

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Mário José Vieira

Geometria Esférica

Santo André - SP
2013

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Mário José Vieira

Geometria Esférica

Dissertação apresentada junto ao Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática da Universidade Federal do ABC, para obtenção do Título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Márcio Fabiano da Silva.

Santo André - SP
2013

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à sua versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob a responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, _____ de _____ de 2013.

Assinatura do Autor: _____

Assinatura do Orientador: _____

Dedico este trabalho a meus pais, José e Catarina, parentes, amigos e a todos os colegas de trabalho que sempre me incentivaram e apoiaram durante toda a duração deste curso.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que nos dá o dom da vida e também a sabedoria necessária a descobrir os mistérios do mundo.

A meus pais por todo apoio nas decisões que tomei durante toda minha vida, desde a juventude até o presente momento, à Sociedade Brasileira de Matemática por sua preocupação com a qualidade no ensino de matemática em nosso país, que levou à criação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), à CAPES pelo auxílio concedido, à UFABC e seus professores, ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, e aos colegas de turma de mestrado.

A todos, minha eterna gratidão.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar alguns objetos geométricos sobre a superfície esférica, de modo comparar as características de tais objetos nesta superfície e também no plano. Desta forma, são definidos os principais objetos geométricos da Geometria Esférica tais como retas, segmentos, ângulos e triângulos. Também não poderíamos deixar de definir o cálculo da distância nesta geometria, assim como estudar as relações entre os objetos definidos. Como consequência, procuramos apresentar algumas aplicações do cálculo da distância em problemas mais próximos possíveis da realidade, considerando particularmente a forma do nosso planeta, que se assemelha a uma esfera.

Palavras-Chaves:

Geometria Esférica, Triângulo Esférico, Trigonometria Esférica, Coordenadas Esféricas.

Abstract

The present papers aims to study some geometric objects on the spherical surface, so compare the characteristics of such objects in this surface and also in the plan. Thus, we define the main geometric objects of the spherical geometry such as lines, segments, angles and triangles. Also we could not leave set the distance calculation in this geometry, and to study the relationships between the objects defined. As a consequence, we present some applications calculates the distance problems as near as possible to reality, particularly considering the shape of our planet, that resembles a sphere.

Keywords:

Spherical Geometry, Spherical Triangle, Spherical Trigonometry, Spherical Coordinates.

Sumário

1	Introdução	15
2	Coordenadas no Espaço	17
2.1	Sistema de Coordenadas no Espaço	17
2.2	Distância entre dois pontos no espaço	19
3	Vetores	23
3.1	Operações com Vetores	25
3.2	Dependência e Independência Linear	30
3.3	Produto Interno	32
3.4	Produto Vetorial	36
4	Geometria de Incidência da Esfera	41
4.1	A Esfera S^2	41
4.2	Retas Perpendiculares	46
4.3	Distância	48
4.4	Segmentos	50
4.5	Ângulos Esféricos	57
5	Transformações Geométricas de S^2	61
5.1	Reflexões em Relação à Retas	61
5.2	Composta de Reflexões em Relação à Retas	65
5.3	Rotação	67
5.4	Reflexão em Relação a um Ponto	71
5.5	Translação	73
5.6	Reflexão Transladada	75
5.7	Pontos Fixos das Isometrias	79
6	Triângulos Esféricos	85
6.1	Trigonometria Esférica	86
6.2	Mediatrizes e Bissetrizes	89
6.3	Triângulos Retângulos	97
6.4	Teoremas de Congruência para Triângulos	99

6.5	Área de Triângulos Esféricos	100
7	A Geometria Esférica na Sala de Aula	103
7.1	Distância Entre Cidades e Aplicações	103
7.2	Geometria Esférica \times Geometria Euclidiana Plana	109

Lista de Figuras

2.1	Eixos Ortogonais no Espaço \mathbb{E}^3	17
2.2	Coordenadas do ponto P	18
2.3	Coordenadas dos pontos A, B e C	19
2.4	Pontos sobre uma reta paralela ao eixo OZ	20
2.5	Cálculo da distância entre P e Q	20
2.6	Esfera com centro em O e raio 1	21
3.1	Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v}	25
3.2	Coordenadas do vetor soma	26
3.3	Exemplo 4	27
3.4	Resultados da multiplicação de \vec{AB} por λ	28
4.1	\vec{u} e sua reta polar r	42
4.2	Reta passando pelos pontos P e Q	43
4.3	Polo da reta \overleftrightarrow{PQ}	44
4.4	Retas r e s e suas interseções.	45
4.5	Retas com uma perpendicular comum.	46
4.6	Reta perpendicular a r por P	47
4.7	É possível dizer que o ponto P está entre os pontos Q e X.	50
4.8	Segmento menor AB e segmento maior AB.	54
4.9	Segmento AB.	55
4.10	Meia Reta de extremidades P e Q.	56
4.11	Semirreta \overrightarrow{PQ}	58
4.12	Ângulo $\angle QPR$	58
4.13	Ponto X no interior do ângulo $\angle QPR$	59
4.14	Ângulo $\angle PQR$	59
5.1	Reflexão do ponto P em relação à reta r	62
5.2	Exemplo 19.	63
5.3	Rotação de ângulo α do ponto P	67
5.4	Rotação em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$	68
5.5	Exemplo 20.	69

5.6	Reflexão em Relação ao ponto P	71
5.7	Exemplo 21.	72
5.8	Translação na direção da reta l	74
5.9	O ponto Q' é o resultado da reflexão transladada de eixo l	76
5.10	Exemplo 23.	77
6.1	Triângulo Esférico	85
6.2	Trigonometria Esférica	86
6.3	A reflexão em relação a reta l permuta os pontos P e Q	89
6.4	Ponto Médio do segmento s	90
6.5	As retas m e l permutam as retas r e s	91
6.6	A reta m permuta as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}	92
6.7	A bissetriz do ângulo $\angle BAC$	93
6.8	\overrightarrow{AP} é bissetriz de $\angle BAC$	94
6.9	Ponto de intersecção das mediatrizes do triângulo ABC	96
6.10	As retas u , v e w são concorrentes em um único ponto	96
6.11	No triângulo ABC , os lados AB e AC formam um ângulo reto	97
6.12	A reta m é perpendicular a l passando por X	98
6.13	Triângulo esférico cujas medidas dos ângulos são α , β e γ	101
6.14	Triângulo com os três ângulos retos.	102
7.1	Coordenadas Geográficas em \mathbf{S}^2	105
7.2	Arcos de circunferência que determinam o mesmo ângulo central	106
7.3	Duas retas determinadas por dois pontos distintos.	110
7.4	Na geometria esférica não é possível traçar a paralela a uma reta por um ponto fora dela.	110
7.5	As bissetrizes de triângulos esféricos, assim como os euclidianos, são concorrentes.	112
7.6	Triângulos retângulos.	112

Capítulo 1

Introdução

Desde a antiguidade o ser humano vem observando e desenhando as formas à sua volta. Isso é possível ser visto em desenhos feitos em rochas como registros do homem pré histórico. As primeiras civilizações, porém, que conseguiram algum avanço no estudo da geometria foram os egípcios e mesopotâmios, que obtiveram certas fórmulas de mensuração para terrenos que eram usados para agricultura.

Com tudo, os maiores avanços no estudo das formas foi feito pela civilização grega, principalmente a partir do século VI antes de Cristo até o início da era cristã. Isso se deve pelo fato que os gregos não se contentaram com a apresentação fórmulas ou propriedades relativas as figuras geométricas, mas também provavam a validade de tais resultados, dando a eles a virtude de se tornarem perenes.

Porém, a primeira parte de geometria desenvolvida estava relacionada a objetos que poderiam ser construídos e observados pelo homem. Os esforços do matemático grego Euclides que por volta do ano 300 antes de Cristo reuniu todo conhecimento sobre está geometria e também sobre a teoria dos números de seu tempo em um único tratado de 13 volumes fez com que a geometria ali descrita se tornasse conhecida como *geometria euclidiana*.

Mas quase paralelamente, também se tinha a consciência de que a Terra tinha forma de uma esfera e, além disso, acreditava-se que os corpos celestes estavam sobre o interior de uma superfície esférica, cuja Terra estava no centro. Assim, também começou a se desenvolver métodos de cálculos envolvendo figuras geométricas na superfície esférica. Tal conhecimento foi essencial para o desenvolvimento da astronomia e também das navegações.

Contudo, enquanto o conhecimento em geometria euclidiana é valorizada nos currículos escolares desde longos tempos, os conhecimentos da geometria esférica ficaram quase que exclusivos para as pessoas interessadas em astronomia ou navegação. Tais aspectos só

tiveram mudança a partir do final do século XIX e início do século XX com a aceitação das geometrias não euclidianas. Também as necessidades do estudo da geografia e da localização correta de pontos na superfície terrestre, assim como o advento dos **GPS** fizeram com que o estudo da geometria esférica ocupassem lugar de destaque na pesquisa matemática.

Neste trabalho, dividido em 6 capítulos, abordaremos a geometria esférica a partir do conhecimento que temos sobre a localização de pontos por coordenadas ortogonais e vetores. Desta forma, no capítulo 2 estudaremos os sistemas de coordenadas ortogonais do espaço euclidiano \mathbb{E}^3 . No capítulo 3 apresentamos a definição de vetores no espaço, assim como suas operações e propriedades, dando especial atenção ao conceito de base, ao produto interno e ao produto vetorial.

O estudo da geometria esférica propriamente dita se inicia no capítulo 4 e segue até o capítulo 6. No primeiro deste capítulos, apresentamos as primeiras definições assim como os primeiros resultados relevantes sobre a geometria esférica. No capítulo 5 apresentamos as transformações geométricas na geometria esférica que preservam distância. No capítulo 6 nós definimos os triângulos esféricos e apresentamos suas principais relações.

No último capítulo, apresentamos algumas aplicações que podem ser apresentadas à alunos do ensino médio, buscando explorar problemas que podem se apresentar no cotidiano de viagens de longa distância na Terra, assim como apresentamos um resumo das principais semelhanças e diferenças entre a geometria euclidiana plana e a geometria esférica.

Acreditamos que o trabalho aqui desenvolvido e proposto possa ser realizado com alunos do ensino médio e podem ser realizados, sem que se prejudique o desenvolvimento do conteúdo tradicionalmente estudado, em exposições científicas que muitas escolas realizam, ou através de programas que buscam ampliar a presença dos estudantes nas escolas, sendo um tema optativo aos alunos.

Neste trabalho, o aluno terá de estudar as funções trigonométricas **seno** e **coosseno**, assim como a inversa da função coosseno, a função **arco-coosseno**. Para realização das atividades de cálculo, também será necessário a utilização de calculadoras científicas.

Capítulo 2

Coordenadas no Espaço

Neste capítulo, designaremos por \mathbb{E}^3 o espaço euclidiano.

2.1 Sistema de Coordenadas no Espaço

Para construir um sistema de coordenadas no espaço, procederemos de forma análoga ao que se faz no plano. Tomemos no espaço euclidiano \mathbb{E}^3 , três eixos de mesma origem O, mutuamente perpendiculares, com unidades de medida de comprimento iguais. Eles serão chamados de eixos OX, OY e OZ.

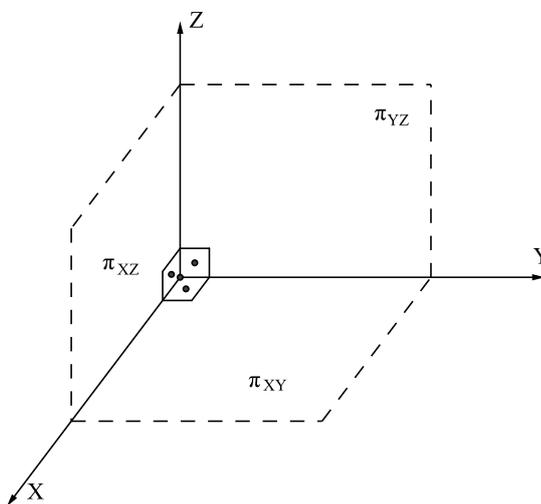


Figura 2.1: Eixos Ortogonais no Espaço \mathbb{E}^3

Temos assim um *sistema de eixos ortogonais* OXYZ no espaço \mathbb{E}^3 . No sistema de eixos ortogonais OXYZ há três planos especiais, chamados planos cartesianos:

- π_{XY} , o plano que contém os eixos OX e OY;
- π_{XZ} , o plano que contém os eixos OX e OZ;
- π_{YZ} , o plano que contém os eixos OY e OZ.

Designando por \mathbb{E}^3 o conjunto de todas as ternas ordenadas (x, y, z) de números reais, o sistema de eixos ortogonais OXYZ estabelece uma bijeção com \mathbb{R}^3 , ou seja, cada ponto P do espaço \mathbb{E}^3 corresponde a uma única terna ordenada de números reais, e cada terna ordenada de números reais corresponde a um único ponto de \mathbb{E}^3 .

Se o ponto P de \mathbb{E}^3 está em correspondência com a terna (x, y, z) , dizemos que x , y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais OXYZ. Desta forma, dado um sistema de eixos ortogonais OXYZ em \mathbb{E}^3 , cada ponto P fica determinado pelas suas coordenadas (x, y, z) e escrevemos:

$$P = (x, y, z).$$

Para obter estas coordenadas, procedemos da seguinte forma:

- coordenada x : coordenada no eixo OX do ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa por P e é paralelo a π_{YZ} .
- coordenada y : coordenada no eixo OY do ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa por P e é paralelo a π_{XZ} .
- coordenada z : coordenada no eixo OZ do ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa por P e é paralelo a π_{XY} .

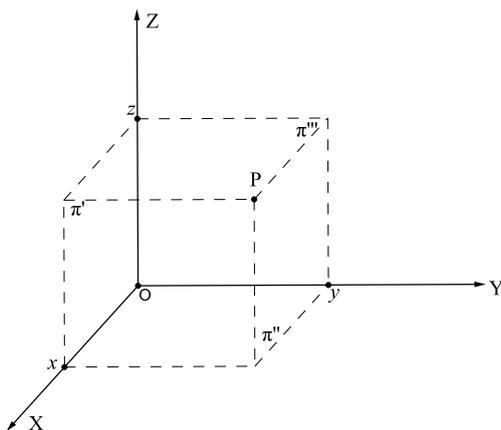


Figura 2.2: Coordenadas do ponto P

Exemplo 1. Vamos determinar as coordenadas dos pontos A, B e C no sistema de coordenadas no espaço \mathbb{E}^3 , como na figura 2.3.

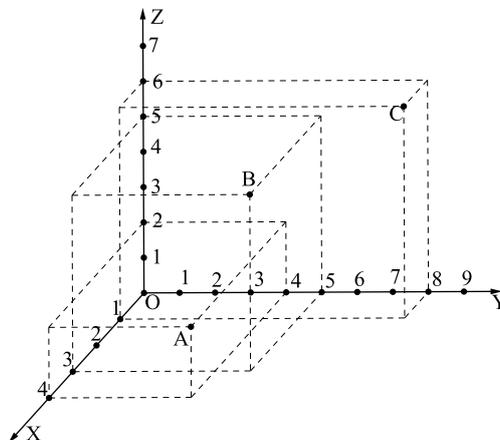


Figura 2.3: Coordenadas dos pontos A, B e C

$$A = (4, 4, 2) , B = (3, 5, 5) \text{ e } C = (1, 8, 6)$$

2.2 Distância entre dois pontos no espaço

Sejam $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ pontos no espaço \mathbb{E}^3 . Queremos determinar um modo para calcular a distância entre P e Q , denotada por $d(P, Q)$, através de suas coordenadas.

Inicialmente, vamos observar que se os dois pontos estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, a única coordenada que difere nos dois pontos é a coordenada relativa a este eixo.

Suponha que os pontos P e Q estejam sobre uma reta paralela ao eixo OZ , como na figura 2.4.

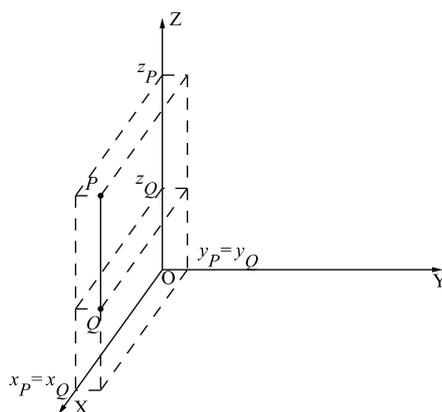


Figura 2.4: Pontos sobre uma reta paralela ao eixo OZ

Então

$$x_P = x_Q, y_P = y_Q, z_P \neq z_Q.$$

Neste caso, a distância entre esses dois pontos é o módulo da diferença das coordenadas diferentes desses dois pontos:

$$d(P, Q) = |z_P - z_Q|$$

Se P e Q são pontos que não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, a distância entre P e Q é o comprimento da diagonal do paralelepípedo reto $ABCPDEFQ$, onde $A = (x_Q, y_P, z_P)$, $B = (x_Q, y_P, z_Q)$, $C = (x_P, y_P, z_Q)$, $D = (x_Q, y_Q, z_P)$, $E = (x_P, y_Q, z_P)$ e $F = (x_P, y_Q, z_Q)$, como na figura 2.5.

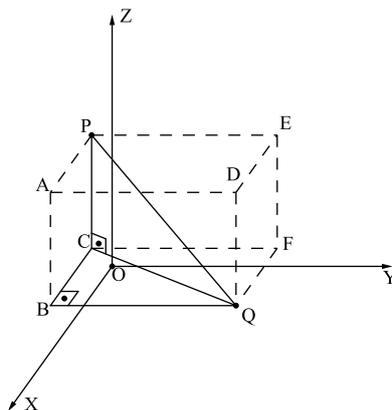


Figura 2.5: Cálculo da distância entre P e Q

Note que o triângulo BCQ , retângulo em B , está em um plano paralelo ao plano π_{XY} . Além disso, as retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{BQ} são paralelas aos eixos OX e OY , respectivamente. Então

$d(B, C) = |x_Q - x_P|$ e $d(B, Q) = |y_P - y_Q|$. Aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, tem-se:

$$d(Q, C)^2 = d(B, C)^2 + d(Q, B)^2 = |x_Q - x_P|^2 + |y_Q - y_P|^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$$

Note, agora, que PCQ é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C , pois \overleftrightarrow{PC} é perpendicular ao plano que contém o triângulo BCQ . Além disso, \overleftrightarrow{PC} é paralela ao eixo OZ e, portanto, $d(P, C) = |z_P - z_Q|$. Por fim, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo PCQ , temos:

$$d(P, Q)^2 = d(P, C)^2 + d(Q, C)^2 = d(P, C)^2 + d(B, C)^2 + d(Q, B)^2$$

$$d(P, Q) = (z_P - z_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2.$$

Portanto,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Exemplo 2. Vamos determinar a distância entre os pontos $P = (3, -2, 6)$ e $Q = (0, -5, 1)$.

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 + 5)^2 + (6 - 1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9 + 25} \\ &= \sqrt{43} \end{aligned}$$

Exemplo 3. Determinaremos, a seguir, uma equação para a esfera \mathbf{S} com o centro em O , origem do sistema de coordenadas em \mathbb{E}^3 , e raio $R = 1$.

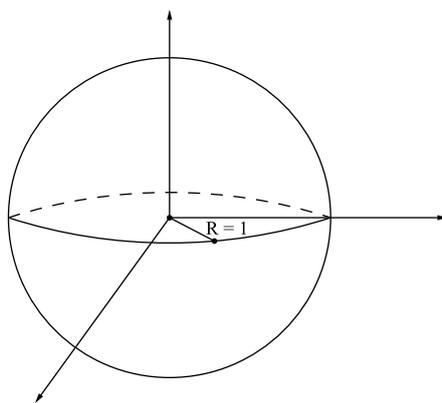


Figura 2.6: Esfera com centro em O e raio 1

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto da esfera \mathbf{S} , $d(P, O) = \sqrt{1} = 1$. Então:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta igualdade, obtemos a equação da esfera \mathbf{S}

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Observação: a esfera do **Exemplo 3** é geralmente denominada por \mathbf{S}^2 e será sobre esta esfera que desenvolveremos nos próximos capítulos a Geometria Esférica.

Capítulo 3

Vetores

Apresentaremos neste capítulo os *vetores* no espaço. Neste texto, os vetores serão utilizados em diversos resultados que apresentaremos.

Para dar a definição de vetor, usaremos a idéia de *segmento orientado*. Dados dois pontos A e B do espaço euclidiano \mathbb{E}^3 , o *segmento orientado de origem A e extremidade B* é o par ordenado (A, B) . Deste modo, no segmento AB está estabelecido um sentido de percurso de A para B . Nesse caso, BA é também um segmento orientado, mas com sentido de percurso oposto ao de AB .

Definição 1. Dizemos que os segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando satisfazem às seguintes condições:

1. AB e CD têm comprimentos iguais;
2. AB e CD estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta;
3. AB e CD têm o mesmo sentido.

Notação: $AB \equiv CD$

A relação de equipolência entre segmentos orientados satisfaz as propriedades:

- Reflexividade: $AB \equiv AB$;
- Simetria: se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$;
- Transitiva: se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

ou seja, ela é também uma *relação de equivalência*.

Sendo assim, podemos dividir o conjunto dos segmentos orientados de \mathbb{E}^3 em subconjuntos chamados *classes de equivalência pela relação de equipolência*, ou simplesmente *classes de equipolência*.

Definição 2. Um *vetor* de \mathbb{E}^3 é uma classe de equipolência de segmentos orientados de \mathbb{E}^3 .

Dado o segmento orientado AB em \mathbb{E}^3 tal que a classe de equipolência é o vetor \vec{v} (podemos escrever também \overrightarrow{AB}), então

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \mid AB \equiv CD\}.$$

O vetor cuja origem é igual à extremidade é chamado de *vetor nulo*. Pela definição de vetor, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \mathbb{E}^3$, existe um único ponto $Q \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Deste modo, designamos $Q = P + \vec{v}$ o único ponto de \mathbb{E}^3 tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Definição 3. Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ pontos de \mathbb{E}^3 . Os números reais $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ e $z_B - z_A$ são as *coordenadas* do vetor \overrightarrow{AB} no sistema de eixos ortogonais OXYZ.

Assim, podemos identificar um vetor com uma terna ordenada, de modo a escrevermos

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Assim, dado um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, existe um único ponto $P = (a, b, c)$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde $O = (0, 0, 0)$ é a origem de \mathbb{E}^3 .

Exemplo 4. Dados os pontos $A = (5, 3, -2)$, $B = (1, 0, 3)$ e $C = (0, 1, 0)$, vamos determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e dos pontos D e P tais que $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= (1 - 5, 0 - 3, 3 - (-2)) = (-4, -3, 5) \\ D = C + \vec{u} &\Leftrightarrow D = (0, 1, 0) + (-4, -3, 5) \Leftrightarrow D = (-4, -2, 5) \\ P = O + \vec{u} &\Leftrightarrow P = (-4, -3, 5) \end{aligned}$$

3.1 Operações com Vetores

Vamos definir duas operações no conjunto dos vetores. A primeira será a *adição de vetores* e, em seguida, definiremos a *multiplicação de um vetor por um número real*.

Definição 4 (Adição de Vetores). Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores de \mathbb{E}^3 . Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, seja C o único ponto de \mathbb{E}^3 tal que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O *vetor soma de \vec{u} com \vec{v}* , designado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor \overrightarrow{AC} .

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$$

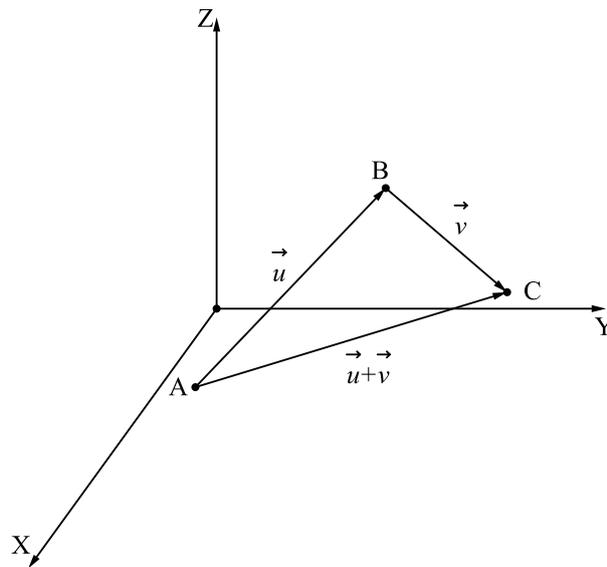


Figura 3.1: Soma dos vetores \vec{u} e \vec{v}

Proposição 1. Sejam $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais e os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Demonstração. Sejam $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ pontos de \mathbb{E}^3 tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. Seja $S = (x_3, y_3, z_3)$ o ponto de \mathbb{E}^3 tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$.

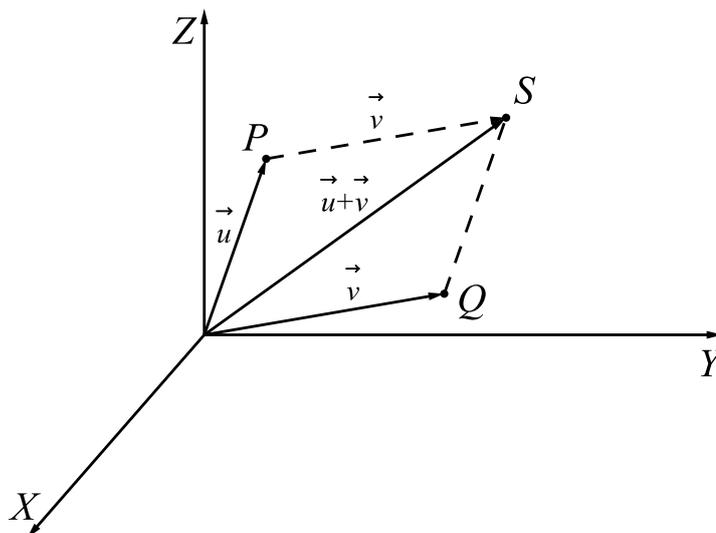


Figura 3.2: Coordenadas do vetor soma

Então:

$$\vec{v} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Logo $S = (x_3, y_3, z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PS} = \vec{OS} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

□

Exemplo 5. Dados os pontos $A = (1, 3, 2)$, $B = (4, -2, 0)$ e $C = (-2, 0, 5)$, vamos determinar as coordenadas do ponto D tal que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Seja $D = (\alpha, \beta, \gamma)$, temos $\vec{AD} = (\alpha - 1, \beta - 3, \gamma - 2)$. Então:

$$(\alpha - 1, \beta - 3, \gamma - 2) = (4 - 1, -2 - 3, 0 - 2) + (-2 - 1, 0 - 3, 5 - 2) = (3, -5, -2) + (-3, -3, 3)$$

$$(\alpha - 1, \beta - 3, \gamma - 2) = (0, -8, 1) \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 3$$

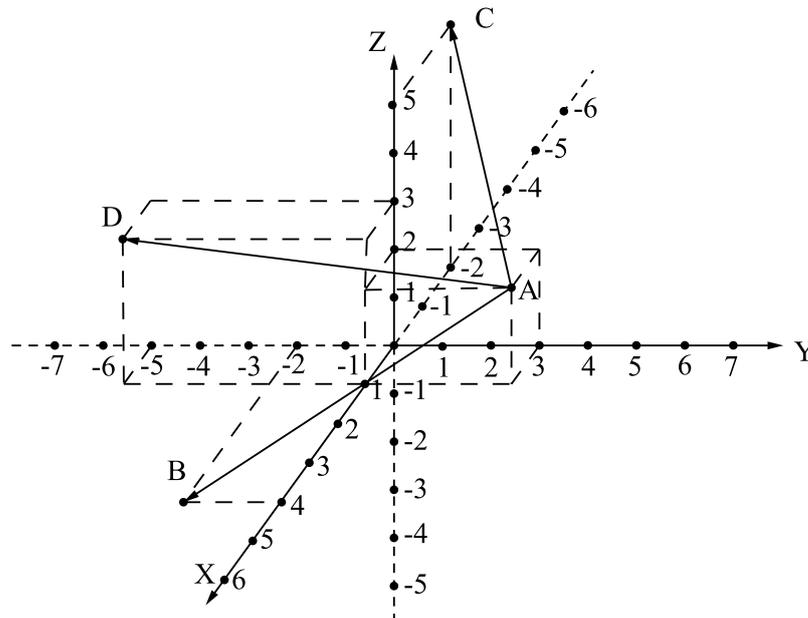


Figura 3.3: Exemplo 4

Propriedades: Sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} vetores em \mathbb{E}^3 . A adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
2. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
3. Existência de Elemento Neutro: para todo vetor \vec{u} , o vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, 0)$ satisfaz $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
4. Existência de Elemento Oposto: para cada vetor \vec{u} , existe um único vetor, designado por $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

A **propriedade 4** nos garante que é possível fazer a subtração entre dois vetores e também nos fornece um modo de descrever esta operação. Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} em \mathbb{E}^3 , $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

Definição 5 (Multiplicação de um Vetor por um Número Real). Sejam \overrightarrow{AB} um vetor de \mathbb{E}^3 e λ um número real. O *produto de λ por \overrightarrow{AB}* é o vetor $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, tal que:

1. A , B e C são colineares;

2. $|AC| = d(A, C) = |\lambda|d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$, onde $|AB|$ e $|AC|$ são os comprimentos dos segmentos AB e AC ;
3. os segmentos orientados AB e AC têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$;
4. se $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, então $\lambda \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

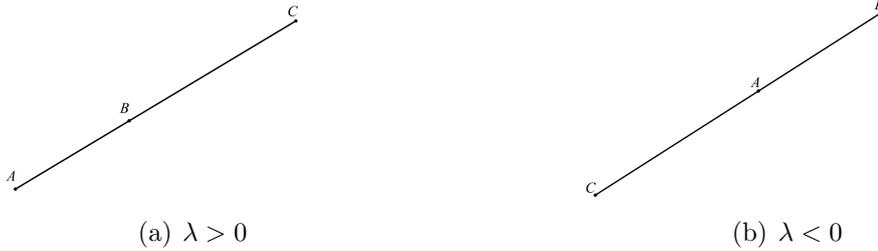


Figura 3.4: Resultados da multiplicação de \overrightarrow{AB} por λ

Já vimos que, dado o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, existe um único ponto P de \mathbb{E}^3 tal que o vetor \overrightarrow{OP} é um representante de \vec{v} , ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e as coordenadas de \vec{v} coincidem com as coordenadas de P . Assim, vamos determinar as coordenadas de $\lambda\vec{v}$ a partir das coordenadas de \vec{v} .

Proposição 2. *Seja $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor de \mathbb{E}^3 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

$$\lambda\vec{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c).$$

Demonstração. Seja $P = (a, b, c)$. Então $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Tomemos o ponto $Q = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ e vamos mostrar que $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$. Para fazer isto, precisamos verificar as 4 propriedades da definição anterior.

Primeiramente, vejamos que se $\lambda = 0$, $\lambda\vec{v} = (0, 0, 0) = \vec{0}$. Se $\vec{v} = \vec{0}$, $\lambda\vec{v} = (\lambda 0, \lambda 0, \lambda 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$, o que verifica 4.

Para verificar 2, vamos calcular

$$|OQ| = d(O, Q) = \sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2} = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |\lambda| d(O, P) = |\lambda| \cdot |OP|$$

Para provar a condição 1, primeiro vamos calcular $d(P, Q)$.

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(a - \lambda a)^2 + (b - \lambda b)^2 + (c - \lambda c)^2} \\ &= \sqrt{(\lambda - 1)(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= |\lambda - 1| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= |\lambda - 1| d(O, P) \end{aligned}$$

Agora, temos que analisar os seguintes casos:

Caso 1: $0 < \lambda < 1$. Então $|\lambda - 1| = 1 - \lambda$. Logo,

$$d(O, Q) + d(P, Q) = d(O, Q) + (1 - \lambda)d(O, P) = \lambda d(O, P) + d(O, P) - \lambda d(O, P) = d(O, P)$$

Portanto, O , P e Q são colineares com Q entre O e P .

Caso 2: $\lambda > 1$. Então $|\lambda - 1| = \lambda - 1$. Logo,

$$d(O, P) + d(P, Q) = d(O, P) + (\lambda - 1)d(O, P) = d(O, P) + \lambda d(O, P) - d(O, P) = \lambda d(O, P) = d(O, Q)$$

Portanto, O , P e Q são colineares com P entre O e Q .

Caso 3: $\lambda < 0$ Então $|\lambda - 1| = 1 - \lambda$ e $|\lambda| = -\lambda$. Logo,

$$d(O, P) + d(O, Q) = d(O, P) + |\lambda|d(O, P) = d(O, P) - \lambda d(O, P) = (1 - \lambda)d(O, P) = d(P, Q)$$

Portanto, O , P e Q são colineares com O entre P e Q .

Caso 4: $\lambda = 1$ Então $|\lambda - 1| = 0$ de onde temos $d(P, Q) = 0$ e, portanto, $P = Q$.

A condição 3 está demonstrada com os cálculos feitos acima pois os segmentos orientados OP e OQ têm mesma orientação se $\lambda > 0$ e orientações opostas se $\lambda < 0$. \square

Exemplo 6. Sejam $A = (1, -2, 5)$ e $B = (3, 1, 4)$ pontos de \mathbb{E}^3 . Vamos determinar as coordenadas do vetor $-3 \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - (-2), 4 - 5) = (2, 3, -1)$$

$$\text{Então } -3 \overrightarrow{AB} = -3(2, 3, -1) = (-6, -9, 3)$$

Propriedades: Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores de \mathbb{E}^3 e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, a multiplicação de um vetor por um número real possui as propriedades:

1. Associativa: $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$;
2. Existência de Elemento Neutro Multiplicativo: $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1\vec{u} = \vec{u}$, para todo vetor \vec{u} ;
3. Distributiva quanto a Adição de Números Reais: $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.
4. Distributiva quanto a Adição de Vetores: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

3.2 Dependência e Independência Linear

Definição 6. O vetor \vec{v} é *múltiplo* do vetor \vec{u} se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemplo 7.

1. O vetor $\vec{v} = (15, -12, 6)$ é múltiplo do vetor $\vec{u} = (5, -4, 2)$. Para isto, basta tomar $\lambda = 3$, pois

$$3\vec{u} = 3(5, -4, 2) = (15, -12, 6) = \vec{v}.$$

2. O vetor $\vec{v} = (-8, 4, 12)$ é múltiplo do vetor $\vec{u} = (6, -3, -9)$. De fato, tomando $\lambda = -\frac{4}{3}$, temos

$$-\frac{4}{3}\vec{u} = -\frac{4}{3}(6, -3, -9) = (-8, 4, 12) = \vec{v}.$$

3. O vetor $\vec{v} = (5, -1, 3)$ não é múltiplo do vetor $\vec{u} = (0, 2, -3)$. De fato, suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Então:

$$(5, -1, 3) = \lambda(0, 2, -3) \iff \begin{cases} 5 = \lambda \cdot 0 \\ -1 = \lambda \cdot 2 \\ 3 = \lambda \cdot (-3) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Deste modo, $\vec{v} \neq \lambda\vec{u}$

Da definição acima, podemos concluir

- O vetor nulo $\vec{0}$ é múltiplo de qualquer vetor. Dado um vetor arbitrário \vec{u} , temos $\vec{0} = 0\vec{u}$;
- Todo vetor não nulo é múltiplo de si próprio. Dado o vetor \vec{u} , temos $\vec{u} = \lambda\vec{u} \iff \lambda = 1$;
- Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, então $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$, ou seja, \vec{u} é múltiplo de \vec{v} .

Note que a **definição 6** dada acima é equivalente à definição de multiplicação de vetor por um número real, ou seja,

Os pontos A, B e C são colineares \iff um dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} é múltiplo do outro.

Definição 7. Um vetor \vec{v} é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ se existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n.$$

Exemplo 8. O vetor $\vec{v} = (4, -3, 3)$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$ e $\vec{u}_2 = (2, -1, -1)$. De fato, tomando $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, temos:

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = 2(-1, 0, 3) + 3(2, -1, -1) = (-2, 0, 6) + (6, -3, -3) = (4, -3, 3) = \vec{v}.$$

Definição 8. Dizemos que os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} de \mathbb{E}^3 são *linearmente independentes* (**LI**) se a igualdade

$$\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = \vec{0}$$

ocorre apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não são **LI**, diremos que eles são *linearmente dependentes* (**LD**).

Exemplo 9. Vamos provar que os vetores $\vec{u} = (1, 3, 4)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ e $\vec{w} = (2, 1, 5)$ são **LI**. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = \vec{0} &\iff (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 10. Os vetores $\vec{u} = (-1, 5, 4)$, $\vec{v} = (3, -2, -1)$ e $\vec{w} = (-5, 12, 9)$ são linearmente dependentes. De fato, tomando $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$, temos:

$$\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = (-2 - 3 + 5, 10 + 2 - 12, 8 + 1 - 9) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

Observações:

1. Qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo $\vec{0}$ é **LD**;
2. Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} é **LD**, então um destes vetores é combinação linear dos demais. Observe que o vetor \vec{w} do *exemplo 10* pode ser descrito por $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, ou seja, \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

Apresentaremos, a seguir, um teorema que mostra que todo vetor de \mathbb{E}^3 se expressa de maneira única como combinação linear de três vetores **LI**.

Teorema 1. *Sejam \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 três vetores linearmente independentes de \mathbb{E}^3 . Então, para cada vetor \vec{w} de \mathbb{E}^3 , existem únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3.$$

Demonstração. Sejam $\vec{v}_1 = (a, b, c)$, $\vec{v}_2 = (d, e, f)$, $\vec{v}_3 = (g, h, i)$ e $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$. Queremos mostrar que existem únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$$

Para isso, tomemos o sistema linear

$$\begin{cases} xa + yd + zg = x_w \\ xb + ye + zh = y_w \\ xc + yf + zi = z_w \end{cases}$$

Como \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são **LI**, temos que

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, o sistema tem solução e é única, o que prova o teorema. □

O conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ **LI** de \mathbb{E}^3 é chamado de *base* de \mathbb{E}^3 e os números reais x, y e z são as coordenadas de \vec{w} com relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

3.3 Produto Interno

Apresentamos, a seguir as definições de *norma* e de *produto interno entre vetores*. Devemos salientar que a *norma* nos fornece o comprimento de um vetor, enquanto o *produto interno* é uma operação entre dois vetores mas, neste caso, o resultado não é um vetor, e sim um número real.

Definição 9. A *norma* ou *comprimento* do vetor \vec{v} de \mathbb{E}^3 , representado por $\|\vec{v}\|$, é o comprimento de um segmento representante de \vec{v} .

Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $\|\vec{v}\| = d(A, B)$. De modo particular, se um vetor \vec{v} é dado por suas coordenadas no sistema de eixos ortogonais OXYZ, sabemos que há um único ponto P de \mathbb{E}^3 cujas coordenadas coincidem com as coordenadas de \vec{v} . Então $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Portanto,

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Exemplo 11. Vamos calcular a norma do vetor $\vec{u} = (-5, 3, -4)$.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9 + 16} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se $\|\vec{v}\| = 1$, dizemos que \vec{v} é um *vetor unitário*. Decorre da **definição 9** as seguintes propriedades:

- $\|\vec{v}\| \geq 0$, se para todo $\vec{v} \in \mathbb{E}^3$;
- $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$;
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

Definição 10. Dados, no sistema de eixos ortogonais OXYZ, dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ de \mathbb{E}^3 , chamamos de *produto interno entre \vec{u} e \vec{v}* o número real designado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Exemplo 12. O produto interno entre os vetores $\vec{u} = (2, -5, 3)$ e $\vec{v} = (4, -1, -3)$.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 4 + (-5) \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = 8 + 5 - 9 = 4$$

Propriedades: Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores de \mathbb{E}^3 e $\lambda \in \mathbb{R}$, o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
2. $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e $\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
3. $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.

Não faremos as demonstrações destas propriedades, mas elas podem ser feitas a partir das propriedades dos números reais.

Dado um vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ no sistema de coordenadas ortogonais OXYZ de \mathbb{E}^3 , vejamos que:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2. \quad (3.1)$$

Assim, o produto interno e a norma são conceitos intimamente relacionados. Da igualdade (3.1), podemos concluir que:

- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, para todo vetor \vec{u} de \mathbb{E}^3 ;
- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Vamos mostrar agora um resultado não imediato relacionando o produto interno e a norma.

Teorema 2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se \vec{u} e \vec{v} são vetores de \mathbb{E}^3 , então:*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

A igualdade é válida se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, é imediato que

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Vamos supor que \vec{u} e \vec{v} não são nulos. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle t\vec{u} + \vec{v}, t\vec{u} + \vec{v} \rangle &\geq 0, \text{ ou seja,} \\ t^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2t \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Definimos a função $f(t) = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle t^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle t + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$. Por (3.2), vemos que a função quadrática f é não negativa. Como o coeficiente de t^2 é, também, não negativo, segue que:

$$\begin{aligned} (2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 - 4 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &\leq 0 \\ 4 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4 \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 &\leq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 &\leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade (3.3), obtemos:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Além disso, se $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, então:

$$\begin{aligned} f(t) = 0 &\Rightarrow \langle t\vec{u} + \vec{v}, t\vec{u} + \vec{v} \rangle = 0 \\ t\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{v} = -t\vec{u}. \end{aligned}$$

Se $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| &= |\langle \vec{u}, \lambda\vec{u} \rangle| = |\lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle| \\ &= |\lambda| \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \\ &= |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

□

Corolário 1 (Desigualdade Triangular). *Para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} de \mathbb{E}^3 , temos:*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

A igualdade é válida se, e somente se, um dos vetores é nulo ou é múltiplo do outro.

Demonstração. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$

Pela **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Portanto, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$. Como $\|\vec{u} + \vec{v}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \geq 0$, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da desigualdade obtemos:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

A igualdade decorre imediatamente da igualdade no teorema 2 □

Daremos a seguir a definição de *perpendicularidade* entre dois vetores não nulos de \mathbb{E}^3 .

Definição 11. O vetor \vec{u} é *perpendicular* (ou *ortogonal*) ao vetor \vec{v} , e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$ se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Os vetores \vec{u} e \vec{v} serão chamados de *ortonormais* se forem ortogonais e unitários.

Por fim, se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é um conjunto LI de \mathbb{E}^3 e dois a dois ortonormais, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma *base ortonormal* de \mathbb{E}^3 .

Note que, dado um sistema de eixo ortogonais OXYZ de \mathbb{E}^3 , os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes e também ortonormais. De fato, veja que $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$ e

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \vec{0} &\iff \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ &\iff (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0) \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Além disso, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Logo, $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{E}^3 , chamada *base canônica*.

Teorema 3. *Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{E}^3 , então para todo vetor \vec{u} de \mathbb{E}^3 ,*

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \langle \vec{u}, \vec{v}_3 \rangle \vec{v}_3.$$

Demonstração. Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base de \mathbb{E}^3 , existem únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle &= \langle \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle \\ &= \alpha \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + \beta \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle + \gamma \langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle \end{aligned}$$

Como \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são ortonormais, assim como \vec{v}_1 e \vec{v}_3 , temos que $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle = 0$. Logo $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = \alpha$. Analogamente, prova-se que $\langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle = \beta$ e $\langle \vec{u}, \vec{v}_3 \rangle = \gamma$. \square

3.4 Produto Vetorial

Definição 12. Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, no sistema de eixos ortogonais OXYZ de \mathbb{E}^3 , o *produto vetorial* de \vec{u} por \vec{v} é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do sistema de coordenadas OXYZ, o produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} também pode ser determinado por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 13. Vamos calcular o produto vetorial de $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 5, 1)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3 \cdot 1 - 1 \cdot 5, 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2)) = (-8, -3, -1)$$

Propriedades: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ vetores de \mathbb{E}^3 no sistema de eixos ortogonais OXYZ, tem-se:

1. $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, ou seja, $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} ;
2. $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se, e só se, um dos vetores é múltiplo do outro;
3. Se $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é uma base de \mathbb{E}^3 ;
4. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

5. $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ onde

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

As propriedades 1 e 3 são de grande importância na sequência do texto, pois elas nos dizem que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é uma base ortogonal. Além disso, se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, é possível determinar um vetor \vec{w} tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal. Veremos como isso pode ser feito logo adiante.

Demonstração.

1. A prova será feita a partir das coordenadas de \vec{u} e \vec{v} .

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) x_1 + (z_1 x_2 - z_2 x_1) y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_1 \\ &= x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 + y_1 z_1 x_2 - y_1 z_2 x_1 + z_1 x_1 y_2 - z_1 x_2 y_1 = 0 \end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$;

2. Primeiro vamos supor que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$. Então:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= (\lambda y_1 z_1 - \lambda y_1 z_1, \lambda z_1 x_1 - \lambda z_1 x_1, \lambda x_1 y_1 - \lambda x_1 y_1) \\ &= (0, 0, 0) = \vec{0} \end{aligned}$$

Note que, se um dos vetores é nulo ele é múltiplo do outro vetor. Então o produto vetorial de um vetor nulo por um vetor qualquer é o vetor nulo.

Suponha agora que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, com \vec{u} e \vec{v} não nulos. Então x_1, y_1, z_1 não são todos nulos, assim como x_2, y_2, z_2 . Vamos supor que $z_1 \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0, \quad z_1 x_2 - z_2 x_1 = 0, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \\ y_2 = \frac{z_2}{z_1} y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{z_2}{z_1} x_1 \end{aligned}$$

Portando, x_2 é múltiplo de x_1 e y_2 é múltiplo de y_1 . Para concluir que z_2 é múltiplo de z_1 , vamos analisar os casos

caso 1: Se $x_1 = y_1 = 0$ então $x_2 = y_2 = 0$ e, portanto, $\vec{u} = (0, 0, z_1)$ e $\vec{v} = (0, 0, z_2)$. Logo z_2 é múltiplo de z_1 .

caso 2: Se $x_1 \neq 0$, então

$$x_2 = \frac{z_2}{z_1} x_1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{x_2}{x_1} z_1$$

Portanto, z_2 é múltiplo de z_1 .

Logo \vec{v} é múltiplo de \vec{u} ;

3. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$$

Então:

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma (\vec{u} \times \vec{v}) \rangle = \alpha \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle + \beta \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle + \gamma \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle$$

Por 1, temos $\gamma \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = 0$. Então $\gamma = 0$.

Vejam agora que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

Sabendo que $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}$, temos:

$$\begin{cases} (\alpha y_1 + \beta y_2) z_2 - (\alpha z_1 + \beta z_2) y_2 = 0 \\ (\alpha z_1 + \beta z_2) x_2 - (\alpha x_1 + \beta x_2) z_2 = 0 \\ (\alpha x_1 + \beta x_2) y_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2) x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha (y_1 x_2 - y_2 z_1) = 0 \\ \alpha (z_1 x_2 - z_2 x_1) = 0 \\ \alpha (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \end{cases}$$

Logo, $\alpha (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$. Então $\alpha = 0$. Calculando $\vec{u} \times (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v})$ de forma análoga à feita para determinar α , chega-se que $\beta = 0$;

4. Provaremos esta propriedade a partir das coordenadas dos vetores.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= -(y_2 z_1 - y_1 z_2, z_2 x_1 - z_1 x_2, x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &= -\vec{v} \times \vec{u} \end{aligned}$$

5. Provaremos também esta propriedade usando coordenadas.

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\ &= x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) + y_3 (z_1 x_2 - z_2 x_1) + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

□

O próximo resultado a ser apresentado, sem ser demonstrado, é também chamado de *duplo produto vetorial*.

Proposição 3. Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} vetores de \mathbb{E}^3 . Então:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$$

Corolário 2. *Sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{t} vetores de \mathbb{E}^3 . Então:*

1. $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$;
2. $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \times \vec{t} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle$;
3. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

Demonstração.

1. Decorre da **propriedade 5** e das propriedades dos determinantes;
2. Segue de 1 que

$$\begin{aligned} \langle (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \times \vec{t} \rangle &= \langle (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}, \vec{t} \rangle \\ &= \langle (\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}), \vec{t} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle \end{aligned}$$

3. Segue de 2:

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Logo,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.$$

□

Terminamos este capítulo com um teorema que nos fornece um método pra determinar uma base ortonormal de \mathbb{E}^3 , do um vetor unitário.

Teorema 4. *Se um vetor \vec{u} de \mathbb{E}^3 é unitário, existem vetores \vec{v} e \vec{w} em \mathbb{E}^3 tais que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja \vec{t} um vetor unitário diferente de $\pm\vec{u}$. Definimos

$$\vec{v} = \frac{\vec{u} \times \vec{t}}{\|\vec{u} \times \vec{t}\|} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Note que \vec{v} é ortogonal a \vec{u} (**propriedade 1**), assim como \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} . Portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é **LI** e conseqüentemente uma base de \mathbb{E}^3 .

Agora, vamos observar que

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \left\| \frac{\vec{u} \times \vec{t}}{\|\vec{u} \times \vec{t}\|} \right\| = \frac{\|\vec{u} \times \vec{t}\|}{\|\vec{u} \times \vec{t}\|} = 1 \text{ e} \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = 1 \end{aligned}$$

Portanto, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são unitários, de onde concluímos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal. \square

Observação: note que a demonstração nos fornece um método para determinar um vetor ortonormal (perpendicular e unitário) a dois vetores unitários dados. Este método será usado diversas vezes ao longo do texto que se segue.

Exemplo 14. Dados os vetores $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, e $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, vamos determinar o vetor \vec{w} de modo que este vetor é ortonormal a \vec{u} e \vec{v} .

Inicialmente, veja que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + 34} = \sqrt{\frac{3+1+12}{16}} = 1$$

e

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2}{4} + 216 + 616} = \sqrt{\frac{8+2+6}{16}} = 1$$

Agora, devemos calcular o produto vetorial entre \vec{u} e \vec{v} . Assim, vamos obter

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{6}}{16}, \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{16}, -\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{16}\right)$$

Note, agora, que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{\sqrt{42 - 4\sqrt{3}}}{16}.$$

Assim, temos que

$$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{42 - 4\sqrt{3}}}{16}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{16}, \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{16}, -\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{16}\right)$$

Capítulo 4

Geometria de Incidência da Esfera

Iniciaremos, agora, o estudo da **Geometria Esférica**. Para desenvolver este estudo, nossa motivação será essencialmente intrínseca, ou seja os objetos geométricos serão definidos sobre a esfera em si e não sobre os pontos do espaço que pertencem à esfera. Mas para efeito de cálculo, devemos pensar na esfera como um subconjunto de \mathbb{E}^3 .

Podemos pensar, como analogia à nossa motivação, que o nosso planeta é uma esfera perfeita, porém nosso campo de visão enxerga apenas uma região plana nessa superfície esférica. Assim, por vezes apresentaremos duas vistas para nossos resultados; de uma foto tirada a partir de um satélite no espaço e outra tirada de um helicóptero sobrevoando uma região do planeta a baixa altitude.

Seja \mathbf{O} a origem de um sistema de coordenadas ortogonais. Como as coordenadas do vetor \vec{OP} coincidem com as coordenadas de P , o ponto P também representará este vetor.

4.1 A Esfera \mathbf{S}^2

Para nosso estudo, utilizaremos a esfera \mathbf{S}^2 , apresentada no **exemplo 3**, mas com a definição a seguir.

Definição 13. A esfera \mathbf{S}^2 é o conjunto dado por

$$\mathbf{S}^2 = \{X \in \mathbb{E}^3 / \|X\| = 1\}$$

onde a norma é dada pelo produto interno usual de \mathbb{R}^3 .

Note que se for dado o sistema de coordenadas ortogonais, a definição 13 coincide com a equação determinada no **Exemplo 3**.

Agora, vamos imaginar que iniciamos uma viagem sobre a superfície da esfera \mathbf{S}^2 de modo que, do ponto de vista desta superfície, a viagem é feita em linha reta. Mas, ao olharmos a viagem de fora da esfera, a trajetória realizada descreverá um *grande círculo* que é a interseção de \mathbf{S}^2 com um plano que passa pela origem do sistema cartesiano. Desta forma, podemos dizer que uma reta de \mathbf{S}^2 é um grande círculo.

Além disso, todo vetor determinado pelo centro de \mathbf{S}^2 e um ponto de um grande círculo é perpendicular a um vetor \vec{u} cujas coordenadas coincidem com as coordenadas de um ponto de \mathbf{S}^2 . Este vetor é chamado polo da reta de \mathbf{S}^2 determinada por tal grande círculo. A partir destas observações, podemos dar a seguinte definição.

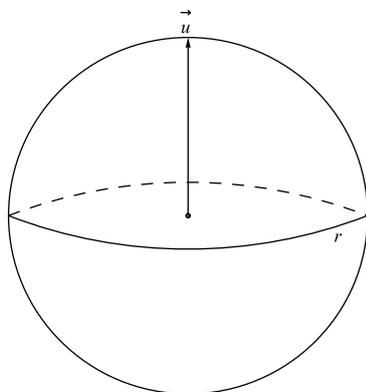


Figura 4.1: \vec{u} e sua reta polar r

Definição 14. Seja \vec{u} um vetor unitário. Então, o conjunto

$$r = \{X \in \mathbf{S}^2 / \langle X, \vec{u} \rangle = 0\}$$

é chamado de *reta com polo \vec{u}* . Nós também diremos que r é a *reta polar* de \vec{u} .

Dois pontos $P, Q \in \mathbf{S}^2$ são ditos **antipodais** se $P = -Q$. Note que dois pontos antipodais são múltiplos um do outro. Desta observação decorre a proposição a seguir..

Proposição 4.

1. Se \vec{u} é um polo de uma reta r , então seu antípoda $-\vec{u}$ também é polo de r ;
2. Se P pertence a uma reta r , então seu antípoda $-P$ também pertence a r .

Demonstração.

1. Sejam \vec{u} o polo de uma reta r e $P \in r$ qualquer. Então $\langle P, -\vec{u} \rangle = -\langle P, \vec{u} \rangle = 0$. Logo $-\vec{u}$ é polo de r .
2. $\langle -P, \vec{u} \rangle = -\langle P, \vec{u} \rangle = 0$. Logo, $-P \in r$.

□

Poderíamos nos perguntar se dois pontos distintos de S^2 determinam uma única reta, como ocorre na geometria euclidiana. O próximo teorema nos responde parte desta pergunta.

Teorema 5. *Sejam P e Q pontos distintos de S^2 que não são antipodais. Então, existe uma única reta contendo P e Q , que nós denotamos por \overleftrightarrow{PQ} .*

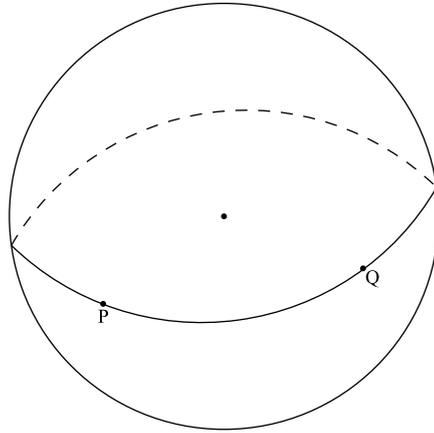


Figura 4.2: Reta passando pelos pontos P e Q

Demonstração. Para determinar um candidato à \overleftrightarrow{PQ} , precisamos determinar um polo \vec{u} desta reta, isto é, um vetor ortonormal a P e Q . Como P e Q não são antipodais, definimos

$$\vec{u} = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}.$$

Deste modo, a reta com polo \vec{u} passa por P e Q . Para provar a unicidade, vamos supor que \vec{v} é um polo de outra reta que passa por P e Q . Então

$$\langle \vec{v}, P \rangle = \langle \vec{v}, Q \rangle = 0$$

Mas,

$$\vec{v} \times (P \times Q) = \langle \vec{v}, P \rangle Q - \langle \vec{v}, Q \rangle P = 0$$

de modo que \vec{v} é um múltiplo não nulo de $P \times Q$. Como $\|\vec{v}\| = 1$, temos que $\vec{v} = \pm \vec{u}$. Logo, \overleftrightarrow{PQ} está unicamente determinada. □

Veja que a demonstração anterior nos fornece um meio de determinar o polo de uma reta que passa por dois pontos que não são antipodais.

Exemplo 15. Vamos determinar o polo \vec{u} da reta que passa pelos pontos $P = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $Q = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Inicialmente, temos que

$$P \times Q = \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

Calculando a norma deste vetor, obtemos

$$\|P \times Q\| = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

Então,

$$\vec{u} = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = \left(-\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{39}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

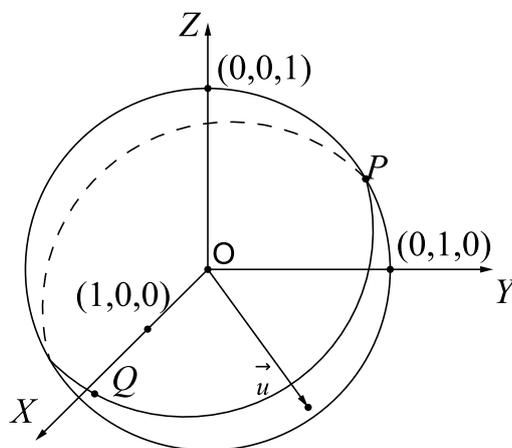


Figura 4.3: Polo da reta \overleftrightarrow{PQ} .

Mas o que acontece com as retas da geometria esférica se os pontos P e Q são antipodais? É possível determinar uma única reta que passa por estes dois pontos? Para podermos ter uma ideia do que acontece neste caso, vamos imaginar os polos norte e sul

terrestre. Os polos terrestres são pontos antipodais da esfera terrestre. Além disso, podemos observar que todas as linhas imaginárias que delimita as longitudes passam pelos polos terrestres. Assim, pelos polos norte e sul terrestres passam infinitas linhas.

De forma análoga, dados dois pontos antipodais de S^2 não determinam uma única reta, mas sim infinitas retas.

Teorema 6. *Duas retas distintas de S^2 têm exatamente dois pontos de interseção.*

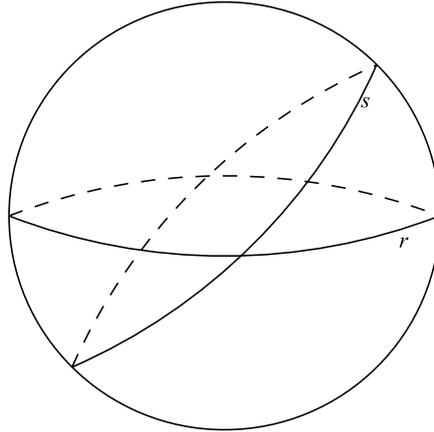


Figura 4.4: Retas r e s e suas interseções.

Demonstração. Suponha que \vec{u} e \vec{v} são os polos de duas retas r e s , respectivamente. Como r e s são distintas,

$$\vec{u} \neq \pm\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \neq 0$$

Obviamente, os pontos $P = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ e $Q = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ estão na interseção entre r e s e são antipodais. Pelo teorema 5, um terceiro ponto pertenceria a apenas uma das retas r ou s .

□

A partir deste teorema, podemos observar duas diferenças entre a geometria esférica e a geometria euclidiana. A primeira, é apresentada no corolário a seguir.

Corolário 3. *Duas retas de S^2 não são paralelas.*

A segunda diferença que vamos mencionar, se refere a quantidade de pontos de intersecção entre duas retas, pois quando duas retas distintas se intersectam na geometria euclidiana, isto ocorre em um único ponto. Pelo teorema 6, duas retas distintas na geometria esférica se intersectam em dois pontos distintos.

4.2 Retas Perpendiculares

Definição 15. Duas retas de \mathbf{S}^2 são perpendiculares se seus polos são ortogonais. Usaremos a notação convencional para retas perpendiculares.

notação: $r \perp s$ (r é perpendicular a s)

O próximo resultado nos fornece um meio de determinar os pontos de intersecção entre duas retas de \mathbf{S}^2 .

Proposição 5. *Sejam r e s retas distintas em \mathbf{S}^2 . Então existe uma única reta t tal que $r \perp t$ e $s \perp t$. Os pontos de intersecção entre r e s determinam os polos de t .*

Demonstração. Sejam \vec{u} e \vec{v} os polos das retas r e s , respectivamente. Tomemos o vetor unitário

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Definimos a reta t com polo \vec{w} . Note que

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

Portanto, $r \perp t$ e $s \perp t$. Para provar a unicidade, tomemos uma reta t_1 perpendicular a r e a s . Se \vec{w}_1 é polo de t_1 , então \vec{w}_1 é um múltiplo de $\vec{u} \times \vec{v}$. Em particular, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w}_1 = \lambda \vec{w}$. Assim,

$$\|\vec{w}_1\| = 1 \implies \|\lambda \vec{w}\| = 1 \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Logo, pela proposição 4, t é única. □

Pela teorema 6, vimos que todas as retas de \mathbf{S}^2 intersectam-se. Da proposição 5 e do teorema 6, segue o próximo resultado.

Teorema 7. *Todas as retas de \mathbf{S}^2 que possuem uma perpendicular comum se intersectam nos polos da perpendicular.*

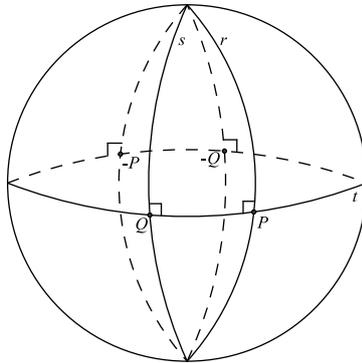


Figura 4.5: Retas com uma perpendicular comum.

Demonstração. Sejam r e s duas retas que são perpendiculares a uma reta t . Sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} os polos de r , s e t , respectivamente. Tomemos o ponto $P \in \mathbf{S}^2$ tal que $P = \vec{w}$. Então

$$\langle P, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \iff P \in r$$

$$\langle P, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \iff P \in s$$

Logo, a reta r intersecta a reta s no polo \vec{w} . De modo análogo, elas se intersectam em $-\vec{w}$. \square

Note que para que uma reta r de \mathbf{S}^2 seja perpendicular a duas retas distintas, é necessário que as duas retas se intersectem no polo de r . Assim, dados uma reta r e um ponto P fora desta reta, se este ponto for um dos polos da reta, existem infinitas retas perpendiculares a r que passam por P , que é qualquer reta que passa por P . Caso contrário, temos o seguinte resultado.

Teorema 8. *Sejam r uma reta e P um ponto de \mathbf{S}^2 , tal que P não pertence a r . Se P não é um polo de r , então existe uma única reta t de \mathbf{S}^2 passando por P tal que t é perpendicular a r .*

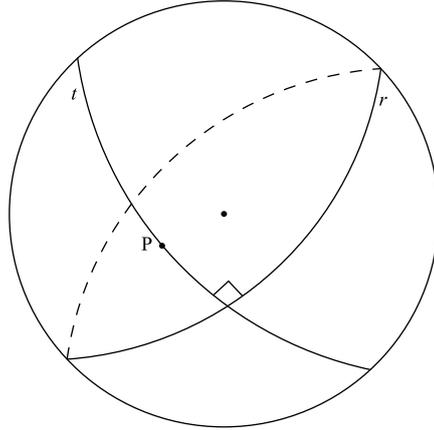


Figura 4.6: Reta perpendicular a r por P

Demonstração. Seja \vec{u} o polo de r . Como P não é um polo de r , $P \times \vec{u} \neq \vec{0}$. Tomemos o vetor unitário

$$\vec{v} = \frac{P \times \vec{u}}{\|P \times \vec{u}\|}$$

Definimos a reta t com polo \vec{v} . Note que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Portanto, $t \perp r$. Além disso, $\langle P, \vec{v} \rangle = 0$, ou seja, $P \in t$. Suponha agora, que uma reta t_1 com polo \vec{v}_1 é perpendicular a r e contém o ponto P . Então, \vec{v}_1 é múltiplo de $\vec{u} \times P$. Em particular, \vec{v}_1 é múltiplo de \vec{v} , ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\vec{v}_1\| = \|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| = |\lambda| = 1$$

Logo, $\lambda = \pm 1$ e, pela proposição 4, r é única. \square

4.3 Distância

Em continuidade ao nosso estudo, apresentaremos um modo de calcular a distância entre dois pontos de \mathbf{S}^2 .

Definição 16. A distância entre dois pontos P e Q se \mathbf{S}^2 é definida por

$$d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle$$

onde $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ é a função inversa de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Note que, se P e Q não são pontos antipodais, a distância entre dois pontos P e Q de \mathbf{S}^2 é igual a medida do menor arco determinado pelos pontos P e Q , que por sua vez, é numericamente igual ao ângulo $P\hat{O}Q$, onde O é o centro de \mathbf{S}^2 .

Observando ainda que P e Q determinam uma única reta de \mathbf{S}^2 , a distância entre P e Q é obtida percorrendo-se a reta \overleftrightarrow{PQ} .

Exemplo 16. Vamos calcular a distância entre os pontos P e Q do exemplo 15. Inicialmente, note que $P = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $Q = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Então:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \arccos \langle P, Q \rangle \\ &= \arccos \left(0 \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \arccos \left(-\frac{5}{8}\right) \cong 2,246 \text{ rad} \end{aligned}$$

A seguir, listamos as propriedades da distância entre pontos de \mathbf{S}^2 .

Propriedades: Sejam P , Q e R são pontos de \mathbf{S}^2 , então:

1. $d(P, Q) \geq 0$
2. $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
3. $d(P, Q) = d(Q, P)$

4. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ (Desigualdade Triangular)

Demonstração.

1. Inicialmente, vejamos que

$$| \langle P, Q \rangle | \leq \|P\| \cdot \|Q\| = 1.$$

Então $\langle P, Q \rangle \in [-1, 1]$. Assim, pela definição da função arccos, temos que $0 \leq d(P, Q) \leq \pi$.

2. Se $d(P, Q) = 0$, então

$$1 = \langle P, Q \rangle \leq \|P\| \cdot \|Q\| = 1.$$

Portanto, $Q = \lambda P$. Como $\|P\| = \|Q\| = 1$, temos que $\lambda = 1$. Logo $P = Q$. Se $P = Q$, $\langle P, Q \rangle = \langle P, P \rangle = \|P\|^2 = 1$. Logo, $d(P, Q) = \arccos 1 = 0$.

3. $d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle = \arccos \langle Q, P \rangle = d(Q, P)$.

4. Sejam $r = d(P, Q)$, $p = d(Q, R)$ e $q = d(P, R)$. Então,

$$\cos r = \langle P, Q \rangle, \quad \cos p = \langle Q, R \rangle \quad \text{e} \quad \cos q = \langle P, R \rangle.$$

Pela desigualdade de Cauch-Schwarz, temos

$$\langle P \times R, Q \times R \rangle^2 \leq \|P \times R\|^2 \cdot \|Q \times R\|^2$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \langle P \times R, Q \times R \rangle^2 &= (\langle P, Q \rangle \langle R, R \rangle - \langle R, Q \rangle \langle P, R \rangle)^2 \\ &= (\cos r - \cos p \cdot \cos q)^2 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|P \times R\|^2 &= \|P\|^2 \cdot \|R\|^2 - \langle P, R \rangle^2 = 1 - \cos^2 q \\ \|Q \times R\|^2 &= \|Q\|^2 \cdot \|R\|^2 - \langle Q, R \rangle^2 = 1 - \cos^2 p \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\cos r - \cos p \cdot \cos q)^2 \leq (1 - \cos^2 q) \cdot (1 - \cos^2 p) = \sin^2 q \cdot \sin^2 p$$

Como $\alpha \geq 0$, para todo $\alpha \in [0, \pi]$, temos

$$\cos r - \cos p \cdot \cos q \leq \sin q \cdot \sin p$$

$$\cos r \leq \cos p \cdot \cos q + \sin q \cdot \sin p = \cos(q - p)$$

Como a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$, temos que

$$r \geq q - p \implies r + p \geq q \quad \text{se} \quad 0 \leq q - p \leq \pi$$

Se $q - p < 0$, então $q < p \leq p + r$. Além disso, $q - p \geq \pi$ é impossível. Assim, concluímos que

$$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$$

□

Corolário 4. Se $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$, então P , Q e R são colineares.

Demonstração. Da demonstração apresentada na afirmação 4 da *proposição 5*,

$$r = q - p \implies \langle P \times R, Q \times R \rangle^2 = \|P \times R\|^2 \cdot \|Q \times R\|^2$$

Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q \times R = \lambda(P \times R)$. Se $P \times R = \vec{0}$, temos que $R = \pm P$ e $Q = \pm R$, ou seja, P , Q e R são colineares e ao menos dois pontos coincidem e o outro ponto é um antípoda. Se $P \times R \neq \vec{0}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$P \times R = \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \frac{P \times R}{\|P \times R\|}$$

onde \vec{u} é polo de \overleftrightarrow{PR} . Portanto, $Q \times R = \lambda(\alpha \vec{u}) = (\alpha \cdot \lambda) \vec{u}$. Deste modo, Q pertence à linha polar de \vec{u} . Logo, $Q \in \overleftrightarrow{PR}$. □

Veremos mais adiante como é possível determinar quando o ponto Q satisfazendo o corolário acima está entre os pontos P e R .

4.4 Segmentos

Veremos nesta seção como determinar segmentos na geometria esférica. Os segmentos merecem uma atenção especial na geometria esférica pois, diferente da geometria euclidiana plana, dois pontos não delimitam um único segmento.

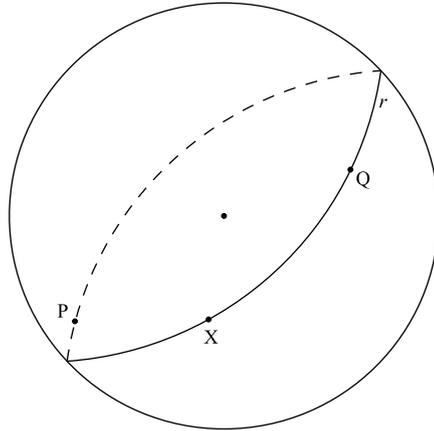


Figura 4.7: É possível dizer que o ponto P está entre os pontos Q e X .

Na geometria euclidiana, para definir um segmento usamos a noção de *estar entre*. Na geometria esférica, porém, isso não pode ser feito pois, dados três pontos colineares em \mathbf{S}^2 , é possível considerar qualquer um destes pontos como estando entre os outros dois.

Para dar a definição de segmento, precisamos conhecer outra forma de representar uma reta de \mathbf{S}^2 .

Suponha que r é uma reta com polo \vec{u} . Vamos tomar os pontos P e Q tais que $\{\vec{u}, P, Q\}$ é uma base ortonormal e vamos definir

$$\alpha(t) = \cos t \cdot P + \sin t \cdot Q.$$

Note que os pontos P e Q pertencem à r , pois $\langle P, \vec{u} \rangle = \langle Q, \vec{u} \rangle = 0$.

Proposição 6.

1. $r = \{\alpha(t) / t \in \mathbb{R}\}$
2. Cada valor de r ocorre exatamente uma vez como valor de $\alpha(t)$ enquanto t varia no intervalo $[0, 2\pi)$.
3. $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$ se $0 \leq |t_1 - t_2| \leq \pi$.

Demonstração.

1.

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t), \vec{u} \rangle &= \langle \cos t \cdot P + \sin t \cdot Q, \vec{u} \rangle \\ &= \cos t \langle P, \vec{u} \rangle + \sin t \langle Q, \vec{u} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $r = \alpha(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Suponha que existam $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tais que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) - \alpha(t_2) &= (\cos t_1 \cdot P + \sin t_1 \cdot Q) - (\cos t_2 \cdot P + \sin t_2 \cdot Q) \\ &= (\cos t_1 - \cos t_2) P + (\sin t_1 - \sin t_2) Q = \vec{0} \end{aligned}$$

Como P e Q são linearmente independentes, temos:

$$\begin{cases} \cos t_1 - \cos t_2 = 0 \\ \sin t_1 - \sin t_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem solução apenas se $t_1 = t_2$

3.

$$\begin{aligned} d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) &= \arccos(\langle \alpha(t_1), \alpha(t_2) \rangle) \\ &= \arccos(\langle \cos t_1 \cdot P + \sin t_1 \cdot Q, \cos t_2 \cdot P + \sin t_2 \cdot Q \rangle) \\ &= \arccos(\cos(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Portanto, se $0 \leq |t_1 - t_2| \leq \pi$, temos $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$

□

Dizemos que a função α é uma *parametrização padrão* de r .

Podemos, agora, dar a seguinte definição.

Definição 17. O subconjunto s de \mathbf{S}^2 dado por

$$s = \{(\cos t)P + (\sin t)Q / t_1 \leq t \leq t_2\}$$

onde os pontos P e Q satisfazem $\langle P, Q \rangle = 0$ e os números t_1 e t_2 são tais que $t_1 < t_2$, com $t_2 - t_1 < 2\pi$, é chamado de *segmento*.

Observações:

1. Todos os pontos de um segmento são colineares;
2. Cada segmento determina uma única reta.

Os pontos P e Q , assim como os números t_1 e t_2 determinam um único segmento, mas a reíproca não é verdadeira. Desta forma, temos o seguinte resultado.

Proposição 7. *Seja s um segmento determinado (como na definição) por P, Q, t_1, t_2 e também por P', Q', t'_1, t'_2 . Então:*

1. $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$. Este número é chamado o comprimento do segmento;
2. Se escrevermos

$$\alpha(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q \quad e \quad \alpha'(t) = (\cos t)P' + (\sin t)Q'$$

temos $\{\alpha(t_1), \alpha(t_2)\} = \{\alpha'(t_1), \alpha'(t_2)\}$. Estes pontos são chamados de extremidades de s . Todos os outros pontos de s são chamados pontos internos de s ;

3. $P \times Q = \pm P' \times Q'$. Estes pontos são os polos da reta que contém s .

Demonstração. Primeiro, note que substituir Q' por seu negativo, e $[t'_1, t'_2]$ por $[-t'_2, -t'_1]$ não mudam as condições 1 e 3. Por isso, nós vamos assumir que há um número real ϕ tal que $P' = \alpha(\phi)$ e $Q' = \alpha\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (\cos t)P' + (\sin t)Q' \\ &= (\cos t)[(\cos \phi)P + (\sin \phi)Q] + (\sin t)[(-\sin \phi)P + (\cos \phi)Q] \\ &= (\cos t \cdot \cos \phi - \sin t \cdot \sin \phi)P + (\sin t \cdot \cos \phi + \cos t \cdot \sin \phi)Q \\ &= (\cos(t + \phi))P + (\sin(t + \phi))Q = \alpha(t + \phi) \end{aligned}$$

e por isso, $\alpha'([t'_1, t'_2]) = \alpha([t_1 + \phi, t_2 + \phi]) = \alpha([t_1, t_2])$.

Como as funções seno e cosseno possuem período 2π , isto mostra que os dois intervalos são translações um do outro de um múltiplo de 2π . Em particular, eles têm o mesmo comprimento e as mesmas extremidades, o que prova 1 e 2. Finalmente,

$$\begin{aligned} P' \times Q' &= [(\cos \phi)P + (\sin \phi)Q] \times [(-\sin \phi)P + (\cos \phi)Q] \\ &= -\sin \phi \cdot \cos \phi (P \times P) + \sin \phi \cdot \cos \phi (Q \times Q) + (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) (P \times Q) \\ &= P \times Q \end{aligned}$$

o que prova 3. □

Corolário 5. *Sejam A e B pontos arbitrários satisfazendo $\langle A, B \rangle = 0$. Seja s algum segmento contido em \overleftrightarrow{AB} . Então, existe um único intervalo $[a, b]$ tal que*

$$s = \{(\cos t)A + (\sin t)B / a \leq t \leq b\}.$$

Demonstração. Vamos representar s como

$\{(\cos t)P + (\sin t)Q / t_1 \leq t \leq t_2\}$ onde $P = (\cos \phi)A + (\sin \phi)B$ e $Q = -(\sin \phi)A + (\cos \phi)B$ para algum número real ϕ . Pela proposição 7,

$$(\cos t)P + (\sin t)Q = \cos(t + \phi)A + \sin(t + \phi)B, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, basta tomar $a \equiv (t + \phi) \pmod{2\pi}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ e $b = a + (t_2 - t_1)$. □

Teorema 9. *Sejam A e B pontos não antipodais. Então, existem exatamente dois segmentos tendo A e B como extremidades. A união destes segmentos é a reta \overleftrightarrow{AB} e a interseção deles é $\{A, B\}$.*

Demonstração. Seja \vec{u} um vetor unitário na direção de $A \times B$ e $Q = \vec{u} \times A$. Assim,

$$\langle A, Q \rangle = \langle A, \vec{u} \times A \rangle = 0.$$

Então, existe um único número real $L \in (0, 2\pi)$ tal que

$$B = (\cos L)A + (\sin L)Q$$

Os segmentos $s_1 = \{(\cos t)A + (\sin t)Q / 0 \leq t \leq L\}$ e $s_2 = \{(\cos t)A - (\sin t)Q / 0 \leq t \leq 2\pi - L\}$ tem A e B como extremidades.

Como o segmento s_2 pode ser reescrito da forma

$$s_2 = \{(\cos t)A + (\sin t)Q / L - 2\pi \leq t \leq 0\}$$

temos que a união de s_1 e s_2 é a reta \overleftrightarrow{AB} .

Por outro lado, s_1 e s_2 não tem pontos comuns em seus interiores. Logo, a interseção entre s_1 e s_2 são somente suas extremidades. □

Conforme vimos no teorema acima, dois pontos de uma reta a dividem em dois segmentos com mesma extremidades. Para diferenciá-los, daremos a definição a seguir.

Definição 18. Sejam A e B pontos não antipodais. O segmento de extremidades A e B de maior comprimento é chamado de *segmento maior* AB . O segmento de extremidades A e B com o menor comprimento é chamado de *segmento menor* AB .

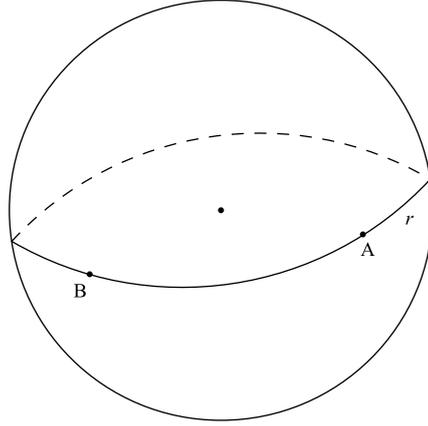


Figura 4.8: Segmento menor AB e segmento maior AB .

O segmento maior AB é dito ser o complemento do segmento menor AB , assim como o segmento menor AB é dito ser o complemento do segmento maior AB . Podemos, ainda, dizer que eles são *segmentos complementares*.

Note que a medida do segmento menor AB é $d(A, B)$ e a medida do segmento maior AB é $2\pi - d(A, B)$.

Exemplo 17. Sejam $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B = (0, 1, 0)$. Vamos determinar o segmento menor com extremidades em A e B .

Primeiramente, calculamos

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \arccos \left\langle \frac{1}{2} \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 \right\rangle \\ &= \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Calculando um polo \vec{u} de da reta \overleftrightarrow{AB} , obtemos

$$\vec{u} = \frac{A \times B}{\|A \times B\|} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Agora, tomemos os pontos

$$P = A \quad \text{e} \quad Q = \frac{\vec{u} \times A}{\|\vec{u} \times A\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right).$$

Deste modo, temos $\langle P, Q \rangle = \langle P, \vec{u} \rangle = \langle Q, \vec{u} \rangle = 0$, de forma que $\{\vec{u}, P, Q\}$ é uma base ortonormal.

$$\text{Logo, } s = \left\{ \cos t \cdot P + \sin t \cdot Q / 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Observe que

$$\cos(0) \cdot P + \sin(0) \cdot Q = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = A$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot P + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot Q = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = (0, 1, 0) = B$$

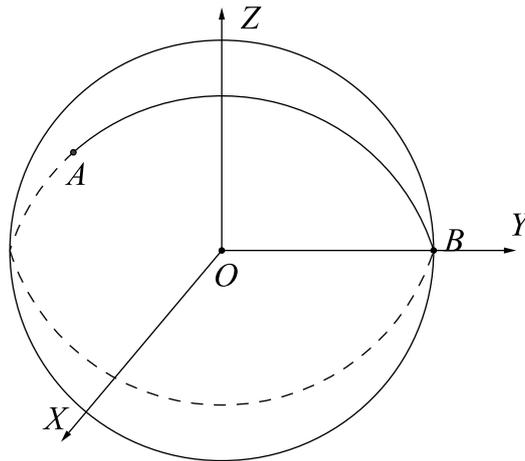


Figura 4.9: Segmento AB .

Definição 19. Se A e B são pontos antipodais, cada um dos segmentos tendo A e B como extremidades é chamado uma *meia reta*.

Observação: Se A e B são pontos antipodais, existem infinitas retas passando por eles e, portanto, existem infinitas *meia retas* de extremidades A e B .

Teorema 10. Sejam P, Q e X pontos distintos de \mathcal{S}^2 . Se P e Q não são pontos antipodais, um ponto X está contido no segmento menor PQ se, e somente se,

$$d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q).$$

Demonstração. Tome P' , ortogonal a P , de modo que o segmento em questão é

$$s = \{(\cos t)P + (\sin t)P' / 0 \leq t \leq L\} \quad \text{onde } L = d(P, Q)$$

Se $X \in s$. Então, podemos escrever

$$X = (\cos \phi)P + (\sin \phi)P', \quad \text{onde } \phi \in (0, L).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P, X) &= \arccos \langle P, X \rangle \\ &= \arccos \langle P, (\cos \phi)P + (\sin \phi)P' \rangle \\ &= \arccos (\cos \phi \langle P, P \rangle + \sin \phi \langle P, P' \rangle) \\ &= \arccos(\cos \phi) = \phi \end{aligned}$$

Analogamente, $d(X, Q) = \arccos(\cos(L - \phi)) = L - \phi$, de modo que

$$d(P, X) + d(X, Q) = \phi + (L - \phi) = L = d(P, Q).$$

Reciprocamente, se $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$, então X está na linha \overleftrightarrow{PQ} . Assim, existe um único $\phi \in (0, 2\pi)$ tal que

$$X = (\cos \phi)P + (\sin \phi)P'.$$

Vamos supor, por absurdo, que $L < \phi < 2\pi$. Então, $d(P, X) = \phi$ e

$$L = d(P, Q) < d(P, X) < d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q) = L$$

Logo, $\phi < L$ e, portanto, X pertence ao menor segmento PQ .

Se P e Q são antipodais, a identidade ocorre automaticamente para todo $X \in \mathbf{S}^2$. \square

Proposição 8. *Sejam P e Q pontos antipodais. Seja R algum ponto distinto de P e Q . Então, a união dos segmentos menores PR e RQ é uma meia reta. Se $R' = -R$, a união dos segmentos menores PR , RQ , PR' e $R'Q$ é a reta \overleftrightarrow{PQ} .*

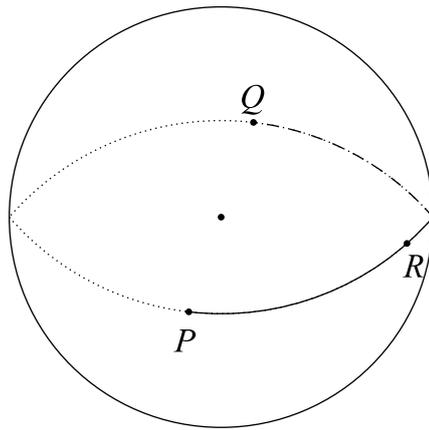


Figura 4.10: Meia Reta de extremidades P e Q .

Demonstração. Seja P' um ponto em \overleftrightarrow{PR} , ortogonal a P , tal que

$$R = (\cos L)P + (\sen L)P', \quad \text{onde } L = d(P, R).$$

Então, os menores segmentos em questão são

$$PR = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / 0 \leq t \leq L\}$$

$$RQ = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / L \leq t \leq \pi\}$$

$$PR' = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / 0 \leq t \leq \pi - L\}$$

$$R'Q = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / \pi - L \leq t \leq \pi\}$$

Portanto, $d(P, R) + d(R, Q) = L + (\pi - L) = \pi = d(P, Q)$, de modo que a união dos segmentos menores PR e RQ é uma meia linha PQ .

Além disso, podemos escrever PR' e $R'Q$ como

$$PR' = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / L - \pi \leq t \leq 0\}$$

$$R'Q = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / -\pi \leq t \leq L - \pi\}.$$

Por fim, note que $\overleftrightarrow{PR} = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / -\pi \leq t \leq \pi\}$ é a união dos quatro segmentos. \square

4.5 Ângulos Esféricos

Na geometria esférica, definimos uma semirreta como uma meia reta sem uma das extremidades. Assim, se PQ é o segmento menor de medida L , representado por

$$\{(\cos t)P + (\sen t)P' / 0 \leq t \leq L\}$$

então a semirreta \overrightarrow{PQ} é dada por

$$\overrightarrow{PQ} = \{(\cos t)P + (\sen t)P' / 0 \leq t < \pi\}$$

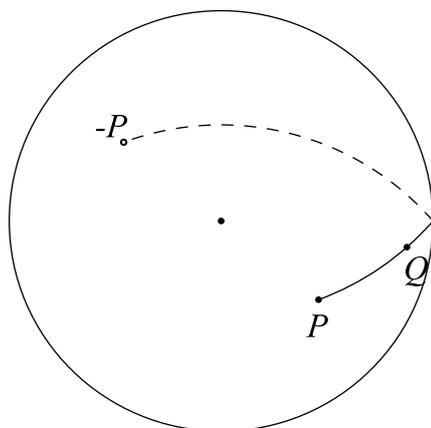


Figura 4.11: Semirreta \overrightarrow{PQ} .

Definição 20. Chamamos de *ângulo* à reunião de duas semirretas com mesma origem.

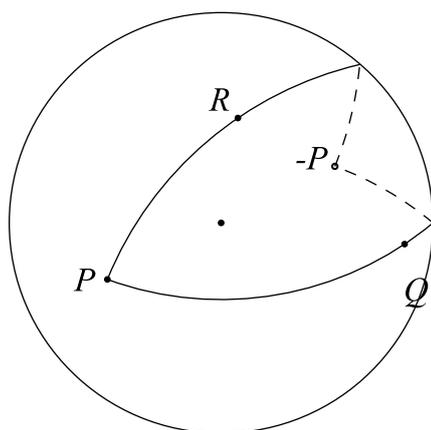


Figura 4.12: Ângulo $\angle QPR$.

Dadas as semirretas \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PR} , denotamos por $\angle QPR$ o ângulo determinado pela união de \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PR} . Estas semirretas são chamadas os *lados* do ângulo e o ponto P , origem das semirretas, é chamado de *vértice* do ângulo.

Definição 21. Seja $\angle QPR$ um ângulo. Um ponto X está no interior do ângulo $\angle QPR$ se o segmento menor XQ não intersecta a reta \overleftrightarrow{PR} e o segmento menor XR não intersecta \overleftrightarrow{PQ} .

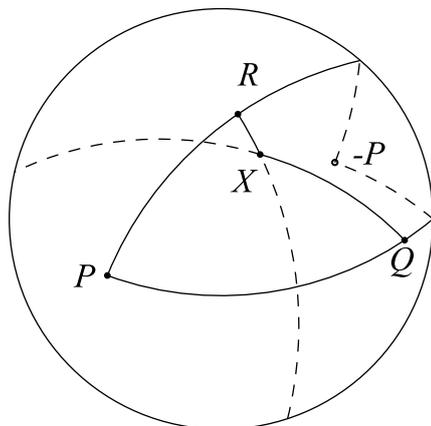


Figura 4.13: Ponto X no interior do ângulo $\angle QPR$.

O conjunto dos pontos no interior de um ângulo é chamado *cunha*.

Vamos, agora, definir a medida de ângulo *radiano*.

Definição 22. A medida de um ângulo $\angle QPR$ em *radianos* é dada por

$$\arccos \left\langle \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}, \frac{P \times R}{\|P \times R\|} \right\rangle$$

Exemplo 18. Dados os pontos $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$, $Q = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ e $R = (0, 1, 0)$, vamos calcular a medida do ângulo $\angle QPR$ em radianos.

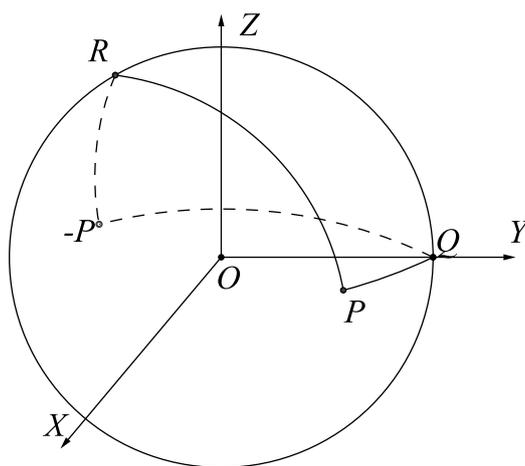


Figura 4.14: Ângulo $\angle PQR$.

Inicialmente, vejamos que:

$$P \times Q = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \text{e} \quad P \times R = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Portanto, $\|P \times Q\| = \frac{7}{8}$ e $\|P \times R\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo

$$\frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}, -\frac{2\sqrt{2}}{7} \right) \quad \text{e} \quad \frac{P \times R}{\|P \times R\|} = (0, 0, 1)$$

Deste modo

$$Q\hat{P}R = \arccos \left\langle \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}, -\frac{2\sqrt{2}}{7} \right), (0, 0, 1) \right\rangle = \arccos \left(-\frac{2\sqrt{2}}{7} \right) \approx 1,99 \text{ rad.}$$

Capítulo 5

Transformações Geométricas de \mathbf{S}^2

Passaremos, agora, ao estudo das *transformações geométrica* de \mathbf{S}^2 . Em particular, veremos as *isometrias* de \mathbf{S}^2 , ou seja, as transformações geométricas que preservam distâncias. Para isso, podemos dar a seguinte definição.

Definição 23. Dados dois pontos P e Q de \mathbf{S}^2 , uma aplicação $T : S^2 \rightarrow S^2$ é chamada de *isometria* se

$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$$

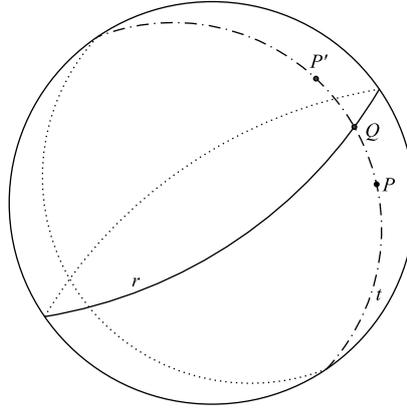
onde $d(X, Y)$ é a distância definida em \mathbf{S}^2 .

Primeiramente, se a transformação T é tal que para todo ponto $P \in \mathbf{S}^2$, $T(P) = P$, esta transformação será chamada de *transformação identidade* e será representada por I_D .

Iniciamos a apresentação das transformações geométricas de \mathbf{S}^2 pela *reflexão em relação a retas*.

5.1 Reflexões em Relação à Retas

Suponha que sejam dados em \mathbf{S}^2 uma reta r e um ponto P fora de r . Vamos tomar a reta t , perpendicular a r passando por P . Se P não é polo de r , a reta t é única. Caso contrário, toda reta contendo o ponto P é perpendicular a r , de modo que t pode ser escolhida entre qualquer das retas que passa por P .

Figura 5.1: Reflexão do ponto P em relação à reta r

Sabemos que r e t se intersectam em dois pontos antipodais Q e $-Q$. Pode-se observar que há um único ponto $P' \in t$, tal que Q está contido no segmento menor PP' e que $d(P, Q) = d(Q, P')$ ou $-Q$ está contido no segmento menor PP' e $d(P, -Q) = d(-Q, P')$. Assim, dizemos que o ponto P' é obtido pela *reflexão de P em relação à reta r* , e é denotado por $R_r(P)$. Daremos, na sequência, a definição analítica da reflexão em relação a uma reta em S^2 .

Definição 24. Para uma reta r de S^2 , a *reflexão em relação a r* é uma aplicação R_r dada por

$$R_r(P) = P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u},$$

onde \vec{u} é um polo de r .

Note que a definição dada satisfaz o que foi observado anteriormente sobre esta transformação geométrica pois:

1. Seja $\vec{v} = \frac{P \times \vec{u}}{\|P \times \vec{u}\|}$ um polo de t . Note que \vec{v} é perpendicular a \vec{u} e a P . Então

$$\begin{aligned} \langle P', \vec{v} \rangle &= \langle (P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ &= \langle P, \vec{v} \rangle - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

de onde concluímos que $P' \in t$.

2. Como os pontos $Q, -Q \in r \cap t$, os pontos P, Q, P' e $-Q$ estão alinhados
3. Vamos calcular a distância entre os ponto P' e Q

$$\begin{aligned} d(P', Q) &= d(P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u}, Q) \\ &= \arccos \langle (P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u}), Q \rangle \\ &= \arccos (\langle P, Q \rangle - 2 \langle P, Q \rangle \langle \vec{u}, Q \rangle) \end{aligned}$$

Como $Q \in r$, $\langle \vec{u}, Q \rangle = 0$, de onde concluímos que $d(P', Q) = \arccos \langle P, Q \rangle = d(P, Q)$. Analogamente, prova-se que $d(P, -Q) = d(-Q, P')$.

4. Por fim, vamos supor que Q não está contido no segmento menor PP' . Então temos dois casos a considerar:

- (a) **Caso 1:** Se Q pertence ao segmento maior, então o seu antípoda $-Q$ pertence ao segmento menor PP' .
- (b) **Caso 2:** Se P pertence ao segmento menor QP' ou ao segmento menor $-QP'$. O caso em que P' pertence ao segmento menor QP ou ao segmento menor $-QP$ é totalmente análogo. Vamos considerar, sem perda de generalidade, que P pertence ao segmento menor QP' . Então

$$d(Q, P) + d(P, P') = d(Q, P') \iff d(P, P') = 0$$

ou seja, $P = P'$.

Exemplo 19. Seja r a reta polar de $\vec{u} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e o ponto $P = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vamos determinar o ponto $P' = R_r(P)$.

$$\begin{aligned} P' &= P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \left\langle \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{16}, \frac{7\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \end{aligned}$$

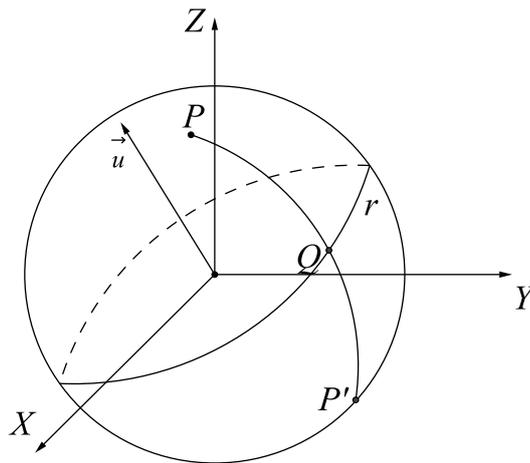


Figura 5.2: Exemplo 19.

Vamos a seguir, mostrar que R_r é uma isometria. Antes, porém, vamos apresentar um lema que nos ajudará na demonstração.

Lema 1. Se $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(X) = X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u},$$

então:

1. T é linear;
2. $\langle T(X), T(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ para todos $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração.

1. Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} T(\lambda X + Y) &= (\lambda X + Y) - 2 \langle \lambda X + Y, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= (\lambda X + Y) - 2(\lambda \langle X, \vec{u} \rangle + \langle Y, \vec{u} \rangle) \vec{u} \\ &= \lambda(X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u}) + (Y - 2 \langle Y, \vec{u} \rangle \vec{u}) \\ &= \lambda T(X) + T(Y) \end{aligned}$$

2. Dados $X, Y \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned} \langle T(X), T(Y) \rangle &= \langle X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u}, Y - 2 \langle Y, \vec{u} \rangle \vec{u} \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - 4 \langle Y, \vec{u} \rangle \langle X, \vec{u} \rangle + 4 \langle X, \vec{u} \rangle \langle Y, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

□

Conforme a **propriedade 2** da proposição anterior, se $\|X\| = 1$, então $\|T(X)\| = 1$. Logo, R_l está em S^2 sempre que X pertencer a S^2 . Agora, podemos provar que R_r é uma isometria.

Proposição 9. Seja r a reta de polo \vec{u} . Então:

1. $d(R_r(X), R_r(Y)) = d(X, Y)$ para todos $X, Y \in S^2$.
2. $R_r \circ R_r(X) = X$ para todo $X \in S^2$, onde $R_r \circ R_r$ é a aplicação composta.
3. $R_r : S^2 \rightarrow S^2$ é uma bijeção.

Demonstração.

1. Dados $X, Y \in \mathbf{S}^2$,

$$\begin{aligned} d(R_r(X), R_r(Y)) &= \arccos \langle R_r(X), R_r(Y) \rangle \\ &= \arccos \langle X, Y \rangle = d(X, Y) \end{aligned}$$

2. Dado $X \in \mathbf{S}^2$,

$$\begin{aligned} R_r \circ R_r(X) = R_r(R_r(X)) &= R_r(X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u}) \\ &= X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} - 2 \langle X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u}, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= X - 4 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} + 4 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= X \end{aligned}$$

3. Seja $R_r : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$. Por (2), $R_r \circ R_r = I_D(\mathbf{S}^2)$, onde $I_D : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ é a aplicação identidade. Logo, R_r é uma bijeção

□

Teorema 11. $R_r(X) = X \iff X \in r$.

Demonstração. Seja r uma linha de \mathbf{S}^2 com polo \vec{u} . Então,

$$\begin{aligned} R_r(X) = X &\iff X - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} = X \\ &\iff 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} = \vec{0} \\ &\iff \langle X, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\iff X \in r \end{aligned}$$

□

5.2 Composta de Reflexões em Relação à Retas

Vamos, agora, observar qual é o resultado que se obtém quando compomos duas reflexões em relação à duas retas distintas, ou seja, vamos estudar a composta de duas reflexões em relação à retas. Sejam r e s retas com polos \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, tomemos o ponto P , um dos pontos de intersecção entre r e s . Vamos escolher uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, com $e_3 = P$. Note que \vec{u} e \vec{v} são ortonormais a e_3 . Deste modo, temos,

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, e_1 \rangle e_1 + \langle \vec{u}, e_2 \rangle e_2 + \langle \vec{u}, e_3 \rangle e_3 = \vec{u} = \langle \vec{u}, e_1 \rangle e_1 + \langle \vec{u}, e_2 \rangle e_2$$

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, e_1 \rangle e_1 + \langle \vec{v}, e_2 \rangle e_2 + \langle \vec{v}, e_3 \rangle e_3 = \vec{v} = \langle \vec{v}, e_1 \rangle e_1 + \langle \vec{v}, e_2 \rangle e_2$$

Tomemos dois números reais θ e φ tais que $\langle \vec{u}, e_1 \rangle = -\sin \theta$, $\langle \vec{u}, e_2 \rangle = \cos \theta$, $\langle \vec{v}, e_1 \rangle = -\sin \varphi$ e $\langle \vec{v}, e_2 \rangle = \cos \varphi$. Então

$$\vec{u} = -\sin \theta \cdot e_1 + \cos \theta \cdot e_2 \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\sin \varphi \cdot e_1 + \cos \varphi \cdot e_2.$$

Calculando o resultado das reflexões em relação às retas r e s dos pontos e_1, e_2, e_3 , obtemos:

$$\begin{aligned}
 R_r(e_1) &= e_1 - 2 \langle e_1, \vec{u} \rangle \vec{u} \\
 &= e_1 - 2 \langle e_1, -\operatorname{sen} \theta \cdot e_1 + \operatorname{cos} \theta \cdot e_2 \rangle (-\operatorname{sen} \theta \cdot e_1 + \operatorname{cos} \theta \cdot e_2) \\
 &= e_1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot (-\operatorname{sen} \theta \cdot e_1 + \operatorname{cos} \theta \cdot e_2) \\
 &= e_1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot e_1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{cos} \theta \cdot e_2 \\
 &= (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) e_1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{cos} \theta \cdot e_2 \\
 &= \operatorname{cos} 2\theta \cdot e_1 + \operatorname{sen} 2\theta \cdot e_2
 \end{aligned}$$

De forma análoga, obtém-se

$$R_r(e_2) = \operatorname{sen} 2\varphi \cdot e_1 - \operatorname{cos} 2\varphi \cdot e_2 \quad \text{e} \quad R_r(e_3) = e_3.$$

Como R_r é uma transformação linear, em termos da base $\{e_1, e_2, e_3\}$, ela pode ser descrita pela matriz

$$R_r = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta & 0 \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\operatorname{cos} 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz de R_s é

$$R_s = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi & 0 \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\operatorname{cos} 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, devemos lembrar que a composta entre as reflexões em relação às retas r e s pode ser calculada pelo produto das matrizes que representam estas duas transformações. Assim, se as coordenadas de um ponto X com relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ são $X = (x, y, z) \in S^2$, temos

$$R_s(X) = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi & 0 \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\operatorname{cos} 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \operatorname{cos} 2\varphi + y \cdot \operatorname{sen} 2\varphi \\ x \cdot \operatorname{sen} 2\varphi - y \cdot \operatorname{cos} 2\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

$$R_r \circ R_s(X) = R_r(R_s(X)) = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta & 0 \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\operatorname{cos} 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \cdot \operatorname{cos} 2\varphi + y \cdot \operatorname{sen} 2\varphi \\ x \cdot \operatorname{sen} 2\varphi - y \cdot \operatorname{cos} 2\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 R_r \circ R_s(X) &= \begin{bmatrix} x \cdot \operatorname{cos} 2(\theta - \varphi) - y \cdot \operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) \\ x \cdot \operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) + y \cdot \operatorname{cos} 2(\theta - \varphi) \\ z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \operatorname{cos} 2(\theta - \varphi) & -\operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) & 0 \\ \operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) & \operatorname{cos} 2(\theta - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ou seja, a matriz de $R_r \circ R_s$ é

$$R_r \circ R_s = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \varphi) & -\operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) & 0 \\ \operatorname{sen} 2(\theta - \varphi) & \cos 2(\theta - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A importância desta representação é que, de forma análoga à geometria euclidiana plana, outras transformações geométricas podem ser representadas como a composta da reflexão em relação à duas retas.

5.3 Rotação

Em \mathbf{S}^2 , tomemos os pontos P , Q e Q' tais que $d(P, Q) = d(P, Q')$. Seja α um número real no intervalo $[0, \pi]$. Diremos que uma transformação geométrica é uma *rotação de centro P e ângulo α* se a medida do ângulo $\angle QPQ'$ é igual a α . Vamos representar tal transformação por $R_{P,\alpha}$.

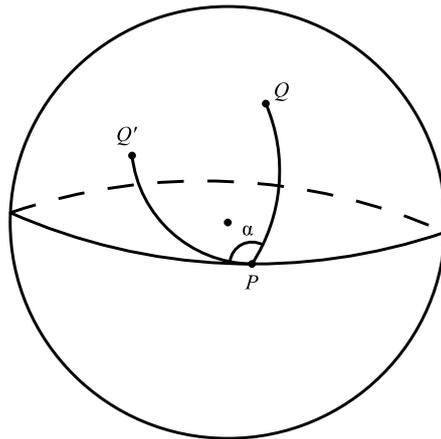


Figura 5.3: Rotação de ângulo α do ponto P

Observe que o número α que satisfaz a definição acima pode ser determinado por

$$\alpha = \arccos \left\langle \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}, \frac{P \times Q'}{\|P \times Q'\|} \right\rangle.$$

Tomemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_3 = P$. Neste caso, qualquer rotação com centro em P de um ponto Q de \mathbf{S}^2 pode ser vista como uma rotação em torno do eixo OZ , ou seja, uma rotação no plano paralelo aos vetores e_1 e e_2 que passa pelo ponto Q .

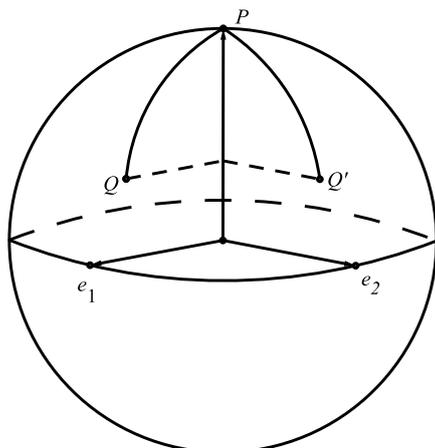


Figura 5.4: Rotação em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Em particular, calculando a rotação de centro em P e ângulo α na base $\{e_1, e_2, e_3\}$, temos:

$$\begin{aligned} R_{P,\alpha}(e_1) &= R_{P,\alpha}(1, 0, 0) = (\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha, 0) \\ R_{P,\alpha}(e_2) &= R_{P,\alpha}(0, 1, 0) = \left(\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right), 0 \right) = (\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha, 0) \\ R_{P,\alpha}(e_3) &= R_{P,\alpha}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Além disso, a transformação $R_{P,\alpha} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $P = e_3$, é uma transformação linear. Portanto, há uma matriz associada a transformação $R_{P,\alpha}$. Calculando esta matriz em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$, obtemos:

$$R_{P,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 20. Dados os pontos $A = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ e $P = (0, 0, 1)$, vamos determinar o ponto $A' = R_{P,\pi/4}$.

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\operatorname{sen}(\pi/4) & 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{7}/4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{7}/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+4}{8} \\ \frac{\sqrt{2}-4}{8} \\ \frac{\sqrt{7}}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

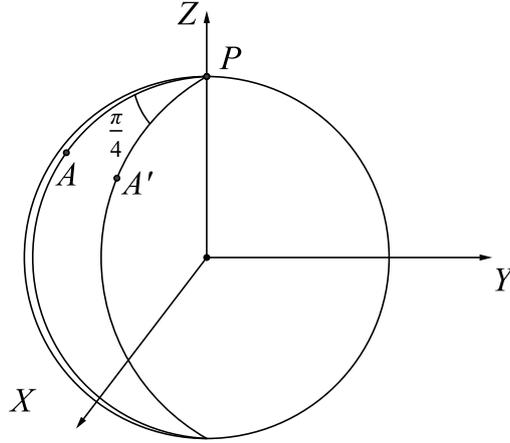


Figura 5.5: Exemplo 20.

$$\text{Logo, } A' = \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{8}, \frac{\sqrt{2} - 4}{8}, \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$$

Agora, tomando duas retas r e s de \mathbf{S}^2 com polos, em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\vec{u} = -\text{sen } \theta \cdot e_1 + \text{cos } \theta \cdot e_2$ e $\vec{v} = -\text{sen } \varphi \cdot e_1 + \text{cos } \varphi \cdot e_2$, respectivamente e um número real $\alpha = 2(\theta - \varphi)$, podemos ver que as retas r e s se intersectam em $e_3 = P$ e a matriz que representa $R_r \circ R_s$ é igual à matriz que representa $R_{P, \alpha}$. Desta forma, podemos definir a rotação de centro P e ângulo α como a composta de duas reflexões em relação às retas que se intersectam em P .

Definição 25. Se r e s são retas que se intersectam em um ponto P , então a transformação $R_r \circ R_s$ é chamada de *rotação de centro P* . Se $r = s$, $R_r \circ R_s$ é a identidade e a rotação será dita trivial. Se $r \neq s$, a rotação é dita não trivial.

O próximo teorema nos mostra que em relação a uma reta l que passa por P , uma rotação de centro em P pode ser descrita de duas formas. Para provar este resultado precisamos enunciar o lema abaixo.

Lema 2 (Três Reflexões). *Sejam r, s e t três retas passando por um ponto P . Então, há uma única reta m passando por P tal que*

$$R_r \circ R_s \circ R_t = R_m.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal com $e_3 = P$. Então, existem $\theta, \varphi, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tais que as matrizes de R_r, R_s e R_t em relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ são respectivamente

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \text{sen } 2\varphi & 0 \\ \text{sen } 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos 2\varepsilon & \text{sen } 2\varepsilon & 0 \\ \text{sen } 2\varepsilon & -\cos 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$R_r \circ R_s \circ R_t = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta + \varphi - \varepsilon) & \operatorname{sen} 2(\theta + \varphi - \varepsilon) & 0 \\ \operatorname{sen} 2(\theta + \varphi - \varepsilon) & -\cos 2(\theta + \varphi - \varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando $\beta = \theta + \varphi - \varepsilon$, temos que a reta m , cujo polo é $\vec{w} = -\operatorname{sen} \beta \cdot e_1 + \cos \beta \cdot e_2$ passa por P e a matriz de R_m com relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ é

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta & 0 \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para provar a unicidade, vamos supor que existe uma reta m' tal que $R_m = R_{m'}$. Portanto, para $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$ as matrizes de R_m e $R_{m'}$ com relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ são

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta & 0 \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta' & \operatorname{sen} 2\beta' & 0 \\ \operatorname{sen} 2\beta' & -\cos 2\beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \cos 2\beta' \\ \operatorname{sen} 2\beta = \operatorname{sen} 2\beta' \end{cases}$$

Este sistema tem solução apenas se $\beta = \beta'$, de modo que $m = m'$. □

Teorema 12 (Representação das Rotações). *Seja $T = R_r \circ R_s$ uma rotação de centro em P , e seja l uma reta passando por P . Então, existem únicas retas m e m' que passam por P tais que*

$$T = R_l \circ R_m = R_{m'} \circ R_l$$

Demonstração. Aplicando o teorema da três reflexões sobre l , r e s , existe uma única reta m que passa por P tal que

$$R_l \circ R_r \circ R_s = R_m.$$

Fazendo a composição de R_l à esquerda, temos:

$$\begin{aligned} R_l \circ (R_l \circ R_r \circ R_s) &= R_l \circ R_m \\ (R_l \circ R_l) \circ R_r \circ R_s &= R_l \circ R_m \\ I_D \circ R_r \circ R_s &= R_l \circ R_m \\ R_r \circ R_s &= T = R_l \circ R_m \end{aligned}$$

E, também, existe uma única reta m' passando por P tal que

$$R_r \circ R_s \circ R_l = R_{m'},$$

e prova-se, de forma análoga, que $T = R_l \circ R_{m'}$. □

5.4 Reflexão em Relação a um Ponto

Suponha que duas retas r e s , cujos polos são \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, de \mathbf{S}^2 se intersectam num ponto P e são perpendiculares. Escolhendo uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_3 = P$, existe um número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\vec{u} = -\operatorname{sen} \theta \cdot e_1 + \operatorname{cos} \theta \cdot e_2 \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_1 + \operatorname{cos} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot e_2$$

Desta forma, a matriz da composta $R_r \circ R_s$ é

$$\begin{bmatrix} \cos 2 \left[\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] & -\operatorname{sen} 2 \left[\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] & 0 \\ \operatorname{sen} 2 \left[\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] & \operatorname{cos} 2 \left[\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi & 0 \\ \operatorname{sen} \pi & \operatorname{cos} \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

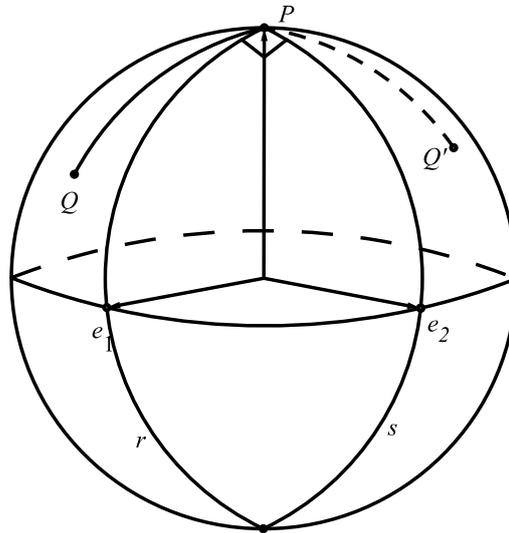


Figura 5.6: Reflexão em Relação ao ponto P

Assim, $R_r \circ R_s = R_{P,\pi}$. Tomando um ponto $Q \neq -P$, temos que $R_{P,\pi}(Q) = Q'$. Note que P , Q e Q' estão alinhados. Como $d(P, Q) = d(P, Q')$, temos que os pontos Q e Q' são simétricos em relação ao ponto P , de modo que podemos definir esta transformação como segue adiante.

Definição 26. Se r e s são retas perpendiculares em um ponto P de \mathbf{S}^2 , a transformação $R_r \circ R_s$ é chamada de *reflexão em relação a P* e será denotada por H_P .

Exemplo 21. Seja $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \right)$ e $P = (0, 0, 1)$, Vamos encontrar o ponto $A' = H_P(A)$.

$$A' = H_P(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } A' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \right).$$

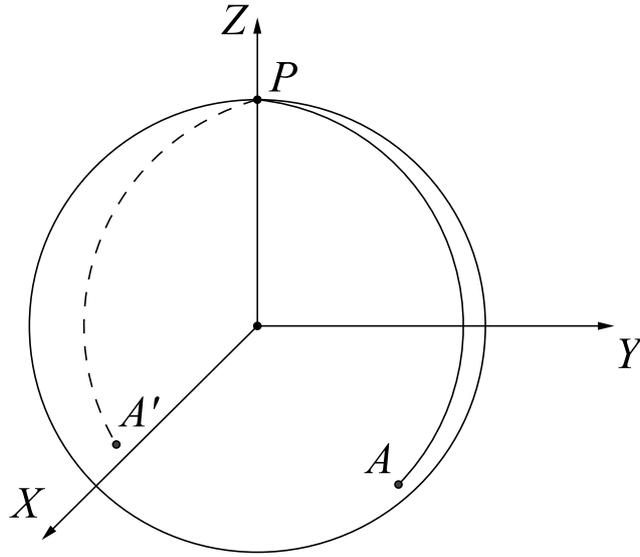


Figura 5.7: Exemplo 21.

O próximo resultado nos sugere outra forma de representar as rotações.

Proposição 10. *Toda rotação pode ser escrita como a composta de duas reflexões em relação a pontos.*

Demonstração. Seja T uma rotação. Pelo teorema de representação das rotações, existem linhas l e m tais que

$$T = R_l \circ R_m.$$

Seja n uma perpendicular comum a l e m , onde P e Q são os pontos de interseção de n com l e m , respectivamente. Então

$$T = R_l \circ R_m = R_l \circ R_n \circ R_n \circ R_m = H_P \circ H_Q$$

□

Proposição 11. *Seja P um ponto de \mathbf{S}^2 . Então, para todo $X \in \mathbf{S}^2$,*

$$H_P(X) = -X + 2 \langle X, P \rangle P.$$

Demonstração. Sejam \vec{u} e \vec{v} polos de duas retas r e s , perpendiculares em P cujos polos são \vec{u} e \vec{v} . Então $\{\vec{u}, \vec{v}, P\}$ é uma base ortonormal. Portanto

$$X = \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} + \langle X, \vec{v} \rangle \vec{v} + \langle X, P \rangle P.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} H_P(X) &= R_r \circ R_s \\ &= R_r(X - 2 \langle X, \vec{v} \rangle \vec{v}) \\ &= X - 2 \langle X, \vec{v} \rangle \vec{v} - 2 \langle X - 2 \langle X, \vec{v} \rangle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= X - 2 \langle X, \vec{v} \rangle \vec{v} - 2 \langle X, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= X - 2 \langle X, P \rangle P \\ &= -X + 2 \langle X, P \rangle P \end{aligned}$$

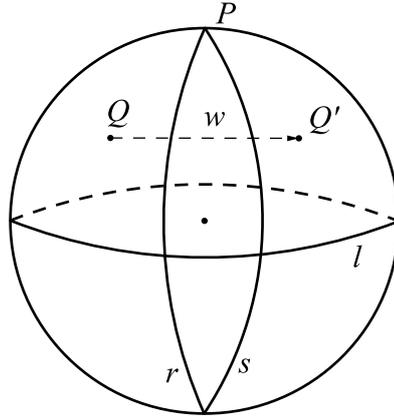
□

Exemplo 22. Vamos calcular novamente as coordenadas do ponto $A' = H_P(A)$, onde $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, usando a proposição anterior.

$$\begin{aligned} A' &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + 2 \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right), (0, 0, 1) \right\rangle (0, 0, 1) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \left(0, 0, -2\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \end{aligned}$$

5.5 Translação

Sejam duas retas r e s , de polos \vec{u} e \vec{v} , pertencentes à \mathbf{S}^2 , P um ponto de intersecção entre r e s , e uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$, com $e_3 = P$. Sabemos que existe uma única reta l que é perpendicular a r e s , cujo polo é P . Por outro lado, dado um ponto Q , há um único ponto Q' tal que $R_r \circ R_s(Q) = Q'$.

Figura 5.8: Translação na direção da reta l

Vimos anteriormente que os pontos Q e Q' estão em um plano paralelo ao plano determinado por e_1 e e_2 . Desta forma, podemos ver que, no espaço euclidiano \mathbb{E}^3 , os pontos Q e Q' determinam um vetor \vec{w} paralelo ao plano dos vetores e_1 e e_2 . Assim, poderíamos dizer que o ponto Q' foi obtido do ponto Q por uma *translação na direção do vetor \vec{w}* .

Mas, o vetor \vec{w} não pertence à S^2 . Deste modo, para definir uma *translação*, ao invés de usarmos o vetor \vec{w} para determinar a direção, isto será feito com relação à reta l . Assim, segue a próxima definição.

Definição 27. Sejam l , r e s retas de S^2 tais que r e s são perpendiculares a l . A transformação $R_r \circ R_s$ é chamada uma *translação* na direção de l .

O próximo resultado relaciona a rotação com centro em um ponto e a translação em direção a uma reta.

Proposição 12.

1. Toda translação de S^2 é também uma rotação.
2. Toda rotação de S^2 é também uma translação.

Demonstração. A afirmação 1 decorre do fato que todas as linhas que possuem uma perpendicular comum se intersectam em dois pontos antipodais, que são os polos da perpendicular comum.

Reciprocamente, duas linhas distintas sempre se intersectam em dois pontos antipodais. Além disso, existe uma única linha que é perpendicular a ambas as linhas, o que prova a afirmação 2. \square

Vamos considerar agora duas retas r e s perpendiculares a uma reta l . Seja P um ponto arbitrário de l . Seja \vec{u} o polo de l e tomemos $Q = \vec{u} \times P$. Então, nós podemos

escolher números $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\cos a \cdot P + \operatorname{sen} a \cdot Q \in r \quad , \quad \cos b \cdot P + \operatorname{sen} b \cdot Q \in s$$

Então é fácil verificar que $-\operatorname{sen} a \cdot P + \cos a \cdot Q$ e $-\operatorname{sen} b \cdot P + \cos b \cdot Q$ são polos de r e s , respectivamente. Logo

$$R_r \circ R_s = \begin{bmatrix} \cos 2(a-b) & -\operatorname{sen} 2(a-b) & 0 \\ \operatorname{sen} 2(a-b) & \cos 2(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma parametrização da reflexão em relação a retas perpendiculares a l com relação à base ortonormal $\{P, Q, \vec{u}\}$.

Como consequência dos resultados anteriores, temos as seguintes proposições.

Lema 3 (Três Reflexões). *Sejam r, s e t três retas perpendiculares a uma reta l . Então, existe uma única reta m deste conjunto tal que*

$$R_r \circ R_s \circ R_t = R_m.$$

Teorema 13 (Representação das Translações). *Seja $T = R_r \circ R_s$ uma translação na direção de l . Se m e n são retas perpendiculares a l arbitrárias, existem únicas retas m' e n' tais que*

$$T = R_m \circ R_{m'} = R_{n'} \circ R_n.$$

Não faremos as demonstrações do lema 3 e do teorema 13, mas elas são completamente análogas às demonstrações do lema 2 e teorema 12, respectivamente.

5.6 Reflexão Transladada

Na seção anterior, vimos que a transformação $R_r \circ R_s$ é uma translação na direção da reta l , que é perpendicular a r e s . Uma nova transformação ocorre quando fazemos a translação na direção de l após ter sido realizada uma reflexão em relação a reta l . Esta transformação será chamada de *reflexão transladada*.

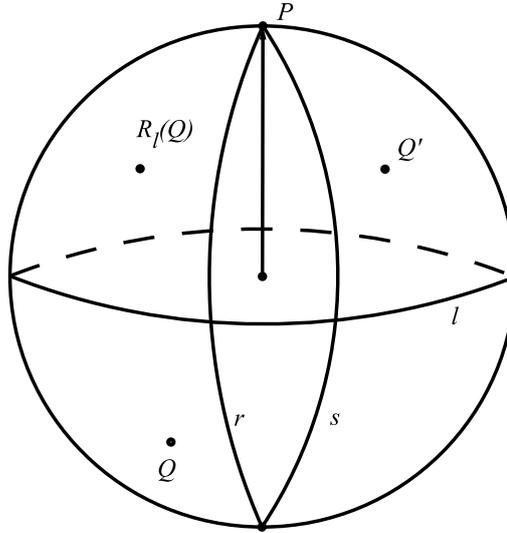


Figura 5.9: O ponto Q' é o resultado da reflexão transladada de eixo l

Definição 28. Se r e s são retas perpendiculares à reta l , então $R_r \circ R_s \circ R_l$ é chamada uma *reflexão transladada* com eixo l .

Observação: se $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal, onde e_3 é um polo de l , então

$$R_l(e_1) = e_1 \quad , \quad R_l(e_2) = e_2 \quad \text{e} \quad R_l(e_3) = -e_3.$$

Desta observação, temos:

Corolário 6. Dada uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ e uma reta l , com polo e_3 , uma *reflexão transladada* com eixo l é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda & -\text{sen } \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Demonstração. Da observação, temos

$$R_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, e de resultados feitos nas seções anteriores, existe $\lambda \in [0, \pi]$ tal que

$$R_r \circ R_s \circ R_l = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\text{sen } \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\text{sen } \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observemos também que, se r e s se intersectam em um ponto $P = e_3$ e $R_l(Q) = X$, λ é o ângulo $\angle XPQ$. \square

Feita a demonstração acima, representaremos uma rotação transladada por $T_{l,\lambda}$

Exemplo 23. Sejam $A = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e l uma reta cujo polo é $P = (0, 0, 1)$. Vamos calcular o ponto $A' = R_{l,\lambda}$, onde $\lambda = \frac{\pi}{3}$.

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, $A' = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

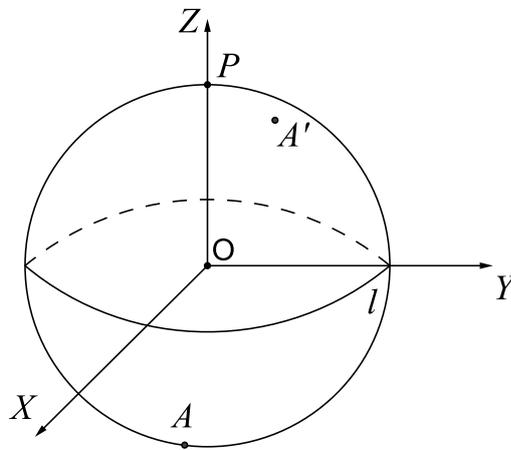


Figura 5.10: Exemplo 23.

Por fim, veremos uma transformação de \mathbf{S}^2 que leva um ponto P no seu antípoda.

Definição 29. Uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de \mathbf{S}^2 o seu antípoda será chamada de *aplicação antipodal* E e será representada por

$$E(P).$$

Com relação a alguma base ortonormal, a matriz de E é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Veja que aplicação antipodal é uma reflexão translada pois pode ser fatorada como

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é a composta de três reflexões em relação retas cujos polos formam uma base ortonormal.

Proposição 13. *Seja P um ponto de S^2 e seja l sua reta polar. Então*

$$R_l \circ H_P = H_P \circ R_l = E,$$

onde E é a aplicação antipodal.

Demonstração. Pela proposição 11, para qualquer $X \in S^2$,

$$H_P(X) = -X + 2 \langle X, P \rangle P = -(X - 2 \langle X, P \rangle P) = -X - 2 \langle -X, P \rangle P.$$

Logo,

$$H_P = R_l \circ E = E \circ R_l$$

e portanto

$$R_l \circ H_P = H_P \circ R_l = E.$$

□

Assim, mostramos que a aplicação antipodal pode ser representada como a composta de uma reflexão em relação a uma reta e uma reflexão em relação a um ponto. Vamos, a seguir, dar uma representação para uma reflexão transladada qualquer.

Proposição 14. *Seja T uma reflexão transladada diferente da aplicação antipodal. Suponha que l é o eixo de T e P é um polo de l . Então:*

1. *Para cada reta m passando por P , existe um único ponto Q , necessariamente em l , tal que*

$$R_m \circ H_Q = T.$$

2. Para cada ponto Q de l , existe uma única reta m , passando necessariamente por P , tal que

$$R_m \circ H_Q = T.$$

Demonstração.

1. Tomemos uma reta m passando por P . Então, m é perpendicular a l . Assim, existe uma única reta n , perpendicular a l , tal que

$$R_m \circ R_n \circ R_l = T.$$

Seja Q o ponto de interseção das retas l e n , temos $R_n \circ R_l = T$. Logo,

$$T = R_m \circ H_Q.$$

2. Seja n a reta perpendicular a l , que passa por Q . Então $R_n \circ R_l = H_Q$. Além disso, existe uma única reta m , perpendicular a l , tal que $R_m \circ R_n \circ R_l = T$. Portanto

$$R_m \circ H_Q = T.$$

Por fim, como m é perpendicular a l , temos que m passa por P .

□

Observação: Para alguma reta m e algum ponto Q , $R_m \circ H_Q$ é uma reflexão transladada cujo eixo é perpendicular a m e passa por Q .

5.7 Pontos Fixos das Isometrias

Por fim, vamos caracterizar as isometrias de \mathbf{S}^2 conforme a natureza do seu conjunto de pontos e retas fixas. Começamos pelos pontos fixos das isometrias.

Teorema 14.

1. Uma rotação não trivial têm exatamente dois pontos fixos, que são antipodais.
2. Uma reflexão em relação a uma reta tem como pontos fixos o seu eixo.
3. Uma reflexão transladada não tem pontos fixos.
4. A identidade deixa todos os pontos fixos.

Demonstração. Tomemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 , e um ponto $Q \in \mathbf{S}^2$, $Q \neq \pm e_3$, de modo que as coordenadas de Q com relação a base dada são (x, y, z) .

1. Seja $P = e_3$, tal que $R_{P,\alpha}$ é uma rotação não trivial. Assim, $\alpha \neq 0$ e $P = (0, 0, 1)$. Observe que

$$R_{P,\alpha}(P) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P.$$

Procedendo de forma análoga, é possível mostrar que $R_{P,\alpha}(-P) = -P$. Assim, $R_{P,\alpha}$ tem dois pontos fixos.

Vamos supor que Q é também um ponto fixo de $R_{P,\alpha}$, ou seja $R_{P,\alpha}(Q) = Q$. Deste modo,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(\cos \alpha - 1) - y \operatorname{sen} \alpha \\ x \operatorname{sen} \alpha + y(\cos \alpha - 1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, precisamos que o sistema

$$\begin{cases} x(\cos \alpha - 1) - y \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ x \operatorname{sen} \alpha + y(\cos \alpha - 1) = 0 \end{cases}$$

tenha solução não trivial. Mas isso só ocorre quando

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha - 1 & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha - 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \cos \alpha = 1 \iff \alpha = 0$$

Logo, a rotação não trivial tem como pontos fixos apenas o seu centro e o ponto antípoda ao seu centro.

2. Este resultado foi provado no teorema 11.
3. Sejam r e s duas retas perpendiculares a uma reta l , com polo e_3 . Deste modo, $R_r \circ R_s \circ R_l$ é uma reflexão transladada. Se $r = s$, temos que $R_r \circ R_s \circ R_l = R_l$, ou seja, é uma reflexão em relação à reta l . Vamos supor que $r \neq s$. Então, para algum $\lambda \in [0, \pi]$,

$$R_r \circ R_s \circ R_l(Q) = Q \iff \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\operatorname{sen} \lambda & 0 \\ \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(\cos \lambda - 1) - y \operatorname{sen} \lambda \\ x \operatorname{sen} \lambda + y(\cos \lambda - 1) \\ -2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x(\cos \lambda - 1) - y \operatorname{sen} \lambda = 0 \\ x \operatorname{sen} \lambda + y(\cos \lambda - 1) = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

deve ter solução não trivial. Mas isso só acontece quando

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda - 1 & -\operatorname{sen} \lambda & 0 \\ \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2(\cos \lambda - 1)^2 - 2\operatorname{sen}^2 \lambda = 0$$

$$\cos \lambda = 1 \iff \lambda = 0$$

ou seja, apenas se $r = s$. Portanto, a reflexão transladada não deixa pontos fixos

4. Este resultado segue da definição da transformação identidade. □

Para estudar as retas que ficam fixas pelas isometrias estudadas, vamos lançar mão do seguinte lema.

Lema 4. *Uma isometria T deixa fixa uma reta com polo \vec{u} se, e somente se,*

$$T(\vec{u}) = \pm \vec{u}.$$

Demonstração. Seja r uma reta de \mathbf{S}^2 com polo \vec{u} . Suponha que uma isometria T deixa r fixa. Então, para qualquer $P \in r$, $T(P) \in r$. Por outro lado,

$$d(T(P), T(\vec{u})) = d(P, \vec{u}).$$

Considerando a definição da distância em \mathbf{S}^2 , temos:

$$\langle T(P), T(\vec{u}) \rangle = \langle P, \vec{u} \rangle = 0.$$

Logo, $T(\vec{u})$ é o polo da reta que passa por $T(P)$. Como $T(P) \in r$, temos que $T(\vec{u})$ é polo de r . Portanto, $T(\vec{u}) = \pm \vec{u}$.

Reciprocamente, suponha que $T(\vec{u}) = \pm \vec{u}$. Suponha que P é um ponto de r . Inicialmente, vamos supor que $T(\vec{u}) = \vec{u}$. Então:

$$d(T(P), T(\vec{u})) = d(T(P), \vec{u}) = d(P, \vec{u}).$$

Da definição da distância, temos:

$$\langle T(P), \vec{u} \rangle = \langle P, \vec{u} \rangle = 0$$

Logo, $T(P)$ pertence à reta polar de \vec{u} , de onde concluímos que $T(P) \in r$. Se $T(\vec{u}) = -\vec{u}$, a demonstração se faz de forma análoga. □

Teorema 15. 1. Uma reflexão em relação a um ponto deixa fixas todas as retas que passam por este ponto e também a perpendicular comum a estas retas.

2. Uma rotação não trivial distinta da reflexão em relação a um ponto fixa somente a reta cujo polo é o centro da rotação.

3. Uma reflexão em relação a uma reta deixa fixado seu eixo e todas as perpendiculares a ele.

4. Uma reflexão transladada diferente da aplicação antipodal deixa fixo somente seu eixo.

5. A aplicação antipodal e a identidade deixam fixas todas as retas de S^2 .

Demonstração. Seja P um ponto de S^2 e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal com $e_3 = P$. Tomemos uma reta $l \in S^2$ tal que P é o polo de l .

1. Inicialmente, vamos observar que $H_P(P) = P$. Logo, $H_P(l) = l$. Tomemos uma reta r , cujo polo é \vec{u} , que passa por P . Desta forma $\vec{u} \in l$. Além disso,

$$H_P(u) = -\vec{u} + 2 \langle \vec{u}, P \rangle P = -\vec{u}.$$

Logo, $H_P(r) = r$.

2. Tomemos uma rotação não trivial de centro P e ângulo α , tal que $\alpha \neq \pi$. Veja que $R_{P,\alpha}(P) = P$. Logo, $R_{P,\alpha}(l) = l$.

Por outro lado, suponha que $R_{P,\alpha}$ fixa uma reta r , cujo polo é \vec{u} , distinta da reta l . Desta forma, $R_{P,\alpha}(\vec{u}) = \pm\vec{u}$. Se as coordenadas de \vec{u} , com relação à base $\{e_1, e_2, e_3\}$, são (x, y, z) , temos dois casos a analisar.

- **Caso 1:** $R_{P,\alpha}(\vec{u}) = \vec{u}$. Vimos que isto ocorre somente quando $\alpha = 0$.
- **Caso 2:** $R_{P,\alpha}(\vec{u}) = -\vec{u}$. Então:

$$R_{P,\alpha}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Para que isso ocorra, o sistema

$$\begin{cases} x(\cos \alpha + 1) - y \sin \alpha = 0 \\ x \sin \alpha + y(\cos \alpha + 1) = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

tem solução não trivial. Desta forma,

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha + 1 & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2(\cos \alpha + 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = -1 \iff \alpha = \pi$$

ou seja, se $R_{P,\alpha} = H_P$. Logo, $R_{P,\alpha}$ deixa fixa apenas a reta l .

3. Primeiramente, vejamos que

$$R_l(P) = P - 2 \langle P, P \rangle P = -P.$$

Logo, $R_l(l) = l$. Seja r uma reta de polo \vec{u} distinta de l . Temos dois caso a analisar.

• **Caso 1:** $R_l(\vec{u}) = \vec{u}$. Então

$$\begin{aligned} \vec{u} - 2 \langle \vec{u}, P \rangle P = \vec{u} &\iff \langle \vec{u}, P \rangle P = \vec{0} \\ &\iff \langle \vec{u}, P \rangle = 0 \\ &\iff \vec{u} \in l \\ &\iff r \perp l \end{aligned}$$

• **Caso 2:** $R_l(\vec{u}) = -\vec{u}$. Então,

$$\begin{aligned} R_l(\vec{u}) = -\vec{u} &\iff \vec{u} - 2 \langle \vec{u}, P \rangle P = -\vec{u} \\ &\iff \langle \vec{u}, P \rangle P = \vec{u} \\ &\iff \vec{u} = \pm P \end{aligned}$$

Logo, as retas fixas de R_l são l e as retas perpendiculares a l .

4. Seja T uma reflexão transladada de eixo l , distinta da aplicação antípoda. Na base considerada, as coordenadas do polo de l são $(0, 0, 1)$. Então, para algum $\lambda \in [0, \pi]$,

$$T(P) = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\operatorname{sen} \lambda & 0 \\ \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -P$$

Logo, $T(l) = l$. Por outro lado, dada uma reta r , com polo \vec{u} , distinta de l , temos que $T(\vec{u}) \neq \vec{u}$ pois a reflexão transladada não deixa pontos fixos e ainda $T(\vec{u}) \neq -\vec{u}$. Assim, a única reta fixa de T é a reta l .

5. Tomemos um ponto $Q \in \mathbf{S}^2$. Seja r a reta polar de Q . Então:

$$\begin{aligned} I_D(Q) = Q &\implies I_D(r) = r \\ E(Q) = -Q &\implies E(r) = r \end{aligned}$$

□

Por fim, vemos com o resultado a seguir, que as isometrias levam segmentos de S^2 em segmentos de mesma natureza.

Teorema 16. *Seja T uma isometria. Então*

1. *Se s é um segmento menor, $T(s)$ também o é;*
2. *Se s é uma meia reta, assim também ocorre com $T(s)$;*
3. *Se s é um segmento maior, o mesmo ocorre com $T(s)$.*

Demonstração.

1. Seja s o segmento menor AB . Então,

$$s = \{X/d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(s) &= \{T(X)/d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\} \\ &= \{T(X)/d(T(A), T(X)) + d(T(X), T(B)) = d(T(A), T(B))\} \\ &= \{Y/d(T(A), Y) + d(Y, T(X)) = d(T(A), T(B))\} \end{aligned}$$

Logo, $T(s)$ é um segmento menor de extremidades $T(A)$ e $T(B)$.

2. Seja s uma meia reta contida numa linha l , tendo A e B como extremidades. Seja C um ponto de s distinto de A e B . Então, pela proposição 19, s é a união entre os segmentos menores AC e CB .

Por 1, $T(s)$ é a união dos segmentos menores de extremidades $\{T(A), T(C)\}$ e $\{T(C), T(B)\}$. Logo, $T(A)$ e $T(B)$ são pontos antipodais, de onde concluímos que $T(s)$ é uma meia reta.

3. Suponha que s é o maior segmento com extremidades A e B .

Por 1, T leva o segmento menor AB no segmento menor com extremidades em $T(A)$ e $T(B)$.

Como T leva a linha $l = \overleftrightarrow{AB}$ a uma linha passando por $T(A)$ e $T(B)$, o complemento do segmento do menor de extremidades $T(A)$ e $T(B)$ é o segmento maior de extremidades nestes mesmos pontos. Logo, $T(s)$ é um segmento maior.

□

Capítulo 6

Triângulos Esféricos

Neste capítulo, vamos estudar os *triângulos esféricos*, ou seja, os triângulos obtidos na superfície esférica. Iniciamos nosso estudo com a definição de triângulo esférico.

Definição 30 (Triângulo Esférico). Sejam P , Q e R três pontos não colineares de \mathbf{S}^2 . O *triângulo* $\triangle PQR$ é a união dos menores segmentos PQ , PR e QR . Estes segmentos são chamados de *lados* do triângulo e seus comprimentos são dados pela distância entre suas extremidades.

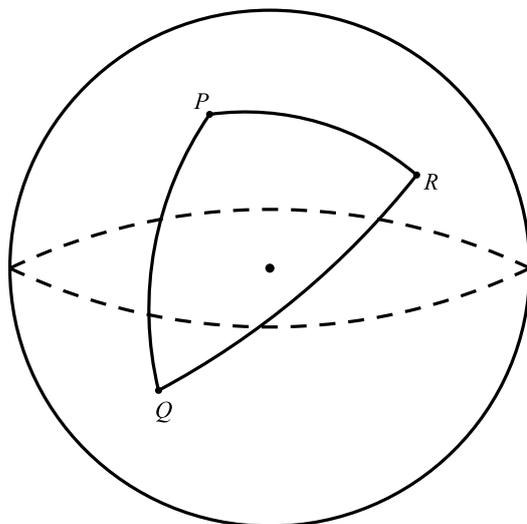


Figura 6.1: Triângulo Esférico

Por esta definição, temos que três pontos não colineares de \mathbf{S}^2 determinam um triângulo.

No decorrer deste capítulo, estaremos apresentando alguns elementos de um triângulo esférico. Antes começamos com a introdução da *trigonometria esférica*.

6.1 Trigonometria Esférica

Vamos apresentar, nesta seção, alguns resultados que relaciona as medidas dos lados de um triângulo esférico com as medidas de seus ângulos. Desta forma, estaremos apresentando uma trigonometria na superfície da esfera.

Inicialmente, seja $\triangle ABC$ um triângulo, tal que

$$\begin{aligned} a &= d(B, C) = \arccos \langle B, C \rangle, \\ b &= d(A, C) = \arccos \langle A, C \rangle, \\ c &= d(A, B) = \arccos \langle A, B \rangle. \end{aligned}$$

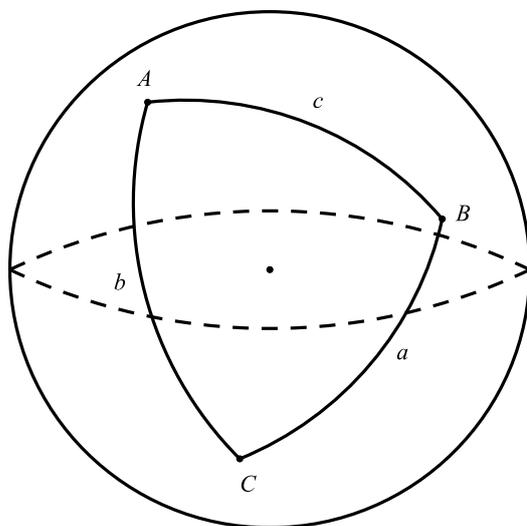


Figura 6.2: Trigonometria Esférica

Note que

$$\begin{aligned} \|B \times C\|^2 &= \langle B \times C, B \times C \rangle \\ &= \|B\|^2 \cdot \|C\|^2 - \langle B, C \rangle^2 \\ &= 1 - \cos^2 a = \text{sen}^2 a \end{aligned}$$

e também tem-se

$$\begin{aligned} \langle A \times B, A \times C \rangle &= \|A\|^2 \langle B, C \rangle - \langle A, C \rangle \langle A, B \rangle \\ &= \cos a - \cos b \cdot \cos c \end{aligned}$$

Se A é a medida, em radianos, do ângulo $\angle BAC$, então

$$A = \arccos \left\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times C}{\|A \times C\|} \right\rangle$$

$$\cos A = \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|} \iff \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

que chamamos de *Lei dos Cossenos* para a geometria esférica.

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \\ &= \frac{-\cos a + (\cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \\ &= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

Então,

$$(1 - \cos A)(1 + \cos A) = 1 - \cos^2 A = \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{k}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c}$$

onde k é o produto entre

$$-2 \operatorname{sen} \frac{b - c + a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{b - c - a}{2} \quad \text{e} \quad -2 \operatorname{sen} \frac{a + b + c}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b - c}{2}$$

Colocando $a + b + c = 2s$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{4 \operatorname{sen} s \cdot \operatorname{sen}(s - a) \cdot \operatorname{sen}(s - b) \cdot \operatorname{sen}(s - c)}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c}$$

e, portanto,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{2 (\operatorname{sen} s \cdot \operatorname{sen}(s - a) \cdot \operatorname{sen}(s - b) \cdot \operatorname{sen}(s - c))^{1/2}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

Note que o lado direito da igualdade acima é simétrica em relação a a , b e c , de onde podemos concluir que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

que é chamada de *Lei dos Senos* para a geometria esférica.

Os cálculos feitos no início desta seção nos levaram a determinar a medida de um ângulo em radianos a partir das medidas de seus lados. Pode-se, ainda, determinar a medida de um lado do triângulo esférico a partir de seus ângulos. Assim, obtermos o seguinte resultado para a Lei dos Cossenos.

Teorema 17 (Lei dos Cossenos). *Na notação adotada nesta seção, temos:*

$$1. \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}.$$

$$2. \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}$$

Demonstração.

1. A primeira parte foi provada com os argumentos dados no início desta seção.

2. Sejam P , Q e R pontos de \mathbf{S}^2 tais que $P = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$, $Q = \frac{A \times C}{\|A \times C\|}$ e $R = \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$, ou seja, P , Q e R são polos das retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BC} . Assim,

$$A = \arccos \left\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times C}{\|A \times C\|} \right\rangle = \arccos \langle P, Q \rangle$$

$$B = \arccos \left\langle \frac{B \times A}{\|B \times A\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = \arccos - \left\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = \arccos \langle P, R \rangle$$

$$C = \arccos \left\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{C \times B}{\|C \times B\|} \right\rangle = \arccos \left\langle \frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = \arccos \langle Q, R \rangle$$

Tomemos o triângulo $\triangle PQR$. Pelo argumento feito acima, $d(P, Q) = A$, $d(P, R) = B$ e $d(Q, R) = C$. Por 1, temos

$$\cos R = \frac{\cos A - (-\cos B) \cdot \cos C}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}$$

Além disso,

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ é polo de } \overleftrightarrow{BC} \implies \langle R, B \rangle = 0 \\ P \text{ é polo de } \overleftrightarrow{AB} \implies \langle P, B \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies B \text{ é polo de } \overleftrightarrow{RP}$$

Analogamente, mostra-se que C é polo de \overleftrightarrow{RQ} . Então, $R = \arccos \langle B, C \rangle = a$. Logo

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}.$$

□

Veja que a segunda forma da lei dos cossenos nos permite afirmar que os comprimentos dos lados de um triângulo são completamente determinados pelas medidas, em radianos, de seus ângulos.

6.2 Mediatrizes e Bissetrizes

Analisemos de que as isometrias de \mathbf{S}^2 atuam nos segmentos, ângulos e triângulos de \mathbf{S}^2 .

Proposição 15. *Sejam P e Q pontos de \mathbf{S}^2 . Então, existe um única reflexão em relação a uma reta que permuta P e Q .*

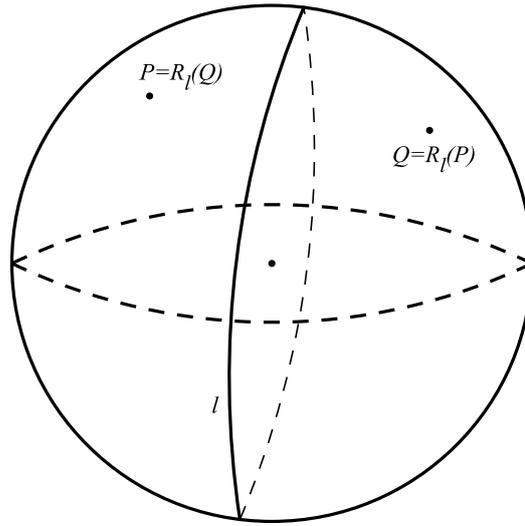


Figura 6.3: A reflexão em relação a reta l permuta os pontos P e Q

Demonstração. Seja $\vec{u} = \frac{P - Q}{\|P - Q\|}$ e l a reta cujo polo é \vec{u} . Então

$$\begin{aligned}
 R_l(P) &= P - 2 \langle \vec{u}, P \rangle \vec{u} \\
 &= P - 2 \left\langle \frac{P - Q}{\|P - Q\|}, P \right\rangle \frac{P - Q}{\|P - Q\|} \\
 &= P - 2 \frac{1 - \langle P, Q \rangle (P - Q)}{\|P - Q\|^2} \\
 &= P - 2 \frac{1 - \langle P, Q \rangle (P - Q)}{2(1 - \langle P, Q \rangle)} \\
 &= P - (P - Q) = Q
 \end{aligned}$$

Para provar a unicidade, suponha que R_l e R_m são reflexões que permutam P e Q . Então, a rotação $R_l \circ R_m$ deixa os pontos P e Q fixados.

Se P e Q não são antipodais, então $R_l \circ R_m = I_D$ e, portanto, $l = m$. Se P e Q são antipodais, então \vec{u} , polo de l , satisfaz

$$P - 2 \langle \vec{u}, P \rangle \vec{u} = -P.$$

Sendo assim, $P = \langle \vec{u}, P \rangle \vec{u}$, de modo que l é a reta polar de P . Argumentando de modo análogo para m , vemos que $l = m$. \square

Definição 31. Seja s um segmento. A *mediatriz* de s é a única reta m tal que R_m permuta as extremidades de s .

Teorema 18. A *mediatriz* de um segmento é o conjunto dos pontos equidistantes às extremidades do segmento.

Demonstração. Sejam P e Q as extremidades de um segmento s e m a mediatriz de s .

Tomemos um ponto $X \in m$. Se r é o segmento de extremidades P e X , temos que $R_m(r)$ é o segmento de extremidades $R_m(P)$ e $R_m(X)$. Além disso, $R_m(X) = X$ e $R_m(P) = Q$. Portanto

$$d(X, P) = d(R_m(X), R_m(P)) = d(X, Q)$$

\square

Definição 32. O *ponto médio* M de um segmento s é o único ponto de intersecção entre s e sua mediatriz.

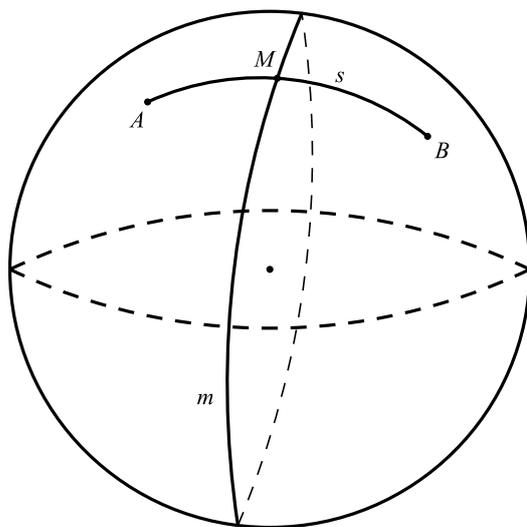


Figura 6.4: Ponto Médio do segmento s

Observações:

1. O ponto médio M de um segmento s é o único ponto de s que é equidistante das extremidades de s ;
2. Um segmento e seu complemento tem a mesma mediatriz.

Teorema 19. *Há exatamente duas reflexões em relação a retas que permutam um par de retas dadas.*

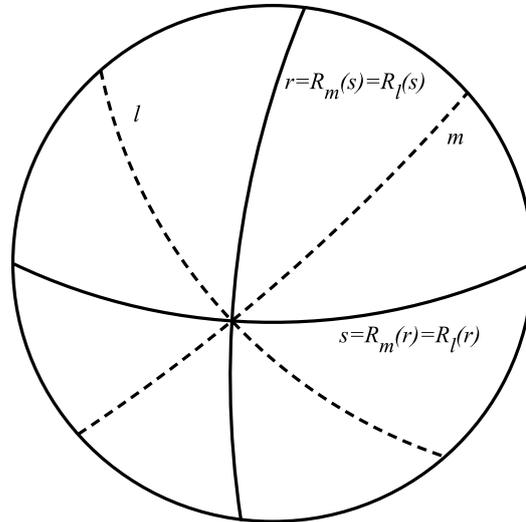


Figura 6.5: As retas m e l permutam as retas r e s

Demonstração. Sejam l e m duas retas de \mathbf{S}^2 e P e Q , pontos de \mathbf{S}^2 , tais que os polos de l são $\pm P$ e os polos de m são $\pm Q$. Sabemos que existe uma única reflexão que permuta P e Q . Assim, esta reflexão permutará, também, as retas polares de P e Q .

Além disso, existe uma única reflexão que permuta P e $-Q$ (e, conseqüentemente, permuta $-P$ e Q), de modo que esta reflexão permuta l e m .

Por outro lado, uma reflexão que permuta as retas l e m deve levar $-Q$. Assim, somente as duas reflexões mencionadas permutam as retas dadas. \square

Teorema 20. *Para algum ângulo $\mathcal{A} = \angle BAC$, existe uma única reflexão em relação a uma reta que permuta os lados deste ângulo.*

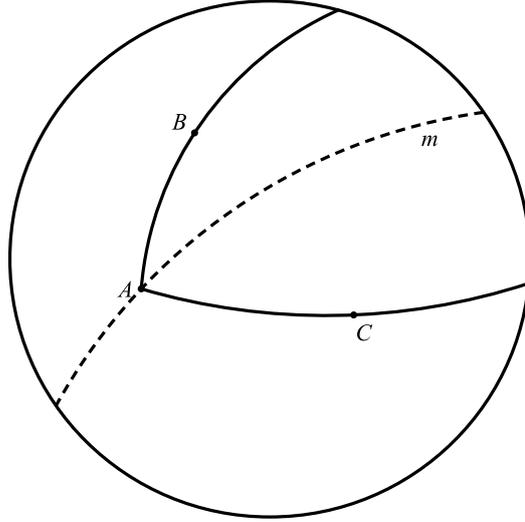


Figura 6.6: A reta m permuta as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}

Demonstração. Primeiro, vamos analisar os casos do ângulo nulo e do ângulo $\angle ABC$, tal que A , B e C são pontos colineares. Em ambos os casos, a reflexão deve deixar fixa a reta l que contém os lados dos ângulos e também fixa o vértice do ângulo. Portanto, tomemos as reflexões R_l e R_m , onde m é a reta perpendicular a l passando por B .

Se $P \in l$, $R_l(P) = P$. Logo, R_l permuta os lados do ângulo nulo. Além disso, se $P \in \overrightarrow{BA}$, $R_m(P) \in \overrightarrow{BC}$ e $R_m(B) = B$. Logo, R_m permuta os lados de $\angle ABC$.

Seja $\mathcal{A} = \angle PQR$ um ângulo distinto dos ângulos apresentados anteriormente. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\langle P, Q \rangle = \langle R, Q \rangle = 0$ e $P \times R = \|P \times R\|Q$, ou seja, Q é polo da reta \overleftrightarrow{PR} . Seja l a reta cujo polo é $\vec{u} = \frac{P - R}{\|P - R\|}$. Vejamos que

$$\langle Q, \vec{u} \rangle = \langle Q, \frac{P - R}{\|P - R\|} \rangle = \frac{\langle P, Q \rangle - \langle R, Q \rangle}{\|P \times R\|} = 0.$$

Portanto, $R_l(Q) = Q$. Além disso,

$$\begin{aligned} R_l(P) &= P - 2 \langle P, \vec{u} \rangle \vec{u} \\ &= P - 2 \langle P, \frac{P - R}{\|P - R\|} \rangle \frac{P - R}{\|P - R\|} \\ &= P - 2 \frac{(\langle P, P \rangle - \langle P, R \rangle) (P - R)}{\langle P - R, P - R \rangle} \\ &= P - 2 \frac{(1 - \langle P, R \rangle) (P - R)}{2 - 2 \langle P, R \rangle} \\ &= P - (P - R) = R \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $R_l(R) = P$. Logo, R_l permuta os lados de \mathcal{A} . \square

Definição 33. Dado um ângulo $\mathcal{A} = \angle BAC$, a semirreta \overrightarrow{AP} , onde $P = \frac{B+C}{\|B+C\|}$, é chamada de *bissetriz* do ângulo \mathcal{A} .

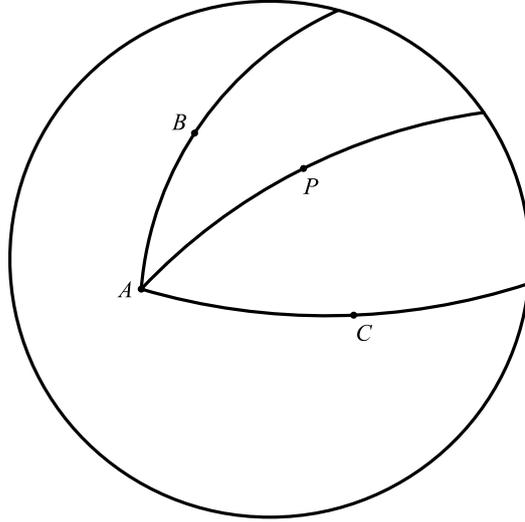


Figura 6.7: A bissetriz do ângulo $\angle BAC$

Note que P é um ponto pertencente ao interior de \mathcal{A} . A partir da definição de bissetriz, temos o teorema a seguir.

Proposição 16. Se \overrightarrow{AP} é uma bissetriz de um ângulo $\angle BAC$, então $\angle BAP$ e $\angle CAP$ são congruentes.

Demonstração. Seja l a reta tal que $\vec{u} = \frac{B-C}{\|B-C\|}$ é o polo de l . Note que $l = \overleftrightarrow{AP}$.

Vimos que a reflexão R_l permuta os lados de $\angle BAC$. Assim, existe um ponto $B' \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que $R_l(B) = B'$. Se

$$\alpha = \arccos \left\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times P}{\|A \times P\|} \right\rangle \quad \text{e} \quad \beta = \arccos \left\langle \frac{A \times B'}{\|A \times B'\|}, \frac{A \times P}{\|A \times P\|} \right\rangle$$

$$a = d(B, P) \quad , \quad b = d(B, A) \quad \text{e} \quad c = d(A, P)$$

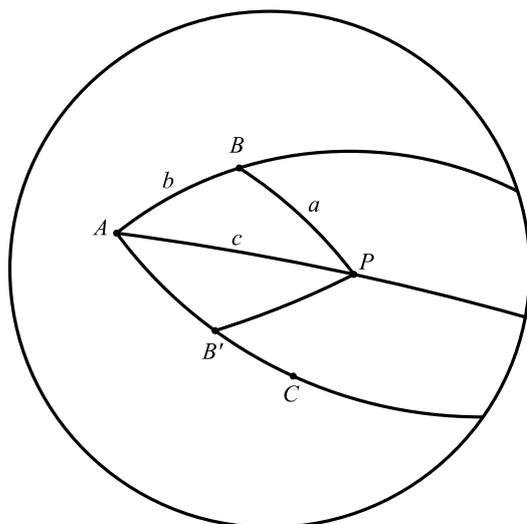


Figura 6.8: \overrightarrow{AP} é bissetriz de $\angle BAC$

Como R_l é uma isometria, temos

$$\begin{aligned} d(B', P) &= d(R_l(B), R_l(P)) = d(B, P) = a \\ d(B', A) &= d(R_l(B), R_l(A)) = d(B, A) = b \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \cos \beta,$$

Logo, $\alpha = \beta$, pois $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. □

Para definir a congruência de segmentos, precisamos estudar os dos próximos resultados.

Teorema 21. *Sejam P e Q pontos de uma reta l . Então, existe uma única translação na direção de l que leva P em Q .*

Demonstração. Escolha uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1 = P$, $Q = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$, para algum $\theta \in [0, \pi]$ e $e_3 = e_1 \times e_2$ é polo de l .

Se T é uma translação na direção de uma reta l , existe um número real ϕ tal que a matriz de T em relação a $\{e_1, e_2, e_3\}$ é

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se T leva P em Q , então

$$Q = T(e_1) = (\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2$$

Logo, $\theta = \phi \pmod{2\pi}$, e T fica unicamente determinada. □

Teorema 22. *Sejam P , Q , P' e Q' pontos (não necessariamente distintos) de uma reta l . Suponha que $d(P, P') = d(Q, Q')$. Então, existe uma isometria T tal que $T(P) = Q$ e $T(P') = Q'$.*

Demonstração. Inicialmente, aplicando uma translação ao longo de l , podemos supor que $P = Q$. Então, P' e Q' são pontos de l equidistantes de P . Se $P' = Q'$, podemos tomar T , tal que T é a identidade.

Se $P' \neq Q'$, seja $T = R_m$, a reflexão que permuta P' e Q' . Então R_m deixa P fixado e leva P' em Q' . \square

Observação: conforme a construção, T pode ser a identidade, uma translação ou uma reflexão em relação a uma reta.

Teorema 23. *Dois segmentos são congruentes se, e somente se, eles tem o mesmos comprimentos.*

Demonstração. Sejam s_1 e s_2 segmentos menores congruentes. Se T é uma isometria que leva s_1 em s_2 , então, T leva as extremidades de s_1 nas extremidades de s_2 .

Como resultado, s_1 e $t(s_1) = s_2$ têm o mesmo comprimento.

Se dois segmentos maiores são congruentes, seus complementos também são congruentes. Como sabemos que os complementos têm comprimentos iguais, digamos que seja L , os segmentos maiores devem ter comprimentos iguais a $\pi - L$.

Reciprocamente, sejam s_1 e s_2 segmentos de comprimentos iguais. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que eles são segmentos menores.

Primeiro, aplicamos uma reflexão em relação a uma linha para mover s_1 a uma linha l , determinada por s_2 . Fazendo, agora, uma translação na direção de l para fazer um par de extremidades coincidirem.

Se o outro par de extremidades coincide, o resultado está provado. Caso contrário, estas extremidades são equidistantes à extremidade comum. Seja m uma linha perpendicular a l , passando pela extremidade comum. Temos que R_l permuta as outras extremidades. Logo, s_1 e s_2 são congruentes. \square

Apresentamos, agora, dois resultados que mostram que as mediatrizes dos lados de um triângulo e também suas bissetrizes são concorrentes em um único ponto.

Proposição 17. *As mediatrizes dos lados de um triângulo esférico são concorrentes.*

Demonstração. Tomemos o triângulo $\triangle ABC$. Inicialmente, note que as mediatrizes de AB e BC se intersectam pois elas são duas retas de \mathbf{S}^2 , de modo que elas não podem ser paralelas.

Assim, seja M o ponto de interseção entre as mediatrizes de AB e BC . Desta forma,

$$d(M, A) = d(M, B) \quad \text{e} \quad d(M, B) = d(M, C).$$

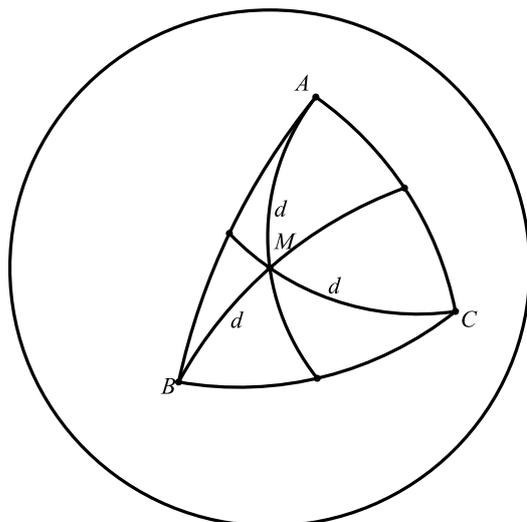


Figura 6.9: Ponto de intersecção das mediatrizes do triângulo ABC

Logo, $d(M, A) = d(M, C)$ e, portanto, M está contido na mediatriz de AC \square

Proposição 18. *Sejam A, B e C pontos não colineares de \mathbf{S}^2 . Sejam $p = \overleftrightarrow{CB}$, $q = \overleftrightarrow{AC}$ e $r = \overleftrightarrow{AB}$ as retas por eles determinadas. Sejam R_u e R_v as reflexões que permutam p com q e q com r , respectivamente. Então, existe uma reta w , concorrente com u e v , tal que R_w permuta p com r .*

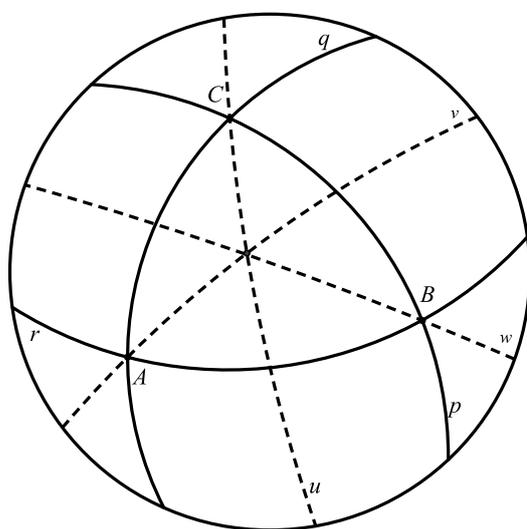


Figura 6.10: As retas u, v e w são concorrentes em um único ponto

Demonstração. Primeiramente, se u e v são duas retas de \mathbf{S}^2 , sabemos que elas se intersectam em dois pontos antipodais.

Deste modo, seja M um ponto de intersecção entre u e v . Seja l a reta perpendicular a q passando por M .

Pelo teorema das três reflexões, podemos escolher w de forma que

$$R_v \circ R_l \circ R_u = R_w$$

de modo que

$$R_w(p) = R_v \circ R_l \circ R_u(p) = R_v \circ R_l(q) = R_v(q) = r$$

como exigido. □

Corolário 7. *As retas contendo as bissetrizes dos três ângulos de um triângulo são concorrentes.*

6.3 Triângulos Retângulos

Daremos, nesta seção, uma versão na geometria esférica para o teorema de Pitágoras.

Proposição 19 (Teorema de Pitágoras). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo em \mathcal{S}^2 com lados de comprimentos $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ e $c = d(A, B)$. Se AC é perpendicular a AB , então*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

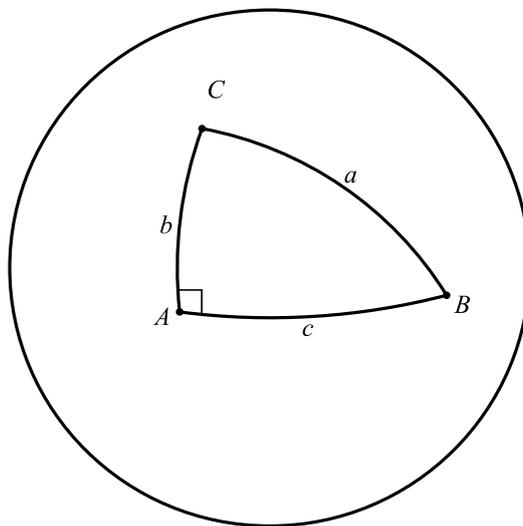


Figura 6.11: No triângulo ABC , os lados AB e AC formam um ângulo reto

Demonstração. Seja \vec{u} o polo de \overleftrightarrow{AB} . Então, $\{\vec{u}, A, \vec{u} \times A\}$ é uma base ortonormal. Com relação a esta base, podemos escrever

$$C = (\cos b)A + (\sin b)\vec{u} \quad \text{e} \quad B = (\cos c)A \pm (\sin c)(\vec{u} \times A)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle B, C \rangle &= \langle (\cos b)A + (\sin b)\vec{u}, (\cos c)A \pm (\sin c)(\vec{u} \times A) \rangle \\ &= \cos b \cdot \cos c \langle A, A \rangle \pm \cos b \cdot \sin c \langle A, \vec{u} \times A \rangle \\ &\quad + \sin b \cdot \cos c \langle \vec{u}, A \rangle \pm \sin b \cdot \sin c \langle \vec{u}, \vec{u} \times A \rangle \\ &= \cos b \cdot \cos c \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos a = \cos(\arccos \langle B, C \rangle) = \langle B, C \rangle = \cos b \cdot \cos c.$$

□

Observação: Pode-se provar este resultado facilmente através da lei dos cossenos, mas a demonstração anterior nos sugere que um resultado independe do outro.

Proposição 20. *Seja l uma reta. Seja X um ponto que não está em l e que não é polo de l . Seja m a reta perpendicular a l passando por X . Dos dois pontos onde l intersecta m , seja F o ponto mais próximo de X . Então, para todos os pontos $Y \in l$ e $Y \neq \pm F$ em l ,*

$$d(F, X) < d(X, Y) < d(X, -F).$$

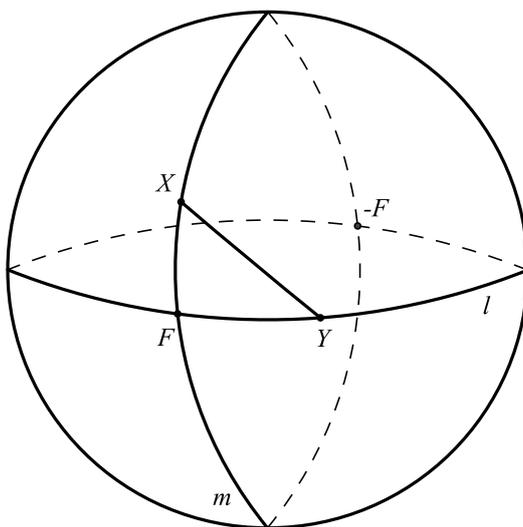


Figura 6.12: A reta m é perpendicular a l passando por X

Demonstração. Vamos aplicar o teorema de Pitágoras, com $X = C$, $F = A$ e $Y = B$. Note que $b < \frac{\pi}{2}$, de modo que $\cos a$ e $\cos c$ tem o mesmo sinal.

Se ambos são positivos, temos

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c < \cos b$$

e assim, $b < a < \pi - b$.

Se $\cos a = \cos c = 0$, então $b < a = \frac{\pi}{2} < \pi - b$.

Se $\cos a < 0$ e $\cos b < 0$, temos que

$$b < \frac{\pi}{2} < a \quad \text{e} \quad \cos(\pi - a) < \cos b \cdot \cos(\pi - c) < \cos b,$$

de modo que $\pi - a > b$ e, então

$$b < a < \pi - b.$$

□

Definição 34. F é chamado o *pé da perpendicular* de l a partir de X . O número $d(F, X)$ é escrito $d(X, l)$ e é chamado a *distância de X a l* .

6.4 Teoremas de Congruência para Triângulos

Vamos apresentar nesta seção três resultados que nos permitem dizer quando dois triângulos esféricos são congruentes. Na geometria esférica, a definição de congruência de triângulos é exatamente a mesma que damos na geometria euclidiana.

Teorema 24 (Caso LLL de Congruência). *Sejam $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$ triângulos tais que $d(P, Q) = d(P', Q')$, $d(P, R) = d(P', R')$ e $d(Q, R) = d(Q', R')$. Então, os dois triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam \hat{P} , \hat{Q} e \hat{R} as medidas dos ângulos do triângulo $\triangle PQR$ e \hat{P}' , \hat{Q}' e \hat{R}' os ângulos do triângulo $\triangle P'Q'R'$, em radianos. Sejam

$$a = d(Q, R) = d(Q', R')$$

$$b = d(P, R) = d(P', R')$$

$$c = d(P, Q) = d(P', Q')$$

Pela lei dos cossenos para ângulos, temos

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \cos \hat{P}' \implies \hat{P} = \hat{P}'$$

$$\cos \hat{Q} = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} = \cos \hat{Q}' \implies \hat{Q} = \hat{Q}'$$

$$\cos \hat{R} = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \cos \hat{R}' \implies \hat{R} = \hat{R}'$$

Portanto, $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R'$.

□

Teorema 25 (Caso LAL de Congruência para Triângulos). *Sejam $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$ triângulos tais que $d(P, Q) = d(P', Q')$, $d(Q, R) = d(Q', R')$ e $\hat{Q} = \hat{Q}'$, onde \hat{Q} e \hat{Q}' são as medidas dos ângulos $\angle PQR$ e $\angle P'Q'R'$, respectivamente, em radianos. Então, os dois triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \hat{Q} = \hat{Q}'$, $a = d(P, Q)$, $a' = d(P', Q')$, $b = d(P, Q) = d(P', Q')$ e $c = d(Q, R) = d(Q', R')$. Pela lei dos cossenos,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \implies \cos a = \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a' - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \implies \cos a' = \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$$

Logo, $\cos a = \cos a'$ e, portanto $a = a'$. Deste modo, pelo caso LLL de congruência, temos que $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R'$. \square

Teorema 26 (Caso AAA de Congruência para Triângulos). *Sejam $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$ triângulos tais que $\hat{P} = \hat{P}'$, $\hat{Q} = \hat{Q}'$ e $\hat{R} = \hat{R}'$, onde \hat{P} , \hat{Q} e \hat{R} , \hat{P}' , \hat{Q}' e \hat{R}' são as medidas dos ângulos dos triângulos $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$, em radianos. Então, os dois triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam $a = d(Q, R)$, $b = d(P, R)$, $c = d(P, Q)$, $a' = d(Q', R')$, $b' = d(P', R')$ e $c' = d(P', Q')$. Pela lei dos cossenos para lados, temos

$$\cos a = \frac{\cos \hat{P} - \cos \hat{Q} \cdot \cos \hat{R}}{\sin \hat{Q} \cdot \sin \hat{R}} = \frac{\cos \hat{P}' - \cos \hat{Q}' \cdot \cos \hat{R}'}{\sin \hat{Q}' \cdot \sin \hat{R}'} = \cos a'$$

$$\cos b = \frac{\cos \hat{Q} - \cos \hat{P} \cdot \cos \hat{R}}{\sin \hat{P} \cdot \sin \hat{R}} = \frac{\cos \hat{Q}' - \cos \hat{P}' \cdot \cos \hat{R}'}{\sin \hat{P}' \cdot \sin \hat{R}'} = \cos b'$$

$$\cos c = \frac{\cos \hat{R} - \cos \hat{P} \cdot \cos \hat{Q}}{\sin \hat{P} \cdot \sin \hat{Q}} = \frac{\cos \hat{R}' - \cos \hat{P}' \cdot \cos \hat{Q}'}{\sin \hat{P}' \cdot \sin \hat{Q}'} = \cos c'$$

Logo, $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Portanto, pelo caso LLL de congruência, temos que $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R'$. \square

Corolário 8. *Dois ângulos são congruentes se eles têm a mesma medida em radianos.*

6.5 Área de Triângulos Esféricos

Para esta seção, devemos nos lembrar que a área da superfície de uma esfera de raio R é calculada por $4\pi R^2$.

Assim, a área da superfície de uma cunha cujo ângulo tem medida α é dado por $2\alpha R^2$. Assim, se a esfera considerada é \mathbf{S}^2 , a área de uma cunha é igual a 2α . Com isso, podemos dar o seguinte resultado.

Teorema 27. Área de um Triângulo Esférico A área A de um triângulo esférico $\triangle PQR$, cujos ângulos internos medem α , β e γ , de \mathcal{S}^2 é

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Demonstração. Inicialmente, vejamos que um ângulo de medida α determina duas cunhas esféricas de mesma área. Deste modo, a união das das cunhas determinadas pelos três ângulos é igual uma semiesfera.

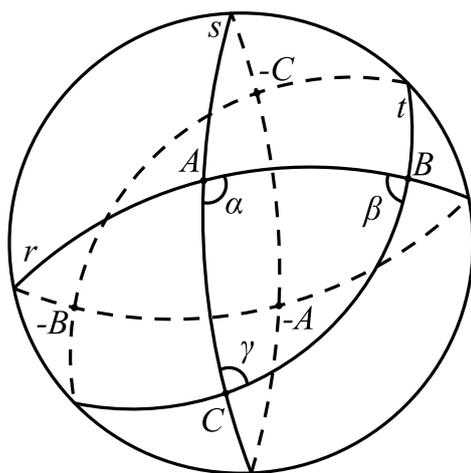


Figura 6.13: Triângulo esférico cujas medidas dos ângulos são α , β e γ .

Observação: O professor pode usar uma bola de isopor e mostrar este fato à seus alunos de forma mais envolvente.

Assim, se A é a área do triângulo e A_α é a área da região complementar ao triângulo na cunha cujo ângulo mede α , é

$$A + A_\alpha = 2\alpha \Rightarrow A_\alpha = 2\alpha - A.$$

De modo análogo, concluímos que $A_\beta = 2\beta - A$ e $A_\gamma = 2\gamma - A$. Por outro lado,

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi,$$

onde podemos fazer as substituições sugeridas acima para obter

$$A + (2\alpha - A) + (2\beta - A) + (2\gamma - A) = 2\pi$$

de onde concluímos que

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

□

Dado um triângulo esférico, sua área é sempre maior que zero. Assim, da relação acima, podemos concluir

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi,$$

de onde podemos obter o corolário a seguir.

Corolário 9. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior à π .*

Vimos anteriormente, que nesta geometria é possível construir um triângulo retângulo. Com a afirmação acima poderíamos nos perguntar: é possível construir um triângulo como mais que um ângulo reto? A resposta para esta pergunta é afirmativa.

Primeiramente, podemos nos lembrar que duas retas r e s de \mathbf{S}^2 que são perpendiculares a uma reta l são concorrentes nos polos de l . Sendo P , Q e R os pontos de interseção entre r e s , r e l , s e l , respectivamente, temos que os ângulos $\angle PQR$ e $\angle PRQ$ são retos. Logo o triângulo PQR tem dois ângulos retos.

Pode acontecer também que as retas r e s acima sejam perpendiculares entre si. Desta forma, o ângulo $\angle QPR$ também é reto, de modo que os três ângulos do triângulo PQR são retos.

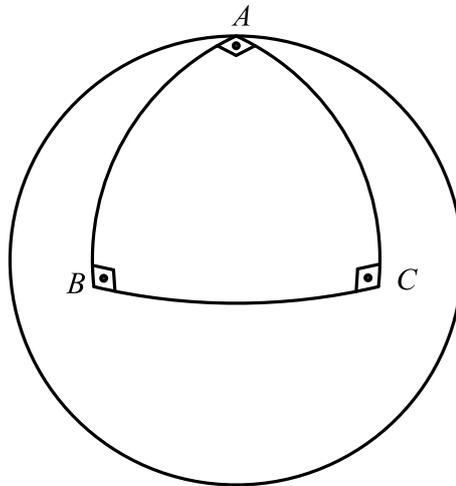


Figura 6.14: Triângulo com os três ângulos retos.

Exemplo 24. Vamos calcular a área do triângulo esférico que possui três ângulos retos. Seja A a área deste retângulo, temos:

$$A = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \text{ u.a.}$$

Assim, se o raio da esfera for igual a 1 metro, $A = \frac{\pi}{2} \text{ m}^2$.

Capítulo 7

A Geometria Esférica na Sala de Aula

Neste último capítulo, apresentamos duas possibilidades de trabalho com a geometria esférica numa sala de aula do ensino médio. De forma especial, estas atividades foram pensadas para aplicação em turmas do 3º ano do ensino médio. Essa opção decorre de alguns fatos.

1. No 3º ano do ensino médio se inicia o estudo analítico da geometria plana. Desta forma, estes alunos estão mais aptos a trabalhar o sistema de coordenadas no espaço euclidiano;
2. A própria maturidade do aluno do 3º ano do ensino médio possibilita um trabalho voltado a uma geometria que difere da geometria estudada em todo o ensino básico.

A primeira parte que será feita é uma aplicação da geometria esférica no cálculo de distância entre cidades no nosso planeta, que para nossas aplicações pode ser aproximada a uma esfera perfeita. O nosso planeta não é, de fato, uma esfera perfeita (o próprio relevo já a difere de uma esfera), ela tem a forma de um *esferóide oblato*, que é uma *elipse rotacionada em torno de seu eixo menor*, onde o diâmetro do equador é 43 km maior que o diâmetro entre os polos norte e sul. Se aproximarmos o diâmetro médio da Terra para 12800km , a diferença apresentada anteriormente representa aproximadamente 0,33

A segunda parte será apresentar algumas semelhanças e diferenças entre a geometria euclidiana plana e a geometria esférica, mostrando algumas particularidades da segunda que decorrem de suas propriedades básicas.

7.1 Distância Entre Cidades e Aplicações

Nesta seção iremos propor alguns problemas relativos a distância entre pontos na superfície terrestre, considerando-a uma esfera.

Para resolver problemas relativos a pontos na superfície esférica, devemos entender como localizar estes pontos através das *coordenadas geográficas*.

No caso da superfície terrestre, as coordenadas geográficas de um ponto P são os ângulos a e b , em graus, que a reta que contém o ponto P e o centro da Terra (que pode ser entendido como a origem de um sistema de coordenadas ortogonais) faz com a linha do Equador e o meridiano de Greenwich, respectivamente. Estas coordenadas são chamadas de *latitude* e *longitude*

Às latitudes, são associadas as letras N e S para identificar a posição do ponto em relação a linha do Equador. Assim, se um ponto está acima da linha do equador, será associado a letra N, se um ponto está abaixo da linha do equador, será associado a letra S. Nós associaremos estas letras a positividade dos números apresentados, de modo que a letra N será associada a valores positivos e a letra S a valores negativos.

De forma análoga, as letras E e W são associadas as longitudes, a fim de identificar a posição de um ponto em relação ao meridiano de Greenwich, de modo que pontos a leste do meridiano são associados a letra E e pontos a oeste do meridiano são associados a letra W. Além disso, associamos estas letras também a positividade dos números apresentados, de forma que a letra E será associada a valores positivos e a letra W será associada a valores negativos.

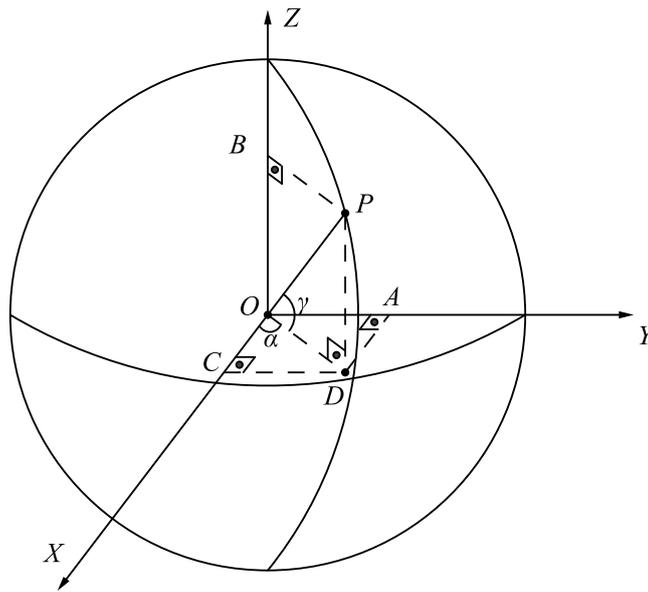
Assim, um ponto de latitude 25°N e longitude 54°W possui coordenadas representadas pelo par $(25, -54)$. Já um ponto de latitude 53°S e longitude 93°L possui coordenadas representada pelo par $(-53, 93)$. Desta forma, se α e γ representam a latitude e a longitude, respectivamente, de um ponto P da superfície terrestre, temos que $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ e $-180^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$.

Além disso, é fácil calcular a distância entre dois pontos A e B , cujas coordenadas geográficas são (α_1, γ) e (α_2, γ) , respectivamente da superfície terrestre que têm mesma longitude. Para isso, basta calcular o módulo da diferença entre as latitudes e fazer uma regra de três.

$$\begin{array}{rcl} 2\pi R & - & 360^\circ \\ d(A, B) & - & |\alpha_1 - \alpha_2| \end{array}$$

Se os pontos A e B estão sobre a linha do Equador, o cálculo é feito de maneira análoga. Porém, se tais pontos não satisfazem estas duas condições, será necessário utilizarmos da geometria esférica e a forma geral de calcularmos a distância entre dois pontos nesta geometria.

Para tanto, inicialmente devemos saber como podemos determinar as coordenadas de um ponto P de \mathbf{S}^2 em um sistema ortogonal, conhecendo-se suas coordenadas geográficas.

Figura 7.1: Coordenadas Geográficas em \mathbf{S}^2

Observando a figura anterior, se γ é a latitude de P e α é sua longitude, para determinar as coordenadas de P no sistema ortogonal $OXYZ$, devemos observar que:

$$\begin{aligned} OD &= \cos \gamma \\ x_P &= OD \cdot \cos \alpha = \cos \gamma \cos \alpha \\ y_P &= OD \cdot \sin \alpha = \cos \gamma \sin \alpha \\ z_P &= \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma \end{aligned}$$

Desta forma, um ponto $P \in S^2$ pode ser dado por

$$P = (\cos \gamma \cos \alpha, \cos \gamma \sin \alpha, \sin \gamma),$$

onde $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ e $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ e, por fim, podemos resolver problemas de distância entre dois pontos da Terra utilizando a distância de \mathbf{S}^2 . Para fazer isso, procedemos da seguinte forma:

1. Determinar as coordenadas dos pontos de \mathbf{S}^2 num sistema de coordenadas ortogonais;
2. Fazer o cálculo da distância entre os dois pontos;
3. Multiplicar o resultado obtido pelo raio médio da Terra.

Este último passo se justifica pois duas circunferências são sempre semelhantes, de modo que a razão entre dois arcos que determinam o mesmo ângulo central é igual a razão entre os raios.

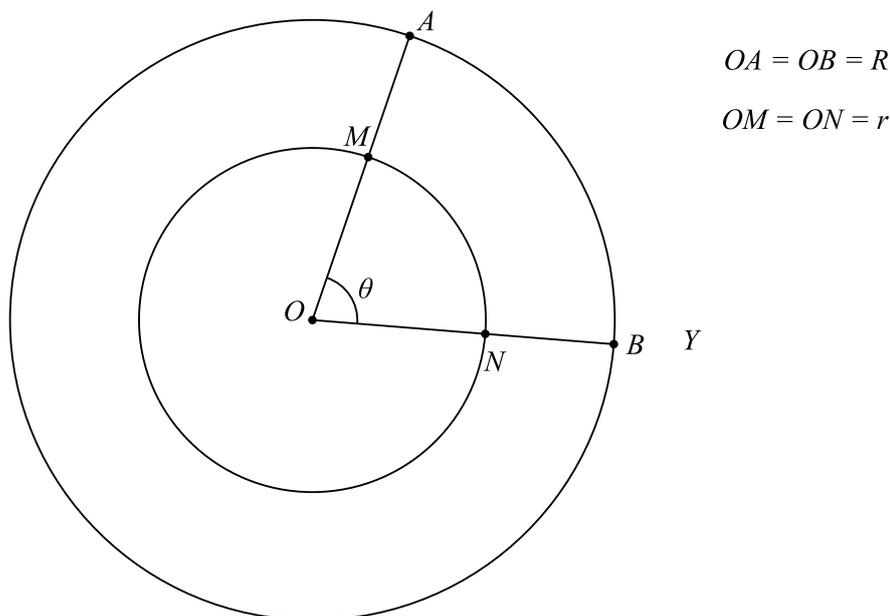


Figura 7.2: Arcos de circunferência que determinam o mesmo ângulo central

Como o raio r de qualquer grande círculo de \mathbf{S}^2 é igual a 1,

$$\frac{AB}{MN} = \frac{R}{r} = R \iff AB = R \cdot MN$$

Feitas estas considerações, podemos propor algumas atividades a serem feitas na sala de aula.

Atividade 1: Determinar a distância entre duas cidades.

As cidade de São Paulo está localizado na posição de latitude $23^{\circ}32'52''\text{S}$ e longitude $46^{\circ}38'9''\text{W}$ ([http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagename=So_Paulo_\(cidade\)¶ms=23.32_52_S_46.38_09_W](http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagename=So_Paulo_(cidade)¶ms=23.32_52_S_46.38_09_W)). A cidade de Paris está localizada na posição de latitude $48^{\circ}58'\text{N}$ e longitude $2^{\circ}19'5''\text{E}$ (http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagename=Paris¶ms=48.52_00_N_2.19_58_E). Supondo que o raio da Terra seja de 6400 quilômetros, calcular a distância entre estas duas cidades.

Resolução

Note que as coordenadas geográficas da cidade de São Paulo podem ser expressas pelo par $(-23^{\circ}32'52'', -46^{\circ}38'9'')$ e as coordenadas da cidade de Paris por $(48^{\circ}58', 2^{\circ}19'58'')$. Com o auxílio de uma calculadora científica, o professor pode converter as coordenadas de São Paulo e Paris para radianos com valores aproximados à $(-0,41, -0,81)$ e $(0,85, 0,04)$, respectivamente.

Caso ache didaticamente oportuno, o professor pode utilizar a expressão

$$\alpha(\text{radianos}) = \frac{\alpha(\text{graus}) \cdot \pi}{180^\circ}$$

para fazer esta conversão, onde $\alpha(\text{radianos})$ é a medida de um ângulo em radianos e $\alpha(\text{graus})$ é a medida do mesmo ângulo em graus.

Feito isto, podemos passar das coordenadas geográficas para as coordenadas ortogonais. Assim, chamando de S o ponto que representa a cidade de São Paulo e P o ponto que representa a cidade de Paris em \mathbf{S}^2 , num sistema de coordenadas ortogonais, as coordenadas de S e P são, aproximadamente:

$$\begin{aligned} S &= (\cos(-0,41) \cos(-0,81), \cos(-0,41) \sin(-0,81), \sin(-0,41)) = \\ &\quad (0,63, -0,66, -0,40) \\ P &= (\cos(0,85) \cos(0,04), \cos(0,85) \sin(0,04), \sin(0,85)) = (0,66, 0,03, 0,75) \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a distância entre os pontos S e P em \mathbf{S}^2 . Logo:

$$\begin{aligned} d(S, P) &= \arccos \langle S, P \rangle \\ &= \arccos (0,63 \cdot 0,66 + (-0,66) \cdot 0,03 + (-0,39) \cdot 0,04) \\ &= \arccos 0,10 = 1,47 \end{aligned}$$

Multiplicando este valor pelo raio médio da Terra, obtemos:

$$1,47 \cdot 6400 = 9408 \text{ km.}$$

Com a ajuda de um GPS, ou utilizando-se o *Google Earth*, podemos verificar que a distância entre São Paulo e Paris é aproximadamente 9378 km, de modo que com os cálculos feitos acima, onde usamos diversas aproximações, obtivemos um valor que difere da medida real da ordem de 0,3%, o que nos dá uma boa estimativa.

Atividade 2: Tempo estimado de uma viagem.

A cidade do Rio de Janeiro está localizada no ponto da Terra de latitude $22^\circ 54' 10''$ S e longitude $43^\circ 12' 28''$ W ([http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagenome=Rio_de_Janeiro_\(cidade\)¶ms=22_54_10_S_43_12_28_W](http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagenome=Rio_de_Janeiro_(cidade)¶ms=22_54_10_S_43_12_28_W)). Já a cidade de Madrid está localizada à latitude $40^\circ 23'$ N e longitude $3^\circ 40'$ W (http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagenome=Madrid¶ms=40_23_0_N_3_40_0_W). Suponha que o raio da Terra seja de 6400 quilômetros. Se um avião comercial faz esta viagem com uma velocidade média de 800 km/h, qual será o tempo gasto numa viagem entre estas duas cidades?

Resolução

A resolução desta atividade segue os mesmos passos da atividade anterior, onde nós calculamos a distância aproximada entre as cidades de São Paulo e Paris. Porém, após

calcular a distância entre as cidades do Rio de Janeiro e Madrid, devemos lembrar que o tempo gasto em uma viagem pode ser calculado por

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade média}}.$$

Feito o comentário acima, temos que as coordenadas geográficas das cidades do Rio de Janeiro e de Madrid são, em graus, $(-22^{\circ}54'10'', -43^{\circ}12'28'')$ e $(40^{\circ}23', -3^{\circ}40')$, respectivamente. Em radianos, estas coordenadas são expressas aproximadamente por $(-0,40, -0,75)$ e $(0,70, -0,06)$, respectivamente.

Se R e M são pontos de \mathbf{S}^2 que representam as cidades do Rio de Janeiro e Madrid, respectivamente, suas coordenadas num sistema de eixos ortogonais são, aproximadamente:

$$\begin{aligned} R &= (\cos(-0,40) \cos(-0,75), \cos(-0,40) \sin(-0,75), \sin(-0,40)) = \\ &\quad (0,67, -0,63, -0,39) \\ M &= (\cos(0,70) \cos(-0,06), \cos(0,70) \sin(-0,06), \sin(0,70)) = (0,76, -0,05, 0,64) \end{aligned}$$

Calculando a distância entre M e R , temos:

$$\begin{aligned} d(M, R) &= \arccos \langle M, R \rangle \\ &= \arccos (0,67 \cdot 0,76 + (-0,63) \cdot (-0,05) + (-0,39) \cdot 0,64) \\ &= \arccos 0,29 = 1,28 \end{aligned}$$

Assim, a distância entre Rio de Janeiro e Madrid é

$$1,28 \cdot 6400 = 8192 \text{ km.}$$

Por fim, o tempo da viagem é, aproximadamente:

$$\text{tempo} = \frac{8192}{800} = 10,24 = 10 \text{ horas e } 14 \text{ minutos}$$

Atividade 3: Autonomia de Vôo.

Uma empresa aérea deseja fazer vôos diários entre as cidades de Nova York e Pequim, com as respectivas latitudes e longitudes: $40^{\circ}43'N$, $74^{\circ}W$ (http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagenome=Nova_Iorque¶ms=40_43_0_N_74_0_0_W) e $39^{\circ}54'20''N$, $116^{\circ}23'29''E$ (http://toolserver.org/~geohack/geohack.php?language=pt&pagenome=Pequim¶ms=39_54_20_N_116_23_29_E). Suponha que o raio da Terra seja de 6400 quilômetros. A empresa deseja utilizar um avião com autonomia de vôo de 10500 quilômetros, ou seja, ele pode voar por esta distância sem a necessidade de reabastecer. Esta empresa conseguirá realizar tais vôos da maneira como deseja?

Resolução

Vejamos que as coordenadas geográficas de Nova York e Pequim, em graus, são $(40^\circ 43', -74^\circ)$ e $(39^\circ 54' 20'', 116^\circ 23' 29'')$, respectivamente. Em radianos, elas são aproximadamente $(0, 71, -1, 29)$ e $(0, 70, 2, 03)$, respectivamente.

Sejam N e P os pontos de \mathbf{S}^2 que possuem as mesmas coordenadas geográficas de Nova York e Pequim. As coordenadas ortogonais de N e P são, aproximadamente:

$$\begin{aligned} N &= (\cos(0, 71) \cos(-1, 29), \cos(0, 71) \sin(-1, 29), \sin(0, 71)) = (0, 21, -0, 73, 0, 65) \\ P &= (\cos(0, 70) \cos(2, 03), \cos(0, 70) \sin(2, 03), \sin(0, 70)) = (-0, 34, 0, 69, 0, 64) \end{aligned}$$

Desta forma, a distância entre N e P é aproximadamente:

$$\begin{aligned} d(N, P) &= \arccos \langle N, P \rangle \\ &= \arccos(0, 21 \cdot (-0, 34) + (-0, 73) \cdot 0, 69 + 0, 65 \cdot 0, 64) \\ &= \arccos -0, 16 = 1, 73. \end{aligned}$$

Assim, a distância entre Nova York e Pequim é aproximadamente

$$1, 73 \cdot 6400 = 11072 \text{ km.}$$

Veja que não é possível realizar vôos entre estas duas cidades, considerando a aeronave que a empresa deseja utilizar.

7.2 Geometria Esférica \times Geometria Euclidiana Plana

Nesta seção, vamos apresentar algumas semelhanças e destacar algumas diferenças entre a geometria euclidiana plana que se estuda no ensino básico e a geometria esférica.

As semelhanças e diferenças entre estas duas geometrias já foram apresentadas durante os capítulos 4, 5 e 6 deste trabalho, mas convém retomá-los neste momento, pois acreditamos que parte do trabalho que pode ser feito na educação básica com relação a geometrias não euclidianas é mostrar as principais diferenças entre estas e a geometria euclidiana.

Vejamos primeiro algumas diferenças entre as duas geometrias.

1. *Retas determinadas por dois pontos:* Enquanto na geometria euclidiana por dois pontos distintos passa uma única reta (fato conhecido como *axioma de determinação da reta*), na geometria esférica isso nem sempre é possível. Veja a figura ??

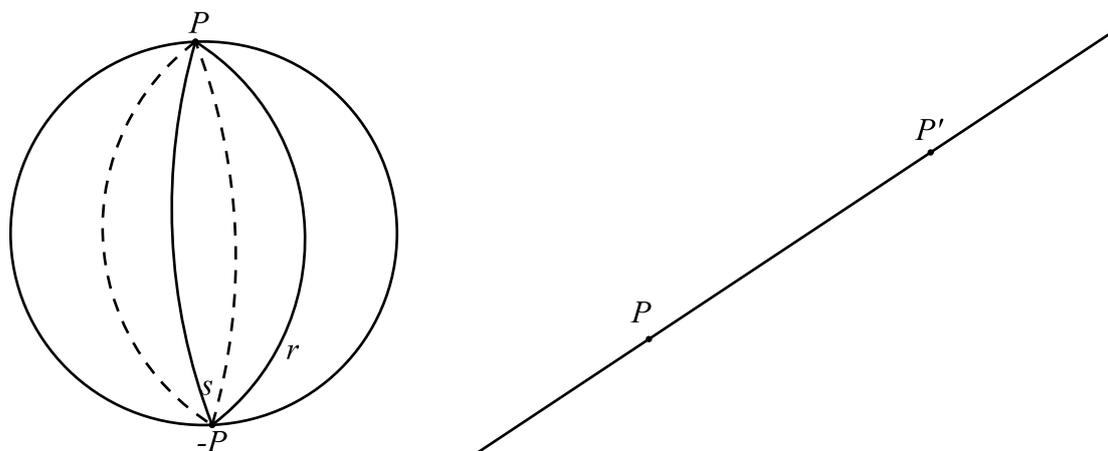


Figura 7.3: Duas retas determinadas por dois pontos distintos.

Nela, vemos que pelos pontos antipodais P e $-P$ passam mais do que uma reta. Poderíamos ainda determinar outras retas que passam por estes pontos. Assim, por dois pontos antipodais passam infinitas retas. Assim, não há um análogo do axioma de determinação para a geometria esférica.

Por outro lado, se os dois pontos não forem antipodais, o **teorema 5** garante que tais pontos determinam uma única reta na geometria esférica.

2. *Retas Paralelas*: Esta é a principal diferença entre a geometria esférica e a geometria euclidiana. A impossibilidade de existirem retas paralelas na geometria esférica ocorre pois, como foi provado no **teorema 6** duas retas distintas de \mathbf{S}^2 têm exatamente dois pontos de interseção.

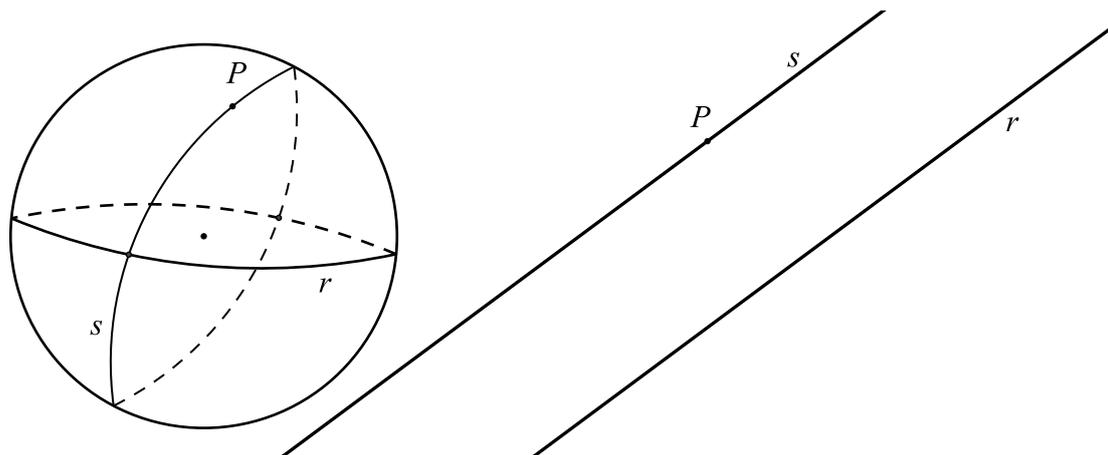


Figura 7.4: Na geometria esférica não é possível traçar a paralela a uma reta por um ponto fora dela.

item *Segmentos de Reta*: Vimos também que dois pontos distintos não antipodais de \mathbf{S}^2 determinam dois segmentos de reta. Esse foi, inclusive, um fato que dificultou a definição de segmento de reta na geometria esférica, dado que na geometria euclidiana essa definição é dada a partir da relação de estar entre, que não é válida na geometria esférica.

3. Soma dos Ângulos Internos: Uma consequência da inexistência de retas paralelas na geometria esférica é a relação entre um triângulo e a soma de seus ângulos internos. Enquanto na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo resultam no mesmo valor, igual a π , a geometria esférica nos fornece um valor que varia conforme o triângulo, mas que sempre é superior a π .

Uma importante percepção desta diferença está no fato de que na geometria esférica podemos construir um triângulo até com três ângulos retos. Para isto, basta tomar três pontos de \mathbf{S}^2 tais que cada um é um polo do lado oposto a ele. Por outro lado, pela lei dos cossenos da trigonometria esférica, os três lados deste triângulo são congruentes. Logo, tal triângulo é um triângulo equilátero.

Assim, também decorre do fato da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico não ser constante que cada ângulo do triângulo equilátero esférico varia conforme a medida de seu lado. Deste modo, não é possível, na geometria esférica, concluir quais são as medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero sem que saibamos qual é a medida de seus lados.

Uma característica das figuras geométricas na superfície esférica é que elas não podem ser aumentadas (ou diminuídas) mantendo as mesmas características, ou seja, não é possível definir a semelhança entre duas figuras na geometria esférica.

Por outro lado, não podemos deixar de destacar as semelhanças entre as duas geometrias.

1. Teoremas de Congruência: Vimos que os mesmos critérios de congruência de triângulos existentes na geometria euclidiana também são válidos na geometria esférica.
2. Bissetrizes e Mediatrizes: Assim como na geometria euclidiana, nós definimos a bissetriz de um ângulo e a mediatriz de um segmento e de forma muito oportuna, mostramos que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo esférico são concorrentes em um único ponto. O mesmo ocorre para as mediatrizes dos lados de um triângulo esférico.

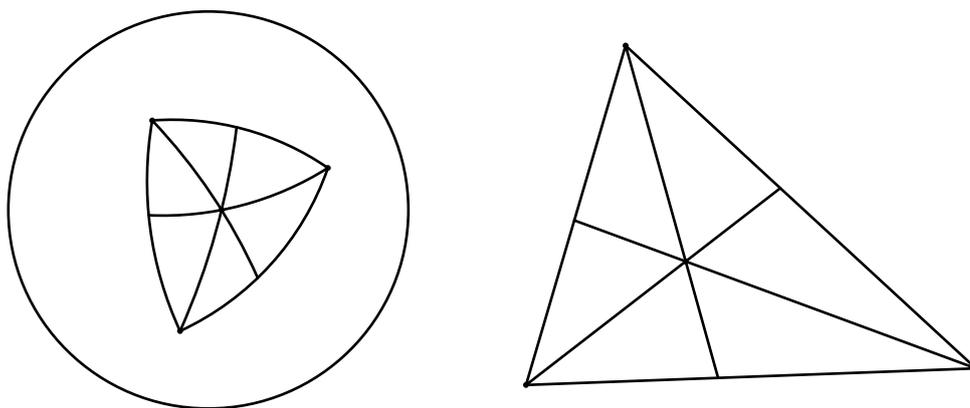


Figura 7.5: As bissetrizes de triângulos esféricos, assim como os euclidianos, são concorrentes.

3. Triângulos Retângulos: De grande importância na geometria euclidiana, pois nos permite calcular distâncias entre dois pontos, também construímos um triângulo retângulo esférico e apresentamos sua versão para o teorema de Pitágoras, com o mesmo significado.

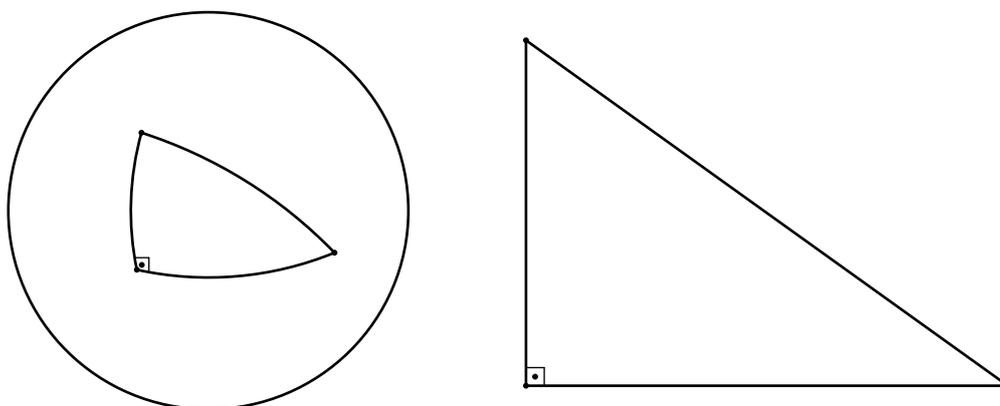


Figura 7.6: Triângulos retângulos.

Além disso, vimos que o triângulo retângulo nos auxilia determinar uma reta perpendicular a outra passando por um ponto dado.

4. Trigonometria Esférica: De grande importância também é o fato da trigonometria esférica também expressar relações entre lados e medidas dos ângulos de triângulos esféricos.

Para terminar esta seção, faremos um quadro comparativo entre as duas geometrias e suas características.

PROPRIEDADES	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA ESFÉRICA
Dois pontos distintos determinam uma única reta?	Sim	Não
Pontos de intersecção entre duas retas distintas:	1	2
Existem retas paralelas?	Sim	Não
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo:	Igual a $180^\circ = \pi \text{ rad}$	Superior a $180^\circ = \pi \text{ rad}$
Há como determinar se dois triângulos são congruentes?	Sim	Sim
Existem figuras semelhantes?	Sim	Não
As mediatrizes de um triângulo se intersectam?	Sim	Sim
Existem triângulos com mais de um ângulo reto?	Não	Sim

Estes são alguns dos fatos que podem ser mencionados para alunos do ensino básico para que seja despertado neles um desejo de melhor conhecer esta geometria que esta à nossa volta, porém praticamente não é explorada nos currículos do ensino básico.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMES, Márcio Rostirolla. *Geometria Esférica*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.
- [2] ALVES, Sérgio. *Geometria do Globo Terrestre*. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>. Acesso em: 05 de Julho de 2013.
- [3] ARANA, José Milton. *Trigonometria Esférica: Notas de Aula*. Disponível em: <http://www4.fct.unesp.br/docentes/cartto/arana/TrigEsf.pdf>. Acesso em: 27 de Fevereiro de 2013.
- [4] BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*, 2ª edição. Person Education. São Paulo, 2003.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 2ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.
- [6] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. *Um Curso de Álgebra Linear*, 2ª edição. EDUSP. São Paulo, 2005.
- [7] CRUZ, Donizete G. da; SANTOS, Carlos H. dos. *Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas - Hipérbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf>. Acesso em: 21 de Janeiro de 2013.
- [8] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*, 7ª edição, volume 9. Atual. São Paulo, 1993.
- [9] DOMINGUES, Hygino H.; CALIOLLI, Carlos A.; COSTA, Roberto C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, 3ª edição. Atual. São Paulo, 1982.
- [10] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP. Campinas, 2004.
- [11] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*, 7ª edição, volume 3. Atual. São Paulo, 1993.

- [12] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*, 4ª edição, volume 7. Atual. São Paulo, 1993.
- [13] PATAKI, Irene. *Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.
- [14] RYAN, Patrick J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: an analytic approach*. Cambridge University Press. New York, 1986.
- [15] PROFMAT. Unidade 13 - Coordenadas e Vetores no Espaço.
- [16] PROFMAT. Unidade 14 - Produto Interno e Produto Vetorial no Espaço.
- [17] THOMAZ, Mara Lucia; FRANCO, Valdeni Soliani. *Geometria Não Euclidiana/Geometria Esférica*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>. Acesso em: 07 de Novembro de 2012.