < b$ já que $k_0 \in A, u = k_0 \times r > a$. Por outro lado, dado que $k_0 - 1 \notin A$

$$(k_0 - 1)r \leq a + r \Rightarrow u < b.$$

Para obter um número irracional $v \in]a, b[$ repete-se o processo substituindo r por $s \in]0, c[$ número irracional. Designando k_0 o mínimo do conjunto dos naturais k tais que $k, s > a$ sendo $v = k_0 s$ tem-se que v é um número irracional e $v \in]a, b[$.

■

Este teorema é peça importante para ver o conjunto dos números reais de forma contínua.

4.2 Limite de Uma Sequência

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n. Este número é chamado de n-ésimo termo da sequência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

Uma sequência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isso equivale a dizer que este $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma *subsequência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$, ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Dado o número real $a < -1$, fornecemos a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares então a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência (x_n) quando, para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \epsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ϵ.

Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, onde n_0 é escolhido em função do raio ϵ do intervalo dado).

Em vez de $a = \lim x_n$, escreve-se também $a = \lim\limits_{x\in\mathbb{N}} x_n$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ou $x_n \to a$. Esta última expressão lê-se "x_n tende para a" ou "x_n converge para a". Uma sequência que possui limite diz-se *convergente*. Caso contrário, ela se chama *divergente*.

Teorema 9 *(Unicidade do limite.)*

Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ e $J = (b-\epsilon, b+\epsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$ temos $x_n \notin J$. A partir daí concluímos que $a = b$. $\blacksquare$

Teorema 10 *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite de* (x_n).

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. $\blacksquare$

Teorema 11 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Seja b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$.Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. $\blacksquare$

Teorema 12 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ e $a = supX$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \epsilon$ e daí $\lim x_n = a$.

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n. $\blacksquare$

Corolário 2.1 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass.)*

Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Com efeito, basta mostrar que a sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Digamos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_1 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$.

Exemplo 9 *A sequência cujo n-ésimo termo é* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *é monótona, decrescente, limitada. Temos então* $\lim \dfrac{1}{n} = inf\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} = 0$

4.3 Limites e Desigualdades

Seja P uma propriedade referente aos termos de uma sequência (x_n). Diremos que "para todo n suficientemente grande (x_n) goza da propriedade P" para significar que "existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n$ goza da propriedade P".

Teorema 13 *Seja* $\lim x_n = a$. *Se $b < a$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Tomando $\epsilon = a - b$, temos $\epsilon > 0$ e $b = a - \epsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \Rightarrow b < x_n$. A outra afirmação se prova analogamente. ∎

Corolário 2.2 *Seja* $\lim x_n = a$. *Se $a > 0$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$ então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.*

Corolário 2.3 *Seja* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$. *Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande então $a \leq b$. Em particular se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande então* $\lim y_n = a \leq b$.

Operações com limites

Teorema 14 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então:*

1. $\lim x_n \pm y_n = a \pm b$.

2. $\lim x_n y_n = ab$.

3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração:

1. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, logo $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |(x_n - a) + (y_n - b)| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto $\lim x_n + y_n = a + b$. Mesmo argumento para $\lim (x_n - y_n)$.

2. Temos $x_ny_n - ab = x_ny_n - x_nb + x_nb - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Pelo Teorema 11, (x_n) é limitada. Além disso, $\lim(y_n - b) = \lim(x_n + a) = 0$. Segue-se do Teorema 7 e da parte, que $\lim(x_ny_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a) \cdot b] = 0$, donde $\lim x_ny_n = ab$.

3. Vale $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_nb - y_na}{y_nb}$. Como $\lim(x_nb - y_na) = ab - ba = 0$ basta provar que $\frac{1}{y_nb}$ é uma sequência limitada para concluir que $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$ e portanto que $\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. Ora, pondo $c = \frac{b^2}{2}$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_nb = b^2$, segue-se do Teorema 13 que, para todo n suficientemente grande, tem-se $c < y_nb$ e portanto $\frac{1}{y_nb} < \frac{1}{c}$, completando a demonstração.

■

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl B. Cálculo - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995. V.6.

EVES, Howard. Great moments in mathematcs. Dolciani Mathematical Exposition nº 5, USA: The Mathematical association of American, 1983.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, volume 1 - 5ª edição [reimpr.]. - Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos da matemática elementar, 8: limites, derivadas e noções de integral. 6ª edição - São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria: comprimento, área volume e semelhança. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

PINTO, Joaquim Antonio P. Método de Exaustão dos Antigos: O Princípio de Eudoxo-Arquimedes. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Disonível em http://www.prof2000.pt/j.pinto/vitae/textos/04 Met Exa Hist Analise JPinto.pdf , acesso em fevereiro de 2013.

SÁ, I.P. de (2010). A Magia da Matemática: Atividades Investigativas, Curiosidades e Histórias da Matemática, Ciência Moderna, 3ª edição.

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. Coleção Gênios da Ciência: Arquimedes, pioneiro da matemática. Nº7. 98p. Edição Especial (2005).