Os Números Reais e as Expansões Decimais – Fundamentação Teórica

Darcio Antônio Weinfurter – darcio@unerj.br

Curitiba – PR, Brasil

30 de março de 2015

Resumo

Neste artigo iremos abordar o conjunto de números reais, mais precisamente classificá-los em dois subconjuntos: racionais e irracionais. Buscamos ampliar o conhecimento dos leitores em relação a esses conjuntos. Definiremos os números racionais, em sua forma decimal, mostrando a sua padronização quanto as casas decimais. Definiremos os números irracionais onde não há uma generalização quanto à padronização.

Palavras-chave: Números Reais; Racionais; Irracionais; Decimais. Expansões decimais

1. Introdução

Este trabalho busca ampliar o conhecimento dos professores em relação aos conteúdos dos conjuntos dos racionais e dos irracionais, proporcionando uma nova perspectiva sobre sua construção conceitual, pois a falta de esclarecimento destes conteúdos provoca no aluno respostas equivocadas e incompreensão desse assunto.

A metodologia utilizada aqui tem como alicerce a pesquisa teórica, onde o sólido embasamento teórico nos leva ao tema proposto.

Na seção 2 apresentamos o conjunto dos reais, mostrando a necessidade de se desenvolver outros números quando só os naturais eram conhecidos, são também apresentados axiomas, propriedades e alguns resultados importantes do conjunto dos reais. Por fim, conclui-se o presente texto apresentando as considerações finais sobre o trabalho proposto.

2. Os números Reais

Segundo (Ávila) [1], Leopold Kronecker dizia que “Deus nos deu os números naturais o resto é obra do homem”. O que ele queria dizer é que os números naturais devem ser tomados como ponto de partida para a construção de outros conjuntos. De fato, veremos a seguir que os números naturais dão início a construção de ambos, mas a necessidade de se realizar contagens mais precisas deu origem aos números racionais e posteriormente aos irracionais.

Número real é todo número que é racional ou irracional. Os números naturais e os números inteiros são casos particulares de números racionais, de forma que quando dizemos que um número é racional, fica aberta a possibilidade de ele ser um número inteiro (positivo ou negativo) ou simplesmente um número natural.

A totalidade dos números racionais, juntamente com os números irracionais é o chamado conjunto dos números reais.

2.1 Um pouco de história

Pode-se imaginar que a ideia de número inteiro positivo tenha surgido num estágio primário da civilização quando houve a necessidade de realizar contagens. O conceito de número e o processo de contagem se desenvolveram antes dos primeiros registros históricos. Há evidências arqueológicas de que o homem já era capaz de contar há uns 50.000 anos. Desde que a humanidade começou a fazer a contagem de objetos e também a negociar coisas, foi preciso escrever os números de modo mais eficiente. É provável que o modo mais antigo e simples de se registrar a contagem utilizasse o princípio da correspondência biunívoca, fazendo um risco para cada objeto contado, ou simplesmente dobrando-se um dedo para cada objeto ou ainda fazendo-se nós numa corda. À medida que a civilização avançava, várias culturas foram aperfeiçoando esse método. É bem provável que, mais tarde, tenha-se desenvolvido um arranjo de sons vocais pra registrar verbalmente o número de objetos e mais tarde ainda, tenha-se aprimorado a escrita, criando-se novos símbolos e assim facilitando a representação de quantidades cada vez maiores. Encontramos respaldo desse desenvolvimento hipotético em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época, em concordância com (EVES) [3].

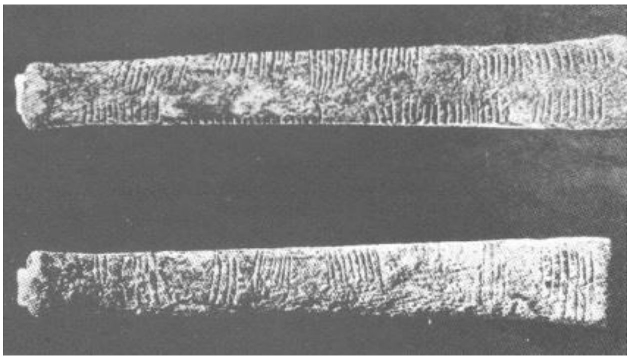

Figura 1: Osso Ishango, encontrado às margens do Lago Edward, no Zaire, com mais de 8.000 anos. As duas vistas mostra números preservados por meio de entalhes no osso.

Nosso modo atual de escrever números é chamado de indo-arábico. Esse modo foi inventado na Índia em algum tempo antes de 600 d.c, propagando-se para a Arábia durante a expansão do Irã sobre a Índia no século VII e levado aos europeus pelos árabes por volta de 976 d.c. O número dez foi escolhido como base para este sistema e ainda não se sabe ao certo o motivo, mas, acredita-se em uma conjectura que é mais biológica do que lógica, sendo a contagem nos dedos apontada pela maioria dos pesquisadores como a causa dessa escolha. Outro fato que foi observado é a semelhança da palavra que usamos para os numerais básicos (digit, em inglês) com *digitus* que é a palavra latina para dedo.

Embora as frações façam parte da matemática há mais de quatro mil anos, houve um desenvolvimento recente quanto ao que pensamos e escrevemos sobre elas. Em épocas anteriores era necessário considerar partes de um objeto e para realizar a contagem, muitas vezes, os objetos eram quebrados, literalmente, em pedaços menores para depois serem contados. O sistema de pesos e medidas evoluiu considerando unidades básicas de medidas cada vez menores podendo dar maior precisão quando se desejava. Ao utilizar unidades cada vez menores, em tempos modernos, é como contar onças em lugar de libras, polegadas em lugar de pés, centavos em vez de dólares, etc. Quando observamos o conceito de fração de épocas anteriores, percebemos que este estava limitado principalmente a partes, o que nós hoje chamaríamos de frações unitárias, ou frações com numerador 1. Essa limitação tornou fácil a escrita das frações (BERLINGOFF E GOUVÊA) [2].

Fatos de natureza geométrica e aritmética foram motivos para a criação dos números irracionais. O problema da medida da diagonal do quadrado quando a comparamos com o seu lado é um fato de natureza geométrica que abrange outro de natureza aritmética: A impossibilidade de encontrar números racionais para raízes quadradas, como por exemplo, a raiz quadrada de dois. Estes problemas já eram conhecidos da Escola Pitagórica (séc. V a.c). Um aprofundamento da teoria dos números racionais, através da geometria, foi feito pelos gregos, por exemplo nos "Elementos de Euclides", mas no campo do conceito de número não ocorreu avanço. Os gregos formavam figuras geométricas com um número finito de pontos, sendo estes concebidos como minúsculos corpúsculos, as "mónadas", todos iguais entre si; Ao medir um comprimento de *n* mónadas com outro de *m*, representava-se essa medida, por um número racional, uma razão entre dois inteiros $\frac{n}{m}$. Tal comprimento incluía-se, então, na categoria das grandezas comensuráveis. Os matemáticos gregos foram levados a conceber grandezas incomensuráveis quando encontraram os números irracionais e não conseguiram representa-los na forma de fração. Não admitir os números irracionais era imaginar uma reta cheia de buracos, ao contrário da reta perfeitamente contínua que se marcavam os racionais. Fermat e Descartes criaram a Geometria Analítica no século XVII, o que favoreceu o tratamento aritmético do comensurável e do incomensurável. Os números racionais e os irracionais são definidos pela primeira vez por Newton (1642-1727).

2.2 A reta Real.

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta. Mais precisamente, a cada número real está associado um e somente um ponto da reta e a cada ponto da reta está associado um e somente um número real. No que segue, não distinguiremos pontos da reta e números reais.

Como estamos considerando conjuntos numéricos, levaremos em conta, por hora, que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Os inteiros são marcados, facilmente, usando o segmento de extremidade 0 e 1 como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sobre a reta, veremos que eles formam um subconjunto da reta que é denso, o que significa que dado um ponto qualquer da reta podemos obter racionais tão perto dele quanto se queira, basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Pode parecer que os racionais cobrem a reta $\mathbb{R}$, isto é, a cada ponto de $\mathbb{R}$, corresponde um racional. Que isso não é verdade, já era conhecido pelos matemáticos da escola Pitagórica. Sabiam eles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento igual a 1, então a hipotenusa não é racional (FIQUEIREDO) [4].

As relações básicas entre os números reais são de dois tipos diferentes: operações e desigualdades.

2.3 Caracterização dos Números Reais

Apresentamos agora propriedades características dos números Reais. Esse conjunto é um corpo e isso significa que estão definidas duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições especificadas abaixo.

A adição faz corresponder a cada par de elementos x, $y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \,.\, y \in \mathbb{R}$.

Essas operações obedecem aos seguintes axiomas:

Axiomas para a adição.

1) Comutatividade: Para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$,
   $a+b = b+a$.
2) Associatividade: Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$,
   $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3) Elemento Neutro: Há um único elemento 0 em $\mathbb{R}$ tal que
   $a + 0 = a$ para todo a em $\mathbb{R}$.
4) Simétrico: Para cada a em *IR* há um único elemento $-a$ em $\mathbb{R}$ tal que
   $-a + a = 0$.

Em linguagem algébrica, os Axiomas 1 a 4 expressam que $(\mathbb{R},+)$ é um grupo abeliano (WHITE) [6].

Axiomas para a multiplicação.

5) Comutatividade: Para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$
   $a \,.\, b = b \,.\, a$.
6) Associatividade: Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$.

$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$.

7) Elemento Neutro: Há um único elemento 1 em $\mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que para todo a em $\mathbb{R}$, $1 \,.\, a = a$.
8) Inverso Multiplicativo: Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, há um único elemento a^{-1} em $\mathbb{R}$ tal que $a \,.\, a^{-1} = 1$.

Axioma da distributividade.

9) Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$,
   $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$

Em linguagem algébrica, os Axiomas (1) até (9) expressam o fato de que $(\mathbb{R},+,\,.)$ é um corpo (WHITE) [6].

Resumindo, o conjunto dos Reais é um corpo, ou seja, é um conjunto $\{\mathbb{R},+,\,.\}$ munido de duas operações binárias, bem definidas, chamadas de adição e multiplicação, que são comutativas, associativas, possuem identidades, e cada elemento de $\mathbb{R}$ tem inverso aditivo, e se este elemento for diferente de zero, então ele também tem inverso multiplicativo.

Há muitos exemplos de corpos. Todos eles compartilham certas propriedades aritméticas, que podem ser obtidas a partir dos axiomas acima. Se x é um elemento de um corpo A, de acordo com um dos axiomas acima, temos que: $1.\, x = x$. Note que este 1 é a identidade multiplicativa do corpo A e não o número natural 1.

2.4 Desigualdades

1) As desigualdades entre os números reais.

Para alguns pares de números x e y temos que x é menor que y. Escrevemos: $x < y$. A mesma relação também é escrita como $y > x$. Se quisermos dizer que $x < y$ ou $x = y$, escrevemos $x \leq y$ (ou $y \geq x$).

2) As operações com números reais.

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é positivo, e denotamos $x > 0$, se x estiver no lado direito da reta; dizemos que x é negativo, e denotaremos $x < 0$, se x estiver no lado esquerdo da reta, em relação ao mesmo número.

Vamos introduzir as operações adição e multiplicação em $\mathbb{R}$.

Para cada dois números reais x_1 e x_2 definimos um terceiro número x_3 chamado soma de x_1 e x_2. Escrevemos: $x_1 + x_2 = x_3$

Axioma de Ordem – No conjunto de números reais existe um subconjunto denominado números positivos, tal que:

1) Se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo;
2) A soma de dois números positivos é positiva;
3) O produto de dois números positivos é positivo.

Definição: O número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos:

1) $a < b \leftrightarrow b - a$ é positivo;
2) $a > b \leftrightarrow a - b$ é positivo.

Os símbolos $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que) são definidos:

1) $a \leq b \leftrightarrow a < b$ ou $a = b$.
2) $a \geq b \leftrightarrow a > b$ ou $a = b$.

São Propriedades da relação de ordem $a < b$ em $\mathbb{R}$:

1) Transitividade: Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
2) Tricotomia: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.
3) Monotonicidade da adição: Se $a < b$ então, para todo $c \in \mathbb{R}$, tem-se $a + c < b + c$.
4) Monotonicidade da Multiplicação: Se $a < b$ então, para todo $c > 0$ tem-se $ac < bc$. Se, porém, $c < 0$ então $a < b$ implica $bc < ac$.

2.5 Ínfimo e Supremo

Um corpo K é ordenado se contém um subconjunto A com as seguintes propriedades.

i. $x \in A$, $y \in A$ implica $x + y \in A$ e $xy \in A$;
ii. Dado $x \in K$, então uma e somente uma das três possibilidades ocorre: $x \in A$, $-x \in A$, $x = 0$.

Imediatamente podemos ver que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, onde A representa o conjunto dos racionais positivos.

2.5.1 Cota Superior

Seja K um corpo ordenado e A um subconjunto de K. Um elemento $x \in K$ é uma cota superior de A se $x \geq y$, para todo $y \in A$. Existem conjuntos que não tem cota superior. Por exemplo, considere o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais; é fácil de ver que o subconjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não tem cota superior. Um subconjunto A de K se diz limitado superiormente se ele possui cota superior.

2.5.2 Cota Inferior

Um elemento $x \in K$ é uma cota inferior se $x \leq y$, para todo $y \in A$. Existem conjuntos que não possuem cota inferior. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não tem cota inferior no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Um subconjunto A de um corpo ordenado K se diz limitado inferiormente se ele possui cota inferior.

2.5.3 Supremo de um conjunto limitado superiormente

Seja K um corpo ordenado e $A \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. O supremo do conjunto A, que designamos por Sup A, é definido como a menor das cotas superiores de A. Em outras palavras $x \in K$ é o supremo de A se

1) x for cota superior de A, e
2) $x \geq z$, onde z é uma cota superior de A, implica $x = z$.

2.5.4 Ínfimo de um conjunto limitado inferiormente

Seja K um corpo ordenado, e $A \subset K$ um subconjunto limitado inferiormente. O ínfimo de um conjunto A, que designamos por Inf A, é definido como a maior das cotas inferiores. $x \in A$ é ínfimo de A, se

1) x for cota inferior de A, e
2) $x \leq z$, onde z é uma cota inferior de A, implique $x = z$.

O conjunto $\mathbb{R}$ satisfaz a propriedade:

Axioma do Supremo: Todo conjunto limitado e não vazio de números reais possui um supremo e um ínfimo real.

Observamos que esta propriedade não é satisfeita por $\mathbb{Q}$. Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}.$$

O supremo de A é $\sqrt{2}$ que não é um número racional.

Como consequência da propriedade acima temos que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

2.6 intervalos.

Vamos destacar certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são chamados de intervalos.

Definição: Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

Para $a, b \in \mathbb{R}$ *com* a < b, o *intervalo aberto (a, b)* é definido por

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

1) Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \leq$, o *intervalo [a, b]* é definido por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

2) Para $a, b \in \mathbb{R}$ *com* a < b, o *intervalo semiaberto [a, b)* é definido por

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

3) Para $a, b \in \mathbb{R}$ *com* a < b, o *intervalo semiaberto (a, b]* é definido por

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

4) Para $a \in \mathbb{R}$, o *intervalo aberto infinito (a, ∞)* é definido por

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

5) Para $b \in \mathbb{R}$, o *intervalo aberto infinito (-∞,b)* é definido por

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

6) Para $a \in \mathbb{R}$, o *intervalo fechado infinito [a, ∞)* é definido por

[a, ∞) = {x ∈ ℝ | a ≤ x}.

7) Para $b \in IR$, o *intervalo fechado infinito (-∞, b]* é definido por

(-∞,b] = {x ∈ ℝ | x ≤ b}.

8) *Intervalo aberto ou fechado (-∞,∞).*

(-∞,∞) = ℝ.

9) Para a ∈ ℝ, o *intervalo degenerado [a,a]*é definido por um único ponto

[a,a]={ $x \in \mathbb{R}$ | $x=a$}.

Vamos provar que todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito.

Demonstração:

Como ℝ é um corpo ordenado temos que , se $x < y$, então,

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Assim, se I for um intervalo de extremos a, b, com $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$em I. tomando

$$x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = \frac{a+x_1}{2},\ \ldots,\ x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2},\ \ldots$$

dessa forma obtemos

$$a < \ldots < x_3 < x_2 < x_1 < b.$$

■

Princípio dos Intervalos Encaixantes

Sejam a_0, a_1 , a_2, … e b_0, b_1, b_2,... duas sequências de números reais, satisfazendo $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots, b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ e $b_n \geq a_n$ para cada número n. Então, existe um número real c, tal que $b_m \geq c$ e $c \geq a_n$ para todo m e n.

Se usarmos a representação de números reais em uma reta, então números x satisfazendo a condição $a \leq x$ e $x \leq b$ são representados por um Intervalo. Sendo assim, os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ estão encaixados um no outro: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$. O princípio estabelece que existe um número que é comum para todos estes intervalos encaixantes. Por isso o nome deste princípio.

O princípio dos intervalos encaixantes é particularmente útil quando o comprimento do intervalo I_n, ou seja, a diferença $b_n - a_n$, se tornar arbitrariamente pequena quando n crescer. Em outras palavras, para um número real arbitrário $\varepsilon > 0$ existe um índice N tal que $b_n - a_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Neste caso, pode-se concluir mais do que apenas o que foi exposto no princípio.

Se a diferença $b_n - a_n$ se tornar arbitrariamente pequena com o crescimento do índice n, então o número c, cuja existência é garantida pelo princípio dos intervalos *encaixantes é único.*

Prova: Suponha que existam dois números: c e c' e, por exemplo, $c < c'$. Então (1) $a_n < c < c' < b_n$ e $c' - c = b_n - a_n - (c - a_n) - (b_n - c') \leq b_n - a_n$. Obtemos (para n suficientemente grande) que $c' - c < \varepsilon$ para um número arbitrário $\varepsilon > 0$. Por exemplo, tal relação deve ser válida para $\varepsilon = \frac{c'-c}{2}$. A contradição vem do fato de que, como $b_n - a_n < \varepsilon$ é válida para todo $\varepsilon > 0$, conclui-se que $c' - c < \frac{c'-c}{2}$.

Encontramos esta situação exatamente quando pretendemos medir aproximadamente os dados números reais, por falta ou excesso, usando números racionais. Neste caso, a_n e b_n são números racionais.

Para demonstrar o próximo teorema precisaremos utilizar o Princípio de Arquimedes.

Princípio de Arquimedes - Para cada número real a existe um número natural n tal que $a < n$.

Teorema: Entre dois números reais distintos sempre existe um número irracional.

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais distintos. Sem perda de generalidade suponhamos $x < y$. Assim $y - x > 0$.

Pelo princípio de Arquimedes existem números naturais n, m tais que

$$n\,(y - x) > 1$$

$$m\,(y - x) > \sqrt{2}$$

Desta forma temos que

$$x < x + \frac{1}{n} < y$$

$$x < x + \frac{\sqrt{2}}{n} < y$$

e assim se x for irracional, assim será $x + \frac{1}{n}$ e se x for racional então $x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ será irracional. De qualquer forma conseguimos encontrar um irracional entre x e y.

■

Teorema: Entre dois números reais distintos sempre existe um número racional.

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais distintos. Observe que se $x < 0 < y$ então nada temos para provar, pois 0 é racional. Suponhamos $0 < x < y$. Assim $y - x > 0$. Pelo princípio de Arquimedes encontramos um natural n tal que

$$n\,(y - x) > 1$$
$$nx > 1$$

Seja j um Natural tal quetal que

$$\frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n}$$

Note que

$$\frac{j+1}{n} = \frac{j}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$$

Portanto, basta tomarmos o número racional $\frac{j+1}{n}$.

Se $x < y < 0$ então $0 < -y < -x$ e pelo primeiro caso encontramos um racional entre $-y$ e $-x$. O simétrico deste racional será o racional procurado.

■

2.7 Sequências de Números Reais

Agora veremos funções reais de uma variável real cujo domínio é um subconjunto do conjunto dos números naturais. Tais funções recebem o nome de sequências.

Definição: *Uma sequência de números reais é uma função*

$$f : A \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Notação: Denotamos (a_n) onde $f(n) = a_n$. Em geral apresentaremos a sequência pela lei de definição e consideraremos o domínio como o maior subconjunto de $\mathbb{N}$ onde tem sentido a lei de definição.

Exemplos:

1) (a_n) dada por $a_n = 1/n$ é a sequência formada pelos números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
2) (a_n) dada por $a_n = 2$ é uma sequência constante 2, 2, 2,...
3) (a_n) dada por $a_n = (-1)^n$ é a sequência 1, -1, 1, -1,...

Definição: Diz-se que uma sequência (a_n) converge para um número L ou tem limite L se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número natural N tal que

$$n > N \rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Denotamos

$$\lim a_n = L \text{ ou ou } a_n \to L$$

Intuitivamente dizer que (a_n) converge para L significa dizer que os termos da sequência aproximam-se de L quando n cresce.

Exemplo:

A sequência (a_n) dada por $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0.

De fato, dado $\epsilon > 0$, tomamos N o primeiro número natural maior que $1/\epsilon$ e temos que

$$n > N \to n > \frac{1}{\epsilon} \to \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

Definição: Quando uma sequência não converge diz-se que ela diverge ou que é divergente.

Exemplos:

1) A sequência (a_n) dada por $a_n = (-1)^n$ é divergente. De fato, seus termos oscilam entre -1 e 1.

2) A sequência (a_n) dada por $a_n = n$ é divergente. De fato, seus termos crescem indefinidamente.

Definição: Uma sequência (a_n) é dita limitada se existir um número real $K > 0$ tal que

$$|\, a_n \,| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

1)As sequências dadas por $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \cos n$ são exemplos de sequências limitadas.

2) A sequência (a_n) dada por $a_n = n^2$ não é limitada.

Ser limitada não é o mesmo que ter limite. Se uma sequência for convergente então ela será limitada, mas nem toda sequência limitada é convergente. De fato, considere, por exemplo, a sequência (a_n) dada por $a_n= (-1)^n$.

Definição: Dada uma sequência real (a_n)), definimos:

1)Se $a_1 < a_2 < a_3 <$ ...então (a_n) é dita monótona crescente.

2) Se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq$ ...então (a_n) é dita monótona não decrescente.

3) Se $a_1 > a_2 > a_3 >$ ...então (a_n) é dita monótona decrescente.

4) Se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq$ ...então (a_n) é dita monótona não crescente.

Se a é um número arbitrário, positivo e menor do que 1, então a sequência $a_n = a^n$ *aproxima-se do zero sem limites, ou seja,* $a^n \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Realmente, considere $a = \frac{1}{A}$. E também que $A > 1$ e isso pode ser escrito da forma $A = 1 + x$ com $x > 0$. Usando a fórmula binomial, $A^n = (1 + x)^n = 1 + nx + y$, onde y é uma soma de números positivos, então $y > 0$. Assim, $A^n > 1 + nx$ e então para cada $\varepsilon > 0$ existe um N que $A^n > \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $n \geq N$. Por isso, $a^n < \varepsilon$ o que significa que $a^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Nem todas as sequências tem um limite. Por exemplo, se uma sequência tem um limite, então ela é limitada. De fato, deixe $\alpha_n \to \alpha$ quando $n \to \infty$. Então existe um N, tal que $|\alpha_n - \alpha| < 1$ para $n > N$. Desde que $\alpha_n = \alpha + (\alpha_n - \alpha)$, segue que, $|\alpha_n| \leq |\alpha| + 1$ para $n > N$ e, portanto $|\alpha_n| \leq C$ para todo n, onde C é o máximo de números $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|, |\alpha| + 1$. Mas mesmo que a sequência seja limitada, ela pode não ter limite. Um exemplo é a sequência (0,1,0,1,...) onde 0 e 1 alternam entre si. Se tivesse um limite α, poderíamos pegar a definição do limite $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e teríamos $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ para todo $n > N$. Mas junto dos a_n's ($a_n = 0$ ou $a_n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$) com $n > N$ estão ambos o 0 e 1. Portanto, teríamos $|\alpha| < \frac{1}{2}$ e $|1 - \alpha| < \frac{1}{2}$. Claramente, tal número α não existe.

Mas se uma sequência tem um limite, este limite é único. A saber, suponha que uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem dois limites: α e β, $\alpha \neq \beta$. Então para cada ε existe um número N e N', tal que para $n > N$ será $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ e para $n > N'$ será $|a_n - \beta| < \varepsilon$. Deixa $n > N$ e

$n > N'$; então $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ e $|a_n - \beta| < \varepsilon$, de onde $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$. Mas ε em nosso raciocínio é um número arbitrário positivo, e podemos escolhê-lo, então $\varepsilon < \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$, daqui a contradição.

Como nem toda sequência limitada tem um limite, concluímos que apenas tais sequências não nos levarão à construção de novos números reais. Nosso principal resultado será o de que existe um tipo especial e simples de sequências que sempre têm limites e portando elas nos darão um meio de construir novos números reais.

Uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é dita *crescente*, se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, ou seja, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$.

Teorema: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração: Vamos provar que toda sequência não decrescente e limitada superiormente converge para seu supremo.

Seja $K > 0$ tal que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq K$$

Assim temos que o conjunto

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é limitado superiormente. Pela propriedade do supremo temos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$L = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

afirmamos que

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ temos que $L - \epsilon$ não é uma cota superior de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e assim existe $N > 0$ tal que

$$a_N > L - \epsilon$$

e

$$n > N$$

então

$$n > N \rightarrow L - \epsilon < a_N \leq a_n < L < L + \epsilon \rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

■

3. Considerações Finais

Com o presente trabalho podemos observar as demonstrações que nos levam a um tipo de representação de cada número. Vimos que um número real é racional ou irracional e que estes se diferem no comportamento de suas casas decimais. As demonstrações matemáticas são de suma importância, tanto para o professor para que ele sinta-se seguro nos seus argumentos, tanto para o aluno para que ele possa ampliar as estratégias para a resolução de um problema. Entender o comportamento dos números Reais e a diferença entre os seus subconjuntos é a base para um entendimento sólido da matemática. Vimos que a partir dos axiomas dos reais, são construídas várias operações simples até outras mais complexas, como as sequências, que nos levam a entender o comportamento das expansões decimais. Na construção do conhecimento (ou, do conceito), por vezes a intuição nos foi bastante útil, mas isso não significa que a formalização conceitual com o rigor matemático necessário deixou de ser apresentada. Demonstramos alguns resultados importantes das representações decimais que nos permitiram entender como estão associadas às diferentes representações de um número. Dessa forma, esse trabalho visa ser um auxiliador para o professor que deseja entender melhor as diferentes representações decimais, contribuindo com o seu conhecimento e consequentemente melhorando as orientações dadas aos alunos.

Referências

.

[1] ÁVILA, G. *Análise Matemática Para Licenciatura. 3 ed.* São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

.

[2] BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática Através dos Tempos.* São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004.

[4] FIGUEIREDO, D. G. *Análise 1.* 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[5] SHAFAREVICH, I.R. *Selected Chapters From Álgebra*. The Teaching of Mathematics 2001, Vol IV, 1, pp 1-34

[6] WHITE, A. J. *Análise Real: Uma Introdução.* São Paulo: Edgard Blucher, 1993.