UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

IMPORTÂNCIA DO SOFTWARE "UMA PLETORA DE POLIEDROS" NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

ALCENY GARCIA FILHO

CATALÃO – 2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**
Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Alceny Garcia Filho				
E-mail:	alcenyfilho@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[X] Sim	[ ] Não			
Vínculo empregatício do autor	Professor de Secretaria de Estado da Educação				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de nível superior		Sigla:	CAPES	
País:	Brasil	UF: GO		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	IMPORTÂNCIA DO SOFTWARE "UMA PLETORA DE POLIEDROS" NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL				
Palavras-chave:	Pletora de Poliedros, Geometria Espacial, Ensino e Aprendizagem.				
Título em outra língua:	Importance of Software "A Plethora of Polyhedra" in Teaching Spatial Geometry				
Palavras-chave em outra língua:	Plethora of polyhedra, spatial geometry, Teaching and Learning.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	08/08/2014				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT				
Orientador (a):	Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi				
E-mail:	prbergamaschi@gmail.com				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Alceny Garcia Filho

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 20 / 08 / 14

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ALCENY GARCIA FILHO

IMPORTÂNCIA DO SOFTWARE “UMA PLETORA DE POLIEDROS” NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

CATALÃO – 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
(GPT/BSCAC/UFG)

Garcia Filho, Alceny.
G216i Importância do software "uma pletora de poliedros" no ensino de geometria espacial [manuscrito] / Alceny Garcia Filho. - 2014.
xi, 41 f.

Orientador: Profº. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.
Apêndices.

1. Geometria espacial. 2. Pletora de Poliedros. 3. Ensino e aprendizagem. Título.

CDU: 514.1:37.015

Alceny Garcia Filho

Importância do Software "Uma Pletora de Poliedros" no Ensino de Geometria Espacial

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 08 de Agosto de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC
Presidente da Banca

Juliana Bernardes Borges da Cunha

Prof^a. Dr^a. Juliana Bernardes Borges da Cunha
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira
FAMAT- UFU

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Cláudia, que esteve sempre ao meu lado nesta caminhada, demonstrando amor, dedicação, paciência e compreensão, sendo um exemplo de lealdade. Que Deus abençoe você!

À milha mãe, Iraí de Oliveira Garcia, pelo esforço, dedicação e compreensão durante todos os momentos de minha vida.

Aos meus filhos, Thaísy Cristina Garcia e Alexandre Augusto Garcia, pela confiança e compreensão durante os dias que já convivemos e os que hão de vir.

E aos meus amigos e colegas do Colégio Estadual João Netto de Campos, que, de uma forma ou de outra, incentivaram-me e contribuíram com essa minha luta por conhecimento e aperfeiçoamento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus.

Aos meus amigos: André Coelho, Rogério Mastrela, Abrahão e Carla Sandra, que sempre me auxiliaram e incentivaram, sem duvidar que este momento se tornaria realidade.

À Sociedade Brasileira de Matemática, por propiciar aos professores de Matemática da educação básica brasileira acesso a um programa de mestrado tão abrangente e eficiente quanto o PROFMAT.

À UFG, na pessoa da subcoordenadora do PROFMAT da Regional Catalão, professora Élida Alves da Silva, também a todos os professores do programa, que acreditaram e aceitaram participar deste desafio de aprimorar os professores da educação básica, dando significativa contribuição para a realização deste trabalho.

De maneira especial, ao meu orientador, o professor Paulo Roberto Bergamaschi, pela educação, paciência, bem como pelo conhecimento transmitido e pela confiança depositada na realização deste trabalho.

À agência financiadora Capes, pelo apoio dado ao longo do curso.

E se me esqueci de algumas pessoas que, de certa forma, contribuíram para que este momento fosse alcançado, peço desculpas e agradeço a todos.

Muito obrigado!

“As abelhas... em virtude de uma certa intuição geométrica ... sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo e conterá mais mel com o mesmo gasto de material.”

Papus, de Alexandria

FILHO, Alceny Garcia. Importância do Software “Uma Pletora de Poliedros” no Ensino de Geometria Espacial. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado, Universidade Federal de Goiás/Regional Catalão, Catalão – GO.

RESUMO

O trabalho ora proposto tem como objetivo proporcionar uma reflexão sobre a importância de se promover um ensino dinâmico. Para tanto, propõe-se a utilização de um software – Uma Pletora de Poliedros – que leve em consideração as necessidades de aprendizagem dos alunos, de modo a ajudá-los na visualização e no entendimento do espaço que os cerca e para que eles possam utilizar o conhecimento geométrico e matemático em benefício das questões cotidianas. Trata-se de um software livre para matemática dinâmica que reúne recursos de geometria espacial como: rotação, translação, ampliação, redução e contagem do número de vértices, arestas e faces, o que permite aos alunos compreenderem os principais conteúdos apresentados. Ao manipular o software escolhido, professor e aluno podem identificar suas principais características e elementos essenciais, não mais apenas somente por meio da elaboração e resolução de expressões matemáticas algebricamente apresentadas. Este trabalho dispõe-se, ainda, a motivar as atividades a serem propostas por meio de uma fundamentação teórica, bem como analisar as possíveis dificuldades encontradas por parte de alunos e professores, assim como as possibilidades de melhoria no ensino de geometria.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Uma Pletora de Poliedros, Ensino e Aprendizagem.

FILHO, Alceny Garcia. Importance of Software "A Plethora of Polyhedra" in Teaching Spatial Geometry. 2014. Task of Completation of Masters Course. Federal University of Goiá/Catalão Reginal, Catalão – GO.

ABSTRACT

The work proposed aims to provide a reflection about the importance of promoting a dynamic teaching. Therefore it proposes the use of a software, A Plethora of Polyhedra, that considers the learning needs of students in order to assist them in the viewing and understanding of space around them and so they can use the geometric and mathematical knowledge in benefit of everyday issues. This is a free software for dynamic mathematics that gathers resources of spatial geometry such as: rotation, translation, enlargement, reduction, and counting of the number of vertices, edges and faces, which enables the students understand the main presented contents. By manipulating the software chosen, teacher and student can identify their main characteristics and essential elements, not just only through the development and resolution of mathematical expressions algebraically presented. This work also is willing to motivate the activities to be proposed by a theoretical basis and analyze the possible difficulties encountered by students and teachers, and the opportunities for improvement in the teaching of geometry.

Keywords: Spatial Geometry, A Plethora of Polyhedra, Teaching and Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

Introdução

O presente trabalho originou-se da preocupação com o ensino de geometria espacial, considerando a importância da visualização das formas geométricas para o entendimento das diferenças entre as formas planas e espaciais, bem como para a compreensão das propriedades inerentes aos objetos geométricos.

Experimentos pessoais e vivências escolares apontam que as expectativas em relação à aquisição de conhecimentos matemáticos têm se agravado a cada dia. E esse quadro pode ser confirmado ao observar as dificuldades na compreensão de conceitos, demonstrações e aplicações do referido conteúdo, aliadas à desmotivação na aprendizagem de geometria no cotidiano dos alunos.

Por meio de uma análise realizada a partir dos dados construídos juntamente aos discentes de nono ano do ensino fundamental, do Colégio Estadual “João Netto de Campos”, evidenciou-se que o ensino de geometria tem se apresentado rigorosamente abstrato, consolidando-se prioritariamente por meio da transmissão de regras e memorização de fórmulas, o que se dá por meio de intensivos exercícios técnicos.

Diante desse cenário, este trabalho apresentou como objetivo proporcionar uma reflexão sobre a importância de se promover um ensino dinâmico. Partiu-se, para tanto, da confiança na contribuição de um software que leve em consideração as necessidades de aprendizagem dos alunos, que os ajude na visualização e entendimento do espaço que os cercam, e que também os auxilie na utilização do conhecimento geométrico e matemático em benefício das questões cotidianas.

A investigação, nesse sentido, apresentou como propósito e diretriz básica analisar a relevância da visualização na construção do pensamento geométrico, bem como refletir sobre seu papel na formação de cidadãos ativos e críticos, capazes de atuar de forma participativa no processo de ensino e aprendizagem.

Este trabalho encontra-se estruturado em quatro capítulos, além das considerações finais.

O primeiro capítulo, partindo da análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL,1997)[5], dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000) [6] e das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) (BRASIL, 1998)[4], no que se refere à análise da construção da geometria, verificou que todo conhecimento parte de uma necessidade encontrada no dia a dia. A partir de então, constatou-se que cabe ao professor auxiliar os alunos a se transformarem de acordo com as exigências relacionadas ao ensino de geometria espacial. Tratou-se, por fim, de analisar de que forma a visualização auxilia no desenvolvimento mental dos discentes.

No segundo capítulo, foram apresentadas as construções teóricas voltadas para a construção das capacidades espaciais referentes ao ensino de geometria. E para essas capacidades espaciais, foram realizadas definições e demonstrações dentro do contexto de poliedros, com vistas a propiciar entendimentos sobre planificação, Relação de Euler e representação 3D de poliedros, como prismas, pirâmides e sólidos platônicos, considerando a visualização e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

O terceiro capítulo, por sua vez, direcionou-se à apresentação das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) necessárias para o desenvolvimento e aplicação da pesquisa junto aos alunos de nono ano do ensino fundamental, do Colégio Estadual “João Netto de Campos”, quais sejam: o Laboratório de Informática, projetor multimídia, notebook e software *Uma Pletora de poliedros*. Apresentou-se, ainda, o delineamento da pesquisa, contemplando as ações realizadas e a metodologia utilizada para esse fim. Abordou-se, também, a proposta de estudo apresentada aos alunos para que eles pudessem reconhecer a diferença entre sólidos poliédricos e não poliédricos, para fazerem a associação entre as principais formas poliédricas estudadas na educação básica, assim como para serem capazes de estabelecer a Relação de Euler.

O quarto capítulo, por sua vez, apresentou os resultados do processo investigativo, que se materializaram por meio de dados obtidos através de questionários aplicados, e que foram apresentados por meio de gráficos. Buscou-se, com a análise dos resultados, verificar se a utilização do software aliado ao estudo de geometria espacial (em poliedros) acarretou ou não em melhoria em termos aprendizado de matemática, e, principalmente, de geometria.

Nas considerações finais, foram elencadas as dificuldades encontradas para a realização do trabalho, que envolveram a falta de computadores no Laboratório de Informática, problemas em relação à reserva de equipamentos junto à coordenação pedagógica da escola campo, dificuldades técnicas para utilização de software, bem como obstáculos para aplicação e execução do programa para um número elevado de alunos de nono ano. Também se tratou da contribuição da utilização do software para a compreensão de que poliedros são figuras tridimensionais que possuem uma relação entre suas faces, vértice e arestas. Evidenciou-se, portanto, a relevância que a visualização propiciada pela utilização do software tem em termos de construção do conhecimento matemático, ao proporcionar aos alunos, de forma direta, a construção e compreensão de uma planificação, da representação espacial, bem como da Relação de Euler.

No presente trabalho, foram averiguadas as compreensões prévias dos alunos em relação aos poliedros. A partir de então, desenvolveu-se uma atividade guiada pelo software *Uma Pletora de Poliedros*, com vistas a compreender de que forma o aluno, ao interagir com essa ferramenta, estabelece relações entre os elementos que constituem os poliedros. Buscou-se, pois, possibilitar aos discentes a compreensão de que poliedros são figuras tridimensionais que apresentam uma relação muito particular, o que envolve o número de vértices, faces e arestas. Além disso, intentou-se propiciar aos alunos a representação de poliedros em uma planificação, como forma espacial.

Por meio deste estudo, constatou-se que a utilização do software contribuiu de forma significativa para a construção e compreensão de uma planificação, da representação espacial e da Relação de Euler. Portanto, o objetivo de promover a compreensão de que poliedros são figuras tridimensionais, que possuem uma relação entre suas faces, vértices e arestas, foi atingido. Sendo assim, acredita-se que os suportes didáticos voltados para a aprendizagem podem auxiliar de maneira significativa na construção do conhecimento, constituindo-se como excelentes recursos para o entendimento de conteúdos complexos, como por exemplo, a visualização de arestas, vértices e faces dos poliedros.

A utilização do software *Uma Pletora de Poliedros* nas aulas de geometria espacial possibilitou aos alunos a autonomia necessária para que pudessem gerenciar seu aprendizado. E entende-se que a utilização do referido instrumento pode ainda ser estendida para a exploração de diversos conteúdos e atividades que envolvem a geometria espacial, sendo possível, por exemplo, trabalhar área de prismas a partir de sua planificação, classificar poliedros, explorar o conceito de dualidade topológica, entre outros.

Capítulo 1

A geometria como ciência do espaço e das formas

Neste trabalho, foram analisadas questões que envolvem o estudo da matemática, mas especialmente da geometria espacial (geometria métrica e de posições), que é um ramo preocupado com questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades do espaço tridimensional, com ênfase na visualização das formas geométricas. Para a regulamentação e direcionamento da educação básica no que se refere ao tema geometria espacial, encontram-se em vigência, no Brasil, os PCNEM (BRASIL, 2000)[6], que ditam normas e regras para o ensino de geometria. Segundo os PCNEM[6], “com relação ao ensino de geometria os alunos ao fim do ensino médio deverão adquirir competências e habilidades de acordo com todos os conteúdos a serem ensinados” (BRASIL, 2010, p. 05) [6].

De acordo com os PCNEM[6], as competências necessárias para que os alunos possam ser considerados hábeis na área de geometria são as seguintes:

(1ª) Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;

(2ª) Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Os PCNEM[6] também apontam as seguintes habilidades a serem adquiridas com o estudo de geometria:

(1ª) Identificar características de figuras planas ou espaciais;

(2ª) Resolver situações – problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma;

(3ª) Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Com base nessas informações, segundo as DCNEM (BRASIL, 1998)[4], a geometria utilizada antes das inovações tecnológicas tinha caráter rudimentar e prático. Ela consistia em utilizar conhecimentos sobre o espaço para solucionar problemas objetivos, tais como construção de vasos, casas, e outros, apresentando formas geométricas como: triângulos, quadriláteros e várias outras.

Como personagem no campo da geometria, pode-se citar Platão, a quem se atribui a descoberta dos poliedros regulares que são conhecidos como “sólidos platônicos”, os quais são apresentados no Capítulo 2. “Os elementos”[1] de Euclides apresentam proposições de geometria espacial. Há definições de sólidos regulares, medidas de figuras e prova das expressões matemáticas que fornecem o volume de pirâmides, cones, cilindros e esferas. Euclides prova que não pode haver outros poliedros regulares além do tetraedro, octaedro, hexaedro, icosaedro e dodecaedro, os quais são os sólidos platônicos (BOYER, 1996) [2]

A geometria, como parte da matemática, estuda as questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, e é um segmento que se divide em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas. Ela aborda as leis das figuras e as relações das medidas das superfícies e sólidos geométricos. Para seu estudo, são utilizadas relações de medidas, como as amplitudes de ângulos, volumes de sólidos, comprimentos de linhas e áreas das superfícies.

A geometria configura um conteúdo indispensável e essencial da matemática, haja vista que pessoas capazes de utilizar formas de pensar e racionar geometricamente adquirem habilidades como: orientação espacial; vista frontal, superior e lateral; e outras. Além disso, a geometria possibilita a compreensão e criação de competências de elaboração de ideias ligadas ao raciocínio lógico e às relações espaciais.

Aos alunos, a geometria revela-se naturalmente interessante em decorrência da facilidade da visualização de suas aplicações em situações do cotidiano, como exemplo, em construções de casas e prédios, em praças, ruas e vários outros casos em que se manifesta em suas formas plana e/ou espacial. O pensamento geométrico, portanto, está diretamente ligado à forma pela qual se percebe e interpreta o mundo ao redor, e sua base está na visualização do espaço em suas diferentes formas. Por assim ser, cabe às pessoas identificar e associar essas formas a conceitos que sejam capazes de explicar sua influência no meio matemático, dando significado às formas geométricas com conceitos formais.

É importante refletir que o pensar geométrico exige “saber fazer”. O aluno, portanto, deve colocar em prática seus conhecimentos geométricos para encarar e enfrentar as diferentes situações que possam aparecer. Para tanto, é necessário o exercício da atenção, da visualização[2] e o pensamento matemático contido nas formas geométricas ao seu redor.

Fainguelernt (1999)[7] define visualização como sendo a habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Nesse sentido, a visualização é o início, é o momento das considerações visuais como base do raciocínio dos alunos. Como exemplo, tem-se o uso de

---

[1] Os Elementos, de Euclides, trata-se de uma obra que apresenta um conjunto de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições.

[2] Segundo o dicionário Michaelis online[10], visualizar refere-se à: Tornar visual ou visível. Ver uma imagem mental; figurar mentalmente.

sólidos de acrílico para visualizar as formas geométricas, fazendo com que os alunos reconheçam os elementos contidos nesses sólidos e estabeleçam propriedades que serão utilizadas para conceituar as formas apresentadas. A utilização dos sólidos para visualizar as formas geométricas é de suma importância para melhorar a percepção dos alunos sobre as diferentes formas geométricas, em particular as formas poliédricas e não poliédricas.

> É possível, desta forma, perceber que a questão de ensinar-se ou não geometria não está relacionada simplesmente a aspectos do desenvolvimento da matemática, razão apresentada por alguns matemáticos para não incluí-la no currículo e refutada por outros. Ela está, na verdade, intimamente ligada ao conceito de como se dá a própria construção do conhecimento matemático pelo aluno – e se se quer que isso aconteça. (PAVANELLO, 1989, p. 98) [12]

A Geometria, portanto, tem uma relevante importância e se faz necessário refletir sobre maneiras de ensiná-la. Por assim ser, neste trabalho foram estudados os sólidos geométricos, conceituados no Capítulo 2, em particular os poliedros, de modo a capacitar os alunos a reconhecerem as formas geométricas poliédricas e não poliédricas (sólidos redondos), e também aspectos como inscrição e circunscrição, interseção, paralelismo e perpendicularismo nos sólidos citados.

Contudo, é necessário refletir que:

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teias de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, etc. (BRASIL, 1997, p.128) [5]

Desse modo, cabe ao professor buscar metodologias que colaborem para que os alunos potencializem suas capacidades de criar, por meio da exploração, bem como dos exercícios de visualização e percepção do espaço, de modo a dar significado ao estudo de geometria.

Capítulo 2

A construção do pensamento geométrico

O desenvolvimento deste trabalho envolve os assuntos planificação de poliedros, representação 3D e Relação de Euler. Neste sentido, a seguir são apresentados alguns conceitos básicos referentes a geometria.

Polígono

Dada uma sequência de pontos de um plano $A_1, A_2, \ldots, A_n$, com $n \geq 3$, todos distintos, sendo que três pontos consecutivos não são colineares, chama-se *polígono* à reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, o qual é denotado por $A_1A_2 \ldots A_n$.

Elementos do polígono:

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de *vértices* do polígono e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ de *lados* do polígono. Os ângulos na região interna do polígono, $A_1\widehat{A_2}A_3, A_2\widehat{A_3}A_4, \ldots, A_{n-1}\widehat{A_n}A_1, A_n\widehat{A_1}A_2$, são chamados de *ângulos internos* do polígono. O segmento que une dois vértices não consecutivos quaisquer é chamado de *diagonal* do polígono.

Polígono Regular

Um polígono é dito *polígono regular* quando todos os seus lados têm a mesma medida e também todos os seus ângulos internos têm a mesma medida.

Abaixo na Fig. (1) mostra alguns exemplos de polígonos.

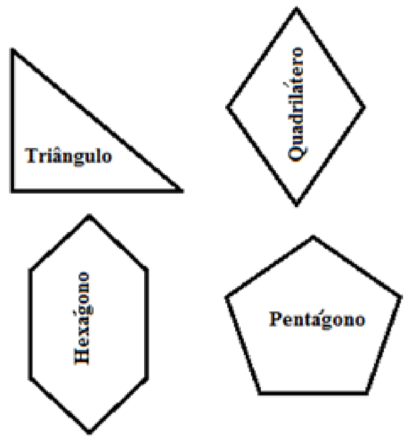


Figura 1: Tipos de Polígonos

Polígono convexo

Um polígono é *convexo* se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n - 2) vértices num mesmo semiplano dos que ela determina. Caso contrário, ele é dito polígono *não convexo* (ou *côncavo*).

Figura 2: Polígonos convexo e não convexo

Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $S_i = \pi(n-2)$.

Demonstração: Considere um polígono convexo A_1A_2 ... A_n com n lados, e trace as n - 3 diagonais que partem do vértice A_1, obtendo os n – 2 triângulos:$A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5, \dots, A_1A_{n-1}A_n$.

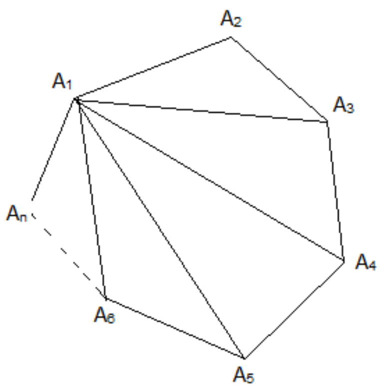


Figura 3: Polígono de n: lados

A soma das medidas dos ângulos internos dos $n-2$ triângulos é igual à soma das medidas dos ângulos internos do polígono.

Como em cada triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é π, temos:

$$S_i = \pi(n-2)$$

■

Transformações Isométricas

Transformações isométricas são aquelas em que se movimenta uma figura preservando suas características, tais como ângulos, comprimento dos lados, distâncias, tipos e tamanhos.

As transformações isométricas incluem:

Translação – é a transformação usada para "mover" figuras, sendo necessárias duas especificações: a direção (que pode ser medida em graus) e a magnitude (que pode ser medida em alguma unidade de comprimento).

Rotação – é a transformação que provoca um "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado *centro de rotação*. A distância em relação ao centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada *ângulo de rotação*.

Reflexão – é a transformação geométrica que se obtém o simétrico de um ponto em relação a um eixo (reta fornecida). Ou seja, se o ponto *A'* é o simétrico do ponto *A* em relação à reta *r*, então o segmento *AA'* é perpendicular à reta *r* de modo que os dois pontos estão a uma mesma distância da reta *r.* Em outras palavras, a reta *r* é a mediatriz do segmento *AA'*.

Sólido Geométrico

É uma figura geométrica que possui três dimensões: latitude, longitude e altitude. São exemplos de sólidos geométricos: a esfera, o cubo, o cilindro, o cone e a pirâmide.

Poliedros

Denomina-se *poliedro* o sólido limitado por polígonos planos, de modo que:

a) Dois desses polígonos não estão num mesmo plano;
b) Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.

Os polígonos são as *faces* do poliedro; os lados dos polígonos são as *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são os *vértices* do poliedro.

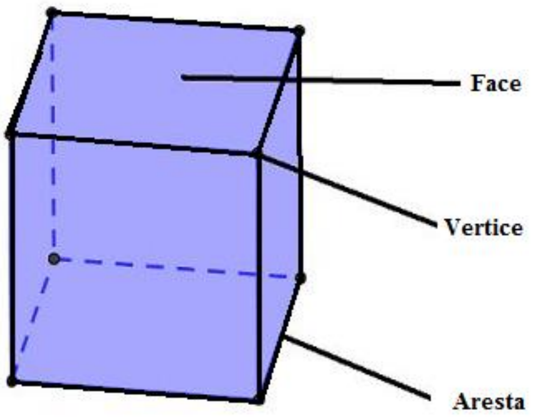


Figura 4: Elementos dos poliedros

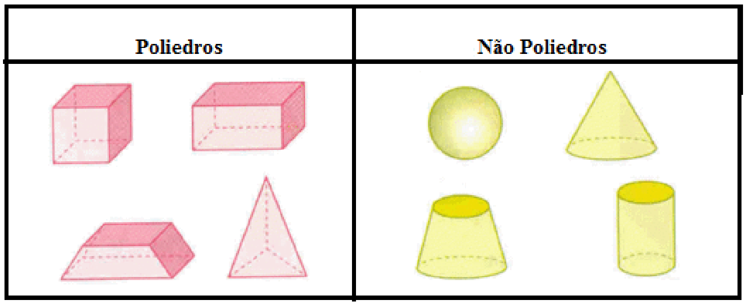


Figura 5: Tipos de sólidos geométricos

Poliedro convexo

Um poliedro se diz *convexo* se, em relação a qualquer uma de suas faces, ele está todo contido num mesmo semiespaço determinado pelo plano que contem esta face. Caso contrário, o poliedro é dito *não convexo*.

Figura 6: Poliedro convexo e não convexo

.

Sólido platônico

Um sólido é dito *platônico* quando ele é um poliedro em que todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

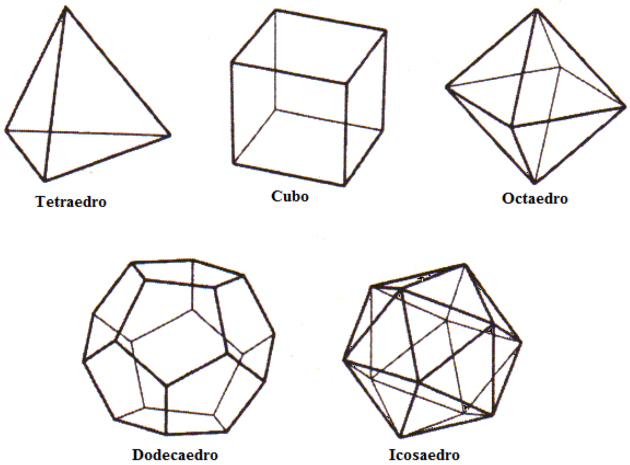


Figura 7: Sólidos Platônicos

Teorema 2 (Teorema de Euler): Em todo poliedro convexo com uma quantidade A de arestas, V de vértices e F de faces, vale a relação $V - A + F = 2$.

Demonstração: Seja P um poliedro convexo. Considere n_k o número de lados do polígono que é a k-ésima face $(1 \leq k \leq F)$. Pelo fato do poliedro ser convexo, cada face é um polígono convexo, então a soma dos ângulos internos da k-ésima face é igual a $\pi(n_k - 2)$. Portanto, a soma dos ângulos internos de todas as faces de P é dada pela expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2),$$

ou melhor,

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)].$$

Observe que a soma no primeiro parênteses da última equação é a soma dos números de lados de todas as faces e, portanto, é igual ao dobro do número de arestas, enquanto que no segundo parênteses a soma das F parcelas é igual a $2F$. Assim, tem-se

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (1)$$

Seja r uma reta que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro P. Escolha um plano H que não intersecta P e que seja perpendicular à reta r, o qual será denominado de *plano horizontal*, e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas *retas verticais*. O semi-espaço, determinado por H, que contém o poliedro P será chamado de *semi-espaço superior* e dir-se-á que seus pontos estão acima de H. Ao projetar perpendicularmente cada ponto X do semi-espaço superior no plano H obtém-se um ponto $\overline{X}$ de H, chamado *sombra* de X. Assim, as sombras de todos os pontos de qualquer conjunto C, contido no semi-espaço superior, produz o conjunto $\overline{C}$, contido em H, denominado *sombra* de C.

Como P é um poliedro convexo, cada ponto da sombra $\overline{\text{P}}$ de P é sombra de um ou dois pontos de P. O contorno da sombra $\overline{\text{P}}$ do poliedro P é um polígono convexo $\overline{\text{K}}$, o qual é a sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de P. Cada ponto é sombra de um único ponto de P e ela é chamada de *contorno aparente* do poliedro P. Cada ponto interior de $\overline{\text{P}}$ (portanto não pertence a $\overline{\text{K}}$, é sombra de exatamente dois pontos de P o mais alto (mais distante de H) será chamado ponto *iluminado*, e o mais baixo ponto *sombrio*.

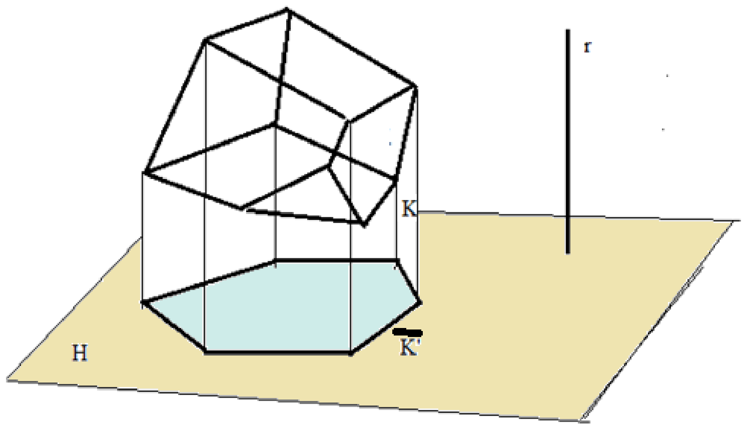


Figura 8: A região iluminada e região sombria

Note que o número de lados de uma face e de sua sombra é o mesmo. Pelo Teorema 1, percebe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono depende somente do número de lados, assim a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K, então, $V = V_0 + V_1 + V_2$. Nota-se, ainda, que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal $\overline{\text{K}}$ no contorno $\overline{\text{P}}$.

Considera-se, então, que a sombra das faces iluminadas (aquelas compostas pelos pontos iluminados de P) é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores (que são os vértices da pavimentação da sombra das faces iluminadas), sombra dos vértices iluminados de P. A soma de todos os ângulos das faces iluminadas é então:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)\ . \qquad (2)$$

Por raciocínio análogo, obtém-se, para a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias (aquelas compostas pelos pontos sombrios de P):

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2). \qquad (3)$$

Somando as Eqs. (2) e (3), obtém-se:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$
$$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2)$$
$$S = 2\pi(V - 2). \qquad (4)$$

Comparando as equações (1) e (4) conclui-se que: $A - F = V - 2$, ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

■

É possível encontrar a demonstração do Teorema de Euler em vários livros de matemática, inclusive no livro de Elon Lages Lima, denominado A matemática do Ensino Médio, volume 2, página 235.[9]

Para a compreensão e aplicação desse conceito através da TIC (software interativo), é preciso ter em mente que a planificação de um poliedro em geometria consiste em um arranjo de polígonos de lados comuns, os quais, ao serem dobrados, retornam à forma espacial que lhe deu origem. Uma planificação de um poliedro, portanto, é o resultado do processo de se cortar o poliedro ao longo de curvas (arestas) e, então, abri-lo de forma que ele possa ser disposto sobre uma superfície plana, sem sobreposições e sem deformações das faces. Uma planificação por arestas é aquela obtida por cortes ao longo das arestas do poliedro.

Embora não sejam utilizados na aplicação neste trabalho, seguem alguns outros tipos de poliedros[3].

a) *Poliedro arquimediano* trata-se de um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e cujos vértices são todos congruentes. Isto é, existe o mesmo arranjo (número e ordem) de polígonos em torno de cada vértice.
b) Os *sólidos de Catalan* são os poliedros duais dos sólidos arquimedianos.
c) Os *sólidos de Johnson* são poliedros convexos cujas faces constituem polígonos regulares e todas as arestas possuem o mesmo comprimento, excluindo-se os sólidos platônicos, os sólidos arquimedianos e as duas famílias infinitas de prismas e antiprismas.
d) Um *antiprisma* é um poliedro convexo formado por duas cópias paralelas de um mesmo polígono convexo, as bases, que são conectadas por uma faixa de polígonos triangulares, as faces laterais.

[3] Para maiores detalhes, o leitor pode consultar, por exemplo, Lima et al. (2006) [9].

Capítulo 3

Software de geometria dinâmica para melhor visualizar as formas geométricas

Para a realização deste trabalho, partiu-se do princípio de que os alunos têm acesso a ferramentas comuns ao dia a dia, como computadores, internet, softwares, jogos eletrônicos e celulares. Nota-se que as crianças dominam essas ferramentas como se fossem velhas conhecidas, e por isso essa geração é considerada como “geração digital”.

E entendendo a escola como um espaço de criação de cultura, é importante que a mesma incorpore os produtos culturais e as práticas sociais mais avançadas da sociedade. Sendo assim, espera-se da escola uma importante contribuição no sentido de ajudar as crianças e os jovens a viverem em um ambiente cada vez mais “automatizado”, o que pode se dar através do uso da eletrônica e das telecomunicações.

Nesse contexto, emergem as TICs, que correspondem a todas as tecnologias que interferem e medeiam os processos informacionais e comunicativos dos seres. Ainda, podem ser entendidas como um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam, por meio das funções de hardware, software e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 2010) [3]

As TICs são utilizadas de diversas maneiras e em vários ramos de atividades, podendo se destacar nas indústrias (processo de automação), no comércio (gerenciamento e publicidade), nos setores de investimentos (informações simultâneas e comunicação imediata) e na educação (processo de ensino e aprendizagem e em educação a distância). Pode-se dizer que a principal responsável pelo crescimento e potencialização da utilização das TICs em diversos campos foi a popularização da Internet.

Nessa conjuntura, cabe aos professores introduzir as TICs no ambiente escolar, como recurso voltado para o auxílio de suas práticas pedagógicas. Em uma sociedade tecnológica, o educador assume um papel fundamental de mediador das aprendizagens, sobretudo como modelo que é para os alunos, adotando determinados comportamentos e atitudes em face das tecnologias. Ainda é preciso considerar que as tecnologias inovam em ritmo acelerado, e são rapidamente assimiladas pelos alunos, o que demanda que a educação também acelere o passo, tornando o ensino mais criativo, de modo que acabe estimulando o interesse pela aprendizagem.

Nesse sentido, é relevante buscar compreender de que forma as TICs podem ser utilizadas para acelerar o desenvolvimento em direção à meta de “educação a todos e ao longo da vida”. Na busca por responder a essa questão, deve-se refletir, primeiramente, que as TICs são apenas uma parte de um contínuo desenvolvimento de tecnologias, a começar pelo giz e os livros, e que, portanto, todos esses elementos podem apoiar e enriquecer a aprendizagem. Além disso, é preciso considerar que as TICs, como qualquer outra ferramenta, devem ser utilizadas e adaptadas para servir a fins educacionais.

> O desenvolvimento de habilidades e o estímulo ao surgimento de novas aptidões tornam-se processos essenciais, na medida em que criam as condições necessárias para o enfrentamento das novas situações que se colocam. Privilegiar a aplicação da teoria na pratica e enriquecer a vivência da ciência na tecnologia e destas no social passa a ter uma significação especial no desenvolvimento da sociedade contemporânea. (BRASIL, 2000, p. 16) [6]

Para utilizar algum software na área da educação, ou melhor, algum software educativo, o educador, na qualidade de mediador, deve estar atento e analisar aspectos relevantes ao software, de modo que possa utilizá-lo como uma ferramenta que auxilie na construção do conhecimento. A partir de um software educativo, pode-se identificar determinado ponto de vista, como a aprendizagem, o que indica a importância do caráter educativo do software no que tange às formas geométricas planas e espaciais, por meio do qual o aluno constrói seu conhecimento.

O professor, ao analisar um software, deve levar em consideração as ações pedagógicas desenvolvidas, de forma que os alunos consigam identificar as concepções de aprendizagem abordadas no contexto educacional da escola em que se encontram inseridos. Deve-se, pois, examinar com bastante atenção os aspectos que definem a qualidade do software, bem como cuidar da sua adaptação frente às necessidades específicas de aprendizagem dos estudantes, em conformidade com a proposta educacional da escola.

Nos cursos voltados para o desenvolvimento de professores, diferentes teorias de aprendizagem são estudadas. Muitas delas servem de base para o aprendizado educacional em diferentes períodos e fomentam uma melhor experiência acerca da dinâmica da sala de aula. Cada teoria contempla as concepções de criança e de jovens; aborda a forma como se dá a aprendizagem destes; versa sobre como se efetiva a relação entre eles e o conhecimento; e fornece dados que contribuem para elaboração de softwares educativos.

Ao passo que o computador é empregado como transmissor de informação ao aluno, ele assume o papel de “máquina de ensinar”. Nesse caso, o enfoque pedagógico é o ensino por meio do computador. Os tipos de softwares que seguem essa abordagem são os tutoriais, dentre os quais se encontram softwares de manipulação de poliedros, que fornecem meios de se fazer rotações, planificações e outras especificidades.

O problema é que a abordagem educacional que se desenvolve com base em software interativo não é suficiente para produzir profissionais preparados para a sociedade atual, que exige cidadãos críticos, criativos, com capacidade de aprender, pensar, trabalhar em grupo, e de conhecer o seu próprio potencial intelectual e do outro. Essas atitudes e competências precisam ser construídas através de um amplo processo educacional, e o computador é um grande aliado nesse processo. Contudo, não é o suficiente.

Este trabalho versou sobre o software *Uma Pletora de Poliedros*, com a expectativa de que, por meio dele, os alunos desenvolvessem a capacidade de reconhecer a diferença entre sólidos poliédricos e não poliédricos, e também que pudessem fazer a associação entre as principais formas poliédricas estudadas na educação básica, como os sólidos platônicos, os primas e as pirâmides por meio de uma representação 3D e sua planificação. Como objetivo, pretendia-se que os discentes conseguissem estabelecer com cada forma geométrica a Relação de Euler.

3.1. Uma Pletora de Poliedros: “Software de Geometria Dinâmica”

Uma Pletora de Poliedros é um software interativo que permite a visualização e manipulação de vários tipos de poliedros (os platônicos, os prismas, as pirâmides, e outros). Várias operações geométricas estão disponíveis nele, como o cálculo de um sólido dual, cortes por seções, planificação, truncamento e estrelamento. O software também informa o número de vértices, arestas e faces de cada poliedro e sua característica de Euler. (BORTOLOSSI, 2008) [1]

O referido software possibilita o exercício da visualização espacial e a identificação, comparação e análise de atributos geométricos e topológicos dos poliedros. Com o escopo de aperfeiçoar a aprendizagem e também de promover a interação dos alunos com o referido software, é preciso construir a autonomia no que se refere à relação constituída entre faces, vértices e arestas de poliedros, sem, contudo, desmerecer a planificação, de modo que os alunos possam compreender o que é um poliedro.

3.2. Delineamento Metodológico do Estudo

Para a realização desta pesquisa, foi realizado um estudo de caso com oitenta e nove alunos de nono ano do ensino fundamental em uma escola da rede pública de Catalão-Goiás – o Colégio Estadual “Joao Netto de Campos”.

A pesquisa apoiou-se na descrição de fatos para constituir seu caráter exato, rigoroso, e, para abarcar a totalidade do seu objeto de estudo. Além disso, o estudo também teve caráter analítico, haja vista que, a partir de uma problemática, ela foi indagada, investigada, e relacionada com situações já conhecidas e com teorias que a fundamentam. É importante esclarecer que, na qualidade de investigador, não houve pretensão de modificar a situação, mas tão somente de compreendê-la tal como ela é.

Para a concretização do presente estudo, foi aplicado um questionário inicial (Apêndice A) com vistas a averiguar: as concepções iniciais que os alunos tinham em relação aos poliedros; onde poderiam ser encontrados; qual sua representação espacial; qual sua planificação; e também o conhecimento que detinham acerca da aplicação da Relação de Euler.

Depois disso, foi apresentado aos alunos o objeto de aprendizagem – *Uma Pletora de Poliedros*, um software interativo que torna possível a visualização e manipulação de vários tipos de poliedros (platônicos, pirâmides e prismas). O software interativo é um ambiente virtual com apresentação de diversas operações geométricas que são disponibilizadas para os usuários, como, por exemplo, a planificação do poliedro, a exibição das faces, arestas e vértices.

O estudo foi finalizado com a aplicação de um novo questionário (Apêndice B) que teve como base as seguintes questões: O que você aprendeu sobre os poliedros? Quais foram as dificuldades encontradas durante a utilização do Software: *Uma Pletora de Poliedros*? Quais foram as dificuldades encontradas para obter a Relação de Euler, a planificação e a representação espacial? O que você aprendeu com a Relação de Euler, a planificação e a representação espacial?

3.3. Propostas de Trabalho para Geometria para a Educação Básica

É de muita relevância, no que diz respeito à educação básica, mostrar aos alunos a presença de geometria em seu dia a dia, como no lugar onde moram, nos caminhos por eles percorridos, e mais. É importante levar o aluno a ter uma boa percepção do espaço geométrico onde se encontra para que possa explorar, controlar e se movimentar apropriadamente. O domínio de conceitos geométricos, portanto, favorece não somente a análise do tema, as interpretações, a resolução de problemas e o entendimento de situações abstratas. Mas o conhecimento geométrico, quando efetivamente internalizado e assimilado, faz com que o aluno seja capaz de dar significado ao mundo que o cerca

No estudo dos sólidos geométricos, foi dada ênfase aos platônicos, aos prismas e às pirâmides. E como recursos didáticos, foram considerados: computadores, projetor multimídia, o software *Uma Pletora de Poliedros* e o livro didático “Vontade de Saber Matemática” [13], de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro. Esses recursos foram utilizados como experimentação, sendo possível uma avaliação do processo e, no caso de aparecimento de problemas, a realização de ajustes, tendo como suporte a oralidade, a escrita de conceitos e respostas escritas. Entende-se, pois, que diante das comprovações e do aparecimento de problemas, é importante que o professor procure mais situações a fim de propor solucionar e estabelecer o conteúdo a ser estudado.

Antes de mostrar os conhecimentos necessários de como acessar o programa *Uma Pletora de Poliedros* e como fazer um estudo consistente com o referido software juntamente com os alunos, deve ser feita uma observação da forma 3D, com rotações, translações, planificação e ampliação e ou redução de poliedros com o uso do software. E, como pré-requisito, os alunos devem entender a distinção entre os conceitos de formas geométricas sólidas e planas, com vistas a melhor compreensão da Relação de Euler. Também é relevante que se promova a identificação do uso apropriado das formas de figuras planas e espaciais vistas pelos alunos em seu cotidiano, para que, a partir desse reconhecimento, seja possível conhecer e aplicar os conceitos matemáticos de geometria. Para alcançar esse objetivo, o software é apresentado, juntamente com o seu encaminhamento metodológico.

É necessário abrir o software em “www.uff.br/cdme”, clicar em *Uma Pletora de Poliedros* e, em seguida, escolher o tipo de sólido com o qual se deseja trabalhar (por exemplo: sólidos platônicos).

Figura 9: Menu iniciar para o software *Uma Pletora de Poliedros*

Uma vez no programa, deve-se escolher um poliedro platônico (por exemplo: cubo). Com isso, será aberta uma janela, como a exibida na Figura 11.

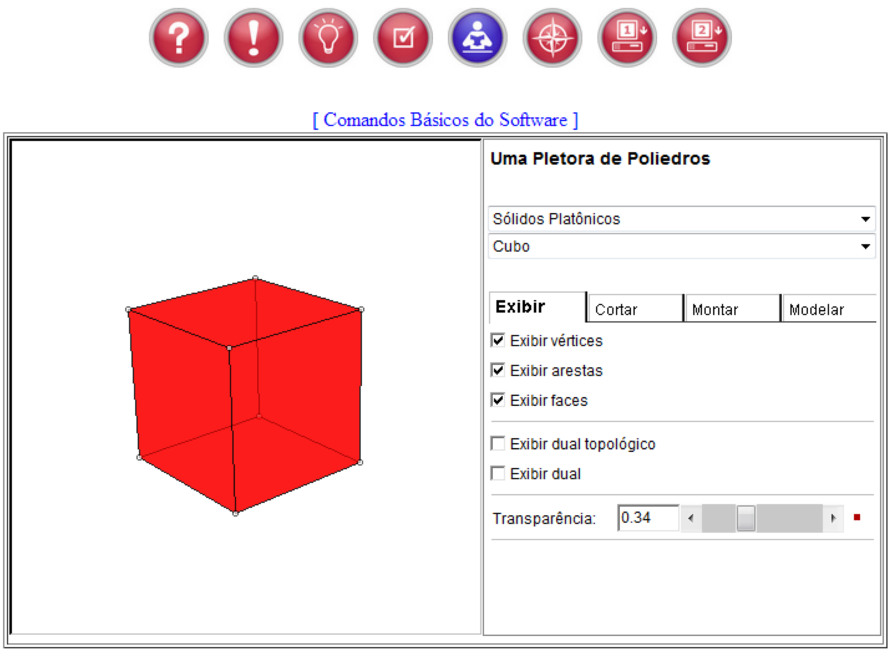


Figura 10: Sólidos Platônicos (cubo)

Pode-se ativar a transparência movimentando o cursor para direita Com esse movimento pode-se visualizar as aresta ao fundo em seguida ativar a rotação clicando com o lado direito do mouse e escolhendo a rotação no plano XOY ou no espaço. Em seguida, é preciso clicar sobre o sólido e o movimentar, para sua melhor visualização. Por meio dessas atividades, é possível reforçar o aprendizado dos alunos quanto à posição relativa do sólido em relação ao eixo XOY, visualizando a posição de cada elemento do sólido escolhido, conforme exibido na Figura 12.

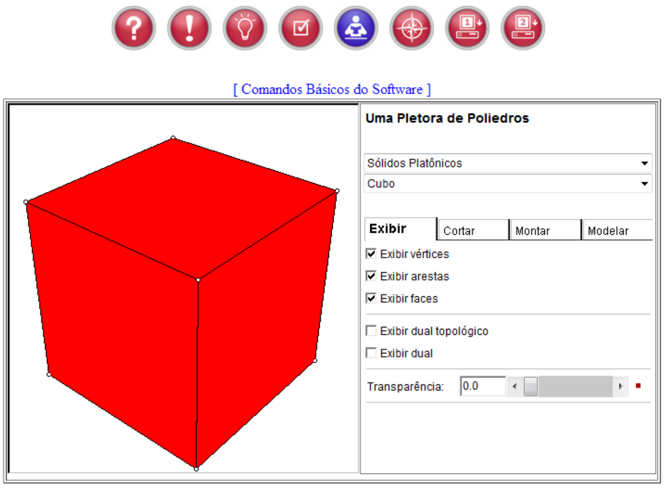


Figura 11: Sólidos Platônicos (rotação XOY do cubo)

Caso o usuário deseje visualizar o sólido em um movimento de rotação no espaço, serão descritos os procedimentos que podem ser utilizados para este fim (Figura 13), pois podem ser empregadas outras ferramentas ou caminhos dentro programa.

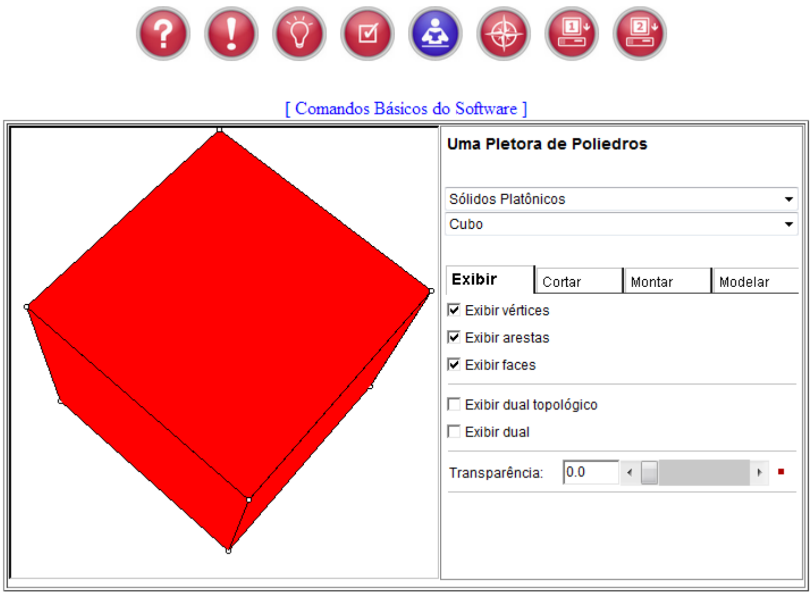


Figura 12: Sólidos Platônicos (rotação do cubo no espaço)

Se existir problema quanto à visualização das dimensões, é preciso ativar a ampliação e ou redução, clicando com o lado direito do mouse, e fazendo a escolha da escala. Em seguida, deve-se clicar sobre o sólido e o movimentar para sua melhor visualização, como exibido na Figura 14.

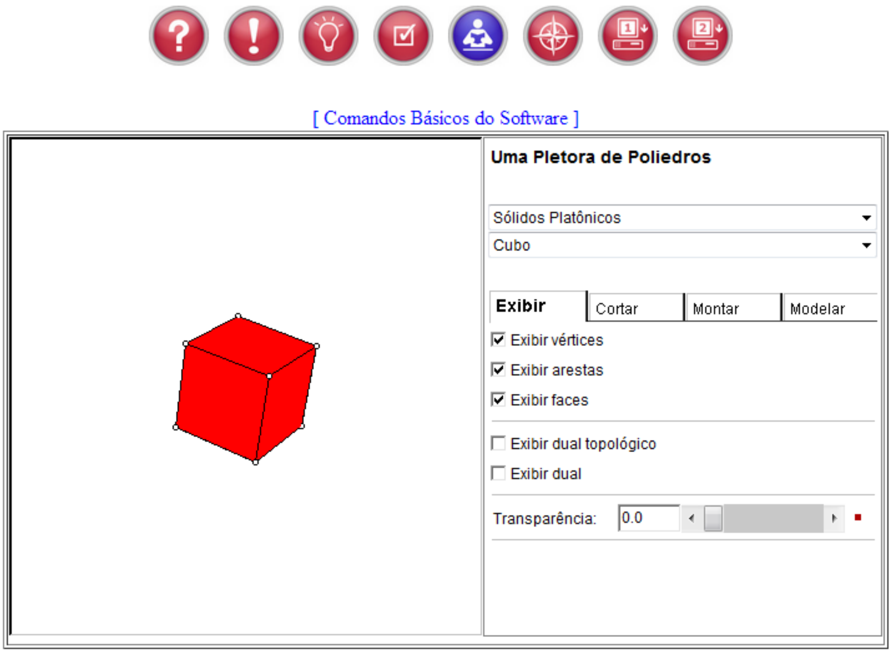


Figura 13: Sólidos Platônicos (redução e ou ampliação do cubo)

Se a imagem não estiver bem nítida e for preciso movimentá-la, é preciso ativar a translação clicando com o lado direito do mouse e fazendo a escolha da translação. Em seguida, deve-se clicar sobre o sólido e o movimentar de modo que se possa melhor visualizá-lo (veja a Figura 15).

Figura 14: Sólidos Platônicos (translação do cubo)

Após realizar o trabalho inicial de visualização através de rotações, translações e ampliação (e ou redução), parte-se para a manipulação do software a fim de reconhecer os sólidos: platônicos, prismas e pirâmides, que constituem a base fundamental deste estudo. E, ao fim da presente pesquisa, parte-se para o reforço, junto aos alunos, da construção 3D e da planificação, a fim de aplicar a Relação de Euler dos referidos sólidos.

Após as devidas observações do poliedro escolhido em sua forma 3D, passa-se à construção de sua forma planificada, com o objetivo de fazer a contagem do número de vértices, faces e arestas. Para tanto, verifica-se e se faz uso dos conceitos de sólidos 3D e planificação. A utilização do software colabora com o objetivo de conhecer e quantificar os sólidos quanto ao número de arestas, de vértices e de faces, tendo com pré-requisitos matemáticos noções de formas planas e espaciais.

A seguir, com o intuito de exemplificar o uso do software em questão, apresenta-se um estudo de um particular sólido. Para tanto, é preciso abrir o menu no software, clicar e escolher o tipo de sólido, por exemplo, o prisma pentagonal, de modo que se abra uma janela, como a exibida na Figura 16. Para poder fazer a contagem do número de vértices, deve-se ativar "escolher vértice", clicando com o lado direito do mouse e efetuando a escolha "escolher vértice". Em seguida, é preciso clicar sobre cada vértice e, caso necessário, movimentar o sólido para melhor visualizá-lo e contar os seus vértices.

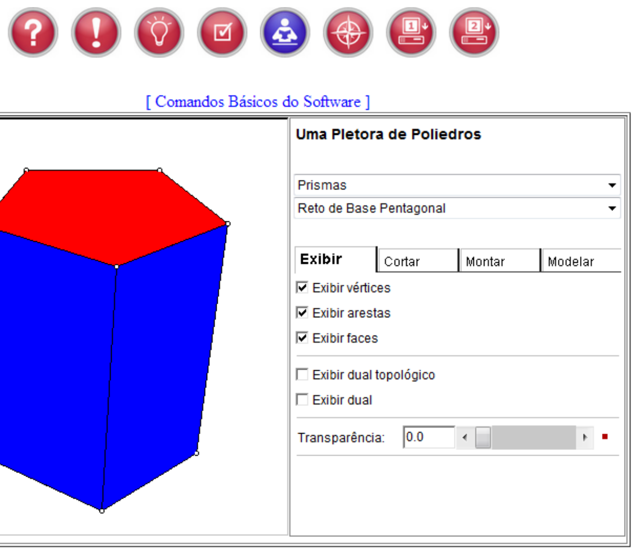


Figura 15: Sólido: prisma pentagonal

Para verificar a quantidade de faces, arestas e vértices, é feita a planificação do sólido. Para isso, é preciso abrir o menu no software para exibir, e então clicar e escolher o tipo de sólido, que, para exemplo, é o prisma pentagonal. Em seguida, deve-se ativar montar e, se necessário, fazer uso da escala para que a imagem do prisma caiba na tela, conforme exibido na Figura 17.

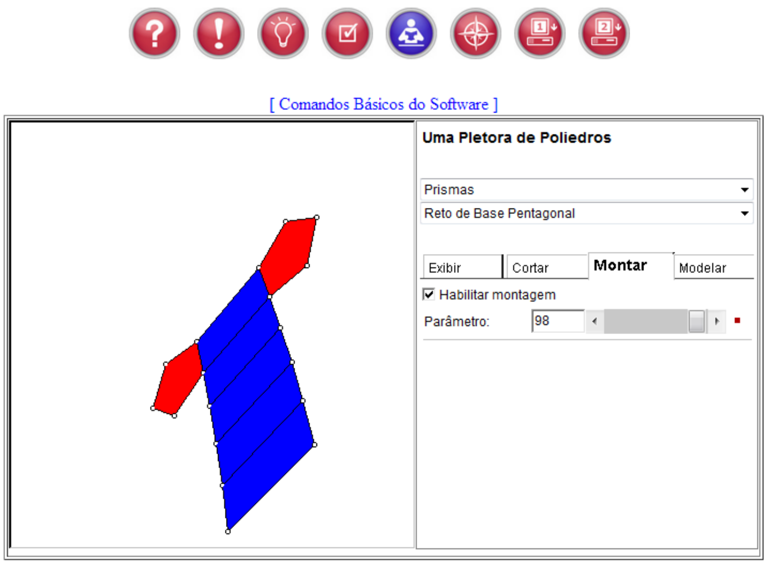


Figura 16: Planificação do prisma pentagonal

Caso necessário, para que se possa fazer a contagem de todos os elementos, deve-se ativar a rotação e ou translação, clicando com o lado direito do mouse e fazendo a escolha. Em seguida, clica-se sobre o sólido e o movimenta para melhor visualizar e contar as arestas, os vértices e as faces.

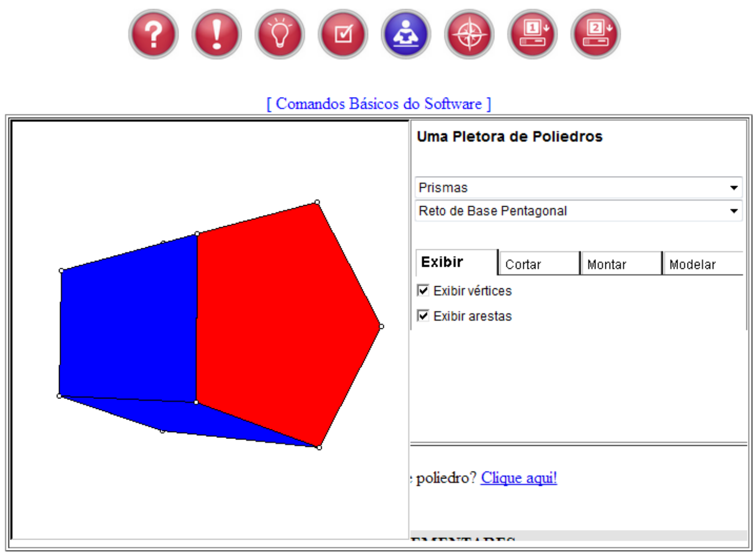


Figura 17: Rotações do prisma pentagonal

De acordo com o que foi realizado com a manipulação do software, é possível perceber claramente o número de arestas: A = 15; o números de faces: F = 7. Daí segue, pela Relação de Euler, que $V + F - A$ = 2, ou seja, V = 10.

Capítulo 4

Coleta e investigação de dados

As narrativas apresentadas pelos alunos foram analisadas por meio de uma representação estatística, que, juntamente com consistente suporte teórico, tiveram como intuito conferir fidedignidade científica aos dados coletados. Os resultados obtidos foram apresentados a partir da análise das respostas dos questionários e do desenvolvimento dos alunos em relação à atividade guiada sobre a Relação de Euler, a planificação e a representação espacial.

Os resultados analisados representam a exposição posterior da compreensão do entrevistador sobre a experiência relatada pelo entrevistado. E esse procedimento pode ser considerado como um cuidado em equilibrar as relações de poder na situação de pesquisa. (SZYMANSKI, Heloisa; ALMEIDA; Laurinda Ramalho de; PRANDINI, Regina Célia Almeida Rego, 2004, p. 52)[14]

Partiu-se, pois, da análise de algumas respostas que surgiram por parte dos alunos em relação às questões de 01 a 17 do questionário inicial, que versam sobre a estrutura das ferramentas, quais sejam: Você tem computador em casa? Você sabe trabalhar com editores de texto, planilhas eletrônica e/ou pesquisar na internet? Você tem acesso à internet? Em caso afirmativo, o que você acessa quando está navegando? [...] Em que você tem maior dificuldade na matemática? ( )Assimilar o conteúdo ( )Interpretar as atividades ( ) Efetuar cálculos (Ver Apêndice A).

Tabela 01. Ferramentas e recursos para construção

Questões	Respostas afirmativas	%	Respostas negativas	%
1	77	86,52	12	13,48
2	75	84,27	14	15,73
3	79	88,76	10	11,24
4	69	77,53	20	22,47
5	39	43,82	50	56,18
6	17	19,10	72	80,90
7	59	66,29	30	33,71

8	57	64,04	32	35,96
9	49	55,06	40	44,94
10	65	73,03	24	26,97
11	52	58,42	37	41,58
12	31	34,83	58	65,17
13	75	84,27	14	15,73
14	54	60,67	25	39,33
15	9	10,11	80	89,99
16	38	42,70	51	57,30
17	2	2,25	87	97,75

O gráfico abaixo, por sua vez, apresenta a análise das respostas em termos percentuais.

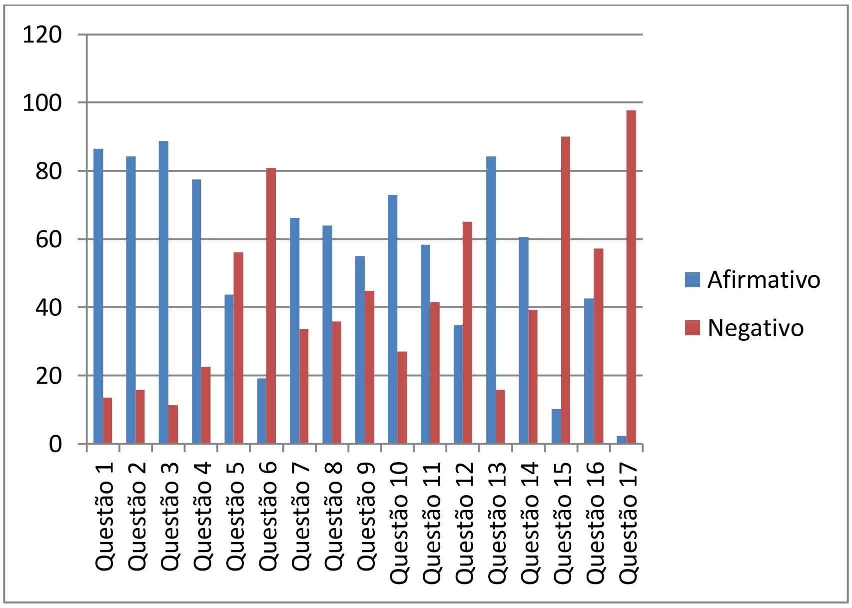


Gráfico 01. Ferramentas e recursos para construção

As respostas comprovaram que a maior parte dos alunos tem conhecimento relevante dos pré-requisitos necessários para fazer o estudo de poliedros.

A seguir, foram consideradas as perguntas que abarcam o tema do currículo de geometria espacial, as quais estão arroladas nas questões de 18 a 28 do questionário inicial (Apêndice A), quais sejam: Você acha importante conhecer as formas geométricas? Por quê? Você conhece as diferentes representações das figuras geométricas? Explique. Você conhece as diferenças entre figuras planas e espaciais? A quantidade de arestas de um poliedro convexo é 12 e o número de faces é 6. Qual a quantidade de vértices? Como você encontrou o valor? [...] O que você pode relacionar como pré-requisito para fazer a contagem, de forma segura, dos elementos do poliedro: vértices, arestas e faces?

Tabela 02: Conhecimento acadêmico sobre geometria segundo livros didáticos

Questões	Respostas afirmativas	%	Respostas negativas	%
18	73	82,02	16	17,98
19	23	25,84	66	74,16
20	9	10,11	80	89,89
21	30	33,71	59	66,29
22	0	0	89	100
23	18	20,22	71	79,78
24	12	13,48	77	86,52
25	7	7,87	82	92,13
26	28	31,46	7	68,54
27	0	0	89	100
28	0	0	89	100

Segue, abaixo, a relação gráfica dos dados relativos às questões de conhecimento acadêmico.

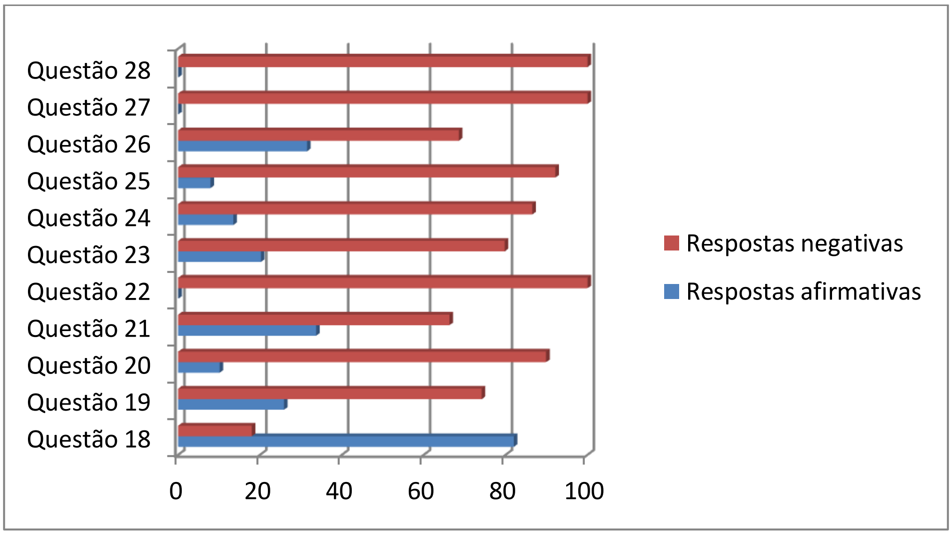


Gráfico 02. Conhecimento acadêmico sobre geometria espacial

Pelo exposto, a maioria dos alunos não expressou a diferença entre algo que tem volume e que está representado no espaço bidimensional. Por exemplo, para eles, o cubo seria uma espécie de quadrado, assim como a pirâmide seria um tipo de triângulo. Notou-se, também, que os discentes acreditam saber pensar um poliedro como uma figura que apresenta volume, mas, no momento em que eles expressam aquilo que pensam ser um poliedro, apenas conseguem exprimi-lo como se este fosse uma figura plana. Sendo assim, identificou-se que alguns alunos soube relacionar forma plana e espacial; tampouco são capazes de diferenciar e fazer contagem de aresta, face e vértice.

Após responder ao questionário inicial, os alunos iniciaram a manipulação do software, a fim de preencher a tabela com o número de vértices (V), faces (F), arestas (A) e o valor de $V + F - A$. Para auxiliar o processo de contagem, foi utilizado o recurso de exibição de arestas e vértices e faces. Para contar o número de faces, os alunos utilizaram o recurso "montar" do software, que possibilita a planificação do sólido.

A estratégia de contar o número de faces, arestas e vértices, a partir da exibição no dispositivo virtual, foi facilmente desempenhada para os sólidos platônicos: tetraedro e cubo, assim como para a pirâmide quadrada e para o prisma reto de base triangular. Contudo, a mesma facilidade não foi notada em relação aos sólidos platônicos: dodecaedro e icosaedro, os quais possuem grande número de arestas. As dificuldades apresentadas para a contagem das arestas do dodecaedro e do icosaedro ficaram evidentes nas respostas de uma das perguntas que faziam parte do questionário final (Apêndice B).

As questões foram divididas em duas partes.

(A) De 1 a 4, versam sobre o conhecimento dos pré-requisitos e dos recursos, como o software *Uma Pletora de Poliedros.*

(B) De 5 a 15 tratam do conhecimento acadêmico de geometria, dando ênfase aos primas, pirâmide e sólidos platônicos, bem como para os aspectos da planificação, representação espacial e Relação de Euler.

As questões de 1 a 4, por sua vez, são atinentes ao conhecimento do software *Uma Pletora de Poliedros* e de recursos do computador para manusear a dar início ao estudo referente à geometria de posições (Apêndice B). Considerando essas questões, constatou-se o seguinte:

Tabela 03: Conhecimento de recursos e software interativo

Questões	Respostas afirmativas	%	Respostas negativas	%
1	81	90,01	8	8,99
2	67	75,28	27	24,72
3	86	96,63	3	3,37

4	87	97,75	2	2,25

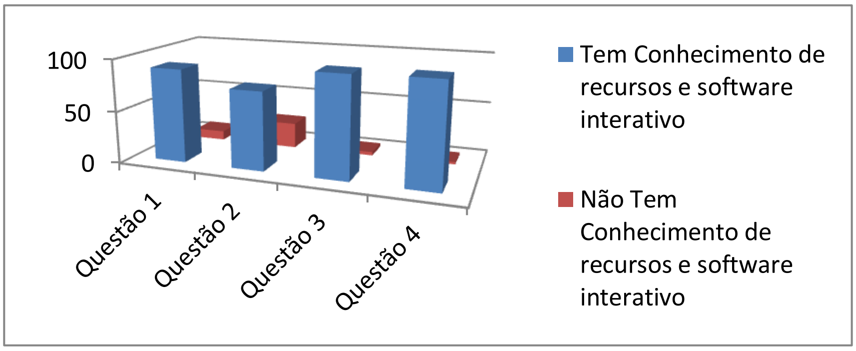


Gráfico 03. Questionário final: conhecimento de recursos e software interativo

Comparando as questões 15, 16 e 17 (gráfico 01) e questão 19 (gráfico02) com as questões 1, 2, 3 e 4 (gráfico 03) percebe-se que ocorreu uma aquisição de informação sobre os recursos e do software “Uma Pletora de Poliedros”.

Já as questões de 5 a 15, com exceção da questão 12, referem-se ao conhecimento formal referente à geometria de posições no estudo da planificação, representação espacial e Relação de Euler aplicadas em primas, pirâmides e sólidos platônicos (Apêndice B). E pela análise dessas questões foram obtidas as seguintes respostas:

Tabela 04: Conhecimento formal após manusear o software “Uma Pletora de Poliedros”.

Questões	Respostas afirmativas	%	Respostas negativas	%
5	77	86,52	12	13,48
6	67	75,28	22	24,72
7	65	73,03	24	26,97
8	74	83,15	15	16,85
9	71	79,78	18	20,22
10	60	64,42	29	32,58
11	51	57,30	38	42,70
12	4	4,49	85	95,51
13	51	57,30	38	42,70
14	56	62,92	33	37,08
15	55	61,80	34	38,20

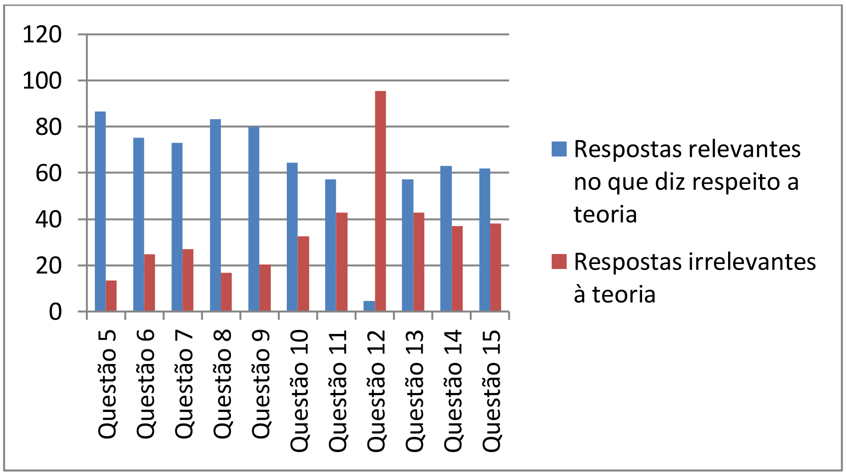


Gráfico 04. Conhecimento sobre a teoria de geometria espacial

Já em se levando em consideração as respostas relevantes nos questionários inicial e final, respectivamente, no que se diz respeito às questões de planificação, representação 3D e Relação de Euler dos prismas, pirâmides e sólidos platônicos, entendeu-se que:

I. Planificação e representação 3D

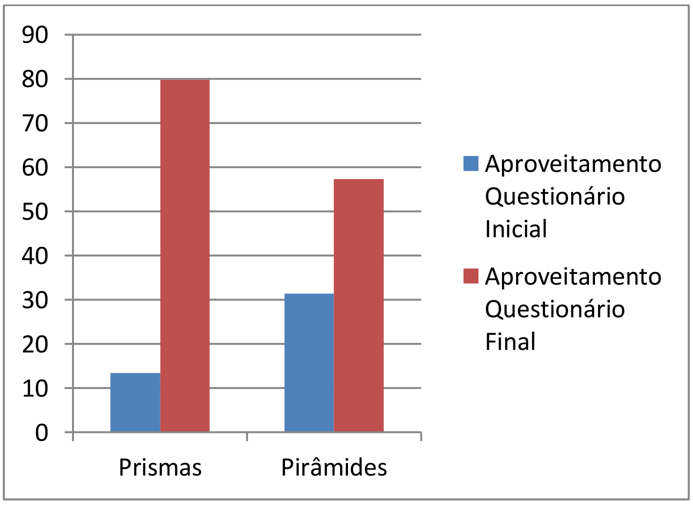


Gráfico 05. Aproveitamento dos alunos em relação à planificação e representação 3D

II. Relação de Euler.

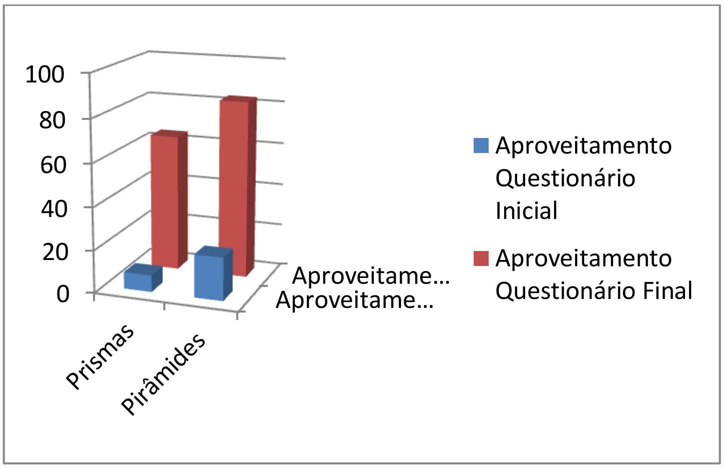


Gráfico 06. Contagem do nº de arestas, vértice e faces "Relação de Euler"

III. Problemas "Aplicação da Relação de Euler".

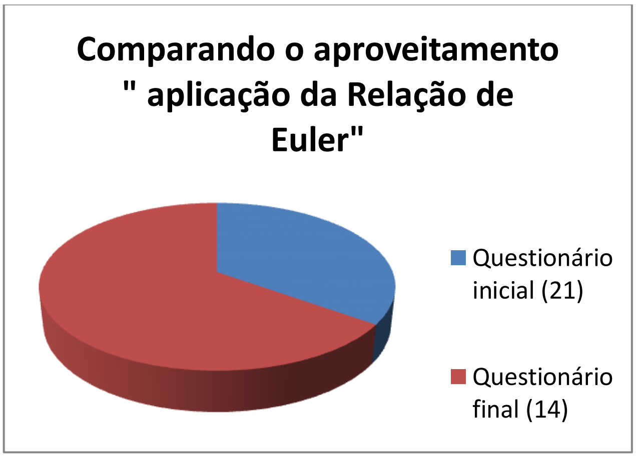


Gráfico 07. Aplicação da Relação de Euler na resolução de problemas

A partir da análise dos gráficos 05, 06 e 07, percebeu-se uma melhora significativa em relação à utilização do software *Uma Pletora de Poliedros* como ferramenta para melhorar a visualização dos poliedros, de modo que o software propiciou, de forma sistemática, conhecimento formal dos conteúdos de geometria espacial proposta, como, por exemplo: fazer planificação de poliedros como prismas, pirâmides e sólidos platônicos; fazer representação espacial dos prismas, pirâmides e sólidos platônicos; e entender e aplicar a Relação de Euler.

Considerações finais

No presente estudo, foram investigadas as compreensões precedentes dos alunos de nono ano de ensino fundamental do Colégio Estadual “João Netto de Campos” sobre poliedros. A partir dessa sondagem inicial, foi desenvolvida uma atividade norteada por um software denominado *Uma Pletora de Poliedros.* Buscou-se, com isso, verificar como os discentes, ao interagirem com essa ferramenta, estabelecem relações entre os elementos que constituem os poliedros. Além disso, intentou-se perceber a contribuição do software para a compreensão de que poliedros são figuras tridimensionais que apresentam uma relação muito particular, isto é, $V + F - A = 2$. E, por fim, pretendeu-se levar os alunos a saberem representar poliedros em uma planificação, bem como na forma espacial.

Como resultado, verificou-se que a utilização desse software, ao possibilitar o exercício da visualização espacial: identificação, comparação e o estabelecimento de relações entre os elementos que constituem e classificam os poliedros, contribuiu, de forma significativa, para a aprendizagem da matemática. O software cooperou para a construção e compreensão de uma planificação, de uma representação espacial e da Relação de Euler, tendo permitido o alcance do objetivo primordial deste trabalho: que é de promover o entendimento de que poliedros são figuras tridimensionais e que possuem uma relação entre suas faces, vértices e arestas.

E, no caso específico da utilização do software *Uma Pletora de Poliedros*, é importante salientar que este pode ser utilizado também para exploração de diversos outros conteúdos e ser empregado em atividades que envolvem a geometria espacial, como, por exemplo, para trabalhar área das superfícies de poliedros a partir de sua planificação, classificar poliedros, explorar o conceito de dualidade topológica, entre outros.

Verificou-se que o recurso didático, no caso, o software, proporcionou certa autonomia aos alunos, despertando neles interesse, a necessidade de querer saber por meio de experimentação, e criatividade ao manusear o software dentro e fora do ambiente escolar. Diante dessa constatação, depreende-se que o papel do professor é bastante significativo, uma vez que ele se porta como mediador da aprendizagem. É, portanto, a partir de sua intervenção por meio de aulas bem planejadas e aplicadas com entusiasmo, com o suporte de estratégias que tornam o ensino significativo, e através de uma prática docente que não constitua um mero exercício repetitivo, mas que seja contextualizada, é que se consegue motivar os alunos, despertando-lhes o desejo de aprender, e, fazendo-os perceber que o aprendizado da matemática, em especial de geometria, é relevante.

Diante desse cenário, nota-se uma vontade cada vez maior, em alguns educadores, de introduzir novas tecnologias em suas aulas. Contudo, deve-se refletir que nem sempre é fácil estabelecer uma relação entre a forma tradicional de ensino com ferramentas até então desconhecidas, haja vista que dificuldades são muitas, como: professores e alunos desmotivados, a falta de equipamentos como computadores e projetor multimídia, e outras.

Deve-se ressaltar que o resultado da aplicação das atividades com o uso do software *Uma Pletora de Poliedros* foi satisfatório, principalmente para os alunos que apresentavam certa dificuldade em visualizar as formas geométricas, e para aqueles que não possuíam noções de espaço ou posicionamento, seja por deficiência de aprendizagem das séries anteriores, ou por deficiência natural. Além disso, o uso dessa ferramenta contribuiu para potencializar a compreensão da relação entre a geometria espacial com outros conteúdos matemáticos, proporcionando, assim, habilidades específicas úteis no ensino de geometria.

Entretanto, para a realização foram enfrentadas algumas dificuldades como, por exemplo, a falta de computadores no Laboratório de Informática, em relação a reserva de equipamentos junto à coordenação pedagógica da escola campo e também dificuldades técnicas durante a utilização do software, como internet não funcionando adequadamente e um número elevado de alunos do nono ano.

Por meio da observação dos questionários aplicados aos alunos, pode-se afirmar que o objetivo de desenvolver as habilidades e competências contempladas nos PCNs foi obtido por meio da utilização do software *Uma Pletora de Poliedros*. Isso se explica pelo fato de que, quando o aluno faz a manipulação dos elementos geométricos, ele tem a possibilidade de projetar e realizar ações frente às dificuldades que possam surgir, fazendo um julgamento dos dados geométricos, identificando e representando situações do dia a dia, e, com isso, aumentando expressivamente o seu aprendizado. Depreende-se, portanto, que o uso de softwares nas aulas de geometria espacial permite ao aluno a autonomia necessária para gerenciar seu aprendizado.

Referências

[1] BORTOLOSSI, Humberto José. **Uma Pletora de Poliedros**. 2008. Disponível em: http://www.uff.br/cdme/pdp/. Acesso em: 14/10/2013.

[2] BOYER, Carl B.. **História da matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

[3] BRASIL. Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial. Cadernos Temáticos - **Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC:** Sistemas Aplicados a Saúde Humana. Brasília: ABDI, 2010. Disponível em: http://www.abdi.com.br/Estudo/Caderno%20Tem%C3%A1tico%20TIC%20-%204%20(Vers%C3%A3o%20Final)-%20Sistemas%20Aplicados%20a%20Sa%C3%BAde%20Humana.pdf. Acesso em: 21/02/2014.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução. **Resolução nº 3, de 26 de junho de 1998.** Institui as Diretrizes Curriculares. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/res0398.pdf. Acesso em: 25/11/2013.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 18/09/2010.

[6] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - PCNEM**. MEC. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 18/09/2010.

[7] FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médias Sul, 1999.

[8] GIOVANE, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática uma nova abordagem. São Paulo: FTD,2000.

[9] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] MICHAELIS ONLINE. **Visualizar.** Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=visualizar. Acesso em: 29/06/2014.

[11] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar. Volume 9 geometria plana. Atual Editora LTDA São Paulo, 1997.

[12] PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria:** uma visão histórica. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, 1989.

[13] SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática** – 6º, 7º 8º e 9º ano. São Paulo: FTD, 2013.

[14] SZYMANSKI, Heloisa; ALMEIDA; Laurinda Ramalho de; PRANDINI, Regina Célia Almeida Rego. **A entrevista na educação**: a prática reflexiva. 3 ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2004.

APÊNDICE A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA – PROFMAT

UFG

Caro aluno, este questionário tem como objetivo coletar dados para uma pesquisa sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Vale ressaltar que todos os seus dados serão mantidos em sigilo.

NOME: ____

____

IDADE: ___________ SÉRIE:________________

APELIDO:____

01. Você tem computador em casa? ( ) Sim ( ) Não

02. Você sabe trabalhar com editores de texto, planilhas eletrônica e/ou pesquisar na internet?

03. Você tem acesso à internet? Em caso afirmativo, o que você acessa quando está navegando?

04. Você gosta de estudar? ( ) Sim ( ) Não

05. Você estuda fora de sala de aula? Quanto tempo por dia?

06. Qual disciplina você mais gosta? Por quê?

07. Você usa o computador para auxiliá-lo quando está estudando? Para fazer o que (pesquisar, utilizar algum software, digitar textos ...)?

08. Você gosta das aulas de matemática? ( ) Sim ( ) Não

09. Você mudaria as aulas de Matemática? Como gostaria que elas fossem?

10. Você gostaria que o computador fosse utilizado no desenvolvimento da disciplina Matemática? ( ) Sim ( ) Não

11. Você fala para o professor quando tem dificuldades em relação à Geometria? (   ) Sim (   ) Não

12. Em que você tem maior dificuldade na matemática? ( ) Assimilar o conteúdo ( ) Interpretar as atividades ( ) Efetuar cálculos

13. Você considera a matemática importante no seu cotidiano? (   ) Sim (   ) Não.

Por quê?

14. Dê exemplo de alguma coisa em que você usa a geometria (matemática) no seu dia a dia.

15. Você participa ou já participou de algum trabalho escolar com o uso de software? Especifique.

16. O que você entende sobre as inovações tecnológicas na matemática?

17. Você conhece algum software que aplica matemática? Qual e em quê?

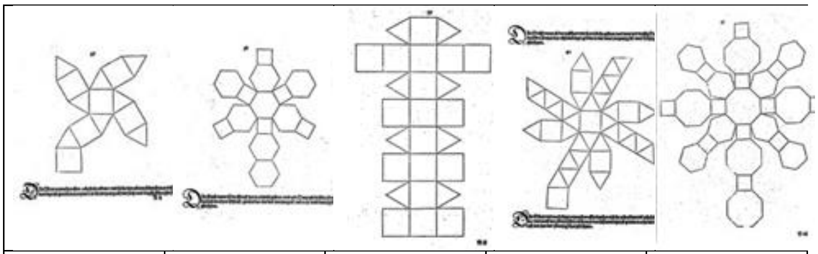
18. Você acha importante conhecer as formas geométricas? Por quê?
19. Você conhece as diferentes representações das figuras geométricas? Explique.

20. Você conhece as diferenças entre figuras planas e espaciais?

21. A quantidade de arestas de uma poliedro convexo é 12 e o número de faces é 6. Qual a quantidade de vértices? Como você encontrou o valor?

a) 8 b) 6 c) 8,5 d) 7,8 e) 7

22. As ilustrações abaixo foram extraídas da obra “Underweysung der messung / mit dem zirckel un richtscheyt / in Linien ebenen und gantzen corporen” (em português, “Instruções para a medida / com régua e compasso / das linhas, planos e corpos sólidos”) do artista alemão Albretch Dürer (1471-1528) . Elas são planificações de sólidos arquimedianos. Tente identificar o poliedro de cada planificação.



23. Usando o seu conhecimento, conte o número de vértices, arestas e faces das pirâmides indicadas abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Pirâmide Com Base	**Número de Vértices (V)**	**Número de arestas (A)**	**Número de Faces (F)**	**Valor de V - A + F**
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				
Heptagonal				
Polígono de *n* Lados				

24. Agora faça uma planificação das três primeiras pirâmides e em seguida faça a representação espacial.

25. Usando o seu conhecimento, conte o número de vértices, arestas e faces dos prismas indicados abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Prisma Com Base	**Número de Vértices (V)**	**Número de arestas (A)**	**Número de Faces (F)**	***Valor de V - A + F***
Triangular				
Quadrangular				
Pentagonal				
Hexagonal				
Heptagonal				
Polígono de *n* Lados				

26. Agora faça uma planificação dos três primeiros primas e em seguida faça a representação espacial.

27. Como você levaria em consideração o grau de dificuldade de reproduzir as formas geométricas espaciais e as planas?

28. O que você pode relacionar como pré-requisito para fazer a contagem, de forma segura, dos elementos do poliedro: vértices, arestas e faces?

APÊNDICE B

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Caro aluno, este questionário tem como objetivo coletar dados para uma pesquisa sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Vale ressaltar que todos os seus dados serão mantidos em sigilo.

NOME: ____

IDADE: ____________ SÉRIE:________________
APELIDO:____

01. Você participa ou já participou de algum trabalho escolar com o uso de algum software?
02. O que você entende sobre inovações tecnológicas na matemática?

03. Você conhece algum software que aplica matemática? Em caso afirmativo, qual software?

04. Você acha importante conhecer as formas geométricas? Por quê?

05. Você conhece as diferentes representações das figuras geométricas? Cite exemplos.

06. Quais são as diferenças entre figuras planas e espaciais?

07. Após o uso do software "Uma pletora de poliedro" pode-se obter a contagem da quantidade de arestas, vértices e faces de um poliedro convexo. Por exemplo, em um poliedro convexo o número de arestas é 15 e o de faces é 7. Qual a quantidade de vértices?

a) 10 b) 16 c) 8,5 d) 7,8 e) 7

08. Usando o software, se julgar necessário, conte o número de vértices, arestas e faces das pirâmides indicadas abaixo. Anote os resultados na tabela. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Pirâmide Com Base	**Número de**	**Número**	**Número de Faces**	**Valor de V - A + F**

	Vértices (V)	**de arestas (A)**	**(F)**	
Triangular				
Quadrangular				

09. Agora faça uma planificação dessas pirâmides e em seguida a representação espacial.
10. Usando o software, se julgar necessário, conte o número de vértices, arestas e faces dos prismas indicados abaixo, anotando os resultados na tabela. Lembre-se que, no software, você pode usar o botão esquerdo do mouse para girar a figura.

Prisma Com Base	**Número de Vértices (V)**	**Número de arestas (A)**	**Número de Faces (F)**	***Valor de V - A + F***
Pentagonal				
Hexagonal				

11. Agora faça uma planificação desses primas e em seguida a representação espacial.

12. Como você levaria em consideração o grau de dificuldade de reproduzir as formas geométricas espaciais e as planas? Por quê?

13. O que você pode relacionar como pré-requisito para fazer a contagem dos elementos: vértices, arestas e faces de forma segura?

14. Determine o número de faces de um poliedro convexo que possui seis vértices e nove arestas.

a) 4

b) 5

c) 6

d)7

15. Quantas arestas possui um poliedro que tem duas faces pentagonais e cinco quadrangulares?

a) 15

b) 20

c) 30

d) 60