Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Departamento De Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES QUADRADAS

Danilo Albuquerque de Campos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
Agosto de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Danilo Albuquerque de Campos

Algoritmos de Aproximação de Raízes Quadradas

Trabalho apresentado ao Programa de PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em MATEMÁTICA.

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves*

Recife
22 de Agosto de 2014

Dedico esta dissertação a minha Mãe Edileide, ao meu Pai Fernando e minha Esposa Patrícia por toda ajuda, incentivo e compreensão que tiveram durante este curso.

Agradecimentos

A Deus.

A minha família, principalmente minha mãe, pai e esposa pelo incentivo e amparo nos momentos difíceis.

Aos colegas que se alegraram com meu sorriso, que ponderaram no entusiasmo, me incentivando nas dificuldades, que de forma direta ou indireta colaboraram com meu estudo.

Aos amigos da Escola Pastor Amaro de Sena, principalmente pela compreensão nos momentos fatigantes e laboriosos.

Aos amigos do PROFMAT: Emerson, Josemar, Carlos Eduardo, Roberto,... que nos momentos intrincados éramos como irmãos.

Aos professores pela complexa missão e em especial ao orientador deste trabalho Rodrigo Gondim pela paciência, entusiasmo e dedicação quando solicitado.

O fardo é proporcional às forças, como a recompensa o será à resignação e à coragem. Mas opulenta será a recompensa, do que penosa a aflição. Cumpre, porém, merecê-la,... O militar que não é mandado para as linhas de fogo fica descontente, porque o repouso no campo nenhuma ascensão de posto lhe faculta. Sede, pois, como o miltar e não desejeis um repouso em que o vosso corpo se enervaria e se entorpeceria vossa alma. Alegrai-vos, quando Deus vos envia para luta,... Quando vos advenha uma causa de sofrimento ou de contrariedade, sobreponde-vos a ela, e quando houverdes conseguido dominar os ímpetos da impaiência,... dizei, de vós para convosco, cheio de justa satisfação: "fui o mais forte".

—ALLAN KARDEC (O Evangelho Segundo o Espiritismo)

Resumo

Neste trabalho estamos interessados em mostrar três algoritmos de aproximação racional de raízes quadradas por métodos pouco utilizados ou desconhecidos pelos professores do ensino fundamental e médio. Iniciaremos definindo sequência numérica e convergência de sequências, discutiremos sobre a necessidade de ampliação do conceito de número racional e demonstraremos a irracionalidade da diagonal de um quadrado. Provaremos um importante Teorema ,conhecido na literatura como o Teorema de Dirichlet, e por fim elencaremos três métodos de aproximação de raízes quadradas de números naturais não quadrados perfeitos, muito simples de serem trabalhados em sala de aula que são: O algoritmo de aproximção racional de Hierão de Alexandria, A escada de Theon e a Equação de Pell-Fermat, sende este último fundamental para discursão que iremos realizar sobre a relação dos três métodos apresentados.

Palavras-chave: Raiz Quadrada, Aproximação Racional, Teorema de Dirichlet, Algoritmos de Hierão, Escada de Theon, Equação de Pell-Fermat.

Abstract

In this work we are interested in showing three algorithms rational approximation of square roots by methods unknown or underutilized by teachers of elementary and secondary education. We begin by defining numerical sequence and convergence of sequences, will discuss the need to expand the concept of rational number and demonstrate the irrationality of the diagonal of a square. Prove an important theorem known in the literature as Dirichlet's theorem and finally elencaremos three methods of approximating the square roots of natural non-perfect square numbers, very simple to be worked on in the classroom that are rational algorithm aproximção of Hiero of Alexandria, Theon's Ladder and the Pell-Fermat equation, sende latter discursão fundamental to who will perform on the relationship of the three methods presented.

Keywords: Square Root, Rational Approximation Theorem of Dirichlet, Algorithms Hiero, Ladder Theon, Pell-Fermat equation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O estudo das raízes quadradas é costumeiramente iniciado no ensino fundamental, mais precisamente no 6º ano. Porém, geralmente, é no 8º ano que os estudantes se deparam com a necessidade de realizar aproximações para encontrar uma raiz quadrada, devido ao fato que tradicionalmente é neste ano que se inicia o estudo dos números irracionais, perpetuando-se no 9º ano.

Quando se quer obter a raiz quadrada de um real r positivo, temos que levar em consideração a seguinte relação $x = \sqrt{r} \Leftrightarrow x^2 = r$. Mesmo, essa relação, sendo muito simples de ser explicada e até certo modo bem entendida pelos estudantes, há em muitos casos uma grande dificuldade de se encontrar um número real que a satisfaça, provavelmente pelo fato que nem sempre a raiz quadrada é exata, sendo na maioria das vezes necessário uma aproximação.

A verdade é que o cálculo de raiz quadrada traz certo desconforto para os estudantes do ensino fundamental e médio. Porém, sendo uma operação extremamente comum, ela se apresenta em vários problemas matemáticos, por exemplo: Como determinar o lado de um quadrado dado sua área? Quais são as raízes da equação $x^2 = d$, $d \in \mathbb{N}$? Qual é o comprimento da diagonal de um retângulo de lados a e b ou da diagonal de um cubo de aresta a? O certo é que pode-se determinar variadas formas de se responder a estas interrogativas, porém, independentemente dos processos utilizados para alcançar as soluções, todas passarão pela necessidade da "extração de raízes quadradas".

Encontrar a raiz quadrada de um número natural quadrado perfeito é um processo basicamente simples devido ao fato que podemos decompor este natural em fatores primos e obtermos um natural $n = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdots p_i^{2k_j} = (p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdots p_i^{k_j})^2$, sendo $p, q, i, j \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{n} = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdots p_i^{k_j}$. Porém, caso n não seja quadrado perfeito é certo que, pelo menos um desses fatores primos tem expoente ímpar, como por exemplo, $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3^1} = 2\sqrt{3}$, impossibilitando a "extração"dessa raiz quadrada pelo processo acima descrito.

Diante do que foi exposto o presente trabalho visa tornar o processo de aproximação racional menos árduo apresentando algoritmos de aproximação de $\sqrt{d}$, com $d \in \mathbb{N}$ não quadrado perfeito. Sendo que dois desses algoritmos já eram de conhecimento dos matemáticos gregos antigos como o Algoritmo de Hierão e a Escada de Theon e um último chamado de Equação de Pell-Fermat estudada desde o século VII, onde não sabemos se fora criada para esse objetivo.

Começaremos estudando, no primeiro capítulo, as sequências reais, convergência e limite de sequências, como também o Teorema de Cauchy sobre convergência de sequências. Prosseguimos com o estudo dos números racionais e irracionais, demonstrando que sempre é possível encontrar uma sequência de números racionais tal que seu limite é um número irracional dado. Continuando, provaremos um importante Teorema conhecido como Teorema de Dirichlet, que fundamenta muitas afirmações que serão feitas posteriormente. No terceiro capítulo conheceremos os algoritmos de aproximação que são a principal proposta deste trabalho. Tais algoritmos nada mais são que sequências recorrentes que a cada interação encontra-se um racional mais próximo de $\sqrt{d}$, com d natural não quadrado perfeito. A cada novo algoritmo apresentado sempre será tomado o cuidado de demonstrar sua convergência, como também sua origem que fora a Equação de Pell-Fermat, nasceram por processos geométricos, pois foram criados em épocas que não se tinha conhecimento da álgebra da forma que a utilizamos hoje. E finalizamos mostrando que os três algoritmos de aproximação racional quando utilizados para mesma raiz quadrada produzem algumas soluções idênticas, nos levando a conjecturar sobre a possibilidade da equivalência desses algoritmos que se evidência pela demonstração feita utilizando a indução com o auxílio da equação de Pell-Fermat.

CAPÍTULO 1

Sequências

Neste capítulo vamos descrever algumas definições importantes e básicas para a continuidade do trabalho. Estamos interessados em estudar sobre: sequências monótonas, convergência e limite de sequência, estabelecer proposições e teoremas, bem como, conceituar recorrência e elencar algumas observações pertinentes.

1.1 Sequência Numérica

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que a cada número natural n associa um número real* $a_n = a(n)$, *chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Toda sequência, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $a_(n) = a_n$ será denotada simplesmente por (a_n). Vejamos alguns exemplos para ilustrar a definição acima.

Exemplo 1.1. *Exemplos de Sequência*

1. $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...\right)$;
2. $(y_n) = \left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, ..., \dfrac{1}{2^n}, ...\right)$
3. $(h_n) = (2^n) = (2, 4, 8, ...)$.
4. $(k_n) = (\frac{n-1}{n}) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...)$
5. $(t_n) = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...)$

Vamos analisar o Exemplo 1.1 de forma intuitiva.

No primeiro item, $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$, observa-se que a medida que n aumenta, o quociente entre 1 e n, tende a diminuir, pois estamos dividindo 1 por um número cada vez maior. Nota-se também que este quociente se aproxima de zero, porém como $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$, logo $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, ou seja, todos os termos da sequência estão confinados num intervalo entre 0 e 1. Algebricamente podemos escrever que $0 < x_n \leq 1$ e com isso $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, 1]$.

No segundo item, o comentário é análogo ao da sequência (x_n), porém, note que o quociente entre 1 e 2^n, tende a zero "mais rápido"que $(x_n) = \frac{1}{n}$ e que $0 < y_n \leq \frac{1}{2}$, logo $y_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

Já no terceiro item, observe que a medida que n cresce seus termos crescem exponencialmente. Desta forma, não é possível encontrar um intervalo limitado, digamos de $(-r, r)$ com $r > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, tal que, $h_n \in (-r, r)$. logo, sempre teremos termos de h_n que não pertencerão ao intervalo $(-r, r)$ com r fixo, bastando tomar n suficientemente grande.

Com isso, podemos perceber que existem sequências que são limitadas por intervalo e outras que extrapolam qualquer intervalo dado arbitrariamente. Desta forma descreveremos a seguinte

Definição 1.2. *Uma sequência (a_n) é dita limitada, se existe $r > 0$ tal que $|a_n| < r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (a_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.*

Conhecendo a propriedade do módulo de um número real, dizer que $|a_n| < r$ é o mesmo que $-r < a_n < r$ e $a_n \in [-r, r]$. Observe que a sequência h_n, no Exemplo 2.1 é dita ilimitada, enquanto x_n e y_n são limitadas.

Definição 1.3. *Uma sequência (a_n) será dita decrescente se $a_{n+1} < a_n$ (crescente se $a_{n+1} > a_n$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é não crescente, se $a_{n+1} \leq a_n$ (não decrescente se $a_{n+1} \geq a_n$) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Da definição podemos classificar que $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{2^n}$ são decrescentes, $h_n = 2^n$ é crescente e $t_n = (1, 2, 2, 3, 3, 3, ...)$ é não decrescente.

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Exemplo 1.2. *A sequência dos números naturais $(1, 2, 3, ..., n, ...)$ é crescente e ilimitada, desta forma, sempre teremos infinitos termos dessa sequência maiores que qualquer real fixo r ($r \in \mathbb{R}_+$) dado arbitrariamente. Mesmo parecendo óbvio, o comentário acima é uma importante propriedade na construção dos números reais, conhecida na literatura como a Propriedade Arquimediana dos números Reais.*

Todas as definições e comentários feitos até este momento de certa forma são preparações para uma definição fundamental que faremos na próxima seção. No mais é extremamente importante estudar se uma sequência é monótona e limitada, pois em caso positivo, poderemos afirmar que ela está se aproximando cada vez mais de um número real L. Como está claro também que as sequências (x_n) e (y_n) têm como candidato, para esse real L, o número 0. Veremos que de fato isso ocorre e 0 é chamado de limite dessas sequências.

1.2 Limite de Sequências

Definição 1.4. *Dizemos que uma (a_n)* **converge** *para um número real L quando, uma vez prescrito um erro $r > 0$, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - L| < r$ para todo $n > n_0$.*

De forma alternativa, se (a_n) convergir para L, diremos que a sequência é **convergente** e que L é um limite da sequência. Podemos denotar o limite L de uma sequência como:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ou

$$a_n \longrightarrow L$$

.

Exemplo 1.3. *Mostraremos que o limite da sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é zero.*

Demonstração *De fato, basta mostar que para $n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < r$. Pela Propriedade Arquimediana podemos tomar $n > \frac{1}{r}$, assim fixado $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_0 > \frac{1}{r}$ temos que $\frac{1}{n_0} < r$. Ora mas dado um $n > n_0$ o resultado segue, pois*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < r \Rightarrow |x_n| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < r \Rightarrow |x_n - 0| < r$$

.

Exemplo 1.4. *Mostraremos que o limite da sequência $y_n = \frac{1}{2^n}$ é zero.*

Demonstração: *É fato que podemos tomar um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$2^{n_0} > \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2^{n_0}} < r$$

Mas daí, tomando $n > n_0$, temos

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < r \Rightarrow |y_n| < r \Rightarrow |y_n - 0| < r$$

É possível que neste momento haja dúvida sobre se uma sequência possa convergir para mais de um limite, pois a definição não deixa claro. Porém isso não ocorre e demonstraremos na seguinte Proposição:

Proposição 1.2.1. *Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir, então seu limite é único.*

Demonstração: Sejam L_1 e L_2 reais. Vamos supor que $a_n \longrightarrow L_1$ e $a_n \longrightarrow L_2$. Assim sendo, dado para qualquer real positivo r, pela definição de limite, está garantida a existência de n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < r$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < r$$

Somando membro a membro e tomando $n > max(n_1, n_2)$, temos

$$|a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2r$$

mas pela consequência da desigualdade triângular apresentado no exemplo 1.3, temos que

$$|(a_n - L_1) - (a_n - L_2)| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < r \Rightarrow |L_2 - L_1| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2r$$

Como r é positivo e arbitrário, devemos ter $|L_1 - L_2|$ menor que qualquer real positivo. Por outro lado, $|L_1 - L_2| \geq 0$; assim nos resta uma única possibilidade $|L_1 - L_2| = 0 \Rightarrow L_2 = L_1$, concluindo nossa prova.

Continuando, decreveremos o seguinte

Teorema 1.2.1. *Uma sequência monótona é convergente se e somente se ela é limitada.*

Demonstração ([5],Pag.68-69)

Este Teorema é extremamente importante, pois nos dá condições de afirmar se uma sequência é convergente.

Exemplo 1.5. *Prove que a sequência $k_n = \frac{n-1}{n}$ é convergente e $k_n \longrightarrow 1$*

Demonstração *Observe que $k_n = 1 - \frac{1}{n}$. Como $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -1 + \frac{1}{n+1} < -1 + \frac{1}{n} \Rightarrow k_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = k_n$. Concluímos essa forma que k_n é crescente. Note gora que $0 \leq k_n < 1$. Como k_n é monótona e limitada então é convergente.*

Para provar que $k_n \longrightarrow 1$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $-r < \frac{1}{n_0} < r$, tome agora $n > n_0$, logo

$$-r < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < r \Rightarrow -r < -\frac{1}{n} < r \Rightarrow -r < 1 - \frac{1}{n} - 1 < r$$

ora mas $1 - \frac{1}{n} = k_n$, Então

$$-r < k_n - 1 < r \Rightarrow |k_n - 1| < r$$

concluindo assim nossa prova.

Para demonstrações posteriores que iremos realizar devemos descrever a seguinte proposição. [4]

Proposição 1.2.2. *Seja a_n uma sequência convergente de números reais e k um número real qualquer. Se $a_n \longrightarrow L$, então $ka_n \longrightarrow kL$.*

Demonstração: *Se $k = 0$, então $ka_n \longrightarrow 0$, pois $\lim_{n\to\infty} ka_n = 0 \cdot L = 0$.*

Suponha então que $k \neq 0$ e seja dado um $r > 0$. Como a_n é convergente, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{r}{|k|}$. Daí, multiplicando ambos os mebros por $|k|$, vamos ober:

$$n > n_0 \Rightarrow |ka_n - kL| = |k||a_n - L| < |k| \cdot \frac{r}{|k|} = r$$

Demonstrando o que queriamos.

1.3 Subsequências

Nesta seção estudaremos o limite de uma subsequência, sabendo que a sequência original tem limite L e enunciaremos um importante Teorema, conhecido como Fundamental ou de Cauchy, que utilizaremos no próximo capítulo.

Definição 1.5. *Dada uma sequência (a_n) definimos uma subsequência da mesma como a sequência obtida a partir de (a_n), restrigindo-nos a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_k = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ do conjunto de índices.*

Escreveremos uma subsequência com a seguinte notação (a_{n_k}), em seguida, pela definição e dado $k \in \mathbb{N}$ é fácil ver que a aplicação de $k \mapsto n_k$ é uma função injetiva e estritamente crescente entre $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.6. *Exemplos de subsequências*

1. *Dada a sequência $x_n = n$ podemos escrever como subsequência a sequência dos n quadrados perfeitos, ou seja, $x_n = x_1, x_2, x_3, \ldots = 1, 4, 9, \ldots$*

A proposição a seguir nos dá uma propriedade básica de limite de sequências.

Proposição 1.3.1. *Se (a_n) é uma sequência com limite L, então toda subsequência (a_{n_k}) de (a_n) converge para L.*

Demonstração: Pela definição de limite está garantido que $\forall r > 0$, existe n_0, tal que, $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < r$. Como $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$, basta tomar k_0, tal que $n_{k_0} > n_0$, pois desta forma, para $k > k_0$, teremos:

$$n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - L| < r$$

.

Teorema 1.3.1. ***(Bolzano - Weierstrass)*** *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: ([4],pág.102-103)

É razoável que a partir de um certo n_0 os termos de um sequência convergente se aproximem cada vez mais, pois tais termos estão se aproximando do limite L da sequência. Desta forma vamos propor a seguinte

Definição 1.6. *Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma sequência de **Cauchy** se, dado $r > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m,n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < r$$

O que mais interessa sobre as sequências de Cauchy é o seguinte

Teorema 1.3.2. *A sequência (a_n) de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: ([1],Pág. 80)

Exemplo 1.7. *Retornando a sequência $k_n = \frac{n-1}{n}$, vamos provar a convergência pelo Teorema de Cauchy.*

***Demonstração**: Basta provar que $\forall r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n,m > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < r$. Note que*

Note agora que $|\frac{m-n}{mn}| < \frac{1}{n}$, pois

$$n^2 > 0 \Rightarrow -n^2 < 0 \Rightarrow mn - n^2 < mn \Rightarrow n(m-n) < mn \Rightarrow \frac{m-n}{mn} < \frac{1}{n}$$

Como $\frac{1}{n}$ é convergente podemos concluir que, dado $r > 0$, $|a_m - a_n| = |\frac{m-n}{mn}| < r$, concluindo assim nossa prova.

Após esta última seção temos ferramentas suficientes sobre limite de sequência para uma demonstração que iremos descrever nos próximos capítulos. Mas antes disso vamos propor um exemplo especial de sequências. Para isso tome o seguinte exemplo:

Exemplo 1.8. *Dada uma sequência definida como*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 2 \cdot \frac{1}{x_n}\right)$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $x_1 = 2$. Escreva os n primeiros termos dessa sequência.

Para $n = 1$ temos: $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 2 \cdot \frac{1}{x_1}) = \frac{1}{2}(2 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

Para $n = 2$ temos: $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + 2 \cdot \frac{1}{x_2}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{17}{12}$

Se prosseguirmos encontraremos para $x_4 = \frac{577}{408}$

Note que esse processo pode ser realizado infinita vezes sempre tendo resultado um número racional e que a sequência $x_n = (2; \frac{3}{2}; \frac{17}{12}; \frac{577}{408}; ...)$ e a sequência $x_{n+1} = (\frac{3}{2}; \frac{17}{12}; \frac{577}{408}; ...)$, diferente somente do primeiro termo.

Sequência como do exemplo 1.10 denominamos como **recorrência**, pois os termos são dados em função dos anteriores, ou seja, eles recorrem a valores dos termos anteriores. Talvez os exemplos mais clássicos de recorrências são as conhecidas Progressões Aritméticas e Geométricas.

Das recorrências gostariamos de elucidar que podemos considerar a sequência (x_{n+1}) como uma subsequência da sequência (x_n), logo, para $n = 1, n = 2, n = 3, ...$ teriamos $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, ...)$ e $(x_{n+1}) = (x_2, x_3, x_4, ...)$. Desta forma pela Proposição 1.3.1, Se a sequência converge para L, então a subsequência em questão também converge para L, logo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$$

.

CAPÍTULO 2

Aproximação Racional

Este capítulo tem como objetivo mostrar que $\sqrt{d}$ com $d \in \mathbb{N}$ pode ser aproximado por um número racional.

2.1 Números Racionais

É trivial o conhecimento que a soma, a diferença e o produto de dois inteiros sempre resulta em um número inteiro, porém já na divisão nem sempre isso ocorre, aliás geralmente não há um inteiro q tal que $nq = m$, sendo m e n inteiros e $n \neq 0$; por exemplo, não existe um q inteiro tal que, $3q = 1$.

Desta forma, caso se deseje realizar divisões com inteiros sem restrições, devemos ampliar a noção de número criando um novo conjunto numérico, tais que seus elementos comtemplem os quocientes de divisões de inteiros. A estes novos números são denominados de números racionais, sendo que para estes daremos a seguinte (ver[1])

Definição 2.1. *Um número racional é aquele que pode ser expresso como razão entre dois números $m,n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad \text{tais que} \quad x = \frac{m}{n},$$

onde $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais. [11].

Dada a definição de números racionais estudaremos na próxima seção as sequências racionais, ou seja, sequências em que todos seus termos são números racionais.

2.2 Sequências Racionais

Denotamos como sequência de números racionais ou simplesmente de sequência racional a função $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Assim, por exemplo, a sequência $r(n) = \frac{n}{10^n}$ que tem como termos: $r_1 = 0,1$; $r_2 = 0,02$; $r_3 = 0,003$; ..., é uma sequência racional.

Devemos salientar que um número real x pode ser expresso por sua expansão decimal como por exemplo: $\frac{1}{3} = 0,333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{3}{10^n} + ...$ e $\sqrt{2} = 1,41421356... =$

$1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+....$

De sequências racionais estamos interessados em estudar se dado um $x \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $\{r_n\} \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$?

Antes do estudo da interrogativa acima, vamos definir uma sequência (r_n) como a sequência da expansão decimal do número π. Observe seus primeiros termos: $r_1 = 3$; $r_2 = 3,1$; $r_3 = 3,14$; $r_4 = 3,141$; $r_5 = 3,1415$; $r_6 = 3,14159$, ... Note que:

$|r_m - r_n| < \frac{1}{10}$, quando $m,n > 1$, pois $\frac{1}{10} = 0,1$ e $r_m - r_n \leq 0,04159265...$

$|r_m - r_n| < \frac{1}{100}$, quando $m,n > 2$, pois $\frac{1}{100} = 0,01$ e $r_m - r_n \leq 0,00159265...$

$|r_m - r_n| < \frac{1}{1000}$, quando $m,n > 3$, pois $\frac{1}{1000} = 0,001$ e $r_m - r_n \leq 0,00059265..$

Observe que essa sequência satisfaz a definição 2.7 sobre sequências de Cauchy, donde podemos concluir que $\forall r > 0$, existe um n_0 tal que $m,n > n_0 \Rightarrow |r_m - r_n| < \frac{1}{10^{n_0}}$. Sendo convergente pelo Teorema 2.3.2

Para ilustrar que um número $x \in \mathbb{R}$ pode ser aproximado por uma sequência racional, tome $x = A,a_1a_2a_3a_4a_5...a_n... = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$

Considere A como a parte inteira de número real $x > 0$ e $0,a_1a_2a_3...a_n...$ a parte decimal. Tome a sequência $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$, tal que $x_0 = A$; $x_1 = A,a_1$; $x_2 = A,a_1a_2$; $x_3 = A,a_1a_2a_3$; ...; $x_n = A,a_1a_2a_3...a_n...$; ou seja, a sequência da expressão decimal do real x defina como $x_n = \frac{A,a_1a_2a_3...a_n}{10^n}$.

Como feito no exemplo acima, note que:

$|x_m - x_n| < \frac{1}{10}$, quando $m,n > 1$, pois $\frac{1}{10} = 0,1$ e $x_m - x_n \leq 0,0a_2a_3a_4...a_n...$

$|x_m - x_n| < \frac{1}{100}$, quando $m,n > 2$, pois $\frac{1}{100} = 0,01$ e $x_m - x_n \leq 0,00a_3a_4a_5...a_n...$

$|x_m - x_n| < \frac{1}{1000}$, quando $m,n > 3$, pois $\frac{1}{1000} = 0,001$ e $x_m - x_n \leq 0,000a_4a_5a_6...a_n...$

Podemos percerber de forma intuitiva que a expansão decimal de números racionais pode ser convergente, porém ainda falta provar que existe uma sequência de racionais que converge para um real x que será feito na continuidade deste trabalho.

2.3 Números Irracionais

A necessidade de ampliar o conceito de número já era conhecida desda antiga Grécia, pois, relata a história, que os Pitágoricos analisaram a insuficiência dos números racionais para medir a diagonal de um quadrado com medida n a partir de um segmento m, ou seja, não era possível encontrar uma razão entre as medidas n e m desses segmentos.

De início os próprios Pitagóricos acreditavam que dados dois segmentos quaisquer eles eram sempre comensuráveis, ou seja, em termos atuais, sempre poderiamos encontrar uma razão de semelhança de medidas inteiras entre os segmentos. Porém, utilizando o próprio Teorema de Pitágoras se estabelece uma contradição quando consideramos a diagonal de um quadrado como sendo um número racional. Desta forma não existe uma razão de medidas inteiras entre o lado de um quadrado e sua diagonal e neste caso dizemos que tais segmentos são incomensuráveis e que a medida da diagonal de um quadrado é um número Irracional.

Para mostrar que existem segmentos com medidas que não são racionais, considere a diagonal de um quadrado de lado unitário (mas nada impede que seja qualquer quadrado). Em posse do Teorema de Pitágoras e por contradição tome a medida dessa diagonal como um número racional $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$, tal que m e n sejam coprimos, ou seja, o máximo divisor comum de m e n é igual a 1. Desta forma

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Ora note que m^2 é par, implicando que m é par, pois se m fosse ímpar, m^2 seria ímpar, mas $m^2 = 2n^2$, logo m não pode ser ímpar. Sabendo que m é par, podemos escrevê-lo da seguinte forma $m = 2q$, mas daí $m^2 = (2q)^2 = 4q^2$ e assim $4q^2 = 2n^2$, dividindo ambos os membros por 2 temos $2q^2 = n^2$, logo concluiríamos que n também é par e desta forma 2 divide m e n, mas isso é impossível, pois m e n são coprimos. Então a diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser um número racional, sendo assim um número Irracional. [11]

Desde o Ensino Fundamental conhecemos os Irracionais como os números que têm a parte decimal infinita e não periódica. Entenda parte decimal a sequência $0, a_1a_2a_3a_4a_5...$ e período de um número como uma determinada sequência finita, não totalmente nula, tal que a partir de um determinado digito todos os outros são uma repetição infinita desta sequência. Exemplos: 1,34577777..., tem período 7 e 0,7343434..., tem período 34. Esta definição, de certa forma ingênua, tem razão de existir pela simplicidade em responder ao questionamento se um número é ou não Irracional, bastando observar a parte decimal.

Outro ponto importante a destacar que não é mencionado no ensino básico é que os números Irracionais não são enumeráveis, ou seja, não podemos fazer uma associação entre um Irracional e um Natural com o intuito de realizar uma contagem pelo motivo que existem mais números Irracionais do que Naturais. Porém, para a continuidade deste trabalho quando falarmos de um número Irracional devemos considerar, deste momento em diante, somente, as raízes quadradas de um número natural d, com d não quadrado perfeito, ou seja, $d \neq q^2$

2.4 Teorema de Dirichlet

A expressão *aproximação racional* é usada para denotar o processo pelo qual certas sequências numéricas de termos racionais tendem a se aproximar de um número real L. Desta maneira, podemos afirmar que a aproximação racional está intimamente ligada à ideia de limite de sequências. Todas as sequências que apresentaremos com essa característica se dará por uma aproximação por falta ou por excesso, ou seja, quando os termos racionais de uma sequência são sempre menores ou maiores que o real L, respectivamente.

Com desenvolvimento gradativo do estudo da Matemática, o homem se deparou que os números racionais não eram mais suficientes para responder os questionamentos vingentes, devendo ampliar o conceito de número e surgindo, desta forma, no cenário matemático os números irracionais. Destes, as raízes quadradas se apresentam de forma natural quer em Geometria, em funções ou em qualquer outra área que necessite de algum cálculo aritmético. Encontrar a raiz quadrada de um número natural se faz necessário para a resolução de muitos problemas.

Dependendo da situação uma "boa apromxição"para $\sqrt{d}$, com poucas casas decimais, pode ser suficiente. Por exemplo: $\sqrt{5} \cong 2,236067$ e $\frac{161}{72} \cong 2,236111$, ou seja, uma aproximação de três casas decimais, que para muitos cálculos já é mais que suficiente. Porém, devemos levar em consideração, que dependendo do caso devemos aproximar um pouco ou muito mais.

O cálculo de uma raiz quadrada na maioria das vezes não é algo tão simples de se realizar, mesmo sendo o processo de extrair raízes simples de se entender. Dado $\sqrt{d}$, para d quadrado perfeito, podemos dispor da decomposição em fatores primos para, com um pouco (ou razoável) trabalho (dependendo de d), encontrar $\sqrt{d}$. Agora, caso d não seja um quadrado perfeito, $\sqrt{d}$ é um número Irracional e a decomposição em fatores primos não resolve o problema, começando neste momento o trabalhoso processo de aproximar números racionais para $\sqrt{d}$.

Alguns povos antigos perceberam a necessidade de encontrar aproximações racionais para $\sqrt{d}$ e procuraram encontrar soluções para este problema até então. É certo que essas aproximações dependem da escolha dos números m e n do racional $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$ e desta forma ao longo dos séculos e em regiões diferentes, algoritmos foram criados com o objetivo de facilitar essa escolha.

Entenda algoritmo como um processo, de número finito de passos, que deve-se chegar a um resultado desejado. Tais algoritmos, que apresentaremos posteriormente, aproximam um número racional a $\sqrt{d}$. Mas antes iremos retornar a sequência do Exemplo 1.10 do Capítulo 1, para estudar detidamente seus termos.

Observe que seus três primeiros termos da sequência x_{n+1}, já calculados no capítulo 1, são: $(\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408})$. Tomando o quociente desses três primeiros termos, obtemos: $(x_2 = 1,5; x_3 \cong 1,41666;$ e $x_4 \cong 1,41421568)$ e analisando com $\sqrt{2} \cong 1,41421365$ podemos levantar a hipótese que os termos da sequência x_{n+1} são aproximações de $\sqrt{2}$. Note que, com apenas o terceiro termo (x_4), a aproximação se dá por cinco casas decimais, já sendo uma aproximação muito boa em termos reais.

Porém se continuarmos gerando novos termos o que garante que tais termos são, ainda, aproximações de $\sqrt{2}$? E se for, será que podemos aproximar cada vez mais ao ponto de $\sqrt{2}$ se tornar o limite dessa sequência? Concluindo dessa forma, que será sempre possível aproximar um racional tanto quanto se queira de um Irracional? De fato, as interrogações acima são verdadeiras, e a última será provado pelo seguinte

Teorema 2.4.1. *(Dirichlet) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número irracional. Então existem infinitos inteiros p, q, com $q > 0$ tais que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível e*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Antes de provarmos o Teorema de Dirichlet vamos escrever algumas definições e exemplos.

Definição 2.2. *A **parte inteira** de um real x, representada por $\lfloor x \rfloor$, é definido como o maior inteiro menor que ou igual a x, se $x \geq 0$ e o menor inteiro maior que ou igual x, se $x < 0$.*

Exemplo 2.1. *Observe a parte inteira dos números abaixo.*

1. $\lfloor 3 \rfloor = 3$
2. $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = \lfloor 1,5 \rfloor = 1$
3. $\lfloor -4,5 \rfloor = -4$

Definição 2.3. *A **parte fracionária** de um real x e denotada por $\{x\}$ é definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.*

Exemplo 2.2. *Observe a parte fracionária dos números abaixo.*

1. $\{\frac{2}{3}\} = 0,66666...$
2. $\{\sqrt{2}\} = \{1,414213562373...\} = 0,414213562373...$
3. $\{\frac{5}{4}\} = \{1,25\} = 0,25$

uma observação que devemos fazer, mesmo sendo trivial, é que a parte fracionária de qualquer número está contida no intervalo [0,1].

De fato, tome $x = a_0, a_1a_2a_3...a_n...$, logo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = \mathbf{0}, a_1a_2a_3...a_n...$

Outro ponto a ser abordado antes da demonstração é o Princípio da Casa dos Pombos que também é conhecido como "Princípio das Gavetas de Dirichlet"por ter sido pelo prórpio Dirichlet enunciado como: *"Se $n+1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma* *gaveta deverá conter, pelo menos, dois objetos"* [3].

Este Princípio, de certo modo ingênuo, é bastante utilizado em demonstrações matemáticas. Podemos escrevê-lo de modo mais geral como

Teorema 2.4.2. *Se n gaiolas são ocupadas por nk + 1 pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos k + 1 pombos.*

Demonstração*: Isto também é óbvio, pois se cada uma tiver no máximo k pombos, como são n gaiolas, teremos no máximo nk pombos distribuidos, o que é uma contradição.*

Diante das definições dadas acima estamos em condição de demonstrar o Teorema de Dirichlet enunciado como segue: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número irracional positivo. Então existem infinitos inteiros p, q, com $q > 0$ tais que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível e

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

e daí, segundo [8], descrevemos a seguinte

Demonstração: Considere os $n+1$ números 0, $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor = \{\alpha\}$, $2\alpha - \lfloor 2\alpha \rfloor = \{2\alpha\}$, $3\alpha - \lfloor 3\alpha \rfloor = \{3\alpha\}$, ..., $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor = \{n\alpha\}$, e a seguinte divisão do intervalo $[0,1]$ em n intervalos:

$$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, [\frac{(n-1)}{n}, 1]$$

.

Como cada um dos $n+1$ números pertence ao intervalo $[0,1]$ e este intervalo está dividido nos n subintervalos, podemos concluir pelo princícpio das casas dos pombos que dois desses números, pertencerão a um mesmo subintervalo.

Digamos que esses números são $\{ix\}$ e $\{jx\}$, com $i, j \in \mathbb{N}$, tal que, $j > i$.

Assim, $\frac{k-1}{n} < \{ix\} < \{jx\} \leq \frac{k}{n}$, logo $|\{jx\} - \{ix\}| < \frac{1}{n}$.

Ora, mas da definição 2.3 temos que

$$|\{jx\} - \{ix\}| < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow |j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow |(j\alpha - i\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

Observe que $j-i \leq n$. Logo, sendo $q = j-i$ e $p = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, podemos concluir, pela desigualdade acima, que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$. Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{q}$, temos:

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$$

e como $q = j-i \leq n$, então

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}$$

concluindo assim a demonstração.

Em posse do Teorema de Dirichlet a interrogativa sobre a possibilidade de aproximar um racional cada vez mais de $\sqrt{2}$ é trivial, pois, $q \longrightarrow \infty$, implica que $\frac{1}{q^2} \longrightarrow 0$, com isso podemos afirmar que existe uma infinidade de racionais que se aproximação de α.

Porém, sobre a possibilidade da sequência $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2 \cdot \frac{1}{x_n})$ gerar sempre mais termos, cada vez mais próximos de $\sqrt{2}$, será respondida no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

Algoritmos de Aproximação

Este Capítulo tem como objetivo mostrar alguns algoritmos utilizados por povos distintos, em tempos diferentes, para aproximar números racionais a raízes quadradas de números naturais não quadrados perfeitos. Como também, estudar esses algoritmos para conhecer os diversos processos dessa aproximação.

3.1 Algoritmo de Hierão

O algoritmo que estudaremos nesta seção já era conhecido na época da antiga Grécia e recebe este nome em homenagem ao matemático grego que o descreveu em seu livro *A Métrica* [6]. Estudaremos a convergência deste algoritmo, como também sua interpretação geométrica.

Hierão, também conhecido como Herão, matemático e físico de destaque, ficou bastante conhecido pela sua famosa fórmula $A_t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ para o cálculo da área de um triângulo qualquer quando é conhecido seus lados, sendo $s = \frac{a+b+c}{2}$ o semi-perímetro e a, b e c os lados do triângulo.

Um dos problemas do seu livro ele descreve como conseguir aproximações racionais para uma raiz quadrada, através de um método aritmético que recorria sempre a termos anteriores a partir de um primeiro termo definido. Desta forma, Hierão realizava um cálculo de recorrência onde os passos para encontrar a aproximação, em termos atuais, seria interpretado como a seguinte expressão $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{d}{x_n})$. (ver [6])

Para estudá-la vamos propor $d = 3$, tornando à recorrência igual a $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$, com $x_1 = 1$. Estudando seus quatro primeiros termos, temos:

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 3 \cdot \frac{1}{x_1}) = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + 3 \cdot \frac{1}{x_2}) = \frac{1}{2}(2+\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + 3 \cdot \frac{1}{x_3}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4}+\frac{3}{\frac{3}{2}}) = \frac{97}{56} \cong 1,73214$$

$$x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + 3 \cdot \frac{1}{x_4}) = \frac{1}{2}(\frac{97}{56}+\frac{3}{\frac{97}{56}}) = \frac{18817}{10864} \cong 1,73205081$$

Note que $\sqrt{3} \cong 1,73205080$ e comparando com $x_5 \cong 1,73205081$ é uma aproximação de sete casas decimais. Para maioria dos cálculos que realizamos é uma ótima aproximação. Desta forma, vemos que a precisão de x_{n+1} para aproximar frações em raízes quadradas pode não ser uma coincidência e estudaremos essa recorrência de forma geral, sendo $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{d}{x_n})$, com $d \in \mathbb{N}$, não quadrado perfeito.

Primeiro vamos analisar se x_{n+1} é convergente e em seguida, descobriremos seu limite.

Mas antes, da demonstração, vamos precisar da relação de ordem das médias Aritmética e Geométrica.

Dados dois números reais $a \geq 0$ e $b \geq 0$, vamos dar as seguintes definições:

Definição 3.1. *Média Aritmética (que vamos representar por $M_a(a,b)$) de a e b é o número determinado por $\frac{a+b}{2}$.*

Definição 3.2. *Média Geométrica (que vamos representar por $M_g(a,b)$) de a e b é o número determinado por $\sqrt{ab}$.*

Da definição das médias aritmética e geométrica propomos a seguinte relação: $\forall (a,b), M_a \geq M_g$. Para demonstrar a veracidade, tome

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

com a igualdade valendo se e somente se $a = b$, daí temos que

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Retornando a recorrência x_{n+1}, mostraremos sua convergência pelo teorema 1.3.2, demonstrando que esta recorrência satisfaz a definição 1.7 sobre as sequências de Cauchy, propondo primeiramente que $x_{n+1} \geq \sqrt{d}$. Para isso, tome as médias aritmética e geométrica de $(x_n, \frac{d}{x_n})$, juntamente com a relação de ordem das médias, para obter:

$$M_a = \frac{x_n + \frac{d}{x_n}}{2} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{d}{x_n}) = x_{n+1} \geq \sqrt{d} = \sqrt{x_n \cdot \frac{d}{x_n}} = M_g$$

Como $d \in \mathbb{N}$ e não sendo quadrado perfeito, resulta que $\sqrt{d} > 1$, logo $x_{n+1} \geq \sqrt{d} > 1$, tal que, podemos afirmar que x_{n+1} é positivo.

Considere a expressão $\frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}} > 0$.

Nos interessa provar agora que $|1 - \frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}}| < 1$.

Da sequência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{d}{x_n}\right)$$

podemos ter a seguinte igualdade

$$2 - \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}}$$

dividindo ambos os membros por x_{n+1}.

Daí como $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 0$, temos que

$$\frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}} < 2$$

.

ora, mas $\frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}} > 0$, logo

$$0 < \frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}} < 2 \Rightarrow -1 < -1 + \frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}} < 1$$

então

$$\left|1 - \frac{d}{x_n \cdot x_{n+1}}\right| < 1$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{2}|(x_{n+1}-x_n)|$, vamos obter:

$$\frac{1}{2}|(x_{n+1}-x_n)|\cdot|(1-\frac{d}{x_n\cdot x_{n+1}})|<\frac{1}{2}|(x_{n+1}-x_n)|$$

Multiplicando de forma distributiva o primeiro membro temos:

$$\frac{1}{2}|(x_{n+1}-\frac{d}{x_n}-x_n+\frac{d}{x_{n+1}})|=\frac{1}{2}|(x_{n+1}+\frac{d}{x_{n+1}})-(x_n+\frac{d}{x_n})|=$$

$$=|\frac{1}{2}(x_{n+1}+\frac{d}{x_{n+1}})-\frac{1}{2}(x_n+\frac{d}{x_n})|=|x_{n+2}-x_{n+1}|$$

Portanto $|x_{n+2}-x_{n+1}|<\frac{1}{2}|(x_{n+1}-x_n)|$

Reduzindo os índices, obtemos

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|<\frac{1}{2}|x_{n+1}-x_n|$$

$$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

$$\cdots$$

$$|x_4-x_3|<\frac{1}{2}|x_3-x_2|$$

$$|x_3-x_2|<\frac{1}{2}|x_2-x_1|$$

multiplicando membro a membro e cancelando os termos iguais, vamos obter:

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|<\frac{1}{2^n}\cdot|x_2-x_1|$$

O que interessa aqui é mostrar que esta sequência é de Cauchy. Para isso considere, sem perda de generalidade, $m > n$. Assim podemos reescrever a sequência acima como

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2^{n}} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$|x_{n+3} - x_{n+2}| < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$\vdots$$

$$|x_{m-1} - x_{m-2}| < \frac{1}{2^{m-3}} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$|x_{m} - x_{m-1}| < \frac{1}{2^{m-2}} \cdot |x_2 - x_1|$$

Somando membro a membro as inequações acima vamos obter

$$|x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_{m-2}| + |x_m - x_{m-1}| <$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2^{n}} \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |x_2 - x_1| + \cdots + \frac{1}{2^{m-3}} \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2^{m-2}} \cdot |x_2 - x_1|$$

Pelo Teorema A.0.1, da desigualdade triangular (Apêndice), temos que

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \\
&= |x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+3} - x_{n+2} + \cdots + x_{m-1} - x_{m-2} + x_m - x_{m-1}| \\
&\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_{m-2}| + |x_m - x_{m-1}|
\end{aligned}$$

e que

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2^n} \cdot |x_2 - x_1| + \cdots + \frac{1}{2^{m-3}} \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2^{m-2}} \cdot |x_2 - x_1| =$$
$$= (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-2}}) \cdot |x_2 - x_1|$$

Assim

$$|x_m - x_n| < (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-2}}) \cdot |x_2 - x_1|$$

mas

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-2}}) &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{m-n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \ (1 - \frac{1}{2^{m-n}}) \\ &= \frac{4}{2^n} \cdot \ (1 - \frac{1}{2^{m-n}})\end{aligned}$$

Note agora que

$$(1 - \frac{1}{2^{m-n}}) < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{2^n} \cdot \ (1 - \frac{1}{2^{m-n}}) < \frac{4}{2^n} \Leftrightarrow \frac{4}{2^n} \cdot \ (1 - \frac{1}{2^{m-n}}) \cdot |x_2 - x_1| < \frac{4}{2^n} \cdot |x_2 - x_1|$$

Logo

$$|x_m - x_n| < \frac{4}{2^n} \cdot |x_2 - x_1|$$

Observe que

$$\frac{4}{2^n} \cdot |x_2 - x_1| = \frac{1}{2^n} \cdot 4|x_2 - x_1|$$

Como já foi provado no exemplo 1.4 (capítulo 1) que $\frac{1}{2^n}$ é convergente, a proposição 1.2.2 nos garante que $\frac{1}{2^n} \cdot 4|x_2 - x_1|$ também será, logo dado $r > 0$ existe n_0 tal que $\frac{4}{2^n} \cdot |x_2 - x_1| < r$, quando $n > n_0$.

Então $|x_m - x_n| < r$, para $m, n > n_0$, logo podemos concluir que esta sequência é de Cauchy o que nos garante que ela é convergente.

Até agora provamos que (x_{n+1}) convergente, mas ainda não descobrimos o seu limite. Porém está bem claro que o candidato a tal $\sqrt{d}$. Fazendo uso da proposição 1.3.1 e que (x_{n+1}) é subsequência da sequência (x_n), concluimos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$$

daí, dada a recorrência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{d}{x_n})$$

quando $n \longrightarrow \infty$, iremos obter

$$L = \frac{1}{2} \cdot (L + \frac{d}{L})$$

e resolvendo esta equação, obtemos:

$$L^2 - d = 0 \Longrightarrow L = \sqrt{d} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{d}.$$

3.1.1 Interpretação Geométrica do Algoritmo de Hierão

Uma pergunta que pode nos vir em mente é de onde originou a idéia de usar a sequência $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{d}{x_n})$? Infelizmente, Hierão não nos fornece nenhuma indicação no seu livro *A Métrica*. Porém, uma interpretação geométrica para essa expressão encontramos em [5], onde descreveremos da seguinte forma.

Note que encontrar $\sqrt{d}$ é o mesmo que determinar o lado de um quadrado de área d. Denote esse quadrado de área d por ABCD inscrito em um quadrado AEFG de lado a dado, tal que, $B \in AE$ e $D \in AG$ (ver figura abaixo).

Conforme a construção dos quadrados ABCD e AEFG, um terceiro quadrado CIFH de lado e pode ser considerado, prolongando os lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ aos lados $\overline{GF}$ e $\overline{EF}$, respectivamente.

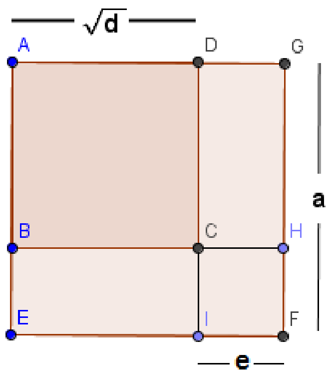


Figura 3.1 Interpretação geométrica do Algoritmo de Hierão

Observe que podemos definir o lado a como uma primeira aproximação de $\sqrt{d}$ e que $a - e = \sqrt{d}$. Além disso, considerando a área da região BEFGDC, temos que $a^2 - d = e^2 +$

$(a-e)e+(a-e)e=e^2+2e(a-e)=2ea-e^2.$

Dai, se desprezarmos o quadrado de lado e (pois a medida que e diminui e^2 é menor ainda) chegamos a $a^2-d\cong 2ae$, logo

$$e\cong\frac{a^2-d}{2a}=e'$$

segue-se, desta forma, que se obtêm uma segunda aproximação de $\sqrt{d}$ tomando $a'=a-e'$, então

$$a'=a-\frac{a^2-d}{2a}=\frac{2a^2-(a^2-d)}{2a}=\frac{a^2+d}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{d}{a})$$

Considerando que podemos repetir esse processo indefinidamente podemos reescrever a expressão acima como

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{d}{a_n}\right)$$

Concluímos esta seção sabendo um algoritmo de aproximação extremamente eficaz e simples para a "extração"de raízes quadradas, de forma recursiva, onde nos dá números racionais cada vez melhores. Na próximo seção faremos uma abordagem da aproximação racional com uso de uma equação muito importante no ramo da matemática denominada Teoria dos Números.

3.2 Aproximações Diofantinas

Esta seção tem como objetivo estudar a equação diofantina conhecida como Pell-Fermat, determinar como encontrar infinitas soluções através de uma não trivial e demonstrar que as soluções da equação de Pell-Fermat podem ser interpretadas como aproximações racionais da $\sqrt{d}$, com $d\in\mathbb{N}$ e não quadrado perfeito.

3.2.1 Equações Diofaninas

Uma equação diofantina é uma equação polinomial em várias incógnitas com coeficientes inteiros. Por exemplo: $5x-2y=1$; $x^2-2y^2=1$ e $4x^3-y^2+5z=10$ são equações diofantinas. Tavez a equação diofantina mais famosa é a generalização do Teorema de Pitágoras, $a^2+b^2=c^2$.

Normalmente se estuda as equações diofantinas com o intuito de encontrar soluções inteiras, porém, nada impede, dependendo da situação, que se procure também soluções racionais. Em alguns casos uma equação diofantina admite infinitas soluções, como por exemplo $5x-2y=1$, que para k inteiros, temos como solução da equação $x=1+2k$ e $y=2+5k$. Já em outros casos o número de soluções é finito ou não existe, como por exemplo: $x^2+y^2=25$

que tem como soluções inteiras apenas os pares (0,5); (5,0); (3,4) e (4,3), enquanto a equação $x^2+5y^2=-1$ não possui solução, pois, sendo $x^2 \geq 0$ e $5y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+5y^2 \geq 0$.

Observe que a equação $x^2+y^2=25$ é também a equação cartesiana de uma circunferência com centro no ponto (0,0) do plano cartesiano. Daí podemos notar a intima relação entre equações diofantinas e a Geometria Analítica. Porém, devemos destacar que as soluções inteiras de $x^2+y^2=25$ são pontos inteiros no plano contidos nesta circunferência.

Foi discutido anteriormente que certas equações diofantina pode ter infinitas soluções, outras um número finito ou nenhuma solução. Desta forma, é natural perguntar-se em que condições tais equações possuem solução e caso tenham como determiná-las. Infelizmente não existe um método geral que identifique, se uma equação diofantina tem ou não soluções, devendo estudar cada equação de forma individual ou pelo menos por grupos ou tipos.

3.2.2 Equação de Pell-Fermat

Estamos interessados nesta momento em estudar, detalhadamente, somente um tipo de equação diofantina, descrita a seguir.

Definição 3.3. *Seja d um natural não quadrado perfeito. Chamamos de Equação de Pell-Fermat a equação $x^2-dy^2=m$.*

Curiosamente encontramos em vários livros esta equação sendo chamada como equação de Pell, pois o própio Euler a denomina assim acreditando que a solução geral das mesmas tinha sido descoberta pelo matemático inglês John Pell, porém, na realidade sabe-se que Euler cometeu um equívoco, pois Pell organizou os resultados e soluções dos matemáticos da época, que estudaram esta equação. A solução geral dessa equação foi dada por Bhaskaracharya ou Bhaskara II e o caso em que $m=1$ é dado por um matemático Inglês Lord Brounker.

Para este trabalho vamos adotar $m=1$ ou $m=-1$ na equação $x^2-dy^2=m$ e da definição podemos concluir que $\sqrt{d}$ é Irracional.

A restrição para d não ser quadrado perfeito sustenta-se no fato que, se $d=k^2$, com $k \in \mathbb{N}$ a equação $x^2-dy^2=1$ pode ser reescrita como $(x+ky)(x-ky)=1$. Contudo, o produto de fatores inteiros só pode ser igual a 1 se ambos os fatores forem iguias a 1 ou -1. Como procuramos soluções inteira concluimos que $(x+ky)=\pm 1$ e $(x-ky)=\pm 1$, resolvendo esses sistemas temos: $x=\pm 1$ e $y=0$, portanto quando $d=k^2$ a equação $x^2-dy^2=1$ possui apenas duas solução inteira que são os pares $(\pm 1, 0)$.

É óbvio que $(\pm 1, 0)$ são soluções para $x^2-dy^2=1$, com d sendo ou não quadrado perfeito. Essas soluções triviais não são nada interessantes, sendo desnecessário levá-las em consideração, pois não podemos gerar outrar soluções a partir delas. Entenda solução trivial o par (x,y)

tal que $xy = 0$.

Denotaremos como solução fundamental o par (x_1, y_1) a menor solução inteira positiva maior que a solução trivial. Por exemplo: a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ tem como solução fundamental o par $(3,2)$, pois $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$ e por tentativa não é possível encontrar nenhuma solução (m,n), tal que $0 < m < 3$ e $0 < n < 2$.

No plano esta equação representa uma Hipérbole. Encontrar soluções inteiras desta equação é determinar os pontos de coordenadas inteiras que intercepta esta cônica. Ora, mas conhecendo uma hipérbole, uma questão pode surgir: Será que existem infitos pontos de coordenadas inteiras que interceptam a hipérbole? De fato isso ocorre e vamos propor um exemplo para mostrar que é possível encontrar mais de um ponto inteiro a partir de uma solução.

Exemplo 3.1. *Considere a equação $x^2 - 3y^2 = 1$. A partir de uma solução fundamental encontre uma segunda solução.*

Por tentativa podemos facilmente perceber que uma solução para a equação é o par $(2,1)$, pois $2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$. Chamamos esta solução de fundamental, pois a única solução inteira positiva menor que a encontrada é $(1,0)$ que é uma das soluções triviais.

Note agora, que

$$2^2 - 3 \cdot 1^2 = (2 + 1\sqrt{3})(2 - 1\sqrt{3}) = 1$$

elevando ambos os lados dessa igualdade ao quadrado, vamos obter

$$(2 + 1\sqrt{3})^2 (2 - 1\sqrt{3})^2 = 1^2 \Rightarrow (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$$

logo observa-se que o par $(7,4)$ também é solução.

Ora, mas do exemplo 3.1, podemos nos questionar sobre a possibilidade de elevar ambos os lados da igualdade ao cubo, já que $1^3 = 1$?

Efetuando os cálculos teríamos:

$$\begin{aligned}
(2 + 1\sqrt{3})^3 (2 - 1\sqrt{3})^3 = 1^3 &\Rightarrow (2 + 1\sqrt{3})^2 \cdot (2 + 1\sqrt{3})(2 - 1\sqrt{3})^2 \cdot (2 - 1\sqrt{3}) = 1 \\
&\Rightarrow (7 + 4\sqrt{3})(2 + 1\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})(2 - 1\sqrt{3}) = 1 \\
&\Rightarrow (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1 \\
&\Rightarrow 26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1
\end{aligned}$$

Logo $(26, 15)$ é também solução da equação.

Observe a seguir as soluções da equação $x^2 - 3y^2 = 1$ no plano.

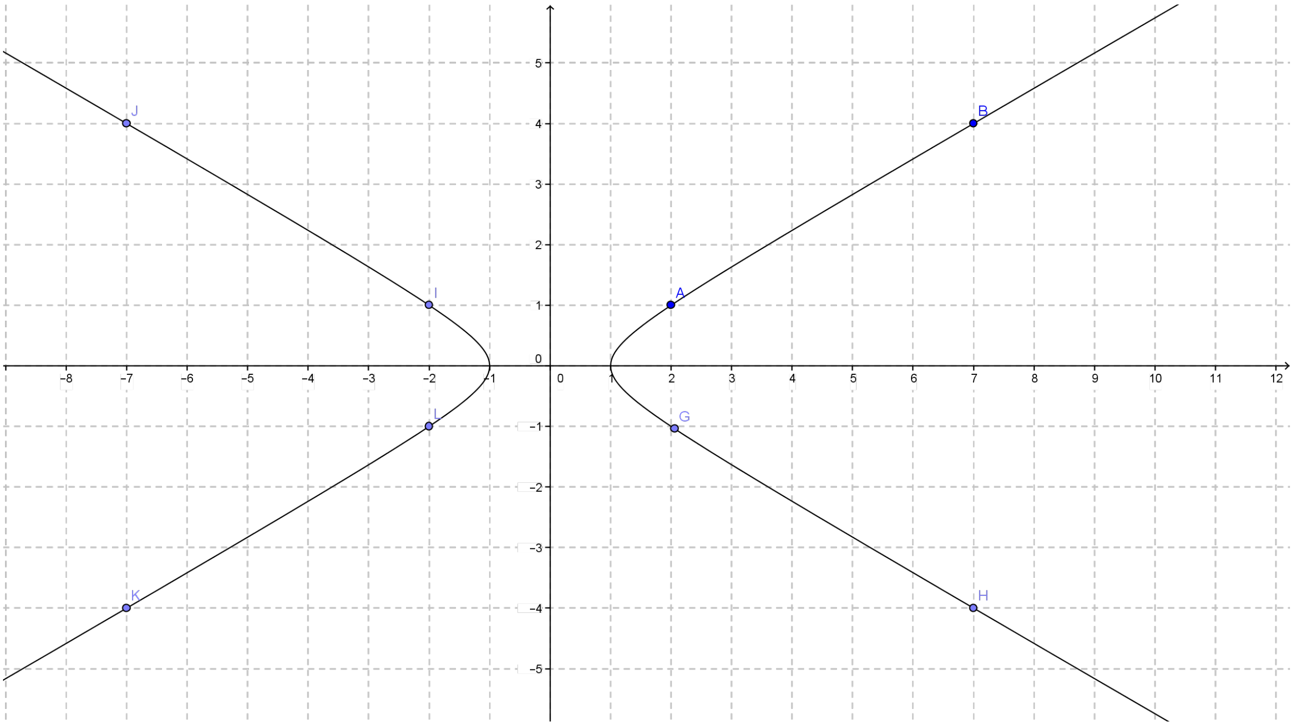


Figura 3.2 Interpretação geométrica das soluções inteiras da equação $x^2 - 3y^2 = 1$

Dos cálculos feitos anteriormente, note que as soluções já se apresentavam antes da última implicação ($(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3}) = 1$). Assim, caso a equação se apresente nesta forma: $(a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d}) = 1$ é óbvio que a e b são soluções. Diante disso vamos estudar o seguinte conjunto

$$\mathbb{P} = \{(a+b\sqrt{d})|a,b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

Estamos interessados em provar que $(a+b\sqrt{d})^n \in \mathbb{P}$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro observe que o conjunto $\mathbb{P}$ é fechado para a multiplicação, pois:

$$(a+b\sqrt{d})\cdot(x+y\sqrt{d}) = ax+ay\sqrt{d}+xb\sqrt{d}+d\sqrt{d}y\sqrt{d} = ax+byd+(ay+bx)\sqrt{d}$$

Por indução, suponha que $(a+b\sqrt{d})^n \in \mathbb{P}$ já que o caso trivial foi feito acima.

Agora devemos provar que $(a+b\sqrt{d})^{n+1}$ também pertença ao conjunto $\mathbb{P}$. Para isso, basta notar que:

$$(a+b\sqrt{d})^{n+1} = (a+b\sqrt{d})^n \cdot (a+b\sqrt{d}).$$

Como por hipótese de indução $(a+b\sqrt{d})^n = x+y\sqrt{d}$, então

$$(a+b\sqrt{d})^{n+1} = (x+y\sqrt{d})\cdot(a+b\sqrt{d}) = ax+byd+(ay+bx)\sqrt{d},$$

provando o que se queria.

Este resultado será útil em demonstrações posteriores, no mais note que $(2+1\sqrt{3})(2-1\sqrt{3}) = 2^2 - 3\cdot 1^2 = 1$ é a solução fundamental ou primeira solução. Elevando ao quadrado $(2+1\sqrt{3})^2(2-1\sqrt{3})^2 \Rightarrow 7^2 - 3\cdot 4^2 = 1$ obtemos uma segunda solução e elevando ao cubo $(2+1\sqrt{3})^3(2-1\sqrt{3})^3 = 26^2 - 3\cdot 15^2 = 1$ obtemos uma terceira solução. Daí será que elevando a n com $n \in \mathbb{N}$ teremos a enésima solução? De fato é verdade e para provar vamos descrever a seguinte Proposição:

Proposição 3.2.1. *Seja (x_1, y_1) a solução fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$. Então (x_n, y_n) também é solução se $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração *Primeiro vamos substituir n por 2, para dar uma noção do método que será utilizado.*

Para $n = 2$, temos:

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^2 = {x_1}^2 + 2x_1y_1\sqrt{d} + {y_1}^2\sqrt{d^2} = x_1^2 + {y_1}^2 d + 2x_1y_1\sqrt{d}$$

definido $x_2 = x_1^2 + {y_1}^2 d$ e $y_2 = 2x_1y_1$, temos que $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n = x_2 + y_2\sqrt{d}$.

Agora, destacamos que, $(\sqrt{d})^i$ com i ímpar é $(\sqrt{d})^{2k+1} = \sqrt{d^{2k}d^1} = d^k\sqrt{d}$ e que $(\sqrt{d})^i$ com i par é $(\sqrt{d})^{2k} = \sqrt{d^{2k}} = d^k$.

Daí, com o auxílio do Binômio de Newton, [2] temos:

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {x_1}^{n-i} \cdot {y_1}^{i} \cdot (\sqrt{d})^i$$

Separando i ímpar de i par, podemos reescrever a última igualdade como

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {x_1}^{n-i} \cdot {y_1}^{i} \cdot (\sqrt{d})^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} {x_1}^{n-2i} \cdot {y_1}^{2i} \cdot d^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i+1} {x_1}^{n-2i-1} \cdot {y_1}^{2i+1} \cdot d^i(\sqrt{d}).$$

Então, associando

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} {x_1}^{n-2i} \cdot {y_1}^{2i} \cdot d^i$$

e

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i+1} {x_1}^{n-2i-1} \cdot {y_1}^{2i+1} \cdot d^i$$

temos que

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {x_1}^{n-i} \cdot {y_1}^{i} \cdot (\sqrt{d})^i = x_n + y_n\sqrt{d}.$$

Com um raciocínio análogo podemos concluír também que

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = x_n - y_n\sqrt{d}.$$

Ora, mas (x_1, y_1) são soluções da equação, logo

$$x_1^2 - dy_1^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = 1$$

daí, elevando ambos os membros a n, o resultado segue, pois

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = 1^n \Rightarrow (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = 1 \Leftrightarrow x_n^2 - dy_n^2 = 1$$

Com isso demonstramos que (x_n, y_n) são soluções da Equação de Pell-Fermat.

Podemos proceder de forma alternativa para provar a proposição 3.2.1. Mas, para isso, primeiro, considere o conjunto $\mathbb{P} = \{(a + b\sqrt{d}) | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, em que $d \in \mathbb{N}$ é um natural livre de quadrados e as seguintes definições (ver[12])

Definição 3.4. *Dado $z \in \mathbb{P}$, definimos o conjugado de $z = a + b\sqrt{d}$ o número $\overline{z} = a - b\sqrt{d}$.*

Definição 3.5. *A norma algébrica em $\mathbb{P}$ é definida por:*

$$N(z) = z\overline{z}.$$

Logo, se $z = a + b\sqrt{d}$, então $N(z) = a^2 - b^2d \in \mathbb{Z}$.

Da definição de conjugado temos a seguinte propriedade: dados $\overline{z}$, $\overline{w} \in \mathbb{P}$, então $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Para mostrar, note que $z \cdot w = ax + byd + (ay + bx)\sqrt{d}$. Com isso,

$$\overline{z \cdot w} = ax + byd - (ay + bx)\sqrt{d}.$$

Mas,

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - b\sqrt{d}) \cdot (x - y\sqrt{d}) = ax - ay\sqrt{d} - bx\sqrt{d} + byd = ax + byd - (ay + bx)\sqrt{d}$$

Então $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Da definição de norma temos a seguinte propriedade: $N(zw) = N(z)N(w)$.

Que é facilmente demonstrada pois:

$$N(zw) = \overline{zw} \cdot zw = \overline{z}z \cdot \overline{w}w = N(z)N(w)$$

Com isso, se $N(z) = 1$ e $N(w) = 1$, então $N(zw) = 1$.

Agora estamos interessados em demonstrar o seguinte Lema:

Lema 3.1. *sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $z = a + b\sqrt{d}$. Então a e b é solução da Equação de pell-Fermat se e somente, se $N(z) = 1$.*

Demonstração: *Tome, por hipótese, $N(z) = 1$. Isso implica que, $z \cdot \bar{z} = 1$. Ora mas, $z = a + b\sqrt{d}$, então*

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 = 1$$

Reciprocamente, tome agora a e $b \in \mathbb{Z}$ solução da Equação de Pell-Fermat.

Logo

$$a^2 - db^2 = 1 \Rightarrow (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = 1.$$

Como $z = a + b\sqrt{d}$, temos que:

$$(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow N(z) = 1.$$

Para demonstrar a proposição 3.2.1, defina $z_n = z^n$ e $z = x_1 + y_1\sqrt{d}$, com (x_1, y_1) solução da Equação de Pell-Fermat.

Note que, $z_n = z^n \Rightarrow x_n + y_n\sqrt{d} = x_1 + y_1\sqrt{d}$.

Sendo, (x_1, y_1) solução de Pell-Fermat, logo, $N(z) = 1$.

Agora note que, como $N(z) = 1$, temos que $N(z^n) = N(z)^n = 1$.

Mas $N(z_n) = N(z^n)$, logo $N(z_n) = 1$.

Como $N(z_n) = z_n\overline{z_n} \Rightarrow (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = 1$,

então $x_n^2 - dy_n^2 = 1$, Daí (x_n, y_n) é solução de Pell-Fermat.

Observe que a proposição 3.2.1 nos informa uma maneira de encontrar uma infinidade de soluções para a equação de Pell-Fermat. Mas, ainda, não é possível afirmar que todas as soluções são encontradas pela relação $x_n + y_n = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$. Porém, se existir uma solução diferente de (x_n, y_n), é óbvio que ela deve estar entre duas soluções inteiras positivas. Assim, considerando todas as soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$ com $x + y\sqrt{d} > 1$, existe uma mínima ou fundamental, com x, y e $x + y\sqrt{d}$ mínimos.

Defina $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, uma outra solução da equação de Pell-Fermat, distinta de (x_n, y_n). Como $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$, pois já tinhamos anteriormente definido (x_1, y_1) como solução fundamental, existe um $n \geq 1$, tal que (ver: [2])

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n \leq a + b\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$$

Agora note que, $x_n^2 - dy_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = 1$, logo

$$(x_n - y_n\sqrt{d}) = \frac{1}{(x_n + y_n\sqrt{d})} = \frac{1}{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n},$$

daí multiplicando a desigualdade $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n \leq a + b\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$ por $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}$, vamos obter:

$$1 \leq (a + b\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} < (x_1 + y_1\sqrt{d}).$$

Mas $(a + b\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} = (a + b\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (ax_n - dby_n) + (bx_n - ay_n)\sqrt{d}$, logo:

$$1 \leq (ax_n - dby_n) + (bx_n - ay_n)\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d}).$$

Como (a,b) e (x_n, y_n) são soluções da equação de Pell-Fermat, temos que

$$N((a + b\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d})) = N(a + b\sqrt{d})N(x_n - y_n\sqrt{d}) = 1$$

Então, $(ax_n - dby_n, bx_n - ay_n)$ é solução da Equação de Pell-Fermat, sendo uma solução menor que a fundamental ou mínima.

Mas $ax_n - dby_n \geq 0$, pois caso contrário $ax_n - dby_n < 0 \Leftrightarrow ax_n < dby_n \Leftrightarrow \frac{ax_n}{by_n} < d$. Ora mas da equção $x - dy = 1$, temos que

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 - d = \frac{1}{y_n^2} \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 = d + \frac{1}{y_n^2} > d \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > \sqrt{d}$$

e analogamente $\frac{a}{b} = \sqrt{d}$. Como a, b, x_n e y_n são positivos, temos que $\frac{ax_n}{by_n} > d$ o que contradiz o fato $\frac{ax_n}{by_n} < d$. Então $ax_n - dby_n \geq 0$.

Temos também que $bx_n - ay_n \geq 0$, pois se, por hipótese, $bx_n - ay_n < 0$, teriamos $\frac{x_n}{y_n} < \frac{a}{b}$.

Mas $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 = d + \frac{1}{y_n^2}$ e de forma análoga $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = d + \frac{1}{b^2}$, temos que

$$\frac{x_n}{y_n} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{y_n^2} < \frac{1}{b^2}$$

portanto $b < y_n \Rightarrow a < x_n$ o que contradiz o fato de $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \leq a + b\sqrt{d}$.

Então $(ax_n - dby_n, bx_n - ay_n)$ é uma solução positiva menor que a fundamental, logo essa solução deve ser a trivial, ou seja, $ax_n - dby_n = 1$ e $bx_n - ay_n = 0$, logo

$$(a + b\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (ax_n - dby_n) + (bx_n - ay_n)\sqrt{d} = 1 + 0 \cdot \sqrt{d} = 1$$

mas

$$(a + b\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (a + b\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} = (a + b\sqrt{d})(\frac{1}{x_1 + y_1\sqrt{d}})^n = 1$$

com isso temos que $a + b\sqrt{d} = x_n + y_n\sqrt{d}$, concluindo que $(a, b) = (x_n, y_n)$.

Resumindo, não há soluções além das encontradas pelo método da proposição anterior, então as soluções da Equação de Pell-Fermat são $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, com (x_1, y_1) as soluções fundamentais.

Como sabemos encontrar soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$ e que não existe soluções diferentes de $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ vamos enunciar a seguinte

Teorema 3.2.1. *Seja (x_n, y_n) soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$. Então $\frac{x_n}{y_n}$ são aproximações racionais de $\sqrt{d}$.*

***Demonstração**: Primeiro, sabemos que existe infinitas soluções para a equação $x^2 - dy^2 = 1$, bastando encontrar a solução fundamental.*

Segundo, como (x_n, y_n) são soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$, podemos escrever $x_n^2 - dy_n^2 = 1 \rightarrow (x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = 1$, dividindo ambos os membros por $(x_n + y_n\sqrt{d})$ vamos obter $(x_n - y_n\sqrt{d}) = \frac{1}{(x_n + y_n\sqrt{d})}$.

Terceiro, observe que $0 < x_n - y_n\sqrt{d} = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} < \frac{1}{y_n}$, assim

$$|x_n - y_n\sqrt{d}| < \frac{1}{y_n}$$

Daí dividindo ambos os membros por y_n vamos obter:

$$|x_n - y_n\sqrt{d} - 0| = |x_n - y_n\sqrt{d}| < \frac{1}{y_n} \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{d}| < \frac{1}{y_n^2}$$

Como as soluções da equação de Pell-Fermat satisfazem o Teorema de Dirichlet, podemos concluir que (x_n, y_n) são aproximações racionais de $\sqrt{d}$.

Exemplo 3.2. *Observe como encontrar um número racional que se aproxime de $\sqrt{d}$ com duas casas decimais, utilizando os conceitos estabelecidos nesta seção.*

Tome a seguinte equação $x^2 - 3y^2 = 1$. Note que a solução fundamental é $(2,1)$, daí toda solução desta equação é da forma $x_n + y_n\sqrt{d} = (2+1\sqrt{3})^n$.

Para $n = 2$ temos que $x_2 + y_2\sqrt{3} = (2+1\sqrt{3})^2$. Realizando os cálculos vamos obter $x_2 + y_2\sqrt{3} = (7+4\sqrt{3})$. Então $x_2 = 7$, $y_2 = 4$ e $\frac{x_2}{y_2} = 1,75$. Que já é uma aproximação de uma casa decimal de $\sqrt{3}$.

Para $n = 3$ temos que $x_3 + y_3\sqrt{3} = (2+1\sqrt{3})^3$. Note agora que $(2+1\sqrt{3})^3 = (7+4\sqrt{3})(2+1\sqrt{3})$. Realizando os cálculos vamos obter $x_3 + y_3\sqrt{3} = (26+15\sqrt{3})$. Então $x_3 = 26$, $y_3 = 15$ e $\frac{x_3}{y_3} = 1,733333...$ sendo uma aproximação de duas casas decimais de $\sqrt{3}$.

Observe que com duas interações sobre a equação $x^2 - 3y^2 = 1$, tendo a solução fundamental, adquirimos um número $\frac{26}{15}$, que é uma aproximação razoável de $\sqrt{3}$.

A única dificuldade sobre a equação de Pell-Fermat é que nem sempre encontramos com facilidade a solução fundamental. Como por exemplo a equação $x^2 - 13y^2 = 1$ tem como solução fundamental o par $(649, 180)$.

3.3 Escada de Theon

Nesta seção conheceremos o terceiro método para calcular raízes quadradas. Começaremos estudando a aproximação racional para $\sqrt{2}$ utilizando a recursão que definiremos logo em seguida conhecida como Escada de Theon, continuaremos mostrando que é possível realizar uma adaptação à recursão para aproximar racionais a $\sqrt{d}$, $d \in \mathbb{N}$ não quadrado perfeito e a provável idéia que originou a recursão.

3.3.1 A Escada de Theon para $\sqrt{2}$

Definição 3.6. *Dada as sequências x_n e y_n, com $n > 1$. Chamamos de Escada de Theon a recursão $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = x_{n-1} + x_n$ com $x_1 = y_1 = 1$.*

Conhecendo a recursão vamos calcular os seus seis primeiro termos:

$$n = 2 \Rightarrow x_2 = x_{2-1} + y_{2-1} = x_1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{e} \quad y_2 = x_{2-1} + x_2 = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 = x_{3-1} + y_{3-1} = x_2 + y_2 = 2 + 3 = 5 \quad \text{e} \quad y_3 = x_{3-1} + x_3 = x_2 + x_3 = 2 + 5 = 7$$

$$n = 4 \Rightarrow x_4 = x_{4-1} + y_{4-1} = x_3 + y_3 = 5 + 7 = 12 \quad \text{e} \quad y_4 = x_{4-1} + x_4 = x_3 + x_4 = 5 + 12 = 17$$

$$n = 5 \Rightarrow x_5 = x_{5-1} + y_{5-1} = 12 + 17 = 29 \quad \text{e} \quad y_5 = x_{5-1} + x_5 = 12 + 29 = 41$$

$$n = 6 \Rightarrow x_6 = x_{6-1} + y_{6-1} = 29 + 41 = 70 \quad \text{e} \quad y_6 = x_{6-1} + x_6 = 29 + 70 = 99$$

A Escada de Theon, também chamada de Escada de Teão recebe esta denominação pelo fato de ser Theon, ou Teão de Smirna, o primeiro a relatar sobre esta recorrência. Theon descreve esta recorrência de modo diferente da definição dada anteriormente, sendo $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ com $x_1 = y_1 = 1$. Porém note que as duas são análogas bastando reorganizar $x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} - x_n = y_{n-1}$ e substituir em $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ que teremos $y_n = x_{n-1} + x_{n-1} - x_n = 2x_{n-1} + x_n$.

Tal recursão, extremamente simples, foi utilizada para aproximar racionais a $\sqrt{2}$, bastando tomar o quociente entre $\frac{y_n}{x_n}$. Com isso, defina $q_n = \frac{y_n}{x_n}$ e observe na tabela abaixo alguns de seus termos:

n	x_n	y_n	q_n
1	1	1	1
2	2	3	1,5
3	5	7	1,4
4	12	17	1,41666...
5	29	41	$\approx$ 1,413793
6	70	99	$\approx$ 1,41428571
7	169	239	$\approx$ 1,41420118
8	408	577	$\approx$ 1,41421568

Tabela 3.1 Quociente das soluções da Escada de Theon.

Lembrando que $\sqrt{2} = 1,4142135623...$, note que na quinta iteração de q_n, ou seja, em q_6, a aproximação é de quatro casas decimais, nos levando a conjecturar que os próximos termos da sequência q_n também são aproximações de $\sqrt{2}$ com um erro de aproximação cada vez menor, ou seja, com mais casas decimais exatas. Porém não há garantias que isso ocorra sempre, por exemplo, será que q_{100} é ainda uma aproximação de $\sqrt{2}$? Note também que se q_n for realmente convergente, $\sqrt{2}$ é um candidato para seu limite, pois sendo

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \quad \text{e} \quad y_n = x_{n-1} + x_n = x_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1} = 2x_{n-1} + y_{n-1}$$

temos que

$$q_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{2x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}$$

Multiplicando q_n por $\frac{\frac{1}{x_{n-1}}}{\frac{1}{x_{n-1}}}$, vamos obter

$$q_n = \frac{2 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}$$

Note agora que $\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} = q_{n-1}$ e se q_{n-1} for convergente q_n também será, pois elas diferem em um número finito de termos (mais precisamente somente do primeiro termo, onde podemos considerar q_n como uma subsequência de q_{n-1}).

Daí, considerando q_{n-1} convergente e tomando o número real L como seu limite, podemos afirmar que L também é o limite de q_n, logo

$$q_n = \frac{2 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{2 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}}$$

Passando q_n ao seu limite, temos

$$L = \frac{2 + L}{1 + L} \Rightarrow L + L^2 = 2 + L \Rightarrow L = \sqrt{2}$$

Desta forma temos a garantia que se q_{n-1} for convergente, q_n também será e $\sqrt{2}$ é seu limite. Porém, como q_{n-1} e q_n diferem de um número finito de termos, podemos desconsiderar esses números finitos que os difere e provar, apenas, que q_n é convergente. Para isso, vamos realizar uma adaptação para generalizar a Escada de Theon e em seguida mostrar a convergência de q_n.

3.3.2 A Escada de Theon Generalizada

Ao calcular o suposto limite de

$$q_n = \frac{2 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{2 + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}}$$

fica claro que, qual seja o termo independente na equação

$$L = \frac{2+L}{1+L} \Rightarrow L + L^2 = 2 + L$$

o limite dessa relação seria a raiz quadrada desse termo, pois

$$L = \frac{d+L}{1+L} \Rightarrow L + L^2 = d + L \Rightarrow L = \sqrt{d}.$$

Daí observando que o termo aperece quando substituimos x_n em y_n, pois

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \quad \text{e} \quad y_n = x_{n-1} + x_n = x_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1} = 2x_{n-1} + y_{n-1},$$

podemos realizar a seguinte adaptação

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \quad \text{e} \quad y_n = x_n + (d-1)x_{n-1}, \quad \text{com} \quad x_1 = y_1 = 1.$$

Agora substituindo x_n em y_n, vamos obter

$$y_n = x_n + (d-1)x_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1} + (d-1)x_{n-1} \Rightarrow y_n = dx_{n-1} + y_{n-1}$$

Como q_n é definida como $q_n = \frac{y_n}{x_n}$, logo

$$q_n = \frac{dx_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{d + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{d + q_{n-1}}{1 + q_{n-1}}$$

Se, novamente, q_{n-1} convergente e passando a equação acima ao seu limite teriamos:

$$L = \frac{d+L}{1+L} \Rightarrow L = \sqrt{d}$$

Desta forma podemos observar que q_n é uma aproximação racional para o natural d, restando mostrar que q_n converge.

A prova que descreveremos para a convergência de q_n foi dada por João Bosco Pitombeira no seu excelente trabalho: "A raiz quadrada ao longo dos séculos"em [3]. Nesse trabalho, ele introduz dois lemas preparatórios e depois realiza a prova.

Vamos destrinchar cada passagem das demonstrações com o intuito de apresentá-las o mais claro possível, sem sair da linha de raciocínio do texto original. Desta forma descreveremos e seguinte

Lema 3.2. *Se as sequências x_n e y_n estão definidas como $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = x_n + (d-1)x_{n-1}$, então*

$$y_n + x_n\sqrt{d} = (1+\sqrt{d})^n \quad \text{e} \quad y_n - x_n\sqrt{d} = (1-\sqrt{d})^n.$$

Demonstração: *Por indução, para:*

$$n = 1 \Rightarrow y_1 + x_1\sqrt{d} = (1+\sqrt{d})^1 = 1 + \sqrt{d} \quad \textit{que é verdadeiro, pois} \quad x_1 = y_1 = 1$$

Supondo que seja válido para um inteiro k, ou seja, $y_n + x_n\sqrt{d} = (1+\sqrt{d})^n$ é verdade.

Mostraremos que para o inteiro $k+1$ também será verdadeiro.

Note que, pela hipótese de indução:

$$(1+\sqrt{d})^{k+1} = (1+\sqrt{d})^k(1+\sqrt{d}) = (y_k+\sqrt{d}x_k)(1+\sqrt{d}) = (dx_k+y_k)+(x_k+y_k)\sqrt{d}.$$

Mas pela definição das sequências (x_n) e (y_n), podemos escrever $x_{k+1} = x_k + y_k$.
Com isso

$$(1+\sqrt{d})^{k+1} = (dx_k+y_k)+\sqrt{d}(x_k+y_k) = (dx_k+y_k)+x_{k+1}\sqrt{d}$$

Agora basta mostrar que $dx_k + y_k = y_{k+1}$ para finalizar a prova. Para isso, tome:

$$dx_k + y_k = dx_k - x_k + x_k + y_k = (d-1)x_k + x_k + y_k$$

Mas $x_k + y_k = x_{k+1}$, logo

$$dx_k + y_k = (d-1)x_k + (x_k+y_k) = (d-1)x_k + x_{k+1} = y_{k+1}.$$

Como $y_k = (d-1)x_{k-1} + x_k$, logo $y_{k+1} = (d-1)x_k + x_{k+1}$

Então, de fato $(1+\sqrt{d})^{k+1} = y_{k+1} + \sqrt{d}x_{k+1}$, ficando, assim demonstrado o que se queria. A demonstração de $y_n - \sqrt{d}x_n = (1-\sqrt{d})^n$ é feito de maneira análoga.

Continuando é proposto o segundo

Lema 3.3. *Para todo $n \geq 3$, $x_n = 2x_{n-1} + (d-1)x_{n-2}$.*

Demonstração:

Sendo $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = x_n + (d-1)x_{n-1}$, logo $y_{n-1} = x_{n-1} + (d-1)x_{n-2}$ e subistituindo em x_n obtemos:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-1} + (d-1)x_{n-2} = 2x_{n-1} + (d-1)x_{n-2}$$

Ficando assim demonstrado o que se queria.

Em posse desses dois Lemas o professor João Bosco Pitombeira continua propondo o seguinte

Teorema 3.3.1. *A sucessão q_n converge para $\sqrt{d}$.*

Demonstração: *Da relação $y_n - \sqrt{d}x_n = (1-\sqrt{d})^n$ provada no lema 3.1, dividindo ambos os membros por x_n, vamos obter a seguinte igualdade*

$$\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{d} = \frac{(1-\sqrt{d})^n}{x_n}$$

Note que $|(1-\sqrt{d})^n| = |(\sqrt{d}-1)^n|$. Como $x_n > 0$, dividindo ambos os membros por x_n, vamos obter $|\frac{(1-\sqrt{d})^n}{x_n}| = |\frac{(\sqrt{d}-1)^n}{x_n}|$.

Com isso

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{d}\right| = \left|\frac{(\sqrt{d}-1)^n}{x_n}\right|$$

daí, como $(\sqrt{d}-1)^n > 0$, podemos concluir que

$$|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{d}| = \frac{(\sqrt{d}-1)^n}{x_n}$$

Observe que do Lema 3.2 é possível concluir que $x_n > (d-1)x_{n-2}$. Então,

$$x_n > (d-1)^2 x_{n-4}$$

pois, de $x_n > (d-1)x_{n-2}$ podemos concluir que $x_{n-2} > (d-1)x_{n-4}$ e daí podemos substiruir para obter $x_n > (d-1)(d-1)x_{n-4} = (d-1)^2 x_{n-4}$. De forma análoga temos:

$$x_n > (d-1)^3 x_{n-6}$$
$$x_n > (d-1)^4 x_{n-8}$$
$$\vdots$$
$$x_{2n} > (d-1)^n$$
$$x_{2n+1} > (d-1)^n$$

Assim, para n par,

$$\left|\frac{y_{2n}}{x_{2n}} - \sqrt{d}\right| = \frac{(\sqrt{d}-1)^{2n}}{x_{2n}} < \frac{(\sqrt{d}-1)^{2n}}{(d-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n$$

e, para n ímpar,

$$\left|\frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1}} - \sqrt{d}\right| = \frac{(\sqrt{d}-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}} < \frac{(\sqrt{d}-1)^{2n+1}}{(d-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n \cdot (\sqrt{d}-1)$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n = 0$$

segue-se, em ambos os casos, que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \sqrt{d}$$

então, q_n é convergente e seu limite é $\sqrt{d}$.

3.3.3 Origem da Recorrência

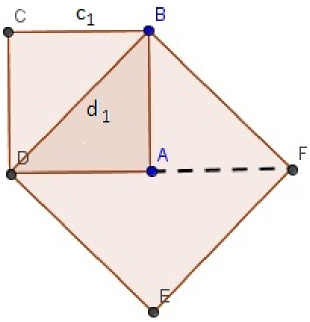
Não se sabe ao certo como os gregos chegaram a este resultado, que aproxima racionais a raízes quadradas de forma tão simples. Porém, o professor João Bosco Pitombeira descreve uma hipótese dada pelo historiador de Matemática Van der Waerden nos seguinte termos

> "Platão, em seu *República* afirma que 7 é a diagonal racional que corresponde ao lado 5. Proclus explica o que são números diagonais e números lados, conceitos que ele afirma virem dos pitagóricos".
>
> "Sendo a fonte de todos os números, a unidade é potencialmente um lado e uma diagonal. Ora, tomemos duas unidades, uma lateral e uma diagonal; então um novo lado é formado adicionando a unidade diagonal á unidade lateral, e uma nova diagonal, adicionando duas vezes a unidade lateral á unidade diagonal"

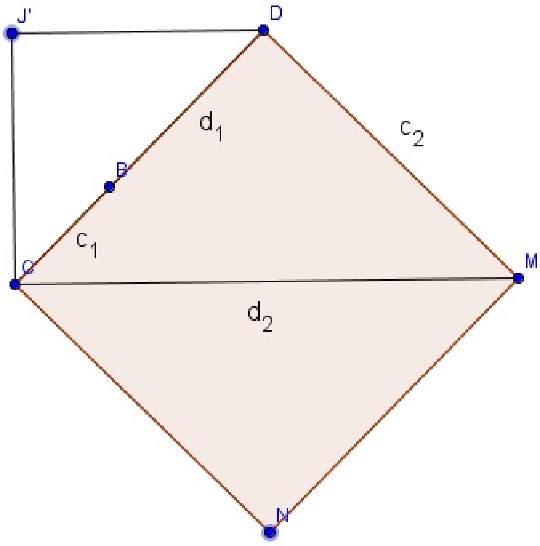
Para os pitagóricos o número lado ou unidade lado está relacionado com o comprimento do lado de um quadrado e o número ou unidade diagonal está relacionada com o comprimento da diagonal de um quadrado.

Quando Proclus explica: "então um novo lado é formado adicionando a unidade diagonal a unidade lateral"era provavelmente um lado de um novo quadrado que ele estava falando e continua afirmando "uma nova diagonal, adicionando duas vezes a unidade lateral a unidade diagonal"que provavelmente seria a diagonal desse novo quadrado.

Vamos interpretar geometricamente o que foi escrito acima, para isso observe na figura 1 que a área do quadrado EDBF é o dobro da área ABCD.



(a) Figura 1



(b) Figura 2

Figura 3.3 Origem da recorrência Escada de Theon.

Tome a área do quadrado EDBF = Q_2 e a área do quadrado ABCD = Q_1. Logo, $Q_2 = 2Q_1$, daí

$$Q_2 = 2Q_1 \Rightarrow (\overline{DB})^2 = 2(\overline{CB})^2$$

Tome agora $\overline{DB} = d_1$ e $\overline{CB} = c_1$, assim

$$d_1 = c_1\sqrt{2} \Rightarrow d_1\sqrt{2} = 2c_1$$

Tomando como ponto de partida a figura 1, vamos considerar $\overline{CB} = c_1$ como o número lado e $\overline{DB} = d_1$ como o número diagonal, ou seja, esse novo quadrado teria como lado (observe a figura 2) $c_1 + d_1$ e como diagonal $2c_1 + d_1$.

Com isso basta mostrar que a diagonal desse novo quadrado que chamaremos de $d_2 = 2c_1 + d_1$. Pois, por construção o lado é $c_2 = c_1 + d_1$.

Ora, mas pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$(c_1 + d_1)^2 + (c_1 + d_1)^2 = d_2^2 \Rightarrow (c_1 + d_1)\sqrt{2} = d_2 \Rightarrow c_1\sqrt{2} + d_1\sqrt{2} = d_2$$

Como $d_1 = c_1\sqrt{2}$ e $d_1\sqrt{2} = 2c_1$, então

$$d_2 = d_1 + 2c_1$$

Como queriamos mostrar.

Observe que esse processo pode ser realizado inúmeras vezes, sempre encontrando um novo quadrado com lado igual ao lado e a diagonal do quadrado anterior. Desta forma, podemos reescrever a relação encontrada ($c_2 = c_1 + d_1$ e $d_2 = d_1 + 2c_1$) como:

$$c_n = c_{n-1} + d_{n-1} \quad \text{e} \quad d_n = 2c_{n-1} + d_{n-1}$$

Que é equivalente a $c_n = c_{n-1} + d_{n-1}$ e $d_n = c_{n-1} + c_n$.

CAPÍTULO 4

A Relação Entre os Algoritmos

Este capítulo tem por objetivo mostrar que os três algoritmos produzem soluções em comum.

Os algoritmos apresentados (Algorítmo de Hierão, Equação de Pell-Fermat e Escada de Theon), como já vimos, foram utiizados por povos distintos e em épocas diferentes, sendo o primeiro e o último criados com a finalidade específica de encontrar raízes quadradas e no segundo (Equação de Pell-Fermat) observado posteriormente esta qualidade. Mesmo tendo expressões diferentes entre si, é interessante notar que as aproximações para $\sqrt{2}$, são praticamente as mesmas. Vejamos:

Algoritmo de Hierão:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2 \cdot \frac{1}{x_n}) \quad \text{com} \quad x_1 = 2$$

$$n = 1 \quad \text{temos:} \quad x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 2 \cdot \frac{1}{x_1}) = \frac{1}{2}(2 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$n = 2 \quad \text{temos:} \quad x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + 2 \cdot \frac{1}{x_2}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{17}{12}$$

$$n = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{577}{408}$$

Equação de Pell-Fermat:

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Solução fundamental: $(x_1 = 3, y_1 = 2)$, logo $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$, daí:

$$n = 2 \Rightarrow x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 + y_3\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^3 = (17 + 12\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 99 + 70\sqrt{2}$$

$$n = 4 \Rightarrow x_4 + y_4\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^4 = (99 + 70\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 577 + 408\sqrt{2}$$

Tendo como aproximações os números:

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \frac{577}{408}, \cdots$$

Escada de Theon:

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \quad \text{e} \quad y_n = x_{n-1} + x_n, \quad com \quad x_1 = y_1 = 1$$

como já calculamos até $n = 6$, no capítulo anterior, temos:

$$n = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \quad \text{e} \quad y_2 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 = 5 \quad \text{e} \quad y_3 = 7$$

$$n = 4 \Rightarrow x_4 = 12 \quad \text{e} \quad y_4 = 17$$

$$n = 5 \Rightarrow x_5 = 29 \quad \text{e} \quad y_5 = 41$$

$$n = 6 \Rightarrow x_6 = 70 \quad \text{e} \quad y_6 = 99$$

$$n = 7 \Rightarrow x_7 = x_6 + y_6 = 99 + 70 = 169 \quad \text{e} \quad y_7 = x_7 + x_6 = 169 + 70 = 239$$

$$n = 8 \Rightarrow x_8 = x_7 + y_7 = 169 + 239 = 408 \quad \text{e} \quad y_8 = x_8 + x_7 = 408 + 169 = 577$$

Tendo como aproximação os números;

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408} \cdots$$

Da sequência acima, observe que os termos de índice ímpar são apoximações por falta e os termos de índice par são por excesso.

Diante das soluções obtidas pelos três algoritmos, observamos soluções em comum. Note que, pelo menos até a terceira iteração, o conjunto das soluções do Algoritmo de Hierão está contido no conjunto solução da Equação Pell-Fermat. Como também as solução de Pell-Fermat se coinciden com as soluções de índice par da Escada de Theon, pelo menos até as soluções calculadas até o momento.

Desta forma, podemos conjecturar sobre alguma relação entre os três algoritmos. Como, por exemplo, se sempre encontraremos soluções em comum entres eles para algum n? A resposta é positiva e mostraremos nas próxima seções.

4.1 De Hierão a Pell-Fermat

Nesta seção vamos mostrar que o Algoritmo de Hierão e a Equação de Pell-Fermat fornecem soluções em comum.

Proposição 4.1.1. *Tome* (x_n, y_n) *uma solução da equação* $x^2 - dy^2 = 1$. *Se* $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, *em* $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{d}{a_n})$. *Então* a_{n+1} *é solução da equação de Pell=Fermat.*

Observe que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{d}{a_n}) = \frac{a_n^2 + d}{2 \cdot a_n}$$

.

Como $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, *logo* $a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$.

Com isso, nossa demonstração consiste em mostrar que x_{n+1} e y_{n+1}, *são soluções de Pell-Fermat.*

Mas de $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ e $a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$, *temos que*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + d}{2 \cdot a_n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{(\frac{x_n}{y_n})^2 + d}{2\frac{x_n}{y_n}} = \frac{\frac{x_n^2 + dy_n^2}{y_n^2}}{2\frac{x_n}{y_n}}$$

Multiplicando por $\frac{y_n^2}{y_n^2}$, *vamos obter*

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n^2 + dy_n^2}{2x_n y_n}$$

Dessa expressão estamos interessados em provar que

$$x_{n+1} = x_n^2 + dy_n^2 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = 2x_n y_n$$

Para ilustrar a ideia que utilizaremos, considere $d = 2$ *em* $x^2 - dy^2 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{d}{a_n})$.

Obeserve que vamos obter um caso particular da expressão obtida acima, ou seja,

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n^2 + 2y_n^2}{2x_n y_n}.$$

Como a solução fundamental da equação de Pell-Fermat para esse caso é $(x_1 = 3, y_1 = 2)$, *temos:*

$$\text{para n=1,} \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1^2 + 2y_1^2}{2x_1 y_1} = \frac{3^2 + 2 \cdot 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{17}{12}$$

$$\text{para n=2,} \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_2^2 + 2y_2^2}{2x_2 y_2} = \frac{17^2 + 2 \cdot 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 12} = \frac{577}{408}$$

Note que 17 *e* 12 *são primos entre si,* x_2 *e* y_2 *é uma solução da equação* $x_n^2 - dy_n^2 = 1$, *então da igualdade* $\frac{x_2}{y_2} = \frac{17}{12}$, *podemos concluir que* $x_2 = 17$ *e* $y_2 = 12$, *se* x_2 *e* y_2 *forem primos entre si. Como também que* $x_3 = 577$ *e* $y_3 = 408$, *se* x_3 *e* y_3 *se forem primos tre si e continuando com o mesmo raciocínio* $x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n^2$ *e* $y_{n+1} = 2x_n y_n$, *se* $x_n^2 + 2y_n^2$ *e* $2x_n y_n$ *coprimos. Com isso, vamos propor o seguinte Lema.*

Lema 4.1. *Seja* (x_n, y_n) *solução da Equação de Pell-Fermat. Então* x_n *e* y_n *são coprimos.*

Demonstração: *Por contradição, suponha que* x_n *e* y_n *não são coprimos. Logo, existe fator primo em comum. Seja* k *esse fator. Assim,* $x_n = k \cdot a$ *e* $y_n = k \cdot b$, *com* a *e* $b \in \mathbb{N}$ *, daí*

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \Rightarrow (ka)^2 - d(kb)^2 = (a^2 - d \cdot b^2)k^2 = 1$$

.

Ora, mas a expressão acima é um absurdo, pois $(a^2 - d \cdot b^2)k^2 = p \cdot k \neq 1$, *pois* k *é um fator primo e* $p \in \mathbb{Z}$.

Então x_n *e* y_n *são coprimos.*

Como sabemos que x_n *e* y_n *são primos entre si, devos agora provar que* $x_n^2 + dy_n^2$ *e* $2x_n y_n$ *são coprimos. Mas antes vamos estudar o seguinte Lema:*

Lema 4.2. *Sejam* x_n *e* y_n *solução da Equação de Pell-Fermat. Então* $x_n^2 + dy_n^2$ *é ímpar.*

Demonstração: *Vamos dividir em dois casos, quando* d *for par e quando* d *for ímpar.*

Caso 1: suponha d *par em* $x_n^2 + dy_n^2$.

Se d *for par,* x_n *deve ser ímpar, pois caso contrário* $x_n^2 - dy_n^2$ *seria par e desta forma* x_n *e* y_n *não seriam solução da equação* $x_n^2 - dy_n^2 = 1$, *Logo* x_n^2 *é ímpar. Então* $x_n^2 + dy_n^2$ *é ímpar independentemente de* y_n, *pois* dy_n *é par.*

Caso 2: suponha agora d ímpar, logo temos que analisar duas situações, pois x_n e y_n não devem ser ambos pares, já que são coprimo (Lema 4.1) e não devem ser ambos ímpares, pois se forem, teriamos $x_n^2 - dy_n^2 \neq 1$, pois, $x_n^2 - dy_n^2$ seria par.

Situação 1: x_n par e y_n ímpar, onde concluiriamos rapidamente que $x_n^2 + dy_n^2$ é ímpar.

Situação 2: x_n ímpar e y_n par, onde também concluiriamos que $x_n^2 + dy_n^2$ é ímpar

Então, podemos concluir que $x_n^2 + dy_n^2$ é ímpar.

Em posse do Lema 4.1 e do Lema 4.2 podemos provar que $x_n^2 + dy_n^2$ e $2x_ny_n$ são primos entre si.

Por contradição, suponha que exista um fator primo $k \in \mathbb{N}$, tal que $k|x_n^2 + dy_n^2$ e $k|2x_ny_n$.

Como $x_n^2 + dy_n^2$ é ímpar, temos que k também é ímpar.

Para a contradição devemos provar que k sendo ímpar, $k \nmid 2x_ny_n$.

Agora, de $k|2x_ny_n$, temos que analisar duas possibilidades: $k|y_n$ ou $k|x_n$.

Se $k|y_n$, então $k|y_n^2$. Mas, $k|x_n^2 + dy_n^2$. Logo, $k|x_n^2 \Rightarrow k|x_n$, ora mas x_n e y_n são coprimos, logo temos uma contradição.

Se $k|x_n$, então $k|x_n^2$. Mas, $k|x_n^2 + dy_n^2$. Logo, $k|dy_n^2$. Ora, dai temos que $k|d$ ou $k|y_n^2$. Para a contradição, basta provar que $k \nmid d$, pois, dai $k|y_n^2 \Rightarrow k|y_n$.

De fato, já que se $k|d \Rightarrow k|x_n^2 - dy_n^2$, então $k|1$, pois $k|x_n^2$. Ora, mas isso é impossível, pois k é primo. Então, mostramos que de fato $k|y_n^2$ e desta forma obtemos um absurdo.

Acabamos de demonstrar que não existe um fator primo comum a $x_n^2 + dy_n^2$ e $2x_ny_n$, então $mdc(x_n^2 + dy_n^2, 2x_ny_n) = 1$.

Diante do que foi exposto concluimos que

$$x_{n+1} = x_n^2 + dy_n^2 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = 2x_ny_n$$

Basta agora mostrar que x_{n+1} e y_{n+1} também é solução da equação de Pell-Fermat.

Ora, mas

$$x_{n+1}^2 = (x_n^2 + dy_n^2)^2 = x_n^4 + 2dx_n^2y_n^2 + d^2y_n^4$$

e

$$y_{n+1}^2 = (2x_ny_n)^2 = 4x_n^2y_n^2$$

Multiplicando a segunda equação por d, livre de quadrados, obtemos $dy_{n+1}^2 = d4x_n^2y_n^2$ e subtraindo de x_{n+1}^2, chegamos a seguinte equação

$$x_{n+1}^2 - dy_{n+1}^2 = x_n^4 + 2dx_n^2y_n^2 + d^2y_n^4 - d4x_n^2y_n^2 = x_n^4 - 2dx_n^2y_n^2 + d^2y_n^4 = (x_n^2 - dy_n^2)^2 = 1.$$

Onde concluimos que x_{n+1} e y_{n+1} é solução da equação $x^2 - dy^2 = 1$.

Então, acabamos de mostrar que as soluções do Algoritmo Hierão são também soluções da Equação de Pell-Fermat.

4.2 De Theon a Pell-Fermat

Para a escada de Theon vamos utilizar o caso original desta recursão, ou seja as expressões $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ e $y_n = x_{n-1} + x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ que realizam aproximações de $\sqrt{2}$, e não a sua adaptação.

Um fato interessante sobre as soluções da Escada de Theon (que verificaremos até a quarta iteração e provaremos posteriormente por indução) é que a diferença entre o quadrado de y_n e o dobro do quadrado de x_n é sempre igual a 1 ou -1. Observe:

$$y_1^2 - 2x_1^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$$
$$y_2^2 - 2x_2^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$$
$$y_3^2 - 2x_3^2 = 7^2 - 2 \cdot 5^2 = 49 - 50 = -1$$
$$y_4^2 - 2x_4^2 = 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$$

Esta característica entre as soluções já era verificada pelo próprio Theon num livro intitulado *Exposição dos conhecimentos úteis para a leitura de Platão* (ver: [7])

Em termos gerais, vamos obter:

$$
\begin{aligned}
y_n^2 - 2x_n^2 &= (2x_{n-1} + y_{n-1})^2 - 2(x_{n-1} + y_{n-1})^2 \\
&= 4x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}y_{n-1} - 2y_{n-1}^2 \\
&= 4x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2 \\
&= 2x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 \\
&= -(y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2)
\end{aligned}
$$

De $y_n^2 - 2x_n^2 = -(y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2)$, já podemos afirmar que as soluções alternam-se entre positivas e negativas, bastando provar agora que sempre será 1 e -1.

Por indução essa afirmação é facilmente verificada como verdadeira, pois tomando $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ e $x_1 = y_1 = 1$, temos:

Para $n = 2$,

$$y_2^2 - 2x_2^2 = -(y_1^2 - 2x_1^2) = -(1^2 - 2 \cdot 1^2) = 1$$

Para $n = 3$,

$$y_3^2 - 2x_3^2 = -(y_2^2 - 2x_2^2) = -(1) = -1$$

Agora, sem perda de generalidade, tomando por hipótese de indução que

$$y_{n-1}^2 - 2x_{n-1} = -1$$

Devemos provar que

$$y_n^2 - 2x_n^2 = 1$$

Ora, mas observando os cálculos feitos anteriormente onde concluímos que

$$y_n^2 - 2x_n^2 = -(y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2)$$

Fica evidente a veracidade do passo de indução, pois

$$y_n^2 - 2x_n^2 = -(-1) = 1$$

Observe agora que, $y_n^2 - 2x_n^2$ é uma expressão semelhante a Equação de Pell-Fermat e como provamos que essa expressão é sempre igual a 1 ou -1, podemos considerar que $y_n^2 - 2x_n^2 = (-1)^n$ e isso se verifica com facilidade, pois como $x_1 = y_1 = 1 \Rightarrow y_1^2 - x_1^2 = -1$, dai podemos afirmar que as soluções da Escada de Theon de ordem ímpar satisfaz a equação $y_n^2 - 2x_n^2 = -1$ e as soluções de ordem par satisfaz $y_n^2 - 2x_n^2 = 1$.

Com isso concluimos que as soluções da escada de Theon também são soluções da Equação de Pell-Fermat.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Estudar aproximação racional de Raízes quadradas é um tema de relativa importância pelo grande número de estudantes que não compreendem de forma adequada a ampliação do conceito de número racional ao número irracional e da necessidade em certos cálculos de se obter uma "boa aproximação"para a raiz quadrada na resolução de problemas.

O certo é que a "extração"de raízes quadradas muitas das vezes são por processos trabalhosos ou lentos, como por exemplo o método de aproximação que denominamos na introdução como método do confronto que aproxima racionais de forma lenta e entediante caso não haja o auxilio de uma calculadora. Com isso nos propusemos em mostrar três métodos de aproximação racional de raízes quadradas como proposta de ensino para os estudantes de ensino médio ou fundamental, métodos estes que foram estudados neste trabalho, sempre com o cuidado de demonstrar a convergência de cada processo de aproximação e estabelecendo exemplos como demonstração do cálculo. Sendo que para isso, primeiramente estudamos sobre sequências e limite de sequências com o intuito de estabelecer base sobre as demonstrações que seriam realizadas posteriormente. Depois, foi mostrado a existencia dos números irracionais, perante a irracionalidade da diagonal de um quadrado e a possibilidade que sempre poderemos aproximar um números racional a um irracional tanto quanto se queira pelo Teorema de Dirichlet. Após os estudos mencionados, apresentamos os algoritmos que foram denominados por algoritmos de Hierão, Equação de Pell-Fermat e Escada de Theon, sendo que este último adaptado para aproximar uma raiz quadrada qualquer.

Consideramos que no ensino médio qualquer método de aproximação seria facilmente compreendido pelos estudantes devido a sua fácil manipulação e cálculos triviais, principalmente por estudantes que já estão habituados ao cálculo de sequências numéricas, como progressões e recorrências. Porém, não seria impossível estudantes que nunca estudaram sequências numéricas de compreenderam tais métodos devido a simplicidade dos mesmos como por exemplo a Equação de Pell-Fermat, pois tendo a solução fundamental, basta aplicar os conhecimentos de produtos notáveis para encontrar as próximas soluções e desta forma as aproximações racionais como mostrados na seção 4.2.2.

Por fim, lembramos que os algoritmos mencionados neste trabalho foram criados por povos distintos e em épocas diferentes sendo que diante das soluções encontradas pelos processos de aproximações, conjecturamos sobre a possibilidade da equivalência entre os três algoritmos, já que as soluções para $\sqrt{2}$, por exemplo, encontramos racionais que pertencem ao conjunto solução dos três métodos. Para mostrar que estes algoritmos produzem soluções em comum, utilizamos a Equação de Pell-Fermat levantando as hipótes que toda solução do algoritmo de Hierão é também solução de Pell-Fermat, como também toda solução de Pell-Fermat é também solução da Escada de Theon.

APÊNDICE A

Sobre Módulo e Desigualdade Modular

Definição A.1. *Definimos o valor absoluto ou módulo $|\alpha|$ do número real α como segue: $|\alpha| = \alpha$ quando $\alpha \geq 0$, e $|\alpha| = -\alpha$ quando $\alpha < 0$*

Da definição de módulo podemos descrever a seguinte propriedade:

$|\alpha| \leq r \Leftrightarrow -r \leq \alpha \leq r, \forall r, r \in \mathbb{R}_+$.

Pois, se $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha| \leq r$.

E se $\alpha \leq 0 \Rightarrow -\alpha = |\alpha| \leq r \Rightarrow \alpha \geq -r$, logo $-r \leq \alpha \leq r$.

Observação: podemos definir o módulo de um número real α como $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2}$.

Proposição A.0.1. *Para todos os números reais não nulos a e b, temos*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

ocorrendo a igualdade se e só se a e b tiverem um mesmo sinal.

Demonstração: $|a| \geq a$ e $|b| \geq b$, *logo:*

$$|a||b| \geq ab \Longrightarrow |ab| \geq ab \Longrightarrow 2|ab| \geq 2ab$$

completando quadrados, temos:

$$|a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2 + 2ab \Longrightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a+b)^2$$

pela observação feita acima

$$|(a+b)| = \sqrt{(a+b)^2} \Longrightarrow |a+b|^2 = (a+b)^2$$

logo

$$(|a| + |b|)^2 \geq (a+b)^2 \Longrightarrow (|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2 \Longrightarrow |a| + |b| \; geq |a+b|$$

extraindo a raiz quadrada em ambos os menbros.

Para a igualdade note que de $|a|^2+|b|^2+2|ab| \geq a^2+b^2+2ab$, *só teremos* $|a+b| = |a|+|b|$ *se só se* $ab = |ab|$, *ora mas isso só ocorrerá se* $ab \geq 0$ *mas como* a *e* b *são reais não nulos, teremos a igualdade se só se* $ab > 0$, *com isso concluímos que* a *e* b *devem ter o mesmo sinal.*

Teorema A.0.1. *Para números reais não nulos* $a_1, a_2, ..., a_n$, *temos*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Ademais, a igualdade ocorre se e só se $a_1, a_2, ..., a_n$ *tiverem todos um mesmo sinal.*

Demonstração: *Primeiro note para o caso* $n = 2$ *a desigualdade acima se torna* $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$, *onde já foi provada na Proposição A.0.1.*

Agora tomando como hipótese de indução que a desigualdade $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ *é verdadeira, devemos provar que também é válido a desigualdade*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$$

Mas

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| &\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}| \end{aligned}$$

Por fim, pra provar que a igualdade ocorre quando $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *tem mesmo sinal, suponha que todos os termos dessa desigualdade tem o mesmo sinal, digamos que* $a_1, a_2, ..., a_n < 0$ *(o caso em que* $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ *é feito de maneira análoga), então* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0$, *daí*

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| = -(a_1+a_2+\cdots+a_n) = (-a_1)+(-a_2)+\cdots+(-a_n) = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

Agora tome como hipótese que $|a_1 + \cdots + a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. *Ora, mas se um ou mais termos do primeiro membro da igualdade tiver sinal diferente dos demais é óbivo que* $|a_1 + \cdots + a_n| < |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. *Então todos os termos devem ter mesmo sinal.*

APÊNDICE B

Lema B.1. *Sejam $d \in \mathbb{N}$ não quadrado perfeito e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\frac{(\sqrt{d}-1)^{2n}}{(d-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n \quad e \quad \frac{(\sqrt{d}-1)^{2n+1}}{(d-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n \cdot (\sqrt{d}-1)$$

Demonstração:

Primeira igualdade

$$\frac{(\sqrt{d}-1)^{2n}}{(d-1)^n} = \frac{(\sqrt{d}-1)^n(\sqrt{d}-1)^n}{(d-1)^n} \cdot \frac{(\sqrt{d}+1)^n}{(\sqrt{d}+1)^n} = \frac{(\sqrt{d}-1)^n(d-1)^n}{(d-1)^n(\sqrt{d}+1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n$$

Segunda igualdade

$$\frac{(\sqrt{d}-1)^{2n+1}}{(d-1)^n} = \frac{(\sqrt{d}-1)^n(\sqrt{d}-1)^n(\sqrt{d}-1)}{(d-1)^n} \cdot \frac{(\sqrt{d}+1)^n}{(\sqrt{d}+1)^n}$$

$$= \frac{(\sqrt{d}-1)^n(d-1)^n(\sqrt{d}-1)}{(d-1)^n(\sqrt{d}+1)^n} = \left(\frac{\sqrt{d}-1}{\sqrt{d}+1}\right)^n \cdot (\sqrt{d}-1)$$

Referências Bibliográficas

[1] RIBEMBOIM, Paulo. *Funções, Limites e continuidade*. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[2] MOREIRA, Carlos G. T. de Araújo; MARTÍNEZ, F. E. Brochero; SALDANHA, N. C., *Tópicos de Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[3] SANTOS, J. P. de Oliveira. *Introdução a Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[4] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3, Introdução a Análise*. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[5] MELO, Mª Eulalia de M., VERA, Jorge A. Hinojosa. *Números Reais*. Recife, UFRPE, 2012.

[6] CARVALHO, J. B. Pitombeira. *A raiz quadrada ao longo dos séculos*. Rio de Janeiro, UFRJ.

[7] HODGSON, Bernard. *Uma Breve História da Quinta Operação*. Québec (Canadá), Universidade Laval, 2008, http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=268.

[8] SHINE, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica*. Rio de Janeiro, SBM, 2009.

[9] PAIVA, Manoel. *Matemática 3*. São Paulo, Editora Moderna, 1995.

[10] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1, Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[11] MOREIRA, C. Neri. CABRAL, M. A. Palumbo. *Curso de Análise Real* Rio de Janeiro, 2ª edição, Departamento de Matemática Aplicada, UFRJ, 2006.

[12] MOREIRA, GONDIM, Rodrigo. *Aproximação Racionais e Aritméticas* Recife, UFRPE, Projeto Klein/SBM 2012.

Este volume foi tipografado em $\LaTeX$ na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).