



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Equações de 2º grau em Geometria Plana †

por

**Aldeck Menezes de Oliveira**

Sob orientação do

**Prof. Pedro Antonio Hinojosa Vera**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2013  
João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.



# Equações de 2º grau em Geometria Plana

por

**Aldeck Menezes de Oliveira**

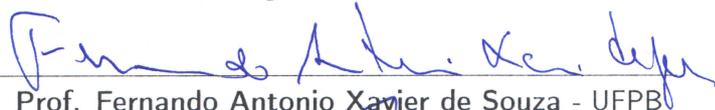
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:



Prof. Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)



Prof. Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB



Prof. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Dezembro/2013

# Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente.

A Fernando Bastos de Oliveira, meu pai, e a veralucia Inácio de Menezes, minha mãe, que sempre me incentivaram ao estudo.

As minhas filhas, Andressa Maria Lima de Oliveira e Adriely Lima de Oliveira, que foi onde consegui forças para a dedicação ao meu trabalho.

A minha esposa, Marlene Freires de Lima Oliveira, pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos professores da Universidade Federal da Paraíba do departamento de matemática que lecionaram no PROFMAT, pois foram eles quem incentivaram e orientaram na busca de conhecimentos.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar este trabalho de conclusão de curso, em especial ao professor Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera, que corrigiu e orientou, com muita dedicação e paciência todo o meu trabalho.

Aos meus amigos, Alysson Espedito, Francisco Lima, Marcelo Dantas, Diêgo Ayllo, Roberval e Ronaldo, pelas verdadeiras amizades cultivadas graças ao advento da matemática em nossas vidas.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação do mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT) dando oportunidade para que professores da educação básica possam melhorar os seus conhecimentos matemáticos, e a Universidade Federal da Paraíba (UFPB), por abraçar essa ideia.

A Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

# Dedicatória

*Dedico este trabalho, principalmente, as minhas filhas e minha esposa, que estiveram sempre ao meu lado nessa luta, e a todos aqueles que se alegram com o nosso sucesso.*

# Resumo

Nesta dissertação, falamos um pouco da história de como iniciou a Trigonometria e como os antigos matemáticos determinavam as raízes de uma equação de segundo grau. Deduzimos a Lei dos cossenos, a Fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo, a fórmula para o cálculo da cotangente do ângulo metade interno a um triângulo e a famosa fórmula de Bhaskara. Definimos as cônicas como lugar geométrico e como conjuntos equidistantes no plano. E por fim, apresentamos alguns resultados relacionando a geometria do triângulo, dos polígonos convexos e das cônicas com as equações de segundo grau.

# Abstract

In this dissertation, we talked a bit about the history of how and trigonometry began as the ancient mathematicians determined the roots of a quadratic equation. Deduce the law of cosines, Heron's formula for calculating the area of a triangle, the formula for calculating the cotangent of the angle inner half of a triangle and the famous quadratic formula. Defined as the conical locus and as equidistant sets in the plane. Finally, we present some results relating the geometry of the triangle, of convex polygons and the conical with quadratic equations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Uma relação trigonométrica no triângulo $\Delta$ . . . . .	2
1.2	A Fórmula de Heron . . . . .	8
1.3	Equações do 2º grau . . . . .	10
1.3.1	Um pouco de história . . . . .	10
1.3.2	Raízes de uma equação do 2º grau . . . . .	15
1.4	Definição das cônicas como lugar geométrico . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Deslocamento paralelo</b>	<b>20</b>
2.1	Deslocamento paralelo ao triângulo $\Delta$ . . . . .	20
2.2	Deslocamento paralelo a um polígono convexo . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Conjuntos equidistantes no plano</b>	<b>29</b>
3.1	Retas e círculo . . . . .	29
3.2	As cônicas como conjuntos equidistantes e suas equações canônicas . . . . .	31
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>

# Introdução

Este trabalho trata, de um modo geral, da obtenção de resultados que relacionam a geometria do triângulo, dos polígonos convexos e das cônicas com as equações de segundo grau. Seguindo a linha de pensamento de **Ronaldo Garcia**, em seu artigo intitulado de "*Equações do Segundo Grau e Geometria Plana*", ver [1], apresentamos este trabalho de maneira clara e objetiva, tornando-o de fácil compreensão para o leitor.

Uma viagem no tempo para conhecer um pouco da história da Trigonometria e, bem como, conhecer as primeiras fórmulas ou regras, criadas por grandes matemáticos, para obtenção das raízes de uma equação de 2º grau. A dedução de fórmulas conhecidas, como por exemplo, a Lei dos cossenos, a Fórmula de Heron, a fórmula para determinar as raízes de uma equação de 2º grau, conhecida como *Fórmula de Bhaskara*, e as definições das cônicas como lugar geométrico e conjuntos equidistantes.

Este trabalho tem como objetivo principal, apresentar algumas situações que aparecem na geometria plana, em que muitas das vezes passam despercebidas de estudantes (ou até mesmo professores) de matemática do ensino básico a presença de expressões da forma:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{com } a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

As constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são chamadas, respectivamente, de coeficiente quadrático, coeficiente linear e termo independente. O termo "quadrático" vem de *quadratus*, que em latim significa quadrado. Equações deste tipo, podem ser resolvidas através da fatoração, do completamento de quadrados, do uso de gráficos, fórmulas e outros métodos. O matemático Bhaskara Akira apresentou a sua maneira de tratar uma equação desta: uma fórmula que leva seu nome.

Para um triângulo qualquer, apresentamos e deduzimos a Lei dos cossenos, uma generalização do teorema de Pitágoras, uma fórmula genial que envolve as medidas dos lados e dos ângulos internos de um triângulo. Para o cálculo da área do triângulo, a Fórmula de Heron, de pouco destaque nos livros de ensino básico de matemática, mas de grande importância para o nosso trabalho.

---

Em geometria, cônicas são as curvas geradas ou encontradas através da intersecção de um plano com um cone de duas folhas.

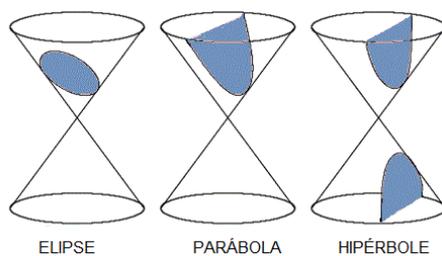


Figura 1: Cônicas

No capítulo 1, abordou-se fórmulas e conceitos básicos, onde muitos deles encontrados em livros de ensino básico de matemática, tomando como apoio de pesquisa, os livros [3], [4], [5], [6] e [8]. Seguindo nossa trajetória, vem o capítulo 2, com o cálculo de áreas de regiões geradas a partir de conjuntos equidistantes a uma medida  $r$  de um triângulo, e generalizando para polígonos convexos. Por fim, no capítulo 3, conjuntos equidistantes que definem retas com denominações conhecidas, círculo e cônicas, sem deixar de deduzir suas equações canônicas.

Esperamos que este trabalho sirva de apoio de pesquisa para outras dissertações, ou talvez como ferramenta de trabalho na preparação de aulas para professores de matemática do ensino básico.

# Capítulo 1

## Preliminares

A **Geometria** é um ramo da matemática que trata das questões relacionadas a forma, tamanho e posições relativas de figuras e com as propriedades do espaço. Ela foi posta em uma forma axiomática por **Euclides** de Alexandria, por volta do século III aC. A geometria euclidiana é caracterizada pelo espaço euclidiano, imutável, simétrico e geométrico, e se manteve ileso no pensamento dos matemáticos por muitos séculos, onde somente nos tempos modernos puderam ser construídos modelos de geometria não-euclidiana.



Figura 1.1: Euclides

Será estudado neste capítulo uma importante relação trigonométrica dada em função das medidas dos lados de um triângulo qualquer, como também uma fórmula para o cálculo da área do mesmo. Um pouco da história da matemática, sem deixar de deduzir, de maneira simples, a famosa fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau. E por último tomar conhecimento das definições das cônicas como lugar geométrico.

## 1.1 Uma relação trigonométrica no triângulo $\Delta$

A trigonometria começou na Grécia antiga surgindo devido às necessidades da Astronomia, onde os estudos se concentravam na trigonometria esférica, para isso foi necessário desenvolver partes da trigonometria plana. Apesar de se falar em muitos estudiosos antigos em trigonometria, foi dado o título de fundador da trigonometria a **Hiparco de Niceia** (viveu em torno de 120 aC.), tendo desenvolvidos trabalhos principalmente em Astronomia. É bem provável que a divisão do círculo em  $360^\circ$  tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco.



Figura 1.2: Hiparco de Nicéia

Não pode-se deixar de mencionar **Cláudio Ptolomeu** (viveu em torno de 150 dC.), que foi um outro grande matemático que contribuiu no estudo da trigonometria. Ele deduziu, o que escrita em notação moderna, as expressões para  $\sin(a \pm b)$  e  $\cos(a \pm b)$ , onde  $a$  e  $b$  são ângulos quaisquer. Demonstrou também que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , onde  $x$  é um ângulo agudo. A Trigonometria dada por Ptolomeu no *Almagesto* foi padrão até o renascimento.



Figura 1.3: Cláudio Ptolomeu

O matemático **François Vieta** sistematizou o estudo da trigonometria esférica, deduzindo fórmulas para  $\sin(n\alpha)$  e  $\cos(n\alpha)$ , dentre outras.

Nesta seção, serão deduzidas a *lei dos cossenos* e a fórmula para a cotangente de  $\alpha/2$  em função das medidas dos lados do triângulo, onde  $\alpha$  é um ângulo interno do mesmo.

**Proposição 1.1 (Lei dos cossenos)** *Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.*

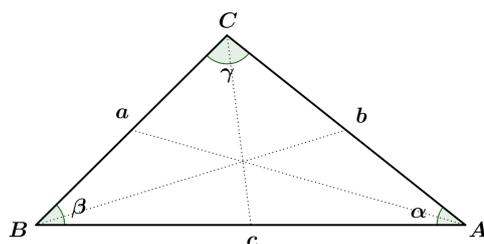


Figura 1.4: Triângulo  $\Delta ABC$ .

**Demonstração:** Seja o triângulo  $\Delta ABC$  com suas medidas  $a, b, c$  e ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ver figura 1.4.

Traçando a altura  $CM$  relativa ao lado  $AB$ , obtemos os triângulos  $\Delta BCM$  e  $\Delta ACM$ , como mostra a figura 1.5.

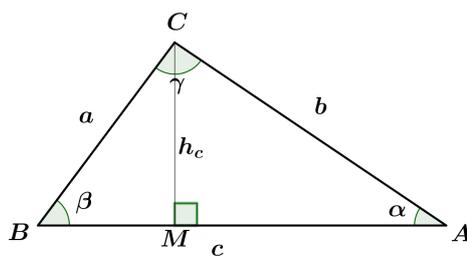


Figura 1.5: Triângulo  $\Delta ABC$  com a altura  $CM$  traçada.

Do triângulo  $\Delta ACM$ , tiramos:

$$AM = b \cdot \cos \alpha \quad (1.1)$$

O Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $\Delta ACM$ , obtemos:

$$b^2 = AM^2 + CM^2$$

$$CM^2 = b^2 - AM^2$$

$$CM^2 = b^2 - (b \cdot \cos \alpha)^2$$

$$CM^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2 \alpha \quad (1.2)$$

Fazendo o mesmo ao triângulo  $\Delta BCM$ , obtemos:

$$a^2 = CM^2 + BM^2$$

$$a^2 = CM^2 + (c - AM)^2$$

$$a^2 = CM^2 + (c - b \cdot \cos \alpha)^2$$

Daí, temos:

$$CM^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha - b^2 \cdot \cos^2 \alpha \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3), obtemos:

$$b^2 - b^2 \cdot \cos^2 \alpha = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha - b^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha$$

Portanto,

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha} \quad (1.4)$$

Notamos que não há alterações para triângulos obtusângulos (ver figura 1.6), pois do triângulo  $\Delta ACM$ , tiramos:

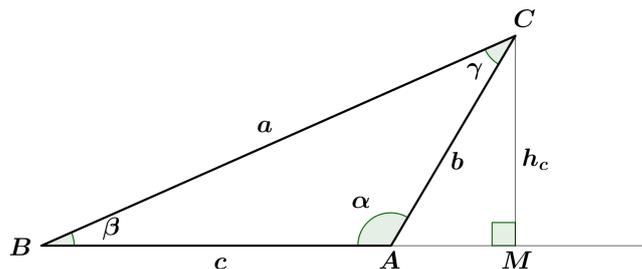


Figura 1.6: Triângulo obtusângulo  $\Delta ABC$  com a altura  $CM$  traçada.

$$\frac{AM}{b} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$AM = -b \cdot \cos \alpha$$

Seguindo os mesmos passos, chegamos novamente em:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$$

analogamente,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

□

Vale ressaltar que, o famoso Teorema de Pitágoras é um caso particular da Lei dos cossenos, ou seja, quando  $\alpha = 90^\circ$ . Assim, podemos escrever (síntese de Clairaut):

$$\alpha < 90^\circ \iff a^2 < b^2 + c^2$$

$$\alpha = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$$

$$\alpha > 90^\circ \iff a^2 > b^2 + c^2,$$

A *Lei dos cossenos* possui muitas aplicações em geometria, como por exemplo, na determinação dos ângulos, alturas relativas, medianas, etc. do triângulo em função das medidas dos lados.

**Proposição 1.2** *Considere um triângulo  $\Delta ABC$  qualquer de lados  $a, b$  e  $c$ , semi-perímetro  $s = (a + b + c)/2$  e denote por  $\alpha$  o ângulo interno oposto ao lado  $a$ . Então:*

$$\cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} \quad (1.5)$$

**Demonstração:** Seja o triângulo  $\Delta ABC$  como mostra a figura 1.7, logo abaixo:

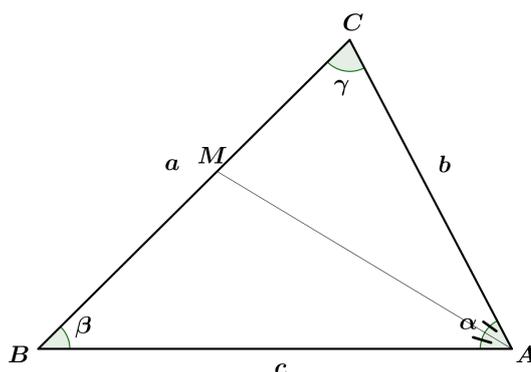


Figura 1.7: Triângulo  $\Delta ABC$  com bissetriz partindo do vértice  $A$  traçada.

A bissetriz interna partindo do vértice  $A$  do triângulo  $\Delta ABC$  divide o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes (ver [3]). Com isso temos:

$$\frac{CM}{BM} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CM}{b} = \frac{BM}{c} = \frac{a}{b+c}.$$

Assim,

$$\boxed{CM = \frac{ab}{b+c}}$$

Através do cálculo da bissetriz interna (ver [3]), temos o seguinte resultado:

$$\boxed{AM = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}}$$

Aplicando a Lei dos cossenos (1.4) no triângulo  $\Delta ACM$ , temos:

$$CM^2 = b^2 + AM^2 - 2 \cdot b \cdot AM \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 &= b^2 + \left(\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}\right)^2 - 2b\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
\frac{a^2b^2}{(b+c)^2} &= b^2 + \frac{4}{(b+c)^2}bcs(s-a) - \frac{4b}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{4bcs(s-a) + b^2(b+c)^2 - a^2b^2}{4b(b+c)\sqrt{bcs(s-a)}} \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{4bcs(s-a) + b^2(b+c+a)(b+c-a)}{4b(b+c)\sqrt{bcs(s-a)}} \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{4bcs(s-a) + b^24s(s-a)}{4b(b+c)\sqrt{bcs(s-a)}} \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{s(s-a)}{\sqrt{bcs(s-a)}} \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \tag{1.6}
\end{aligned}$$

Usando o Teorema fundamental da trigonometria, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 \\
\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{bc - s(s-a)}{bc}.
\end{aligned}$$

Fatorando o numerador, temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \tag{1.7}$$

Com os resultados obtidos de (1.6) e (1.7), temos:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}.$$

De forma análoga, segue  $\cotg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$  e  $\cotg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$ ,  
sendo  $\beta$  e  $\gamma$  ângulos opostos aos lados  $b$  e  $c$ , respectivamente. □

**Observação:** Como  $\alpha$  é um ângulo interno de um triângulo, ou seja,  $0 < \alpha < 180^\circ$ , então  $0 < \alpha/2 < 90^\circ$ , tendo conseqüentemente seno, cosseno e cotangente positivos. O mesmo vale para  $\beta$  e  $\gamma$ .

## 1.2 A Fórmula de Heron

*Heron de Alexandria* foi um matemático e mecânico que viveu em meados do século I (10 dC. - 70 dC.).



Figura 1.8: Heron

Hoje ele é conhecido pela fórmula que leva seu nome, que consiste em determinar a área de um triângulo conhecidas as medidas de seus lados. Seu trabalho mais importante na geometria, *Metrica*, ficou desaparecido até 1896. Tornou-se também conhecido por inventar um mecanismo para provar a pressão do ar sobre os corpos, ficando na história como o primeiro motor a vapor registrado.

**Proposição 1.3** *Seja o triângulo  $\Delta ABC$  com lados medindo  $a, b, c$  e  $h_c$  a altura relativa ao lado  $AB$ , como mostra a figura 1.5, e semi-perímetro  $s = (a + b + c)/2$ . Então, a área do triângulo  $\Delta ABC$  é dada por:*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

**Demonstração:** Da Lei dos cossenos (1.4) e de (1.1), temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AM$$

$$AM = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle ACM$  e já fazendo a substituição da expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 h_c^2 &= b^2 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 \\
 &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} \\
 &= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4c^2} \\
 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}
 \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$b + c + a = 2s$$

$$b + c - a = 2(s - a)$$

$$a + b - c = 2(s - c)$$

$$a - b + c = 2(s - b),$$

e fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$\begin{aligned}
 h_c^2 &= \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4c^2} \\
 h_c &= \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

analogamente,

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

e

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Como já sabemos que a área  $A$  do triângulo  $\triangle ABC$  é dada por:

$$\boxed{A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}} \tag{1.9}$$

Agora substituindo (1.8) em (1.9), obtemos:

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad (1.10)$$

□

Apelidada de *Fórmula de Heron* para o cálculo da área de um triângulo conhecidas as medidas dos lados.

## 1.3 Equações do 2º grau

Estudaremos nessa seção um pouco da histórica da solução de uma equação bem conhecida de todos, a *Equação de 2º grau*, e não poderíamos deixar de apresentar e deduzir uma fórmula para encontrar suas raízes. No Brasil, essa fórmula é conhecida como *Fórmula de Bhaskara*, mas em outros países é conhecida como *a fórmula geral para resolução da equação polinomial de segundo grau*, sem nenhuma referência a Bhaskara.

### 1.3.1 Um pouco de história

Resolver uma equação da forma  $ax^2 + bx + c = 0$  nos dias atuais, é simples, pois basta utilizar a fórmula conhecida como "Fórmula de Bhaskara":

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A equação de 2º grau tem uma longa história e que passou por muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, os quais se preocupando em encontrar suas soluções.

Os processos, para achar as raízes de uma equação do 2º grau, dos babilônios, gregos, hindus, árabes, italianos eram formulados com palavras. A notação algébrica simbólica utilizada por nós, hoje, é criação recente dos matemáticos, começando com François Viète (1540 - 1603) e colocada na forma atual por René Descartes (1596 - 1650).

Os **Egípcios** só trabalhavam com equações de 2º grau simples. Como por exemplo, no papiro de Moscou, que datava de 1850 aC. é pedido para calcular a base de

um retângulo cuja altura  $l$  é igual a  $3/4$  da medida da base e cuja área do retângulo é igual a 12. Em linguagem matemática moderna, esse problema é escrito como:

$$\frac{3}{4}l^2 = 12$$

Os **Babilônios** escreviam em tabletes de argila, usando a chamada escrita cuneiforme. Os arqueólogos e historiadores da matemática concluíram que a qualidade da matemática praticada na Mesopotâmia era claramente mais desenvolvida do que a matemática egípcia no fim do século XIX e primeira metade do século XX.

Entre os inúmeros tabletes de argila, um mencionava o seguinte problema: *Achar a medida do lado de um quadrado se sua área menos seu lado é igual a 870*. Em linguagem matemática moderna temos  $x^2 - x = 870$ , onde  $x$  é a medida do lado do quadrado.

A solução registrada no tablete é a seguinte:

*Tome a unidade: 1*

*Divida a unidade em duas partes:  $1/2$*

*Cruze (multiplique)  $1/2$  por  $1/2$ :  $1/4$*

*Some  $1/4$  a 870:  $3481/4$*

*É o quadrado de  $59/2$ :  $(59/2)^2 = 3481/4$*

*Some  $1/2$ , que você multiplicou, com  $59/2$ : o lado do quadrado mede 30.*

Podemos observar que isso é exatamente aplicar a fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2},$$

onde  $x^2 - px = q$  é a equação a ser resolvida.

Nos textos matemáticos babilônios, a maioria dos problemas relativos a equações de 2º grau são da forma:

$$x + y = b, \quad x \cdot y = a$$

ou

$$x - y = b, \quad x \cdot y = a,$$

onde são conhecidas como formas normais das equações de 2º grau babilônias. Isso sugere que os escribas babilônios investigavam a relação entre perímetro e a área de uma superfície retangular.

Um outro tipo de equação resolvido pelos babilônios é representado pelos sistemas (que dão origem a equações de 2º grau):

$$x^2 + y^2 = b, \quad x + y = a,$$

$$x^2 + y^2 = b, \quad x - y = a$$

ou

$$x^2 + y^2 = b, \quad x \cdot y = s$$

A maneira de os **matemáticos gregos** apresentarem seus resultados sobre soluções de equações de 2º grau, é geométrica, como nos *Elementos* de Euclides, escritos em 300 aC. A ferramenta geométrica que permite resolver equações de 2º grau é a *aplicação de áreas*, que ocupa um lugar importante na geometria grega.



Figura 1.9: Diofanto

Já **Diofanto**, que foi um matemático grego que viveu em torno de 250 aC. dedicando-se ao estudo das equações e da teoria dos números, fugia dos métodos geométricos na resolução de equações de 2º grau. O problema de achar dois números de maneira que seu produto e sua soma sejam iguais, respectivamente, a dois números dados, ou seja,  $x + y = b$ ,  $xy = a$  foi solucionada da mesma forma que os babilônios. Além disso, ele mostra como resolver sistemas, que levam a equações de 2º grau:

$$x^2 - y^2 = a, \quad x + y = b,$$

$$xy = a, \quad x - y = b,$$

$$\frac{x}{y} = p, \quad \frac{x^2 + y^2}{x + y} = q.$$

As equações de 2º grau surgem pela primeira vez na matemática **Hindu** nos *sulvasutras* (partes de textos das mais antigas escrituras do Hinduísmo, e consideradas as únicas fontes de conhecimento da matemática indiana desse período), sob as formas  $ax^2 = c$  e  $ax^2 + bx = c$ , sem apresentar soluções. No manuscrito *Bakshali* é apresentado um procedimento de solução que corresponde à fórmula

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a},$$

para a equação  $ax^2 + bx - c = 0$ .

**Bramagupta** (598 - 665) mostra como resolver a equação  $ax^2 + bx = c$  com  $a$ ,  $b$  e  $c$  positivos, utilizando a fórmula

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

ou

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

**Al-Khowarizmi** (780 - 850) foi o primeiro matemático muçulmano a escrever sobre a solução de problemas usando al-jabr e al-muqabala. Al-jabr significa adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, afim de eliminar os termos negativos. Já o significado de al-muqabala é a redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação.



Figura 1.10: Al-Khowarizmi

Veremos um exemplo de como Al-Khowarizmi resolvia uma equação de 2º grau: *Qual deve ser o quadrado que, aumentado de dez de suas próprias raízes, é equivalente a trinta e nove?*

A equação escrita em linguagem algébrica é dada por:  $x^2 + 10x = 39$ .

*Solução: Tome a metade do número de raízes. Isso você multiplica por ele próprio. Adicione isso a trinta e nove. Agora, tome a raiz disso, e subtraia dela a metade do número de raízes. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava.*

Isso é equivalente a usar a fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2}$$

**Bhaskara Akaria** (1114 - 1185), também conhecido como Bhaskara II, mostra como resolver a equação  $ax^2 + bx = c$ . Ele multiplica ambos os membros da equação por  $a$ :

$$(ax)^2 + (ax)b = ac$$

Em seguida, é só completar quadrados:

$$(ax)^2 + (ax)b + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$



Figura 1.11: Bhaskara

Muitos outros matemáticos também trabalharam na tentativa de desenvolver uma fórmula para resolver uma equação de 2º grau. Ariabata I (viveu em torno de 476 dC.) chega a uma equação de 2º grau a partir de um problema de progressão aritmética. Tabit Ben Qurra (836 - 901) escreveu um pequeno tratado sobre a verificação de problemas de álgebra por demonstrações geométricas, mostrando como resolver equações  $x^2 + mx = n$ ,  $x^2 + b = ax$  e  $x^2 = ax + b$ .

Esse pequeno resumo, nos mostra que, ao longo dos séculos, os métodos de resolver as equações de 2º grau mudaram, até chegar na fórmula que conhecemos hoje como *Fórmula de Bhaskara*. Ver mais detalhes da história da equação de 2º grau em [6].

### 1.3.2 Raízes de uma equação do 2º grau

Como vimos o conhecimento de métodos para solucionar as equações do 2º grau remota às civilizações da antiguidade, como os babilônios e egípcios. Nesta seção iremos deduzir a famosa fórmula de Bhaskara utilizando um método simples de completar quadrados em que consiste em escrever a equação numa forma equivalente que nos permita determinar a solução diretamente. Vejamos um exemplo resolvendo a equação:

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Escrevendo a mesma equação como sendo:

$$x^2 - 6x = -8.$$

Somando 9 a ambos os membros da equação, obtemos:

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9.$$

$$(x - 3)^2 = 1.$$

Daí temos:

$$x - 3 = \sqrt{1} \quad \text{ou} \quad x - 3 = -\sqrt{1}.$$

Portanto, a solução da equação é dada pelos seguintes valores de  $x$ :

$$x_1 = 4 \quad \text{ou} \quad x_2 = 2.$$

**Definição 1.4** A equação do 2º grau com coeficientes  $a, b$  e  $c$  é uma expressão da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde  $a \neq 0$ ,  $b, c \in R$  e  $x$  é uma variável real a ser determinada.

Vamos agora, encontrar as soluções da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ :

Isolando o termo que não contém a variável  $x$  da equação, obtemos:

$$ax^2 + bx = -c,$$

dividindo agora, os dois membros por  $a$ , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Adicionando  $b^2/4a^2$  a ambos os membros para obter um quadrado perfeito do lado esquerdo da igualdade. Assim, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Para que exista algum número real satisfazendo a igualdade acima, devemos ter que  $b^2 - 4ac \geq 0$ , já que o termos da esquerda na igualdade é maior ou igual a zero. Extraíndo a raiz quadrada quando  $b^2 - 4ac \geq 0$ , temos as soluções:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, obtemos as seguintes soluções:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chamamos a expressão  $b^2 - 4ac$  de *discriminante* da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  e denotamos pela letra grega  $\Delta$  (Lê-se *delta*). Analisando o discriminante:

- i) Se  $\Delta > 0$ , existem duas soluções reais.
- ii) Se  $\Delta = 0$ , só existe uma solução real, ou seja,  $x_1 = x_2$ .
- iii) Se  $\Delta < 0$ , não existe solução real.

## 1.4 Definição das cônicas como lugar geométrico

Uma *seção cônica* ou, simplesmente, uma *cônica* é uma curva obtida cortando-se qualquer cone de duas folhas por um plano que não passa pelo vértice, chamado de **plano secante**.

Se o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone, a cônica é uma *parábola* como mostra a figura 1.12.

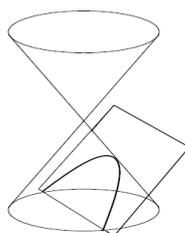


Figura 1.12: Parábola.

Se o plano secante não é paralelo a uma geratriz e corta só uma das duas folhas do cone, a cônica é uma *elipse* como mostra a figura 1.13.

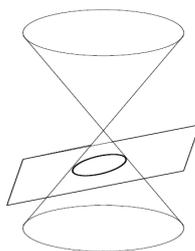


Figura 1.13: Elipse.

Se o plano secante não é paralelo a uma geratriz e corta ambas as folhas do cone, a cônica é uma *hipérbole* como mostra a figura 1.14.

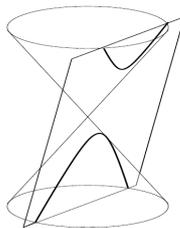


Figura 1.14: Hipérbole.

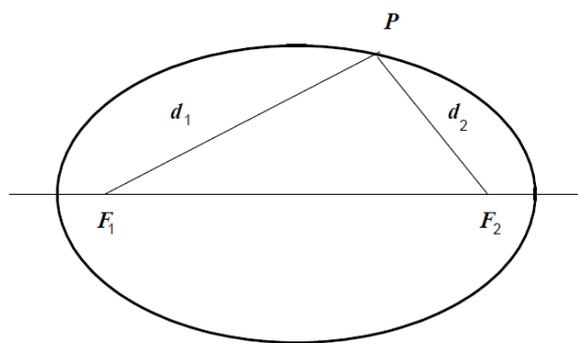
**Observação:** No caso de um plano que passa pelo vértice do cone obtemos um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes.

São conhecidos tratados sobre as seções cônicas antes da época de Euclides. Na história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga por volta de 262 a.C. sendo o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas da antiguidade.

Um **lugar geométrico** consiste no conjunto de pontos de um plano (ou espaço) que gozam de uma determinada propriedade. Assim, os lugares geométricos podem ser dados por **retas** e **curvas**.

Veremos à seguir, as definições das cônicas como lugar geométrico:

a) **Elipse:** É o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano tais que é constante a soma  $d_1 + d_2$  das distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , chamados *focos* da elipse como mostra a figura 1.15.

Figura 1.15: Elipse com seus focos  $F_1$  e  $F_2$ .

b) **Hipérbole:** É o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano tais que é constante o módulo da diferença  $|d_1 - d_2|$  das distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , chamados *focos* da hipérbole como mostra a figura 1.16.

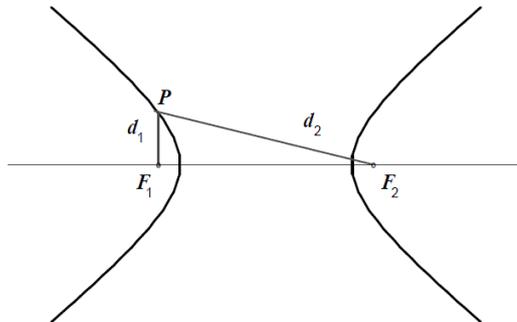


Figura 1.16: Hipérbole com seus focos  $F_1$  e  $F_2$ .

c) **Parábola:** É o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano tais que a distância  $d_1$  de  $P$  a um ponto fixo  $F$ , chamado *foco* da parábola, é igual à distância  $d_2$  de  $P$  a uma reta fixa  $D$ , chamada *diretriz* da parábola como mostra a figura 1.17.

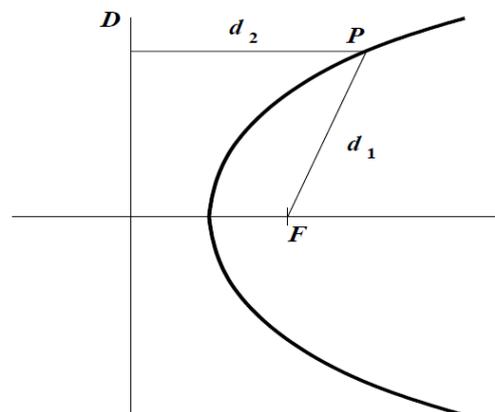


Figura 1.17: Parábola com seu foco  $F$  e reta diretriz  $D$ .

# Capítulo 2

## Deslocamento paralelo

Estudaremos agora os resultados obtidos relacionando a geometria do triângulo e dos polígonos convexos com as equações de 2º grau. Ver [1].

### 2.1 Deslocamento paralelo ao triângulo $\Delta$

**Definição 2.1** Dado um triângulo  $\Delta = \Delta(a, b, c)$  e número real  $r > 0$  consideramos o conjunto dos pontos  $p \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$d(p, \Delta) = r,$$

onde  $d(p, \Delta)$  denota a distância de  $p$  ao triângulo  $\Delta$  e a mesma é definida como sendo a menor distância de  $p$  aos vértices e aos segmentos de retas suportes do triângulo.

O triângulo  $\Delta$  delimita duas regiões no plano (interna e externa) e temos que o conjunto  $\{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, \Delta) = r\}$  possui duas componentes conexas,  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$ , como mostra a figura 2.1, as quais são chamadas de deslocamentos paralelos de  $\Delta$ .

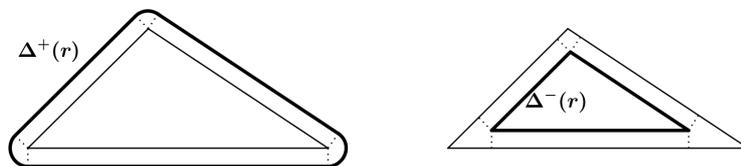


Figura 2.1: Conjuntos  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$  equidistantes ao triângulo  $\Delta$ .

As envoltórias (envelopes), foram inicialmente estudadas por Leibniz e Bernoulli nos chamados problemas de tangência. As envoltórias de curvas planas são utilizadas para definir novos tipos de curvas.

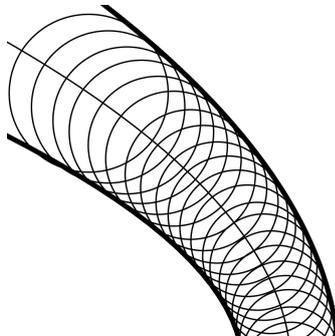


Figura 2.2: A família de círculos e sua envoltória (envelope).

**Lema 2.2** *Seja  $\Delta = \Delta(a, b, c)$  um triângulo. Então:*

*i) Para todo  $r > 0$  o conjunto  $\Delta^+(r)$  é formado de segmento de retas e arcos de circunferências (círculos) e está contido na região exterior ao triângulo  $\Delta$ .*

*ii) Para  $r > 0$  pequeno, o conjunto  $\Delta^-(r)$  é um triângulo semelhante a  $\Delta$  e está contido na região interna ao triângulo  $\Delta$ .*

**Demonstração:** Para cada ponto de  $p \in \Delta$  consideramos um círculo centrado em  $p$  e raio  $r$ , o qual denotamos por  $C_p(r)$ . Os conjuntos  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$  são as componentes conexas do envelope da família de círculos  $\{C_p(r) : p \in \Delta\}$ .

O conjunto  $\Delta^+(r)$  é formado de segmentos de retas paralelas aos lados do triângulo  $\Delta$  e de arcos de círculos que faz a concordância com estes segmentos. Veja a figura 2.3.

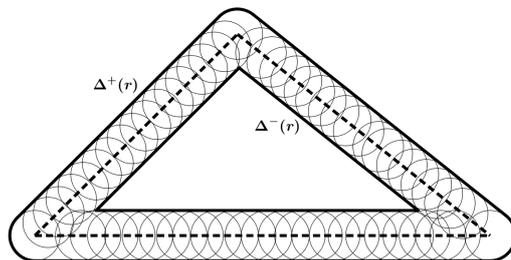


Figura 2.3: Envelope de círculos que definem os conjuntos  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$ , equidistantes ao triângulo  $\Delta$ .

Já o conjunto  $\Delta^-(r)$  é formado somente de segmentos de retas e define um triângulo, como mostra a figura 2.3. Observamos que os vértices de  $\Delta^-(r)$  estão nas bissetrizes dos ângulos de  $\Delta$  e a distância  $r$  dos lados de  $\Delta$ , como mostra a figura 2.4. Logo, pelas propriedades de semelhanças de triângulos conclui-se que  $\Delta^-(r)$  é semelhante a  $\Delta$ .  $\square$

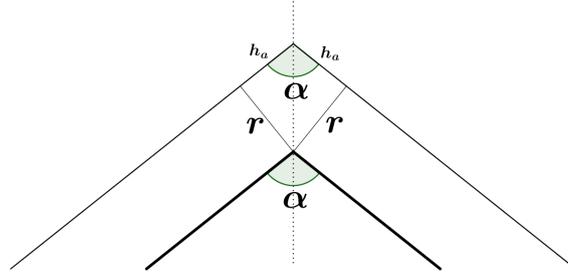


Figura 2.4: Conjunto  $\Delta^-(r)$  na vizinhança dos vértices do triângulo  $\Delta$ .

**Observação:** A operação de deslocamento paralelo não é simétrica. Observe que o deslocamento paralelo de  $\Delta^-(r)$  não tem  $\Delta$  como uma das componentes conexas do envelope associado.

**Proposição 2.3** *Seja  $A$  a área da região delimitada pelo triângulo  $\Delta$  e  $s = (a + b + c)/2$  o seu semi perímetro. Então:*

i) *A área da região delimitada por  $\Delta^+(r)$  é  $A + 2sr + \pi r^2$ .*

ii) *A área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é  $A - 2sr + \frac{s^2}{A}r^2$ .*

**Observação:** Denotaremos por  $A^+(r)$  a área da região delimitada por  $\Delta^+(r)$  e por  $A^-(r)$  a área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$ .

**Demonstração:** Observando as figuras 2.1 e 2.5, vemos que o acréscimo em área a região delimitada pelo triângulo  $\Delta$  corresponde a de três retângulos cujas bases são os lados do triângulo  $\Delta$  e altura  $r$  e de três arcos circulares de raio  $r$  e ângulos centrais iguais a  $\pi - \alpha$ ,  $\pi - \beta$  e  $\pi - \gamma$ , ou seja,

$$\begin{aligned} A^+(r) &= A + r \cdot a + r \cdot b + r \cdot c + \frac{1}{2}r^2(\pi - \alpha) + \frac{1}{2}r^2(\pi - \beta) + \frac{1}{2}r^2(\pi - \gamma) \\ &= A + r(a + b + c) + \frac{1}{2}r^2(\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma). \end{aligned}$$

Como  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  e  $a + b + c = 2s$ , portanto a área delimitada pela região  $\Delta^+(r)$  é dada por:

$$\boxed{A^+(r) = A + 2sr + \pi r^2} \quad (2.1)$$

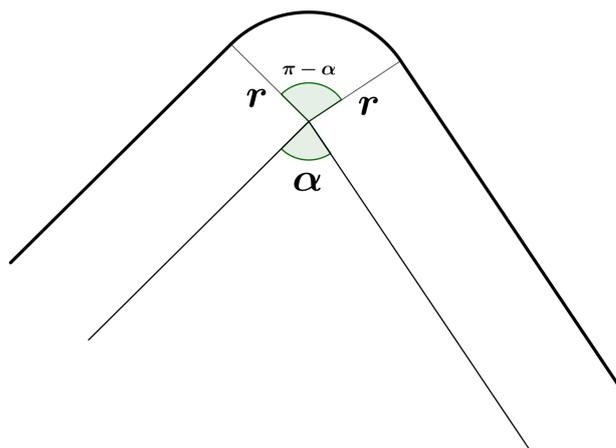


Figura 2.5: Conjunto  $\Delta^+(r)$  na vizinhança de um vértice do triângulo  $\Delta$ .

Observando as figuras 2.1 e 2.4, a área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é dada por:

$$\begin{aligned} A^-(r) &= A - r(a - h_b - h_c) - r(b - h_a - h_c) - (c - h_a - h_b) - rh_a - rh_b - rh_c \\ &= A - r(a + b + c) + r(h_a + h_b + h_c), \end{aligned}$$

onde denotamos por  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  os lados dos triângulos formados nos vértices.

Observamos que  $h_a = r \cot(\frac{\alpha}{2})$ ,  $h_b = r \cot(\frac{\beta}{2})$  e  $h_c = r \cot(\frac{\gamma}{2})$ . Logo a área de  $\Delta^-(r)$  é dada por:

$$A^-(r) = A - (a + b + c)r + r^2[\cot(\frac{\alpha}{2}) + \cot(\frac{\beta}{2}) + \cot(\frac{\gamma}{2})].$$

De 1.5 temos que

$$A^-(r) = A - 2sr + r^2 \cdot \left[ \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} \right]$$

$$A^-(r) = A - 2sr + r^2 \cdot \frac{s^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Portanto, a área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é dada por:

$$\boxed{A^-(r) = A - 2sr + \frac{s^2}{A}r^2} \quad (2.2)$$

□

**Exemplo:** Seja o triângulo  $\Delta(a, b, c)$  com medidas  $a = 5$ ,  $b = 5$  e  $c = 6$ . Calcular as áreas das regiões delimitada por  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$ , para  $r = 1/2$ .

Calculando o semi-perímetro  $s$  com as medidas de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , temos:

$$s = (5 + 5 + 6)/2 = 8$$

Agora calculando a área  $A$  do triângulo, utilizando a Fórmula de Heron (1.10), temos:

$$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12$$

Substituindo as valores de  $s$  e  $A$  em (2.1) e (2.2), temos as áreas das regiões delimitada por  $\Delta^+(r)$  e  $\Delta^-(r)$ , em função de  $r$

$$A^+(r) = 12 + 16r + \pi r^2$$

e

$$A^-(r) = 12 - 16r + \frac{16}{3}r^2$$

Fazendo a substituição do  $r$  dado, temos:

$$A^+\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 16 \cdot \frac{1}{2} + \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20 + \frac{\pi}{4}$$

e

$$A^-\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 16 \cdot \frac{1}{2} + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Portanto,  $A^+\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \frac{\pi}{4}$  e  $A^-\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3}$ .

**Corolário 2.3.1** *O raio do círculo inscrito a um triângulo  $\Delta(a, b, c)$  é  $r = \frac{A}{s}$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 2.3 a área do triângulo  $\Delta^-(r)$  é igual a

$$A^-(r) = A - 2sr + \frac{s^2}{A}r^2 = \frac{(A - sr)^2}{A}.$$

Temos que a área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é igual a zero quando  $\Delta^-(r)$  reduzir a um ponto, digamos  $p_0$ . Pela definição  $p_0$  é equidistante aos três lados de  $\Delta$  e é o incentro associado. Fazendo  $A^-(r) = 0$ , ou seja,

$$\frac{(A - sr)^2}{A} = 0.$$

Temos, portanto  $A = sr$  com  $r$  sendo o raio do círculo inscrito.  $\square$

**Exemplo:** Calcular o raio do círculo inscrito a um triângulo  $\Delta(a, b, c)$  com medidas  $a = 5$ ,  $b = 5$  e  $c = 6$ .

Vimos, no exemplo anterior, que a área  $A$  e o semi-perímetro  $s$  do triângulo  $\Delta$  são, respectivamente, 12 e 8.

Substituindo os valores de  $A$  e  $s$  em (2.2), temos:

$$A^-(r) = 12 - 2 \cdot 8 \cdot r + \frac{8^2}{12}r^2 = 12 - 16r + \frac{16}{3}r^2 = \frac{(12 - 8r)^2}{12}$$

Agora, fazendo  $A^-(r) = 0$ , ou seja,

$$\frac{(12 - 8r)^2}{12} = 0$$

$$12 - 8r = 0,$$

e portanto

$$r = \frac{3}{2}.$$

## 2.2 Deslocamento paralelo a um polígono convexo

Estudaremos nesta seção a generalização do resultado da seção 2.1 para polígonos convexos.

**Proposição 2.4** *Seja  $A$  a área da região delimitada por um polígono convexo  $\Delta$  e  $L$  o seu perímetro. Seja  $\Delta^+(r) = \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(\Delta) : d(p, \Delta) = r\}$ . A área da região delimitada por  $\Delta^+(r)$  é  $A + Lr + \pi r^2$ .*

**Demonstração:** Sejam  $a_i$  os lados do polígono  $\Delta$ ,  $\alpha_i$  os ângulos internos e  $\beta_i$  os correspondentes ângulos externos. De forma análoga ao caso do triângulo a contribuição angular de área, correspondente a cada vértice do polígono, é

$$\frac{1}{2}r^2(\pi - \alpha_i) = \frac{1}{2}r^2\beta_i$$

Logo a área de  $\Delta^+(r)$  será:

$$A + r\left(\sum_i a_i\right) + \frac{1}{2}r^2\left(\sum_i \beta_i\right)$$

Como  $L = \sum_i a_i$  e  $2\pi = \sum_i \beta_i$  (soma dos ângulos externos de um polígono), portanto a área da região delimitada por  $\Delta^+(r)$  é dada por:

$$\boxed{A^+(r) = A + Lr + \pi r^2} \quad (2.3)$$

□

**Observação:** A função  $A^+(r)$  é geometricamente correta apenas para  $r > 0$ . Supondo o seu discriminante positivo, obtemos a seguinte inequação  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ , conhecida como *Desigualdade isoperimétrica*.

**Exemplo:** O prefeito de uma cidade deseja construir uma praça numa área de  $1290,56m^2$ , com uma calçada de  $2m$  de espessura, e fazendo assim uma área para lazer num formato de um hexágono regular, como mostra a figura 2.6. Determinar a área da região hexagonal destinada para lazer adotando  $\sqrt{3} = 1,73$  e  $\pi = 3,14$ .

A área e o perímetro do hexágono regular são  $A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2,595a^2$  e  $L = 6a$ , respectivamente.

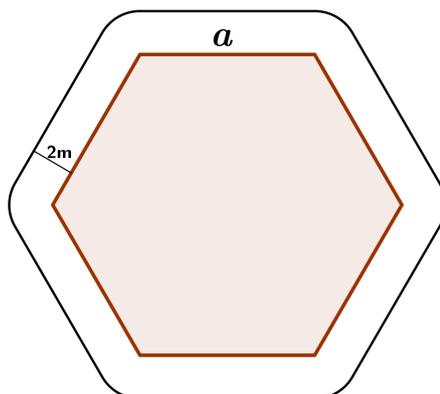


Figura 2.6: Desenho que representa a área para construção de uma praça.

De acordo com a proposição 2.4, fazemos de  $\Delta^+(r)$  como sendo a região destinada a construção da praça e  $r$  como sendo a espessura da calçada ( $r = 2$ ), ou seja,  $A^+(2) = 1290,56$ . Logo, temos:

$$1290,56 = 2,595a^2 + 6a \cdot 2 + \pi 2^2$$

$$1290,56 = 2,595a^2 + 12a + 12,56$$

$$2,595a^2 + 12a - 1278 = 0$$

$$173a^2 + 800a - 85200 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos:

$$a = \frac{-800 + \sqrt{800^2 - 4 \cdot 173 \cdot (-85200)}}{2 \cdot 173} = \frac{-800 + 7720}{346} = \frac{6920}{346} = 20$$

Basta agora calcular a área do hexágono regular de lado medindo  $20m$ :

$$A = 6 \cdot \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 600 \cdot 1,73 = 1038m^2$$

Portanto, a área da região hexagonal destinada para lazer é de  $1038m^2$ .

**Proposição 2.5** *Seja  $A$  a área de região delimitada por um polígono convexo  $\Delta$  de ângulos internos  $\alpha_i$  e  $L$  o seu perímetro (comprimento). Seja  $\Delta^-(r) = \{p \in \text{int}(\Delta) \subset \mathbb{R}^2 : d(p, \Delta) = r\}$ . A área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é*

$$A - Lr + \left[ \sum_i \cot\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right] r^2.$$

**Demonstração:** Denotamos por  $a_i$  os lados do polígono  $\Delta$  e por  $\alpha_i$  os ângulos internos correspondentes aos seus vértices.

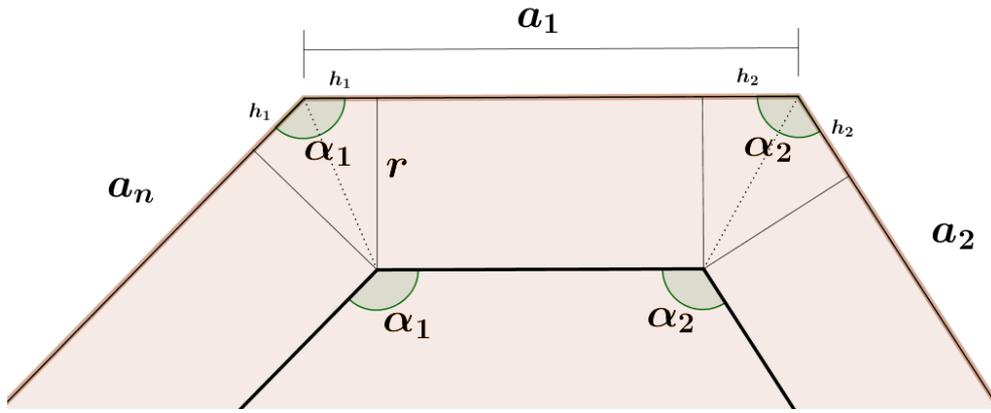


Figura 2.7: Conjunto  $\Delta^-(r)$  na vizinhança dos vértices do polígono  $\Delta$ .

Analogamente ao caso do triângulo a área de  $\Delta^-(r)$  é obtida a partir da área de  $\Delta$  subtraindo as áreas dos  $n$  retângulos de altura  $r$  e bases  $a_i - h_i - h_{i+1}$  e dos  $2n$  triângulos de base  $r$  e altura  $h_i$ . Portanto temos,

$$\begin{aligned} A - r(a_1 - h_1 - h_2) - r(a_2 - h_2 - h_3) - \dots - r(a_n - h_n - h_1) - (rh_1 + rh_2 + \dots + rh_n) \\ = A - r\left(\sum_i a_i\right) + r\left(\sum_i h_i\right), \end{aligned}$$

onde denotamos por  $h_i$  os lados dos triângulos retângulos formados nos vértices, veja figura 2.7. Como  $h_i = r \cot\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$  então a área da região delimitada por  $\Delta^-(r)$  é dada por:

$$\boxed{A^-(r) = A - Lr + \left[ \sum_i \cot\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right] r^2} \quad (2.4)$$

□

# Capítulo 3

## Conjuntos equidistantes no plano

Nesta seção iremos definir algumas retas, círculo e as cônicas usando os conceitos de conjuntos equidistantes no plano, ver [1], [7]. Veremos também as equações canônicas das cônicas como equações de segundo grau.

### 3.1 Retas e círculo

Apresentaremos à seguir os conjuntos equidistantes que constituem um círculo e retas com denominações já conhecidas: *retas perpendiculares*, *mediatriz*, *bissetriz* e *retas paralelas*:

a) O conjunto dos pontos equidistantes a duas retas  $s$  e  $t$  concorrentes num plano, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contêm as bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas  $s$  e  $t$ . Ver figura 3.1

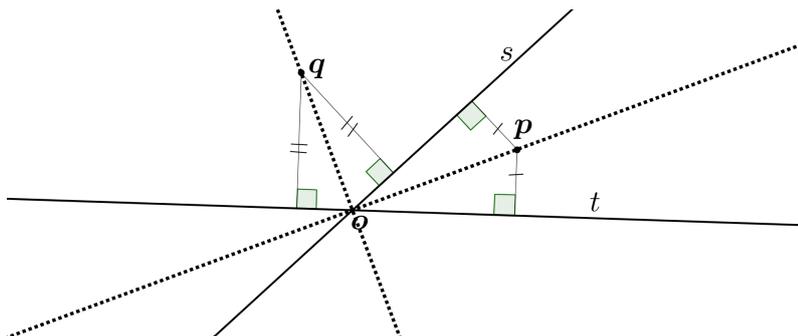


Figura 3.1: Conjunto equidistante a duas retas concorrentes.

b) O conjunto equidistante a dois pontos é uma reta chamada *mediatriz*. Ver figura 3.2.

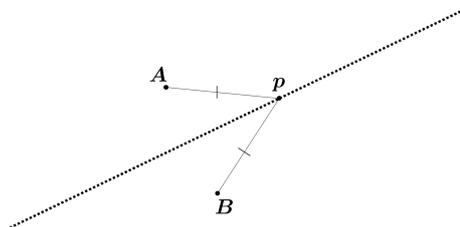


Figura 3.2: Conjunto equidistante a dois pontos.

c) O conjunto dos pontos que equidistam uma medida  $r$  a uma reta, constitui um par de retas paralelas. Ver figura 3.3.

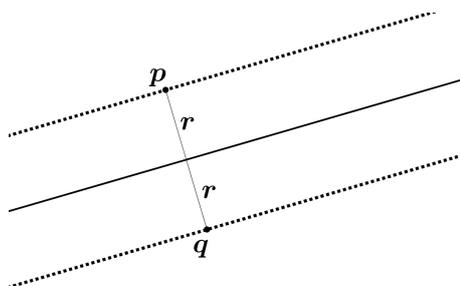


Figura 3.3: Conjunto equidistante a uma reta.

d) O conjunto equidistante a único ponto é um *círculo* ou *circunferência*. Ver figura 3.4.

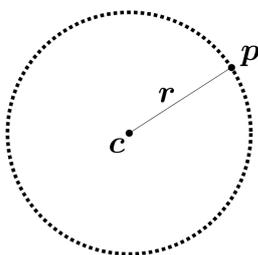


Figura 3.4: Conjunto equidistante a um único ponto.

## 3.2 As cônicas como conjuntos equidistantes e suas equações canônicas

**Proposição 3.1** *Considere dois círculos  $C_a(r)$  e  $C_b(R)$ . Defina o conjunto  $E(r, R, a, b) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))\}$ .*

- i) *Suponha que  $C_a(r)$  e  $C_b(R)$  sejam disjuntos e que não possuem região interior em comum, então  $E = (r, R, a, b)$  é um ramo de uma hipérbole.*
- ii) *Suponha que  $C_a(r)$  e  $C_b(R)$  sejam disjuntos e que possuam região interior em comum, então  $E = (r, R, a, b)$  é uma elipse se  $a \neq b$  e é um círculo de raio  $\frac{1}{2}(r + R)$  quando  $a = b$ .*
- iii) *Considere uma reta  $l$  disjunta do círculo  $C_a(r)$  e considere o conjunto  $E(r, a, l) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, C_a(r)) = d(p, l)\}$ . Então  $E(r, a, l)$  é uma parábola.*

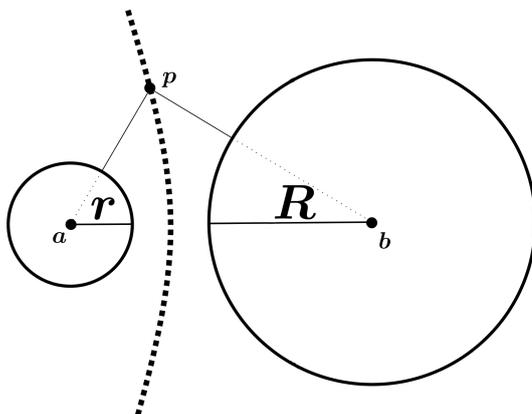


Figura 3.5: Ramo de hipérbole

**Demonstração:** Na situação descrita no item i) e observando a figura 3.5 temos que  $d(p, C_a(r)) = |p - a| - r$ , onde  $|p - a|$  é a distância euclidiana entre  $p$  e  $a$ . Da mesma forma,  $d(p, C_b(R)) = |p - b| - R$ .

Logo,  $d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))$  se, e somente se,  $|p - a| - r = |p - b| - R$  que é equivalente a  $|p - b| - |p - a| = R - r$ .

A equação anterior é exatamente a definição geométrica de hipérbole: "é o lugar geométrico tais que a diferença entre as distâncias a dois pontos fixados é constante."

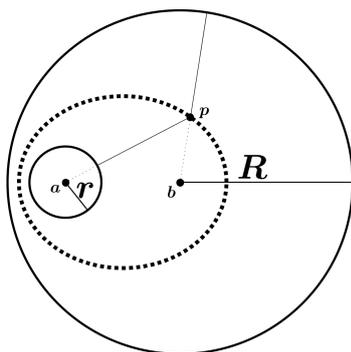


Figura 3.6: Elipse

Na situação descrita no item ii) e observando a figura 3.6 temos que  $d(p, C_a(r)) = |p - a| - r$  e  $d(p, C_b(R)) = R - |p - b|$ .

Logo  $d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))$  se, e somente se,  $|p - a| - r = R - |p - b|$  que é equivalente a  $|p - b| + |p - a| = R + r$ .

Esta equação é a definição geométrica da elipse: "*é o lugar geométrico tais que a soma das distâncias a dois pontos fixados é constante.*"

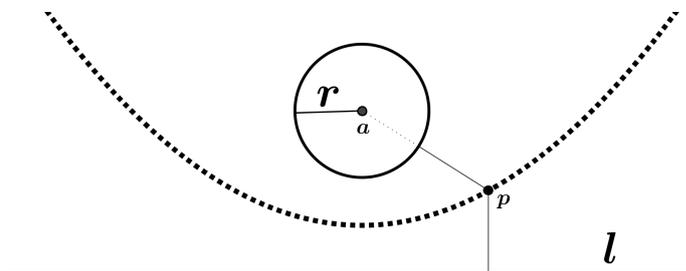


Figura 3.7: Parábola

Na situação descrita no item iii) e observando a figura 3.7 temos que  $d(p, C_a(r)) = |p - a| - r$ .

Logo  $d(p, C_a(r)) = d(p, l)$  se, e somente se,  $|p - a| - r = d(p, l)$  que é equivalente a  $|p - a| = d(p, l) + r = d(p, l')$ , sendo  $l'$  uma reta paralela e uma distância  $r$  de  $l$ .

Esta equação é a definição geométrica da parábola: "*é o lugar geométrico tal que a distância a um ponto e uma reta é constante.*"  $\square$

**Exemplo:** Determine a equação da parábola definida como o conjunto equidistante entre a reta  $y = -2$  e o círculo de centro  $(0, 4)$  e raio medindo 2 (Ver figura 3.8).

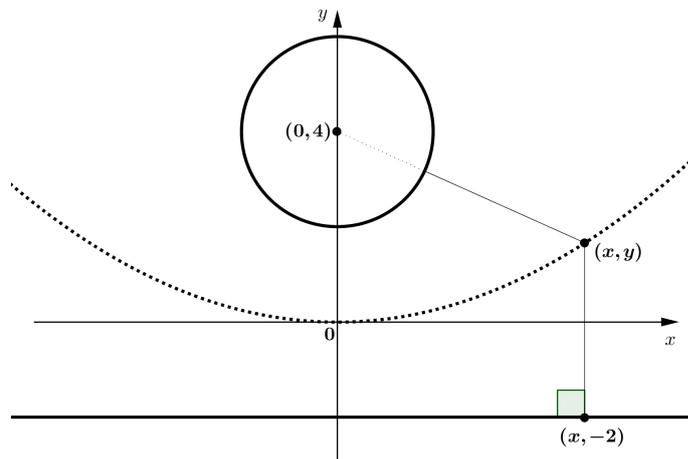


Figura 3.8: reta de equação  $y = -2$  e círculo de centro  $(0, 4)$  e raio 2.

Um ponto  $(x, y)$  pertence ao conjunto equidistante se, e somente se,

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2} - 2$$

$$y + 2 = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} - 2$$

$$(y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 + 8y + 16 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$16y = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{16}.$$

**Proposição 3.2** *A equação canônica da hipérbole é uma equação de segundo grau da forma*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*A equação canônica da elipse é uma equação do segundo grau da forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*A equação canônica da parábola é uma equação do segundo grau da forma*

$$y^2 = ax \quad \text{ou} \quad (x^2 = ay).$$

**Demonstração:** Adotaremos para a elipse e hipérbole, um sistema de coordenadas tal que os focos estejam no eixo  $x$  e equidistantes da origem. Para a parábola adotaremos um sistema tal que o foco esteja no eixo  $x$  e a origem equidistante do foco e da diretriz. vejamos:

a) **Hipérbole  $\mathcal{H}$ :** determinada por seus focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  e pela constante  $2a < 2c$ , conforme mostra a figura 3.9, temos:

**Elementos:**

Centro:  $C = (0, 0)$   
 Vértices:  $V_1 = (-a, 0)$  e  $V_2 = (a, 0)$   
 Focos:  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$   
 Assíntotas:  $y = -\frac{b}{a}x$  e  $y = \frac{b}{a}x$   
 Excentricidade:  $e = \frac{c}{a}$

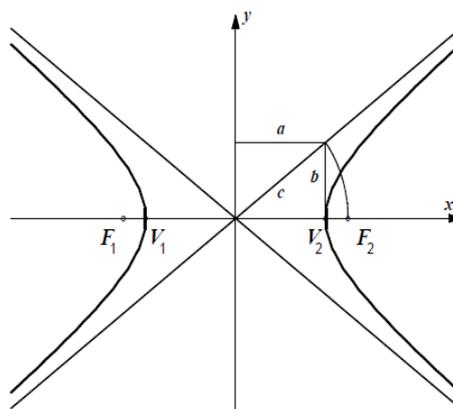


Figura 3.9: Hipérbole e seus elementos.

Seja  $Q = (x, y) \in \mathcal{H}$ , e sem perda de generalidade adotaremos  $Q$  pertencente ao ramo direito da hipérbole, ou seja,  $d((x, y), F_1) > d((x, y), F_2)$ , daí temos:

$$d((x, y), F_1) - d((x, y), F_2) = 2a$$

$$d((x, y), (-c, 0)) - d((x, y), (c, 0)) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como  $c^2 - a^2 > 0$ , tomamos  $b^2 = c^2 - a^2$  e obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) **Elipse  $\mathcal{E}$** : determinada por seus focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , onde  $c \geq 0$  e pela constante  $2a > 2c$ , conforme mostra a figura 3.10, temos:

Seja  $P = (x, y) \in \mathcal{E}$ , temos:

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a$$

$$d((x, y), (-c, 0)) + d((x, y), (c, 0)) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

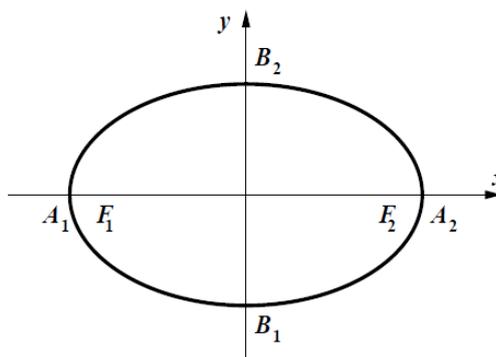
**Elementos:**Centro:  $C = (0, 0)$ Vértices:  $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$ Focos:  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ Eixo maior:  $\overline{A_1A_2}$ Eixo menor:  $\overline{B_1B_2}$ Excentricidade:  $e = \frac{c}{a}$ 

Figura 3.10: Elipse e seus elementos.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como  $a^2 - c^2 > 0$ , tomamos  $b^2 = a^2 - c^2$  e obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

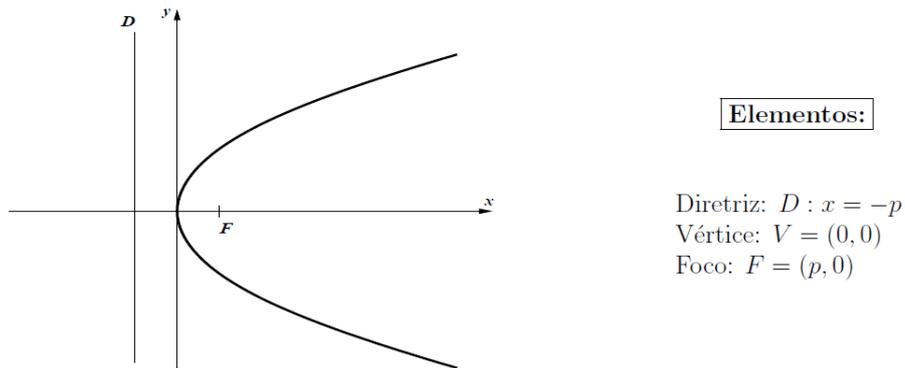


Figura 3.11: Parábola e seus elementos.

c) **Parábola  $\mathcal{P}$** : Determinada por seu foco  $F = (p, 0)$  e por sua reta diretriz  $D : x = -p$ , conforme mostra a figura 3.11, temos:

Seja  $M = (x, y) \in \mathcal{P}$ , temos:

$$d((x, y), F) = d((x, y), D)$$

$$d((x, y), (p, 0)) = d((x, y), (-p, y))$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$-2px + y^2 = 2px$$

$$y^2 = 4px$$

Logo, fazendo a constante  $4p = a$ , temos:

$$\boxed{y^2 = ax}$$

E para a parábola com diretriz  $D : y = -p$  e foco  $F = (0, p)$ , temos:

$$\boxed{x^2 = ay}$$

□

Para finalizar esta seção apresentamos o seguinte problema clássico.

**Problema:** Dado uma reta  $L$  no plano e consideramos dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  num semi plano definido por  $L$ , como mostra a figura 3.12. Determine um ponto  $P \in L$  tal que  $d(P, F_1) + d(P, F_2)$  seja mínimo.

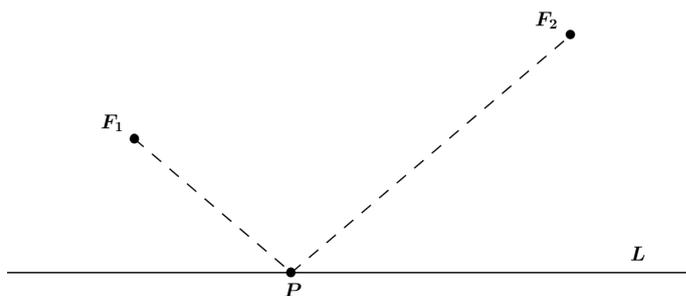


Figura 3.12: Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  no semi plano definido pela reta  $L$ .

A solução mais comum deste problema consiste em refletir  $F_1$  (ou  $F_2$ ) em torno de  $L$  e traçar um segmento ligando este ponto refletido ao ponto  $F_2$ , como mostra a figura 3.13. O ponto  $P_1$  procurado está na interseção de  $L$  com o segmento  $F_2F'_1$ . Ver [9].

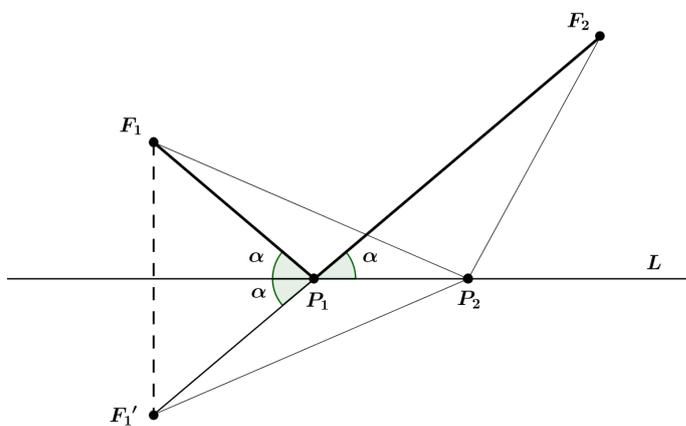


Figura 3.13: O ponto  $P_1$  procurado.

Como a reta  $L$  é mediatriz de  $F_1F'_1$ , então teremos para qualquer outro ponto  $P_2$  dessa reta,  $P_2F_2 + P_2F_1 = P_2F_2 + P_2F'_1 > F_2F'_1 = P_1F_2 + P_1F'_1 = P_1F_2 + P_1F_1$ .

**Observação:** Este problema é análogo ao princípio da reflexão da luz nos espelhos planos, ou seja, a luz deve ir de uma fonte  $F_1$  a um espelho  $L$  e daí ao olho  $F_2$  de um observador, então o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

**Teorema 3.3** *A bissetriz do ângulo formado por um dos raios vetores de um ponto  $P$  da cônica e o prolongamento do outro raio vetor é a reta tangente à cônica no ponto  $P$ .*

**Demonstração:**

Seja  $t$  a bissetriz do ângulo  $\angle F_2PF_2'$  e fazendo-se  $PF_2 = PF_2'$ , como mostra a figura 3.14. Assim, obtemos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$PF_1 + PF_2' = 2a.$$

Ou seja,

$$F_1F_2' = 2a$$

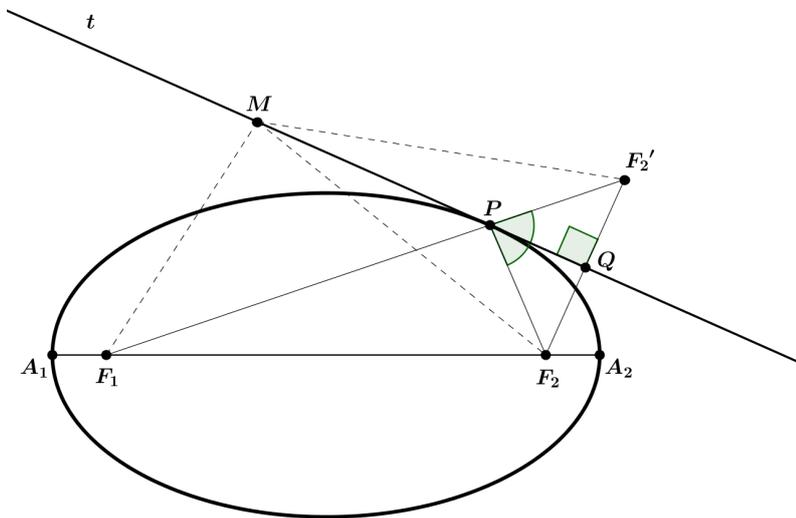


Figura 3.14: Reta tangente à cônica no ponto  $P$ .

Seja  $M$  um ponto pertencente à reta  $t$ , e distinto de  $P$ . Como  $\triangle MPF_2 \approx \triangle MPF'_2$ , obtem-se que:

$$MF_2 = MF'_2. \quad (3.1)$$

A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro. Logo, no  $\triangle MF_1F'_2$  tem-se:

$$MF_1 + MF'_2 > F_1F'_2 = 2a.$$

Portanto, devido a (3.1), temos:

$$MF_1 + MF_2 > 2a$$

Isso mostra que o ponto  $M$  não pertence ao lugar geométrico da elipse. Logo, o único ponto de  $t$  pertencente à elipse é  $P$ , indicando  $t$  como tangente à elipse no ponto  $P$ .

A demonstração para a hipérbole e parábola é de forma análoga, ver [8].  $\square$

Uma outra solução para o problema citado anteriormente, é tomar uma família de elipses  $E_\lambda$  com focos  $F_1$  e  $F_2$ . A elipse  $E_{\lambda_0}$  tangente a reta  $L$ , como mostra a figura 3.15, tem a seguinte propriedade: “Se  $P = E_{\lambda_0} \cap L$ , então os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  formam ângulos iguais com a reta  $L$ ”.

De fato, pelo teorema 3.3, os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  tem uma mesma inclinação  $\alpha$  em relação a reta  $L$ , e portanto  $P = P_1$ .

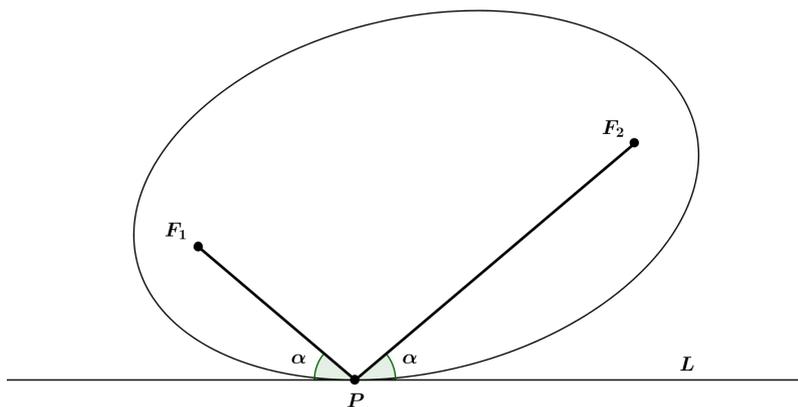


Figura 3.15: Elipse  $E_{\lambda_0}$  tangente a reta  $L$  no ponto  $P$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Garcia, R., *Equações Do Segundo Grau e Geometria Plana*, Revista da olimpíada de Matemática do estado de Goiás n°5 IME-UFG, pp. 33-43, (2004).
- [2] Manfredo do Carmo, Morgado, A. C., Wagner, E., *Trigonometria - Números Complexos*, SBM, Rio de Janeiro, 3ª edição, (2011).
- [3] Morgado, A. C., Wagner, E., Jorge, M., *GEOMETRIA II*, Editora Original, FC & Z Livros, Rio de Janeiro, (2002).
- [4] Nery, J., Nácul, L. C., Doering, L. R., Menezes, M. F. R., *GEOMETRIA ANALÍTICA: Cônicas*, UFRGS, Porto Alegre, (2005).
- [5] Oliveira, K. I. M., Fernández, A. J. C., *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, SBM, Rio de Janeiro, 1ª edição, (2010).
- [6] Pitombeira, J. B., *REVISITANDO UMA VELHA CONHECIDA*, Departamento de Matemática PUC-Rio.
- [7] Ponce, M., *CONJUNTOS EQUIDISTANTES Y CÓNICAS GENERALIZADAS*, Facultad de Matemáticas Universidad de Chile, Olmué, pp. 13 -14, (2012).
- [8] Siqueira, P. H., Costa, A. M., *Cônicas*, 2ª edição UFPR, (2012).
- [9] Wagner, E., *Construções Geométricas*, SBM, Rio de Janeiro, 6ª edição, pp. 74-75, (2010).