UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA — PROFMAT

FREDSON LUIS TORRES ALVES

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Reflexões para construção de uma proposta para o Ensino dos Números Rais.

MACAPÁ- AP
2014

FREDSON LUIS TORRES ALVES

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. Guzmán Eulálio IslaChamilco

MACAPÁ-AP
2014

FREDSON LUIS TORRES ALVES

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. Guzmán Eulálio IslaChamilco

Data da aprovação:_____/____/_______

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Presidente

Profª. Drª. Regina Célia Guapo Pasquine
Universidade Estadual de Londrina
Membro Externo

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Membro Interno

Prof. Dr. Erasmo Senger
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Membro Interno

MACAPÁ-AP
2014

Aos meus pais Francisco Igreja e Maria de Nazaré que pelo seu exemplo de vida me ensinaram a lutar pelos meus ideais.

À minha esposa Risoneide e meus filhos, Danilo, Camilo e Júlia, pelo companheirismo e amor fortalecedor.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pela educação, princípios e valores transmitidos no decorrer de minha vida, que me fizeram ser a pessoa que sou;

A minha amada esposa que me apoiou nesta linda jornada;

Aos meus filhos que foram fonte de toda motivação;

Aos professores Gusmán Eulálio IslaChamilco, José Walter Cárdenas, Erasmo Senger e Márcio Aldo Lobato Bahia pelo apoio e compreensão, sem os quais provavelmente hoje eu não estaria concluindo esta importante etapa da minha vida.

Aos meus familiares pela confiança e carinho;

Aos meus amigos pela compreensão e apoio nessa importante caminhada;

Ao meuorientador pelo incentivo, pelas lições e experiências transmitidas no decorrer deste trabalho;

Aos amigos de turma pela oportunidade de troca de conhecimentos e pelos momentos divertidos que passamos juntos nesta jornada.

“Jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida.”

RenéDecartes

RESUMO

São poucos os livros didáticos que apresentam o conceito de números reais com consistência teórica. Na maioria dos livros didáticos o número racional é representado por uma expressão decimal finita ou periódica, mas não é feito nenhum esforço para justificar a afirmação. Os livros também conceituam número real como uma expressão decimal finita ou infinita, e, definem o número racional como expressão decimal finita e infinita e periódica e o número irracional quando a expressão é infinita ou aperiódica. Porém não apresentam justificativas consistentes para assegurar que o número seja irracional. Outras falhas em livros didáticos correspondem a não definição das operações de números reais, a relação de ordem entre os racionais, levando em consideração a abordagem geométrica e a algébrica e a definição de supremo. Os professores de matemática, em sua grande maioria, tendem a reproduzir em suas aulas o conteúdo dos livros didáticos com muitas falhas no conceito de números de reais. Um dos fatores para tal comportamento é a falta de segurança dos professores de Matemática relativo ao conteúdo em discussão, impondo a manutenção dessa prática. Felizmente, iniciativas como o Mestrado Profissional em Matemática - Profmat e Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM dão oportunidades aos professores de Matemática em aperfeiçoarem-se; demonstrando, através dos materiais usados nos cursos e das publicações da SBM, em especial a coleção "Matemática para o Ensino Médio" , cujo volume um apresenta o conjunto dos números reais de forma consistente. Inspirado nessas iniciativas, buscamos contribuir, tendo em vista que o presente trabalho visa demonstrar que é possível, por meio de extensões sucessivas do conceito de número, chegar à construção dos números reais, dando especial importância àrelação existentes entre eles através do método Axiomático e a utilização do conceito de Supremo para caracterizar o conjunto dos números reais, podendo ser elementos facilitadores do ensino dos números reais de forma correta e ao mesmo tempo acessível ao aluno.

Palavras-chave:Educação.Ensino.Matemática.Racionais.Irracionais.Números Reais.

ABSTRACT

Few textbooks that present the concept of real numbers with theoretical consistency . In most textbooks and the rational number represented by a finite or periodic decimal expression, but it made no effort to justify the statement . The books also conceptualize real number as a finite or infinite decimal expression and define the rational number as finite and infinite and periodic decimal expression and irrational number when the expression is infinite or aperiodic . But do not show consistent justifications to ensure that the number is irrational . Other flaws in textbooks does not correspond to the definition of real numbers operations , the order relation between the rational , taking into account the geometric and algebraic approach and the definition of supreme. Math teachers , mostly tend to reproduce in their classes the content of textbooks with many flaws in the concept of real numbers . One reason for such behavior is the lack of security for mathematics teachers on the content at issue , requiring the maintenance of this practice . Fortunately , initiatives like Profmatand PAPMEM provide opportunities for teachers of mathematics in perfecting themselves ; demonstrating , through the materials used in courses and publications of SBM , particularly the " Mathematics for Secondary Education " collection, the volume of which one has the set of real numbers consistently. Inspired by these initiatives , we seek to contribute , considering that this study aims to demonstrate that it is possible , by successive extensions of the number concept , get the construction of the real numbers , giving particular attention to the relationship existing between them through the Axiomatic method and using the concept of Supreme to characterize the set of real numbers, can be enablers of teaching real numbers correctly and yet accessible to the student.

Keywords :EducationTeaching.Mathematics.Rational.Irrational.Real Numbers.

LISTA DE FIGURAS E ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

PAPMEM – Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A escolha do tema do trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional — PROFMAT deu-se em função da escassez de bibliografias que apresentam o conceito de números reais com consistência teórica no Ensino Básico.

De um modo geral, o número racional é representado por uma expressão decimal finita ou periódica, mas não é feito nenhum esforço para justificar a afirmação.

Um ponto delicado quanto à conceituação, refere-se ao conceito de número reais. Explicar o conceito de número real matematicamente correto e levar o aluno a compreensão deste conceito é uma questão delicada.

Os livros “conceituam” número real como uma expressão decimal finita ou infinita. Quando a expressão é finita e periódica, o número é racional e, quando a expressão e infinita ou aperiódica é um número irracional.

Porém, como assegurar que um número é irracional? Vez que não se pode ter essa garantia olhando simplesmente para apenas alguns de seus primeiros algarismos decimais.

Definir as operações de adição e multiplicação com expressões decimais infinitas é outra dificuldade encontrada nos livros didáticos.

No estudo das desigualdades, o livro não define a desigualdade dos números reais em sua representação decimal. Entretanto, ela é bem simples de ser trabalhada para saber se $a < b, a = b$ ou $a > b$.

A representação dos números reais nos livros didáticos é sem dúvida um grande problema, vez que não há referência de como eles são encontrados.

Segundo Lima, (2001, p.410-412), o livro de Paulo Bucchi, Curso prático de Matemática – Volume 1, são encontradas algumas dessas afirmações:

> Na seção que focaliza os números racionais, são dados dois exemplos de cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica. Entretanto, além de o texto não apresentar qualquer explicação a respeito das representações decimais, não há referencia à caracterização dos números racionais como aquele número cuja representação decimal é finita ou

periódica.

Na seção 2.5, após mostrar como exemplos de números irracionais os números $\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{7}$ e π com suas representações decimais com 7 algarismos, o texto diz à página 37: "Observe que todo número irracional está representado na forma decimal, com infinitos algarismos, e não apresenta periodicidade."

Tal observação é impossível, mesmo que consideremos apenas os quatro exemplos apresentados, pois como poderíamos garantir que não há periodicidade em qualquer das representações? O que assegura que todos os irracionais têm representação decimal não periódica é a caracterização dos racionais que, como dissemos, não foi mencionado no texto.

(...)

Ainda na seção 2.5, o texto diz, sem qualquer justificativa, que Pitágoras e seus discípulos e seus seguidores descobriram que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida unitária não era um número racional, pois não há um número racional cujo quadrado seja 2, o texto continua:

"Este fato gerou uma grande polêmica entre os matemáticos da época.

Este e outros problemas puderam ser resolvidos com o auxílio de um novo tipo de número: o número irracional." (p. 37).

Dessa forma, o número irracional é apresentado apenas como um número que não é racional. Consequentemente, o conjunto dos números reais é visto somente como a reunião dos racionais e irracionais, sem que se evidencie que seus elementos resultam das medições de comprimento: os racionais expressam as medidas dos segmentos comensuráveis com a unidade de comprimento escolhida, ao passo que os irracionais representam as medidas dos segmentos que são incomensuráveis com essa mesma unidade. A falta de referência a esse significado dos reais torna incompreensível o trecho a seguir, extraído da seção 2.6, na página 39:

Se representarmos todos os números racionais numa reta, sobrarão pontos da reta que não estarão associados a nenhum número racional. Mas, se representarmos, também, todos os números irracionais nessa mesma reta, então não sobrará nenhum ponto que não seja representação de um número. Portanto, cada ponto da reta é a representação de um número racional ou de um número irracional.

Esta reta é denominada reta real.

Um último comentário é que o texto não fornece o critério para comparar dois números reais a e b por meio de suas representações decimais o único critério apresentado é o geométrico: $b > a$ quando b está representado na reta à direita de a e $b < a$ quando b está representado na reta à esquerda de a. Como ficou implícito que os racionais são os que têm representação decimal finita ou periódica e os irracionais são os que têm representação decimal não periódica, não é claro como podemos comparar dois números reais quaisquer.

Diante do exposto, o trabalho consiste em apresentar uma proposta do ensino dos conjunto dos números reais para os professores do ensino Médio, com fim de levá-los a familiarizar-se gradativamente com o método matemático, para dotá-lo de habilidades para lidar com os números reais e dar-lhes condições para mais tarde utilizarem esses conhecimentos em sala de aula. Respondendo a seguinte indagação: como é possível ensinar o conjunto dos números reais de forma correta e ao mesmo tempo acessível ao aluno?

É claro que não conseguiríamos alcançar este intento sem um apoio especializado, e para tanto, o levantamento bibliográfico acerca da temática apoiou-se em diversos referenciais teóricos dentre os quais podemos destacar: Boyer (2002), Caraça (1998), Eves (2004), Lima (2010), Lima (2006), Muniz (2012), Lima (2008), Lima (2001) e Lima (2011) entre outros. Esta revisão da literatura forneceu um quadro teórico bastante consistente do ponto de vista da conceituação, manipulação e aplicação dos números reais, segundo Lima (2001, p. 140).

Segundo Lima (2002, p. 139), para que os alunos se familiarizem gradativamente com o método matemático, adquiram habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que se chamam de Conceituação, Manipulação e Aplicação.

A *Conceituação* será o aspecto que abordaremos no trabalho e compreende:

> A formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocício dedutivo, a nítida conscientização de que c onclusões sempre são provenientes de hi´´oteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem com a intgerpretação e a reformulação de iodéias e fatos sob diferentes formas e termos. (Lima, 2002, p. 140)

O trabalho foi organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, introduzimos a discussão acerca das falhas e dificuldades na conceituação de número irracional e número real, além de assinalar estas dificuldades na literatura matemática hoje disponível.

No segundo capítulo,contaremos uma breve história dos números reais e, decomo as grandezas incomensuráveis causaram a crise matemática grega, sua superação da crise no séc. IV a. C. com a teoria das proporções de Eudoxo e o tratamento rigoroso para a construção dos números reais desenvolvido por Dedekindao desenvolve enunciar o postulado de continuidade a partir da idéia de corte.

No terceiro capítulo, introduzimos a representação decimal dos números racionais, conceito dos números irracionais, a enumerabilidade e a densidade dos racionais.

O quarto capítulo versa sobre a abordagem axiomática do conjunto dos números Reais, a apresentação da soma e multiplicação com números reais, a relação de ordem que existe dos números reais, o conceito de supremo e sua representação geométrica.

Por fim, nossas considerações finais traçam um panorama geral de todo nosso esforço em produzir este material que, pelo menos em parte,desejamos que possa ser aproveitado como prática em sala de aula.

2. HISTÓRIA DOS NÚMEROS REAIS

Durante muitos anos as propriedades dos números naturais e suas razões foram à essência de tudo. Até o surgimento dos números irracionais.

2.1. NÚMEROS RACIONAIS: GRANDEZAS COMENSURÁVEIS.

Medir um segmento de reta AB compreende três fase distintas: a escolha da unidade, comparar a medida do segmento com a unidade e exprimir o resultado da comparação por um número, segundo Caraça (1998).

Seja o seguimento de reta AB tendo como unidade o semento – padrão u, cuja medida é igual a 1, por definição. Para medir o segmento de reta AB basta compará-lo com a unidade 1. Se o segmento unitário couber um número exato de n vezes, com $n \in \mathbb{N}$, em AB, n será a medida do segmento AB. Caso contrário, a medida de AB não será um número natural.

Então, esta situação condiz com a idéia de fração. Neste caso, para medir o segmento AB, tem-se que determinar um segmento unitário w que caiba no segmento unitário um número exato de vezes, digamos n vezes, com $n \in \mathbb{N}$. E um número exato de vezes em AB, digamos m, com $m \in \mathbb{N}$ (Elon, 2006, Vol. 1, p. 52). O segmento w será uma medida comum de u e AB. Assim, diz-se que AB e w são comensuráveis. A medida de w será a fração $1/n$ e a medida de AB será m vezes $1/n$, isto é, m/n. (Lima, 2006, p. 52).

Os gregos acreditavam que o resultado do processo de medir era sempre um racional. Por muito tempo, pensou-se que dois segmentos de retas eram sempre comensuráveis.

Entretanto, os gregos descobriram que existiam grandezas não comensuráveis.

2.2 GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS

Em Crotona, sul da Itália, Pitágoras, nascido por volta de 575 a. C, fundou uma seita filosófica religiosa. A crença fundamental da sua seita era o lema “Os números governam o número”.

Os pitagóricos fizeram uma descoberta que desencadeou uma enorme crise que abalou suas crenças e a estrutura da matemática por algum tempo. A crise surgiu quando entre um dos discípulos de Pitágoras observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

O argumento é muito simples. Se houvesse um segmento de reta w que coubesse n vezes no lado AB e m vezes na diagonal AC do quadrado $ABCD$ então, tomando AB como unidade de comprimento, a medida de AC seria igual a m/n enquanto a medida de AB seria 1. Pelo Teorema de Pitágoras teríamos $(\mathrm{m/n})^2 = 1^2 + 1^2$, donde $m^2 = 2.n^2$. Mas esta última igualdade é absurda, pois na decomposição de m^2 em fatores primos o expoente do fator 2 é par enquanto em $2n^2$ é ímpar.

A existência de segmentos incomensuráveis mostrou que os números naturais mais os números racionais são insuficientes para medir todos os segmentos de uma reta, vez que isso tornou impossível falar em razão entre duas grandezas quando essas grandezas fossem incomensuráveis, o que causou uma enorme crise na estrutura da Matemática.

2.3 OS NÚMEROS IRRACIONAIS

A crise foi superada apenas no século IV a. C. por Eudoxo, que desenvolveu a teoria das proporções que permitiu superar a dificuldade da incomensurabilidade entre duas grandezas sem a necessidade dos números irracionais.

No caso de segmentos comensuráveis, Eudoxo percebeu que entre dois segmentos A e B, existe um segmento u que cabe um número inteiro de vezes em A, digamos m, e um número inteiro de vezes em B, digamos n, e por definição, a razão de A para B é m/n. De outro modo, isso é equivalente a n_A é congruente a m_B, isto é, $n_A = m_B$.

Assim, dados os segmentos A, B, C e D e os números naturais m e n, afirmar que A está para o segmento B, assim como o segmento C está para o segmento D, significa afirmar que $n_A = m_B$ se, e somente se, $n_C = m_D$.

Entretanto, quando A e B são incomensuráveis, a igualdade do tipo $n_A = m_B$ não ocorrerá.

Porém, dados dois números inteiros m e n, e os segmentos C e D, pode-se sempre testar:

$$n_A > m_B, \qquad n_A = m_B, \qquad n_A < m_B$$

ou ainda,

$$n_C > m_D, \qquad n_C = m_D, \qquad n_C < m_D$$

Eudoxo utilizou este teste para dar uma definição de igualdade de duas razões, e que pode sempre ser aplicado, mesmo no caso de segmentos incomensuráveis.

Eudoxo deu a seguinte definição para o seu teste.

Definição: Dados quatro grandezas da mesma espécie A, B, C e D (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como, C está para D se, qualquer que sejam os números naturais m e n, se tenha: $n_A > m_B$ se, só se, $n_C > m_D$; $n_A = m_B$ se, só se, $n_C = m_D$; ou ainda, $n_A < m_B$ se, só se, $n_C < m_D$.

Com ela foi possível construir a teoria das proporções e resolver a grave crise na estrutura da Matemática, decorrente da descoberta das grandezas incomensuráveis.

Podemos citar como exemplo da aplicação da definição dada por Eudoxo o Teorema de Tales que afirma: num mesmo plano três retas paralelas determinam em duas retas transversais segmentos proporcionais.

O Teorema de Tales é de fundamental importância em geometria plana, vez que dele depende toda a teoria sobre semelhança de figuras, particularmente os teoremas sobre semelhança de triângulos.

Em meados do século XIX, o matemático alemão Richard Dedekind sentindo necessidade de uma definição dos números reais ao ensinar cálculo diferencial, desenvolveu um tratamento rigoroso para a construção dos números reais.

O matemático Dedekind atribuiu à reta a qualidade de ser completa, isto é, contínua, mencionando que a linha reta é infinitamente mais rica em pontos que o conjunto dos números racionais o é em números; com isso fez-se necessário a criação de novos números, pois se pretendia que o conjunto dos números fosse tão completa e tivesse a mesma continuidade que a linha reta.

> Se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo ponto de uma das classes está a esquerda de todo ponto da outra, então existe um e só um ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes. (DEDEKIND, apud CARAÇA, 1989, p. 60).

Sejam A e B grandezas incomensuráveis, como a igualdade $n_A = m_B$ nunca se verifica, tem-se $n_A < m_B$ ou $n_A > m_B$.

Dedekind, baseado na teoria das proporções de Eudoxo, observou que o procedimento do grego levava a separação dos números racionais em duas classes.

Os números racionais positivos ficam separados em duas classes, a classe E (esquerda) do m/n que satisfazem $n_A > m_B$, e a classe D (direita) dos m/n que satisfazem $n_A < m_B$.

Assim, todo número pertencente à classe Eé menor que qualquer número que pertence à classe D.

Define-se cortes de Dedekind como um par de classes E e D de números racionais, com as seguintes propriedades:

P_1: E e D são conjuntos não vazios cuja união é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais;

P_2: Todo número menor do que algum elemento de E pertence a E, e, todo número maior do que algum elemento de D pertence a D.

P_3: Qualquer número racional r determina um corte em que E é o conjunto dos números racionais menores do que ou iguais a r, e D é o complementar de E, em $\mathbb{Q}$; ou E é o conjunto de todos os números racionais menores do que r e D o complementar de E, em $\mathbb{Q}$.

Assim, todo corte possui um elemento de separação. (Postulado de Dedekind). A consequência desse postulado é a criação dos números irracionais.

Dedekind observou que existiam cortes sem elementos de separação no conjunto dos números racionais, demonstrando a descontinuidade dos números racionais.

Para que todos os cortes tenham um elemento separador são criados os números irracionais.

Por exemplo, o corte que define o número real (irracional) $\sqrt{2}$ é o par de classes A_1 e A_2 assim descrito: A_1 é o conjunto de todas as frações $\frac{m}{n}$ tais que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2$; são as "raízes quadradas de 2 por falta", como $1; 1{,}1; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; \ldots$ E A_2 constitui-se das frações $\frac{m}{n}$ tais que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 > 2$ são as "raízes por excesso", como $2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; 1{,}4143; \ldots$

Consequentemente, obtém-se o conjunto dos números Reais, um "contínuo numérico", uma vez que os números irracionais preenchem as "lacunas" decorrente das descontinuidades existentes no conjunto dos números racionais.

O conjunto dos números reais é completo, uma vez que todo corte tem elemento separador. (Teorema de Dedekind).

Em outras palavras, a todo ponto da reta está associado um número real caracterizando a completeza dos números reais.

Entretanto, tais conclusões, não eram suficientes para definir o conjunto dos números reais. Dedekind estabeleceu as operações de adição e multiplicação e a relação de ordem para os números irracionais, que foram facilmente demonstradas.

3. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Na primeira secção deste capítulo iremos fazer a representação decimal dos números racionais, demonstrar que o conjunto dos números racionais e enumerável e denso e definiremos números irracionais.

Assumiremos a priori que o aluno possui conhecimento sobre as definições e conceitos básicos sobre conjuntos, conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais.

3.1. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS RACIONAIS

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o conjunto formado por todos os números que podem ser expressos como razão entre dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z},\ com\ b \neq 0$, isto é,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}.$$

Os números racionais possuem uma representação decimal.

Para exemplificar, tomemos o racional $1/4$ que possui representação decimal igual a $0{,}25$, $1/3$ que possui representação decimal igual a $0{,}3333\ldots$ e $1/6$ que possui representação decimal igual a $0{,}1666\ldots$

No primeiro caso, $1/4 = 0{,}25$, temos uma representação decimal finita, que é obtida ao ser feita a divisão continuada de 1 por 4, acrescentando-se 0 ao dividendo 1 enquanto se tiver um resto não nulo. Podemos afirmar também, que $0{,}25$ é uma fração decimal, uma fração cujo denominador é uma potência de 10, vez que

$$0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}$$

No segundo caso, $1/3 = 0{,}3333\ldots$, temos uma representação decimal infinita e periódica $0{,}3333\ldots$, para a fração $1/3$, denominada dízima periódica simples com período 3, vez que o primeiro dígito após a vírgula se repete indefinidamente na mesma ordem. Em particular toda dízima periódica simples representa um número racional. Para obter a expressão decimal do número racional $1/3$, basta fazer a “divisão continuada” de 1 por 3, acrescentando zero ao dividendo 1 enquanto se tiver um resto não nulo, como nesta divisão sucessiva só podem ocorrer os restos 0, 1 e 2, após a primeira divisão o resto 1 começa a se repetir e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, obtendo-se uma expressão periódica.

No terceiro caso, $1/6 = 0{,}1666\ldots$, temos uma representação decimal infinita e periódica, denominada dízima periódica composta de período 6, vez que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica, no caso, o período 6. Para obter a expressão decimal do número racional $1/3$ basta fazer a “divisão continuada” de 1 por 6 acrescentando zero ao dividendo 1 enquanto se tiver um resto não nulo, como nesta divisão sucessiva só podem ocorrer os restos $0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$, e, após a segunda divisão o resto 4 começa a se repetir, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, obtendo-se uma expressão periódica.

De modo geral, para obter a expressão decimal do número racional p/q, faz-se a “divisão continuada” de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não nulo, como exemplo abaixo

$$\frac{14}{27} = 0{,}518518\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} 140 & 27 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}518518 \\ 230 & \\ 140 & \end{array}$$

Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos $0{,}1{,}2{,}3, \ldots, q-1$, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, logo tem-se uma expressão periódica.

Para um estudo mais detalhado sobre os casos em que o racional p/q gera uma dízima periódica simples, composta ou uma expressão decimal finita, bem como uma estimativa do número de algarismos do período, veja “Meu professor de Matemática, págs. 158-178”.

Uma expressão decimal é um símbolo da forma $\alpha = m, a_1a_2a_3a_4\ldots$, onde m é um número inteiro ≥ 0, chamada de parte inteira do racional, e, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, com $0 \leq a_n \leq 9$, chamadas de dígitos do racional.

Iremos representar o símbolo α como uma soma da forma $\alpha = m{+}a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n$ ..., tal que os dígitos serão representados por uma lista de algarismos da seguinte forma: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Assim, todo número racional α corresponde um inteiro m e uma lista $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$de algarismos, tal que $\alpha = m{+}a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n \ldots$

Podemos representar o número racional α como uma soma da seguinte forma:

$$m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

O significado da igualdade é que o número α tem por valores aproximados os números racionais:

$$m + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\ , n = 1,2,3, \ldots$$

Consideremos o seguinte exemplo: seja $\alpha = \frac{13428}{1000} = 13{,}428$. Podemos afirmar que $13{,}4 < \alpha$, é uma aproximação de α; que $13{,}42 < \alpha$, também é uma aproximação de α e, que $13{,}428$ é o número α. Deste modo, tem-se uma lista de números racionais que são valores aproximados do número racional α.

Entretanto, nem todo número pode ser escrito como quocientes de dois números inteiros, ou ainda, não possuem representação decimal finita ou decimal infinita e periódica, como, por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{10}$.

3.2. O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS É ENUMERÁVEL

Um conjunto diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto e uma parte própria.

Assim, se existe uma bijeção entre os conjuntos A e B, escreve-se $Card\ A = Card\ B$, para indicar a mesma cardinalidade.

Galileu (1564-1642), em seu livro “Diálogo sobre duas novas ciências”, observou ser possível estabelecer uma correspondência biunívoca (ou bijeção) em uma parte de um conjunto e o conjunto todo, fazendo corresponder a cada número natural o seu quadrado.

A bijeção entre o conjunto de todos os naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos, que é parte do anterior, é a correspondência que a n faz corresponder n^2 ($n \leftrightarrow n^2$).

Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, quando é possível estabelecer entre eles uma tal correspondência.

No caso de conjuntos finitos serem equivalentes corresponde a terem o mesmo número de elementos.

Em relação ao conjunto infinito, o conceito de equivalência ou cardinalidade é uma extensão da noção de “número de elementos de um conjunto”.

Cantor passou a chamar de enumerável a todo conjunto que tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais $1,2,3, \ldots$

O resultado do enunciado corresponde a seguinte relação entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$:

$$Card\,\mathbb{N} = Card\,\mathbb{Q}.$$

O que é surpreendente!

Vamos mostrar que os números racionais formam um conjunto enumerável.

Por simplicidade restringimo-nos aos racionais positivos, que distribuímos em vários grupos, cada grupo contendo as frações cujos numerador e denominador têm a mesma soma; por exemplo:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$$

é o grupo de todas as frações cujos termos têm soma 5. Vamos fazer uma lista de todos esses grupos, começando com aquele cuja soma dos termos das frações é 2 (e que só contêm a fração $1/1$); depois o grupo das frações $1/2$ e $2/1$, cuja soma dos termos é 3; e assim por diante, sucessivamente. Ao mesmo tempo, riscamos as frações que representam o mesmo número já representado por frações que apareceram antes. Eis a lista:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\cancel{\frac{2}{2}},\frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\cancel{\frac{2}{4}},\cancel{\frac{3}{3}},\cancel{\frac{4}{2}},\frac{5}{1}$$

$$\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1};$$

$$\frac{1}{7},\cancel{\frac{2}{6}},\frac{3}{5},\cancel{\frac{4}{4}},\frac{5}{3},\cancel{\frac{6}{2}},\frac{7}{2};$$

$$\frac{1}{8},\frac{2}{7},\cancel{\frac{3}{6}},\frac{4}{5},\frac{5}{4},\cancel{\frac{6}{3}},\frac{7}{2},\frac{8}{1}$$

É claro que esse procedimento resulta numa lista de todos os números racionais. Basta agora enumerá-los na ordem em que aparecem, isto é,

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = 2, r_4 = \frac{1}{3},$$
$$r_5 = 3, r_6 = \frac{1}{4}, r_7 = \frac{2}{3}, r_8 = \frac{3}{2},$$
$$r_9 = 4, r_{10} = \frac{1}{5}, r_{11} = 5, r_{12} = \frac{1}{6}, etc \ldots$$

Dessa maneira obtemos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números racionais (positivos) e dos números naturais, que também podemos expressar assim:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	1/2	2	1/3	3	1/4	2/3	3/2	4	1/5...

Isso mostra que os números racionais formam, de fato, um conjunto enumerável.

3.3. O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS É DENSO

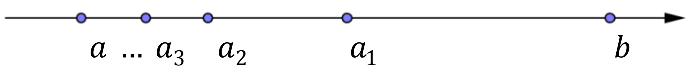
Um conjunto X chama-se denso quando todo intervalo aberto (a,b) contém algum ponto de X.

Em outras palavras, diremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionais é denso quando, dados arbitrariamente $a < b$ em $\mathbb{Q}$, for possível encontrar $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$.

Basta observar o seguinte: se $a < b$, então, $a < \frac{a+b}{2} < b$. Assim, seja (a, b) um intervalo aberto, com $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ em (a, b), tomando $a_1 = \frac{a+b}{2}, a_2 = \frac{a+a_1}{2}, a_3 = \frac{a+a_2}{2}, \ldots, a_{n+1} = \frac{a+a_n}{2}$, ... Teremos $a < \cdots < a_3 < a_2 < a_1 < b$.

Na reta real teremos:

Figura 1: Densidade do intervalo entre a e b.



Fonte: Criado pelo Autor

Assim, sempre é possível encontrar um número racional entre dois números racionais.

3.4. NÚMEROS IRRACIONAIS

Iniciaremos esta seção com o seguinte Lema:

Lema 3.4.1: Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Demonstração[1]:

Suponhamos, por absurdo, que se tenha $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$, com $p, q \in \mathbb{Z}$.

O fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição de p^2 e de q^2 em fatores primos.

Logo,p^2 contém um número par de fatores iguais a 2 enquanto $2q^2$ contém um número ímpar desses fatores.

Assim, não se pode ter $p^2 = 2q^2$.

O Lema de Pitágoras mostra que o número raiz quadrada de 2 não é racional, vez que não é possível representar raiz quadrada de 2 por uma razão de dois inteiros, ou ainda, $\sqrt{2}$ não possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica.

Assim como $\sqrt{2}$, existem muitos outros como, por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{10}$. Chamaremos esses números de irracionais.

Podemos demonstrar[2] esse fato como segue:

Se $\left(\frac{p}{q}\right)^n = m$. Podemos supor p e q primos entre si.

Então, p^n e q^n também serão primos entre si.

Mas temos $p^n = q^n . m$, o que implica ser q^n um divisor de p^n.

Absurdo, a menos que fosse $q = 1$.

Em resumo, dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, então,$\sqrt[n]{m}$.é um número irracional.

Definição 3.4.1 : Existe um número $\sqrt{2}$ *que não pode ser representado por uma fração. Assim como ele, existem outros. Portanto, sua representação é infinita e não periódica.*

Os números irracionais são números que não podem ser escritos como quociente de dois números inteiros, cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica.

---

[1]Lima, Vol. 1, 2010, 2010.
[2]Lima, 2002, p. 83.

Entretanto, os números irracionais possuem uma representação decimal infinita e aperiódica.

Consideremos a seguinte:

Proposição 3.4.1: Dados os números n *e* k *naturais, com* k >1*, ou* n *é uma kª potência perfeita ou* $\sqrt[k]{n}$ *é um número irracional*. (Muniz, 2012, Vol. 1, p. 21).

De acordo com o enunciado da proposição, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{10}$, etc., são todos irracionais, vez que 2 não é um quadrado perfeito, 5 não é um cubo perfeito e 10 não é uma 7ª potência perfeita.

Entretanto, é possível obter uma representação decimal para os números irracionais.

Consideremos a operação de radiciação no conjunto dos números racionais, que é a operação de obtenção de raízes de um número racional positivo, podendo ser estendida para números racionais negativos sendo dados $x<0$ racional e $n \in \mathbb{N}$ ímpar, seja

$$y = -\sqrt[n]{-x}$$

então, $y^n = x$ (o número y é denominado a raiz nª de x).

Por definição,

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Assim, tem-se $1<2<2^2$, segue

$$1 < \sqrt{2} < 2;$$

Como $1{,}4^2<2<1{,}5^2$, segue novamente que

$$1{,}4 \quad < \sqrt{2} < 1{,}5 \quad ,$$

por analogia, como $1{,}41 \quad < \sqrt{2} < 1{,}42$; tem-se que

$$1{,}414 \quad < \sqrt{2} < 1{,}425$$

e, prosseguindo obtemos um número α, cuja parte inteira é 1 e uma única lista $(4, 1, 4, \dots)$ de algarismos, tal que $\alpha = 1{,}414$ ....

Podemos observar que à medida que aumentamos a quantidade de dígitos dos números racionais a esquerda e a direta da $\sqrt{2}$ obtemos uma aproximação números racionais cada vez mais próximos do número irracional $\sqrt{2}$. Assim, podemos afirmar que 1,4 é um valor aproximado para $\sqrt{2}$; que $1{,}41$ é um valor aproximado para $\sqrt{2}$; que $1{,}414$ é um valor aproximado para $\sqrt{2}$; etc. Logo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$$

Assim, obtemos a raiz quadrada de dois por aproximação de números racionais. (Elon, 2006, p. 60).

Utilizando o mesmo processo, podemos encontrar uma representação decimal para os demais números irracionais acima.

4. ABORDAGEM AXIOMÁTICA DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Segundo Muniz, um número real é racional exatamente quando sua representação decimal for finita ou infinita e periódica. Números reais que não são racionais são denominados irracionais. Desse modo, os números irracionais são aqueles números reais que não podem ser escritos como quocientes de dois números inteiros, ou ainda aqueles números cuja representação decimal é infinita e aperiódica.

A fim de obtermos o conjunto dos números reais, Muniz postulou a existência do conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q}$, com as seguintes propriedades:

(I) As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ se estendem aos elementos de $\mathbb{R}$, gozando em $\mathbb{R}$ das mesmas propriedades que gozam em $\mathbb{Q}$.

(II) A ordenação dos elementos de $\mathbb{Q}$ se estende aos elementos de $\mathbb{R}$, também gozando em $\mathbb{R}$ das mesmas propriedades que goza em $\mathbb{Q}$; em particular, todo elemento de $\mathbb{R}$ é negativo, igual a zero ou positivo.

(III) Todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ e limitado superiormente tem supremo.

Estes fatos serão admitidos como axiomas, isto é, não serão demonstrados. Um axioma ou postulado em matemática é uma propriedade imposta como verdadeira. A utilização do método axiomático corresponde à aceitação do fato de que nem toda propriedade pode ser deduzida a partir de propriedades previamente estabelecida, sendo necessária a adoção a priori de um conjunto de axiomas. De outro modo, há um ponto em que precisamos admitir que certas propriedades (axiomas) sejam válidas, isto é, sem justificativa embasada na validade de outras propriedades.

Desses três postulados decorrem todas as propriedades dos números reais.

Para Lima o método axiomático dos números Reais se justifica pela importância das relações entre os objetos, sendo irrelevante sua natureza intrínseca (2010, p.61).

4.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$

O primeiro postulado significa que estão definidas em $\mathbb{R}$ duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

(1) Associatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$.

(2) Comutativa: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x.y = y.x$.

(3) Elemento neutro: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = 1$ e $x.1 = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(4) Inversos: Todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $1/x \in \mathbb{R}$ tal que $x.1/x = 1$.

(5) Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Destes axiomas resultam as regras de manipulação com os números reais. Vejamos algumas delas.

De (1) resulta que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por analogia $1.x = x$ e $x.1/x = 1$ quando $x \neq 0$.

A soma $x + (-y)$ será indicada por $x - y$ e denominada diferença entre x e y. O produto $x.1/y$, se $y \neq 0$, será representado por x/y denominado quociente de x por y.

De (2) temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $x.0 + x = x.0 + x.1 = x.(0 + 1) = x.1 = x$. Ao somarmos $-x$ a ambos os membros da igualdade $x.0 + x = x$ obtemos $x.0 = 0$.

Da distributividade resultam as "regras de sinal":

$x.(-y) = (-x).y = -(x.y)$ e $(-x).(-y) = xy$.

Com efeito,

$x.(-y) + x.y = x.(-y + y) = x.0 = 0.$

Somando $-(x.y)$ a ambos os membros da igualdade $x.(-y) + x.y = 0$, segue:

$x.(-y) = - \; - \; (x.y).$

Por analogia, $(-x).y = -(x.y)$.

Então $(-x).(-y) = -\,[\,x.(-y)] \;=\; -\,[\,-(x.y)] \;=\; x.y$.

Entretanto, não é possível efetuar as quatro operações com as expressões decimais usando-as integralmente, vez que elas são organizadas da esquerda para a direita, enquanto as operações são normalmente desenvolvidas da direita para a esquerda. Assim, dados dois números reais $x = a_0, a_1 a_2 a_3$ ... e $y = b_0, b_1 b_2 b_3$ ..., com y≠0, para calcular a soma e a multiplicação com x e y, toma-se n ϵ N e, considerando-se os valores aproximados $x_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, $y_n = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$, e o resultado da soma e da multiplicação são valores aproximados para os resultados que desejamos calcular.

4.2 DESIGUALDADE

O postulado (2) refere-se à relação de desigualdade $x < y$ entre números reais.

A relação de ordem denotada por ≥ satisfaz os seguintes axiomas:

(1) Consistência: se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \geq b$ em Q, então $a \geq b$ em $\mathbb{R}$.

(2) Antissimetria: se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

(3) Transitividade: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$.

(4) Tricotomia:para todos $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $a \geq b, a = b \; ou \; b \geq a$.

Destes axiomas resultam as regras de manipulação de desigualdade com os números reais. Vejamos algumas delas.

De (1), isto é, $a \geq b$, vem imediatamente que $a - b$ é positivo. Fazendo $a - b = (a + c) - (b + c)$, segue que $a + c \geq b + c$.

De (4) resulta que a diferença $a - b$ é positiva (caso $a \geq b$) ou é zero (caso $a = b$) ou é negativa (caso $b \geq a$).

Se $a < b$ e $c < d$ então, somando c a ambos os membros da primeira desigualdade e b a ambos os membros da segunda, obtemos $a + c < b + c$ e $b + c < b + d$. Por (3) resulta então que $a + c < b + d$.

A relação de ordem em $\mathbb{R}$, quando os seus elementos são representados por expressões decimais, isto é, numericamente, traduz-se da seguinte maneira: Sejam x = $a, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n$ ...e y = $b, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots b_n$ ... dois números reais escritos na sua representação decimal, de modo que essas representações não terminem em uma seqüência de noves. A relação de ordem $\alpha \leq \beta$ traduz-se do seguinte modo: se $\alpha \neq \beta$, tem-se que $a_n \leq b_n$ para o primeiro índice n tal que $a_n \neq b_n$.

Algebricamente, tem-se $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, a diferença $\beta - \alpha$ é um número positivo.

4.2.1. Intervalos

As seguintes notações serão usadas para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos.

$$[a, b] = \{x \epsilon \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \epsilon \mathbb{R}; a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \epsilon \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \epsilon \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$

Esses intervalos são limitados, com extremos a, b; $[a, b]$ é um intervalo fechado, (a, b) é aberto, $(a, b]$ é fechado à direita e $[a, b)$ é fechado à esquerda.

Temos ainda, os seguintes intervalos ilimitados.

$$(-\infty, b] = \{x \epsilon \mathbb{R}; x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \epsilon \mathbb{R}; x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \epsilon \mathbb{R}; x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \epsilon \mathbb{R}; x > a\}.$$

O intervalo$(-\infty, b]$ é a semi-reta esquerda fechada de origem b; $(-\infty, b)$ é a semi-reta esquerda aberta, de origem b; $[a, +\infty)$ é a semi-reta direita fechada, de origem a e $(a, +\infty)$ é a semi-reta direita aberta, de origem a.

Finalmente, $(-\infty, +\infty)$=R pode ser considerado aberto.

É muito conveniente imaginar o conjunto R como uma reta a "reta real" e os números reais como pontos dessa reta.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$.

Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de x.

Por analogia, $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \in X$ então $a \leq x$. Um elemento com esta propriedade chama-se uma cota inferior de X. Tem-se então $X \subset [a, +\infty)$.

O conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio chama-se limitado, quando X for simultaneamente limitado superiormente e inferiormente, isto é, quando existem $a\ e\ b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [a, b]$.

Exemplo: O conjunto dos números racionais $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ é limitado superiormente e inferiormente, vez que existem $1\ e\ 0 \in \mathbb{Q}$ tais que $X \subset [0,1]$.

O intervalo é um conjunto com a seguinte propriedade: seja o intervalo não vazio $I \subset \mathbb{R}$, dados $c\ e\ d \in I$ tem-se $c < x < d$ então $x \in \mathbb{R}$. (Caracterização do intervalo).

4.3 COMPLETUDE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O postulado (3) Todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ e limitado superiormente tem supremo $(supX)$ refere-se à completude dos números reais.

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existir um número real b tal que tal que para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$:

$$X \subset (-\infty, b]$$

Nesse caso, o número $b \in \mathbb{R}$ é uma cota superior para X.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente e b é a menor cota superior de X, definiremos b como o supremo de X, $b = supX$.

Por analogia, um conjunto não vazio $Y \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se existir um número real a tal que para todo $y \in Y$, tem-se $a \leq y$:

$$Y \subset [a, +\infty)$$

e, sendo esse o caso, o número $a \in \mathbb{R}$ é uma cota inferior para Y.

Se o conjunto não vazio $Y \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e o número $a \in \mathbb{R}$ é a menor cota inferior de Y, definiremos a como o ínfimo de Y, $a = infY$.

Se $X \subset \mathbb{R}$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo, se X possuir um elemento mínimo, ele será seu ínfimo. Reciprocamente, se $supX$ pertence a X então é o maior elemento de X, se $infX$ pertencer a X, será o seu menor elemento.

Exemplo: todo subconjunto finito $X \subset \mathbb{R}$ possui inf e sup.

Exemplo: se $X = (-\infty, b]$ e $Y = [a, +\infty)$, temos $b = supX$ e $a = infY$.

Dados $a < b$ em $\mathbb{R}$, seja $X = (a, b)$ o intervalo aberto com esses extremos. Tem-se $infX = a$ e $supX = b$.

Exemplo: Seja$X = (1,2) \subset \mathbb{Q}$, evidentemente 1 é uma cota inferior de X, vez que nenhum número $x \in X$ com $1 < x$ é cota inferior de X. De fato, se $1 < x < 2$, então o número $\frac{1+x}{2} \in X$. Mas como $\frac{1+x}{2} < x$, o número x não pode ser cota inferior de X. Segue então que 1 é a maior cota inferior de X, e observe que $1 \notin X$. De modo análogo se mostra que $2 = supX$. Neste caso, tem-se que $supX \notin X$ e $infX \notin X$.

Sejam os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x^2 < 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{Q}; y^2 > 2\}$. Não existe o $supX$ nem $infY$ em $\mathbb{Q}$. Pois, se existir $b = supX$, deverá ser $b^2 = 2$. Entretanto, pelo Lema de Pitágoras, não existe número racional com esta propriedade. Assim, concluímos que em $\mathbb{Q}$ o conjunto X não possui supremo.

Analogamente, se existir $a = infY$, deverá satisfazer $a^2 = 2$, e, portanto, Y não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Esses argumentos mostram que, em $\mathbb{R}$ todo conjunto não-vazio, limitado superiormente (inferiormente), possui supremo (ínfimo), e existirá, em $\mathbb{R}$, um elemento $a > 0$ cujo quadrado é 2. Escreve-se $a = \sqrt{2}$, um número irracional.

Sejam $X = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x^2 < 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{R}; y^2 > 2\}$ limitado inferiormente e superiormente, respectivamente, possui pelo Axioma (3), $ínfimo$ e $supremo$. A lista de números racionais $a_1 = 1{,}4;\ a_2 = 1{,}41;\ a_3 = 1{,}414;\ a_4 = 1{,}4142;\ a_5 = 1{,}41421; a_6 =\ 1{,}414213;\ a_7 = 1{,}4142135;\ a_8 = 1{,}41421356;$ ..., estritamente crescente, satisfazem a condição $0 < x^2 < 2$, é limitada superiormente, vez que, existe um número real $\sqrt{2}$ tal que todos os a_i, com $i \in \mathbb{N}$, pertencem ao intervalo $(-\infty,\sqrt{2})$. Portanto, $\sqrt{2}$ é o supremo de X.

Analogamente, a lista de números racionais $a_1 = 1{,}5;\ a_2 = 1{,}42;\ a_3 = 1{,}415;\ a_4 = 1{,}4143;\ a_5 = 1{,}41422; a_6 =\ 1{,}414214;\ a_7 = 1{,}4142136;\ a_8 = 1{,}41421357;$ ..., estritamente decrescente, satisfazem a condição $y^2 > 2$, é limitada inferiormente, vez que existe um número real $\sqrt{2}$, tal que todos os a_i, com $i \in \mathbb{N}$, pertencem ao intervalo $(\sqrt{2},+\infty)$. Portanto, $\sqrt{2}$ é o ínfimo de X.

Assim como $\sqrt{2}$, existem outros números, Isto é, dados $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um único número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número b chama-se a *raiz n-ésima* de a e é representado pelo símbolo $b = \sqrt[n]{a}$.

Isso significa que o conjunto dos números Reais, não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui $supremo\ b = \sup X \in \mathbb{R}$.

Outrossim, todo conjuntos não vazio, dos números Reais, limitado inferiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui $ínfimo\ a = \text{ínf}\, X \in \mathbb{R}$.

Chamaremos *números irracionais* aos elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, aos números reais que não são racionais.

Portanto, o conjunto dos números Reais é formado pela reunião dos conjuntos dos números racionais ($\mathbb{Q}$) mais o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$), isto é, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Uma maneira bastante útil de pensar na completude do conjunto dos números reais é pensar geometricamente.

4.4. RETA REAL

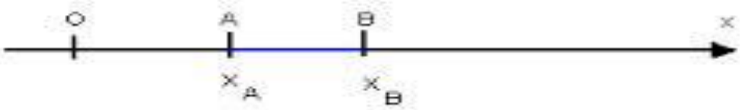
A representação geométrica do conjunto dos números reais possibilita ter uma ideia mais nítida dos números irracionais e situá-los em relação aos racionais.

Imaginemos uma reta, na qual fixaremos um ponto O, denominado origem, e um ponto A, diferente e a direita de O. Tomaremos o segmento OA como unidade de comprimento.

O ponto O divide a reta em duas semirretas. A semirreta que contém A chamaremos de semirreta positiva. A outra é a semirreta negativa.

Assim, os pontos da semirreta positiva estão à direita de O e os da semirreta negativa à esquerda de O.

Figura 2: Intervalo entre os pontos A e B.



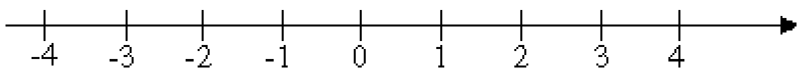
Fonte: Criado pelo Autor

Consideremos um ponto X qualquer da reta OA. Se o segmento de reta OA couber um número exato n de vezes em OX, diremos que a abscissa de X é o número natural n ou número negativo $-n$, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem. Se X coincidir com a origem, sua abscissa será 0.

O conjunto $\mathbb{N}$ formado pelo zero e pelas abscissa dos pontos X à direita da origem no eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em OX, chama-se o conjunto dos números Naturais.

O conjunto $\mathbb{Z}$, formado pelo número zero e pelas abscissa dos pontos X do eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes com OX, chama-se o conjunto dos números inteiros. O conjunto dos números Inteiros é a reunião dos números Naturais com o zero e o conjunto $-N$ dos números negativos.

Figura 3: Números inteiros na reta

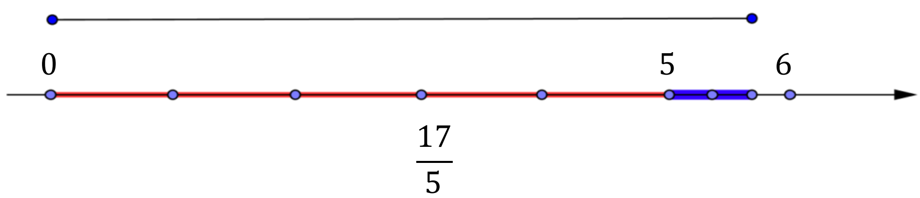


Fonte: Criado pelo Autor

Se o ponto X, pertencente ao eixo real, é tal que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, de modo que algum segmento w caiba n vezes em OA e m vezes em OX, diremos que a abscissa do ponto X é m/n ou $-m/n$, conforme esteja à direita ou à esquerda da origem.

Uma forma bastante simples de representar uma fração na reta seria explicitar $17/3$ como $5 + 2/3$, assim devemos dividir o espaço entre 5 e 6 em três partes iguais e tomar o segundo ponto de divisão. Logo, neste lugar estará representado o número $17/3$.

Figura 4: Representação de fração na reta

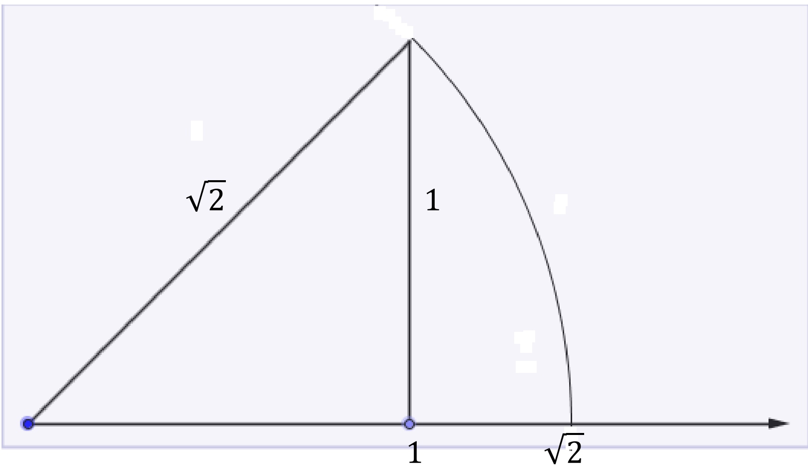


Fonte: Criado pelo Autor

O conjunto $\mathbb{Q}$, formado pelas abscissa dos pontos X do eixo real, tais que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário A chama-se conjunto dos números racionais.

Se o ponto X no eixo real, pertencente ao eixo real, é tal que o segmento OX é incomensurável com o segmento unitário OA, diremos que a abscissa do ponto X é um número irracional.

Figura 5: Representação de Irracional na reta



Fonte: Criado pelo Autor

Usaremos o método das aproximações sucessivas para obter $\sqrt{2}$. Começaremos com uma primeira aproximação 1,4, escolhida de modo qualquer. Então um dos dois números 1,4, $\frac{2}{1,4}$ é menor do que $\sqrt{2}$ e o outro é maior. Com o uso da calculadora, a média aritmética $\frac{1}{2}\left(1,4+\frac{2}{1,4}\right)=1,41428571428571428571428571428571428\ldots$ é, neste caso, uma aproximação para $\sqrt{2}$, melhor do que 1,4. Se não estivermos satisfeitos com 1,4142857142857142857142857142857, podemos tomar uma terceira aproximação, $\frac{1}{2}\left(1,4142857142857142857142857142857+\frac{2}{1,4142857142857142857142857142857}\right)=$ $1,4142135642135642135642135642136$, ainda melhor do que a segunda. E, assim por diante.

De modo geral, para obter $\sqrt{n}$, começamos com uma primeira aproximação a_1, escolhida de modo qualquer. A menos que não seja um quadrado perfeito (o que não é comum) tem-se, em geral, $a_1 \neq \sqrt{n}$. Então um dos dois números a_1, n/a_1 é menor do que $\sqrt{n}$ e o outro é maior. A média aritmética $a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{n}{a_1}\right)$ é, neste caso, uma aproximação para $\sqrt{n}$, melhor do que a_1. Senão estivermos satisfeitos com a_2, podemos tomar uma terceira aproximação $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right)$, ainda melhor do que a segunda. E assim por diante.

Quando X está à direita da origem, x é a medida do segmento OX, por definição. Se X está à esquerda da origem, a abcissa x é a medida do segmento OX precedida do sinal negativo.

O conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos são os números racionais e os números irracionais chama-se conjunto dos números reais.

4.5. O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NÃO É ENUMERÁVEL

Cantor fez a descoberta de que os números reais não são enumeráveis. Seja o intervalo $[0,1]$, isto é, os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq x \leq 1$.

Consideremos a representação decimal dos números reais. Devemos observar que alguns números tem representação infinita como as dizimas periódicas.

$$0{,}353535\ldots \text{ e } 0{,}23555\ldots;$$

ou dízima não periódica

$$0{,}20220022200022220000222222\ldots$$

Os números que tem representação decimal finita, também podem ser representados por uma dizima periódica. Exemplos:

$$0{,}437 = 0{,}4369999\ldots$$

$$0{,}052 = 0{,}0519999\ldots$$

$$0{,}031 = 0{,}0309999\ldots$$

$$0{,}601 = 0{,}6009999\ldots$$

Vamos escolher, para cada número, sua representação decimal infinita: assim teremos certeza de que cada número terá uma só representação decimal. O número zero é um caso à parte, com a representação $0{,}000\ldots$ enquanto a representação do número 1 é $0{,}999\ldots$

Suponhamos agora que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números de intervalo $[0,1]$ e os números naturais. Para melhor fixar as idéias, vamos imaginar que essa correspondência fosse assim:

$$1 \leftrightarrow x_1 = 0{,}20537\ldots$$

$$2 \leftrightarrow x_2 = 0{,}09504\ldots$$

$$3 \leftrightarrow x_3 = 0{,}61028\ldots$$

$$4 \leftrightarrow x_4 = 0{,}00999\ldots$$

$$5 \leftrightarrow x_5 = 0{,}70298\ldots$$

Mostraremos em seguida que isto nos leva a uma contradição, construindo um número x do intervalo $[0,1]$ que não esteja na lista acima. Para isso vamos formar um número diferente do primeiro acima na 1^{a} casa decimal; diferente do segundo na 2^{a} casa; diferente do terceiro na 3^{a} casa; e assim por diante. Para esclarecer bem o que estamos fazendo, re-escrevemos a lista, destacando, em negrito, as várias casas decimais mencionadas:

$$x_1 = 0{,}\mathbf{2}0537\ldots$$

$$x_2 = 0{,}0\mathbf{9}504\ldots$$

$$x_3 = 0{,}61\mathbf{0}28..$$

$$x_4 = 0{,}009\mathbf{9}9\ldots$$

$$x_5 = 0{,}7029\mathbf{8}\ldots$$

…………………….

Formemos o número x' com os algarismos da diagonal em negrito, na ordem em que aparecem:

$$x' = 0{,}29098\ldots$$

Agora trocamos todos os algarismos deste número: escrevemos 9 onde o algarismo não for 9 e 5 onde ele for 9. Assim obtemos o número

$$x = 0{,}95959\ldots$$

que difere de x_1 na 1^{a} casa $(9\ ^{1}\ 2)$; difere de x_2 na 2^{a} casa $(5\ ^{1}\ 9)$; difere de x_3 na 3^{a} casa $(9\ ^{1}\ 0)$; difere de x_4 na 4^{a} casa $(5\ ^{1}\ 9)$; difere de x_5 na 5^{a} casa $(9\ ^{1}\ 8)$; e assim por diante. Então, x é um número do intervalo $[0,1]$ que não aparece no conjunto dos números:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

Mas isto é uma contradição com a hipótese inicial de que *todos* os números do intervalo $[0,1]$ formassem um conjunto enumerável! Somos, pois, forçados a rejeitar essa hipótese e a aceitar o fato de que esse conjunto não é enumerável. Como o intervalo $[0,1]$ é um subconjunto do conjunto de todos os números reais, concluímos que este conjunto também não é enumerável, como queríamos demonstrar.

Segue que o conjuntodos números irracionais não é enumerável, vez que temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e, sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável, se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, $\mathbb{R}$ seria enumerável, como reunião de dois conjuntos enumeráveis.

Isso mostra que existem mais números irracionais do que racionais.

CONCLUSÃO

A educação é fundamental para o desenvolvimento do nosso país e muito deve ser feito. A deficiência na formação dos professores e a precariedade dos recursos materiais representa um entrave para o desenvolvimento da educação no Brasil. O conhecimento do que se deve ensinar é condição necessária para que o professor de matemática possa dar uma boa aula.

A evolução histórica dos números reais nos mostrou que até sua descoberta, o número real passou por muitos percalços. Dando-se por um período muito longo até um conceito definitivo. Levou cerca de 2500 anos, da descoberta pelos gregos dos seguimentos incomensuráveis até a construção dos números reais por Dedekind com o seu postulado de continuidade a partir da idéia de corte.

A compreensão dos números reais é de suma importância para o aluno do ensino médio, vez que tudo quanto vai ser ensinado aos alunos do ensino médio se referirá a conjuntos dos números reais.

Vários são os argumentos para tentar compreender ou justificar este estado de coisas, mas o que nos impulsionou para elaboração deste trabalho não foi exatamente compreender as razões históricas ou filosóficas que sustentam tais argumentos, e sim responder a seguinte questão: *como é possível ensinar o conjunto dos números reais de forma correta e ao mesmo tempo acessível ao aluno?* Procuramos responder a tal pergunta, com uma pequena contribuição, que de alguma forma auxilie no tratamento dos números reais.

A proposta apresentada consisti em mostrar que a essência dos números reais está no surgimento dos números irracionais. Dando-se devida atenção à criação de um novo conjunto, o conjunto dos números irracionais.

A proposta do ensino do conjunto dos números reais pelo método axiomático dar condições para que o professor de matemática passe a dar especial atenção a relação que existente, caracterizando os números racionais como razão entre dois números inteiros a e $b, b \neq 0$, cuja representação decimal é finita ou periódica e conceituando os números irracionais de forma consistente, como uma aproximação de números racionais, passando a dar sua representação decimal infinita e aperiódica, passando a ter condições de apresentar o conjunto dos números reais como a reunião dos números racionais e irracionais através do método axiomático.

Assim, de posse do significado dos números reais ficará bem mais simples para o aluno compreender os números racionais e irracionais como resultado das medições de comprimento ao se trabalhar a representação geométrica dos números reais na reta: os racionais expressam as medidas dos segmentos comensuráveis com a unidade de comprimento escolhida, ao passo que os irracionais representam as medidas dos segmentos que são incomensuráveis com essa mesma unidade.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação**: referências – elaboração: 6023: 2002. Rio de Janeiro, 2002.

______. **Informação e documentação**: Trabalhos acadêmicos - Apresentação: **NBR 14724**. Rio de Janeiro, 2005.

ÁVILA, Geraldo. **Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática.** Revista do Professor de Matemática, 07.

______. **Cardinalidade o conjuntos dos racionais é enumerável e os dos reais não é.** Revista do Professor de Matemática, 04.

______. **Grandezas incomensuráveis e números irracionais.** Revista do Professor de Matemática, 52.

______. **As dízimas periódicas e a calculadora.** Revista do Professor de Matemática, 52.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2002.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª edição. Lisboa: Gravida, 1998.

CONDURÚ, Marise Teles; José Almir Rodrigues. **Elaboração de trabalhos Acadêmicos** — Normas, critérios e procedimentos, 3ª Ed. Belém- PA: GPHS, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à Historia da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1. Funções de uma variável.** 10ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

______.***As várias maneiras de se extrair uma raiz quadrada.*** Revista do Professor de Matemática, 02, pág. 24.

______.**Curso de análise**. V. 1; 12ª edição. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

______.**Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. 1ª edição. SBM: 2001.

______.**Matemática e Ensino.**2ª edição. Rio de Janeiro – RJ:SBM, 2002.

______.**Meu professor de matemática e outras histórias**. 5ª edição. Rio de Janeiro – RJ: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. **A matemática do ensino médio – volume 1.** 9ª edição. Rio de Janeiro:SBM 2006.

MUNIZ, Antonio Caminha; Caminha Muniz Neto. C. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.