Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

Abordagens históricas sobre logaritmos

Marcos Borges de Oliveira

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2014

Abordagens históricas sobre logaritmos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marcos Borges de Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 17 de março de 2014.

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello (UFMT)
Prof. Dr. Andre Krindges (UFMT)
Prof. Dr. Edgar Nascimento (IFMT)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

B732a Borges de Oliveira, Marcos.
Abordagens históricas sobre logaritmos / Marcos Borges de Oliveira. -- 2014
76 f. ; 30 cm.

Orientador: Moiseis dos Santos Cecconello.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Logaritmos. 2. progressões geométricas e aritméticas. 3. quadraturas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2014 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Prof. Dr. André Krindges

Prof. Dr. Edgar Nascimento

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças nesses três anos de curso.

A minha esposa, Regiane pelo companheirismo e carinho que tem me dedicado.

Aos meus Filhos Mateus e Mariana por todas as felicidades que me proporcionam todos os dias.

Aos meus pais Everaldo e Maria das Dores pelo amor, pela minha educação e pelo apoio que tem me dedicado.

Aos meus irmãos Núbia, Juliana, Wanderlei, Everaldo, Fernando e Sara, ao meu sogro Hermes e minha sogra Ana Hilda pela confiança que creditam em mim.

Aos colegas de curso, aos professores e a todos aqueles que de alguma forma contribuíram e acompanharam essa caminhada em busca do conhecimento.

Resumo

Neste trabalho buscamos abordar os logaritmos a partir de três concepções que são: $1^{\underline{o}}$ Os logaritmos estabelecem uma relação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética. $2^{\underline{o}}$ Podemos definir logaritmos de modo que a base e (exponencial) apareça de forma natural. $3^{\underline{o}}$ a Função logarítmica pode ser caracterizada pelas seguintes propriedades: é crescente, e multiplicando dois números positivos x e y $f(x.y)$ do produto deve ser a soma dos logaritmos $f(x) + f(y)$. Para trazer estas três concepções de forma significativa utilizamos abordagens históricas tornando o texto atraente a professores que buscam subsidio acerca do tema.

Palavras chave: Logaritmos; progressões geométricas e aritméticas; quadraturas.

Abstract

In this paper we address the logarithms from three concepts that are: 1º The logarithms establish a relationship between a geometric progression and an arithmetic progression. 2º Can be defined so that the logarithms base e (exponential) appear naturally. 3º The logarithmic function can be characterized by the following properties: it is increased by multiplying two positive numbers x e y $f(x.y)$ of the product is the sum of logarithms $f(x) + f(y)$. To bring these three conceptions of significantly utilize historical approaches making the text appealing to professors seeking subsidies on the subject.

Keywords: Logarithms; arithmetic and geometric progression; quadrature.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O logaritmo é uma das noções mais importantes que integram a grade curricular de matemática no Ensino Médio, seja pela sua história, que possibilitou aos astrônomos do século XVII a fazerem operações aritméticas extremamente trabalhosas, permitindo avanços significativos nesta área de conhecimento, ou pelas aplicações em diversas áreas como na física, química e biologia.

Durante muito tempo, o ensino de logaritmo era contextualizado por ser uma poderosa ferramenta de cálculo algébrico, pois com os logaritmos multiplicações e divisões são reduzidas a somas e diferenças, potências e raizes são reduzidas a multiplicações e divisões, respectivamente. Com o advento do uso de calculadoras eletrônicas e dos computadores esta ferramenta tornou-se obsoleta. Porém, a importância dos logaritmos se dá quando com ele (e consequentemente com sua inversa a função exponencial) podemos descrever grandezas cuja variação é em cada momento proporcional ao seu valor. Grande parte dos livros didáticos da educação básica no Brasil mostram os logaritmos da seguinte maneira:

> Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar a base a de modo que a potencia obtida seja igual a b. Em símbolos: se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. (Iezzi, p.57, 2004).

Ao usar essa notação estamos estabelecendo que existe uma função logaritmo que é inversível, e sua inversa é a função exponencial. Com isso temos como educadores a necessidade de apresentar primeiro a noção de função exponencial e das condições para que uma função seja inversível para somente depois o conteúdo de logaritmo.

Sendo assim entendemos que essa abordagem se torna desvantajosa do ponto de vista pedagógico, pois o aluno ao estuda-la dessa forma fica perdido em detalhes formais, não visualizando a importância da função.

Assim, buscaremos mostrar abordagens didáticas para o ensino de logaritmo pautadas em três pilares, que são:

1. Os logaritmos estabelecem uma relação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética.

2. Definir logaritmos de modo que a base e (exponencial) apareça de forma natural.

3. A função logarítmica pode ser caracterizada por duas de suas propriedades que são, a função logarítmica é crescente, e se multiplicarmos dois números positivos x e y o resultado de $f(x \cdot y)$ deve ser a soma de $f(x) + f(y)$.

Este trabalho se destina a professores do ensino médio que por muitas vezes, sem um conhecimento mais aprofundado sobre o tema logaritmos, vê-se restrito ao livro didático, não conseguindo transmitir aos alunos a contextualização e importância necessária ao ensino de logaritmos.

Para trabalhar a definição dos logaritmos em diferentes abordagens, buscamos entender como se deu o processo histórico desse conhecimento, veremos que essa ferramenta se desenvolveu de diferentes formas, conforme a aplicabilidade que se tinha, portanto utilizamos a história da matemática como uma ferramenta para contextualizar os conhecimentos que apresentaremos acerca dos logaritmos.

No primeiro capítulo contextualiza-se a história da concepção dos logaritmos, dando uma ênfase maior aos séculos XVI e XVII.

No segundo capítulo trazemos uma definição geométrica, em que trabalhamos as quadraturas de curvas e definimos logaritmos a partir das áreas das faixas da hipérbole $y \cdot x = 1$, dando ênfase a base natural e introduzindo o estudo de Cálculo Diferencial e Integral.

No terceiro capítulo trazemos algumas discussões sobre logaritmos que permitiram o desenvolvimento da matemática nos últimos séculos, ali trabalhamos a concepção de logaritmos de números negativos e a influência de Euler nessa área da matemática, também mostramos uma estreita ligação entre logaritmos naturais e números Binomiais, observadas por Newton que criou um algoritmo para calcular aproximações dos valores de logaritmos naturais.

Ainda no terceiro capítulo damos a definição moderna de função logarítmica, com uma abordagem axiomática, em que definimos algumas propriedades desta função.

No quarto capítulo trazemos uma abordagem de logaritmos para ser usada no ensino médio, onde definimos logaritmos a partir de uma relação entre progressões geométricas e aritméticas focando nas características dessas duas sequências (produto e soma).

Por fim damos nossas considerações finais mostrando quais as contribuições deste trabalho para o ensino de matemática.

Capítulo 1

A história da concepção dos logaritmos

Neste primeiro capítulo apresentamos a história de John Napier, matemático amador que dedicou vários anos de sua vida para a descoberta e sistematização das tabelas de logaritmos, também estudaremos contemporâneos a Napier que de alguma forma contribuíram para a compreensão desta área da matemática, dentre estes destacamos o trabalho de Jobst Bürgi, que de forma análoga aos trabalhos de Napier, criou tabelas de logaritmos que ajudaram Johannes Kepler a evidenciar as três leis do movimento planetário.

Como referencias bibliográfica utilizamos [3], [4], [5], [6], [12], [13] e [15].

1.1 Logaritmos segundo Napier e Brigs

O século XVII é marcado por várias descobertas no ramo das ciências e da matemática, isso se deu graças aos avanços políticos, sociais e econômicos da época. Um personagem exótico dessa época foi John Napier(1550-1617), vivia perto de Edimburgo na Escócia e era conhecido por Barão de Merchiston.

Napier "gastou grande parte de suas energias em controvérsias políticas e religiosas de seu tempo". Porém, apesar de não ser matemático profissional, contribuiu significadamente ao desenvolvimento da matemática e de outras ciências.

Napier, diferente de outros pensadores, era barão, rico e não tinha a matemática como profissão. Viveu grande parte de sua vida com sua família, no castelo de Merchiston, e aos 12 anos tinha aulas particulares com professores selecionados contratados por seu pai. Apesar das mordomias, que lhe davam motivos para não estudar, Napier ingressou em uma das melhores instituições de ensino da Europa, a faculdade de St. Andrews, porém não terminou o curso.

Após esse período Napier voltou a sua terra natal onde em 1571 casou-se com Elizabeth Stirling com quem teve dois filhos vivendo juntos até 1579, quando a mesma morreu. Logo após esse fato, Napier casou-se novamente com Agnes Chisholm, com que teve dez filhos. O segundo filho deste casamento, Robert foi quem cuidou de sua obra literária. Após 1608, com a morte de seu pai, Napier voltou ao castelo de Merchiston, onde passou o resto de sua vida.

Remete-se a Napier a autoria de atitudes polêmicas para a época. Com fama de brigão, ele imaginou máquinas de guerra capazes de destruir qualquer criatura em um campo de quatro milhas de distância, outro dispositivo que poderia mergulhar debaixo d'água e que se criaria um carro de guerra com uma boca móvel de fogo ardente que se acenderia para espalhar a destruição por todas as partes. Loucura para época, porém vimos metralhadoras, submarinos e canhões se concretizarem no advento da primeira guerra mundial.

Em 1593 publicou a obra *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, um livro no qual atacava a Igreja Católica dizendo que *o papa era o Anti Cristo e conclamando pelo rei escocês Jaime IV (que mais tarde se tornou o rei James I da Inglaterra) a expurgar de sua corte todos os papistas, ateus e hereges* (MAOR, p.16, 2006), o livro também previa que o mundo acabaria entre 1688 e 1700. Por ser polêmico o mesmo alcançou 21 edições sendo traduzidos em várias línguas, dez destas edições com Napier ainda em vida, o que o fez imaginar que por causa desta obra, seu nome entraria para história.

Nem máquinas de guerra, nem livros polêmicos, e nem ideias excêntricas foi o que fez realmente Napier se destacar, o que colocou o nome dele na história e até hoje ser exaltado foi uma descoberta no ramo da matemática abstrata que levou 20 anos para se desenvolver, e é muito útil já há 4 séculos para o desenvolvimento das ciências, os logaritmos.

Nos séculos XVI e XVII os astrônomos e navegantes perdiam muito tempo de suas vidas em fazer cálculos aritméticos tortuosos. Para multiplicar, dividir, obter potências e raízes, eram necessárias várias horas ou dias ao encontro de um único resultado. Assim uma ferramenta que tornasse mais simples esses cálculos certamente teria grande valor para a navegação e astronomia.

Uma das maneiras de simplificar esses cálculos eram as regras de Prostaférese, que eram amplamente conhecidas no meio cientifico da época. Tais regras consistiam em usar identidades trigonométricas para transformar produtos e divisões em somas e diferenças. Um exemplo destas regras é a identidade trigonométrica:

$$\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}$$

Para obter o resultado da multiplicação de dois números x e y era escolher m e n tais que $\frac{x}{10^m}$ e $\frac{y}{10^n}$ fossem menores que 1, pois . O passo seguinte era encontrar arcos A e B tais que $\cos(A) = \frac{x}{10^m}$ e $\operatorname{sen}(B) = \frac{y}{10^n}$. Assim, desde que

$$x\cdot y = \frac{x}{10^m}\cdot\frac{y}{10^n}\cdot 10^{m+n}$$

então

$$\begin{aligned} x\cdot y &= \cos(A)\cdot\cos(B)\cdot 10^{m+n} \\ &= \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}\cdot 10^{m+n} \end{aligned}$$

Como exemplo, para efetuar a multiplicação $34202x48481$, procuramos um número A e um número B tais que $\cos(?A) = 0,34202$ e $\cos(B) = 0,48481$, obtendo $\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$ e $\cos\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ assim temos:

$$0,34202.0,48481 = X$$

$$\begin{aligned}
X &= \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)\cdot\cos\left(\frac{61\pi}{180}\right)\\
&= \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{61\pi}{180}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{18}-\frac{61\pi}{180}\right)}{2}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{131\pi}{180}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2}\\
&= \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{41\pi}{180}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2}\\
&= \frac{-0,656059+0,987688}{2}\\
&\cong 0,1654105
\end{aligned}$$

Como os números 34202 e 48481 tem ordem 10^4 o respectivo produto deverá ter ordem 10^8, sendo assim temos que:

$$34202\cdot 48481 \cong 165410500$$

Vale lembrar que quanto mais precisa fosse a tábua trigonométrica, mais aproximado se chegava ao resultado do produto.

Apesar destas identidades trigonométricas chegarem a resultados satisfatórios de produtos, era tedioso fazer cálculos de potências e radicais isso fez com que a comunidade científica da época concentrasse esforços em descobrir novos métodos de efetuar estas operações com mais praticidade.

Um fato que já havia sido detectado pelo alemão Michael Stifel (1487-1567) em seu livro *Arithmetica Integra* (1544), foi a relação que segue: na multiplicação de quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, q^3, \cdots$ o resultado será o mesmo que se somarmos seus expoentes. Por exemplo, $q^2\cdot q^3=(q\cdot q)\cdot(q\cdot q\cdot q)=q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q=q^5=q^{2+3}$, de modo semelhante dividir dois termos dessa sequencia equivale-se a subtrair seus expoentes, de fato: $\frac{q^3}{q^2}=\frac{q\cdot q\cdot q}{q\cdot q}=q=q^{3-2}$, para compreender melhor essa parte da história, convencionamos que $q^{-n}=\frac{1}{q^n}$ e $q^0=1$, que é consequência da segunda afirmação de Stifel. Com essas definições pode-se estender uma progressão geométrica infinitamente em ambas as direções $\cdots, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, \cdots$ Verificamos que cada termo é uma potência de uma razão comum q, e que os expoentes $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ formam uma progressão aritmética.

Napier percebeu o poder da ideia de Stifel em usar uma correspondência entre os termos de progressões aritméticas e geométricas para obter produtos e divisões em somas e diferenças. Assim, para multiplicar os números x e y bastava procurar aproximações por potências de q, isto é, $q^m \approx x$ e $q^n \approx y$, e então

$$x \cdot y \approx q^m \cdot q^n = q^{m+n}$$

Quanto melhor fosse a aproximação mais preciso seria o resultado final.

Para obter potências de q muito próximas de qualquer número que se queira calcular Napier tinha dois caminhos que poderia seguir: o primeiro seria o uso de expoentes fracionários que exploraremos mais adiante e na época não eram bem conhecidos; o segundo caminho era escolher uma base adequada cujas potências inteiras tivessem um crescimento razoavelmente lento diminuindo o intervalo entre dois temos da PG. Ele escolheu a segunda opção, mas passou anos para escolher qual número seria a razão desta PG.

Preocupado que o número não fosse tão pequeno de modo a inviabilizar a construção de uma tabela, ele escolheu $q = 1 - 10^{-7} = 0,9999999$ como a razão e assim fez essa progressão decrescer (já que a razão era menor que 1) multiplicou cada valor da PG por 10^7 até o centésimo termo,

$$10^7 \cdot (1 - 10^{-7}), 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2, 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3, \cdots, 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100}$$

que desconsiderando a parte decimal, esta sequencia correspondia a sequencia

$$9999999, 9999998, 9999997, \cdots, 9999900$$

que corresponde a tabela 1.1 da relação PG→PA 1ª parte

Tabela 1.1: Tabela de Napier da relação PG→PA 1ª parte

PG	**Aproximação**	**PA**
10^7	10000000	0
$10^7 \cdot (1-10^{-7})$	9999999	1
$10^7 \cdot (1-10^{-7})^2$	9999998	2
$10^7 \cdot (1-10^{-7})^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (1-10^{-7})$	9999900	100

Notando que $9999900 = 10^7 \cdot (1-10^{-5}) \approx 10^7 \cdot (1-10^{-7})^{100}$, Napier considerou a PG com primeiro termo $10^7(1-10^{-5})$ e razão $q = (1-10^{-5})$. Observando que $(1-10^{-5})^2 \approx (1-10^{-7})^{200}$ Napier obteve a tabela 1.2.

Tabela 1.2: Tabela de Napier da relação PG→PA 2ª parte

PG	**Aproximação**	**PA**
$10^7 \cdot (1-10^{-7})^{100} = 10^7 \cdot (1-10^{-5})$	9999900	100
$10^7 \cdot (1-10^{-5})^2$	9999800	200
$10^7 \cdot (1-10^{-5})^3$	9999700	300
$10^7 \cdot (1-10^{-5})^4$	9999600	400
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (1-10^{-5})^{49}$	9995101	4900
$10^7 \cdot (1-10^{-5})^{50}$	9995001	5000

Após isso, fez o mesmo procedimento, agora com 20 iterações de $10^7(0,9995)$, pois $\frac{(1-10^5)^{50}}{(1-10^{-5})} = 0,9995$ e para concluir ele construiu uma última tabela 1.3 com 68 iterações $(0,99)$, chegando ao valor final de $10^7 \cdot (1-10^{-2})^{68} = 5048858$ que é próximo a metade do número inicial. Assim temos a tabela 1.3.

Tabela 1.3: Tabela de Napier da relação PG→PA 3ª parte

PG	**Aproximação inteira da PG**	**PA**
$10^7 \cdot (0,9995)$	9995001	5000
$10^7 \cdot (0,9995)^2$	9990002	10000
$10^7 \cdot (0,9995)^3$	9985007	15000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (0,9995)^{20} = 10^7 \cdot (0,99)$	9900473	200000
$10^7 \cdot (0,99)^2$	9801000	400000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (0,99)^{68}$	5048858	13600000

Para fazer a multiplicação de dois números x e y utilizando as tabelas criadas por

Napier, deve-se primeiramente procurar os números a serem multiplicados na coluna da PG. De posse destes números, observa-se os números correspondentes na coluna da PA, soma-se estes números, o resultado desta soma fará corresponde a um número da coluna da PG, por fim aumentamos 7 ordens decimais este número. Por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} PG & & PA \\ 9999999 \times 9999998 & \longrightarrow & 1+2 \\ 9999997 \times 10^7 & \longleftarrow & 3 \end{array}$$

Para fazer a potência de um número, deve-se primeiramente procurar o número a ser potenciado na coluna da PG, observa-se o correspondente a este na coluna da PA e multiplica-se o termo da PA pelo valor da potência desejada, o resultado desta multiplicação fará corresponde a um número da coluna da PG, este número deverá ser aumentado 7× (potência) ordens decimais. Por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} PG & & PA \\ 9990002^5 & \longrightarrow & 10000 \times 5 \\ 9950112 \times 10^{35} & \longleftarrow & 50000 \end{array}$$

Hoje os cálculos que Napier fez para adquirir as tabelas podem ser facilmente realizados com o uso de um computador, ou com um pouco de paciência algumas horas são necessárias para fazer esses cálculos utilizando uma calculadora de bolso. Porém Napier dispunha apenas de pena e papel, e havia uma preocupação em não cometer nenhum erro, uma vez que tais tabelas tinham grande importância para a navegação e astronomia. Assim ele gastou 20 anos de sua vida para completar sua obra.

Napier traduziu sua ideia geometricamente da seguinte maneira: considere o segmento de reta $\overline{AB}$ de comprimento 10^7 e uma semi reta $\overline{DE}$, de origem D. Suponha que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente dos pontos A e D, com mesma velocidade inicial. Admita que a velocidade do ponto C seja proporcional à medida $\overline{CB}$ e que a velocidade do ponto F seja constante. Napier definiu $\overline{DF}$ como logaritmo de $\overline{CB}$, assim sendo $\overline{DF} = x$ e $\overline{CB} = y$, tem-se x é igual ao logaritmo de y.

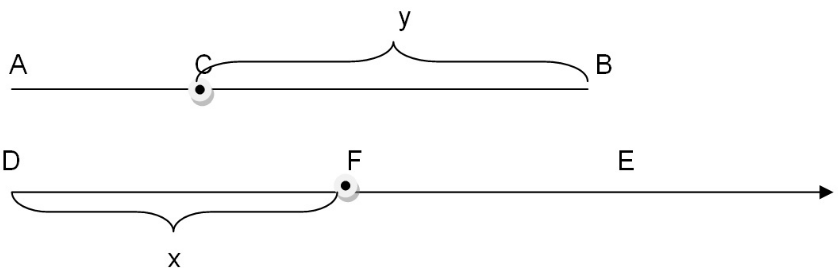


Figura 1.1: Representação gráfica da idéia geométrica de logaritmo

Comumente observa-se a afirmação o que os logaritmos neperianos são os mesmos que os naturais, veem-se que o fato não corresponde a realidade, pois os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, o contrário ocorre com os logaritmos naturais. Essa confusão dá-se porque como sabemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

e a medida que o logaritmo neperiano cresce temos potências cada vez maiores de $(1 - 10^{-7})$, admite-se que:

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \cong \frac{1}{e}$$

.

Primeiramente Napier pensou em batizar o expoente por *número artificial*, mas depois ele decidiu pelo termo *Logaritmo* que significa *número proporcional*.

Assim em 1914, Napier publicou sua invenção em um tratado em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

Na tabela que Napier criou existia varias lacunas a serem preenchidas, porém devido a sua utilidade, rapidamente foi reconhecido pela comunidade cientifica, e vários matemáticos e astrônomos da época se empenharam em completá-la e melhorá-la, dentre eles Henry Briggs (1561-1631).

Briggs propôs duas modificações para tornar as tabelas de Napier mais convenientes. A primeira fazer tornar o logaritmo de 1 igual a 0 ao invés do logaritmo de 10^7 ser igual a 0, e a segunda era ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10, Napier já havia pensado nessa mudança, e apontou aprimoramentos na ideia de

Briggs, após considerarem várias possibilidades eles finalmente decidiram que logaritmo de 10 fosse igual a $1 = 10^0$, nascia assim o logaritmo briggsiano ou logaritmo comum, que na linguagem moderna dizemos que se um número positivo N for escrito com $N = 10^L$, então L é o Briggsiano de N.

Napier já bastante debilitado por causa da idade, encontrou em Briggs um habilidoso matemático para continuar suas ideias, e coube a ele calcular a nova tabela que eles tinham estabelecido. Napier morreu em 1917, e seu filho Robert se encarregou de publicar em 1919 seu segundo trabalho sobre logaritmos *Mirifici logarithmorum Canonis constructio* (A construção dos maravilhosos logaritmos canônicos) no qual mostrava qual era o método utilizado para a construção de suas tabelas. Napier também fez contribuições para a trigonometria esférica, achou expressões exponenciais para funções trigonométricas e foi influente na introdução da notação decimal para frações.

Briggs continuou o trabalho de Napier em que publicou *Logarithmorum Chilias Prima* que continha os logaritmos de base 10 de 1 a 1000, cada um com catorze casas decimais, em 1624 publicou ainda *Arithmetica Logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, a lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida por Adriaen Vlacq (1600-1660) que era um livreiro e editor holandês.

1.2 Logaritmos segundo Bürgi

Independente a Napier o Suíço Jobst Bürgi (1552-1632), chegou a construir tabelas de logaritmos na mesma época, segundo MAOR (2006) relatos apontam que Bürgi chegou a ideia antes mesmo que Napier.

Fabricante de relógios astronômicos, Bürgi era procedente de uma família pobre e numerosa, fato que não permitiu que o mesmo frequentasse um curso superior. Assim durante toda a sua vida Bürgi se sentia inferior aos matemáticos contemporâneos de sua época, fazendo com que o mesmo se afaste do meio intelectual. Porém por ter uma grande habilidade na orientação de relógios, veio a trabalhar como assistente dos melhores relojoeiros da época entre eles o matemático Dasypodius, que presume-se ter apresentado a matemática a Bürgi.

Bürgi ascendeu-se ao nível de grandes cientistas da época com uma habilidade incrível em manipular equações trigonométricas, fato que levou a ser procurado pelo físico e astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) para ajudá-lo em cálculos astronômicos da época. Remete-se a Bürgi a descoberta da igualdade:

$$1 + \operatorname{sen}(60^\circ) = 2\operatorname{sen}^2(75^\circ)$$

Talvez surgiu com Kepler a preocupação com a criação dos logaritmos, pois a ideia de simplificar métodos computacionais era uma das mais importantes para o desenvolvimento da astronomia. O fato é que Kepler publicou suas primeiras duas leis do movimento planetário em 1609 na obra *Astronomia Nova*, leis estas que seriam difíceis de serem concluídas sem a ajuda dos logaritmos para fazer todos os cálculos necessários a sua conclusão.

Baseado também na obra de Michael Stiffel (*Arithmética Integra*) Bürgi imaginou uma progressão aritmética de primeiro termo 0 e razão 10 e último termo 32000, os quais chamou de números vermelhos, a cor que os imprimiu, associados a uma progressão geométrica de primeiro termo 10^8 e razão $1 + 10^{-4}$, os quais chamou de números negros, também a cor que os imprimiu.

Bürgi justificou seu trabalho por demonstrações puramente aritméticas, ao contrário de Napier que usou um argumento geométrico, esse fato contribuiu para que a comunidade científica da época criticasse o trabalho dele dizendo que era de difícil compreensão.

No trabalho de Burgi percebe-se que a progressão geométrica possui razão maior que 1, logo é crescente, diferente dos logaritmos de Napier.

Bürgi trocou correspondências durante anos com Johannes Kepler apresentando seu método computacional, sendo Kepler o primeiro a utilizar os logaritmos ao calcular a orbita de marte e descobriu suas três leis do movimento planetário.

Neste capítulo vimos que a ideia de logaritmo nasce de uma relação entre Progressões Geométricas e Progressões aritméticas, ideias matemáticas que integram a grade curricular do ensino médio no Brasil. Abordar a história da concepção dos logaritmos faz-nos compreender como os conteúdos do ensino médio podem ser relacionados, trazendo ao professor de matemática ferramentas para tornar suas aulas mais atraentes e significativas.

Capítulo 2

Logaritmos e áreas

Neste segundo capitulo mostramos como o estudo de logaritmos permitiu o avanço no estudo do cálculo integral, vemos as contribuições de Fermat para o estudo das áreas abaixo da curva $y = x^n$ com $n \neq -1$, e a percepção de Gregory Saint Vicent em evidenciar que a área abaixo da curva $y = x^{-1}$, trata-se de um logaritmo, chamado logaritmo Natural.

Como referencias bibliográficas utilizamos [1], [2], [7], [9], [10], [11] e [12].

2.1 Quadraturas de curvas

Por volta do século XVII era comum ver matemáticos tentarem resolver problemas sobre quadraturas, esses problemas que se referiam em encontrar a área de uma superfície fechada, a partir de inscrições e circunscrições de polígonos com áreas já conhecidas, já eram explorados pelos gregos na antiguidade.

Kepler utilizou métodos que o próprio chamou de *indivisíveis* para estabelecer a área de elipses, e assim concluir suas leis do movimento planetário, estendeu a aplicação para encontrar o volume de superfícies de revolução, como barris de vinho.

O matemático italiano Cavaliere havia encontrado uma fórmula para encontrar a área abaixo de curvas do tipo $y = x^n$ para $n = 1$, $n = 2$, $\cdots$, $n = 9$, porém não conseguiu provar a fórmula para $n \geq 10$. Coube a Pierre de Fermat (1601-1655) descobrir uma nova abordagem que servia para qualquer n positivo. A abordagem de Fermat consistia em fazer aproximações da área da curva utilizando retângulos cuja base forma uma progressão geométrica decrescente, método muito parecido com o método da exaustão utilizado por Arquimedes, Fermat não hesitou em usar uma série infinita.

Suponha que desejemos encontrar a área da superfície limitada pela curva $y = x^n$, $0 \leq x \leq a$ e o eixo x. Pelo método de Fermat cria-se uma progressão geométrica em que o primeiro termo seja a e a razão seja $r < 1$.

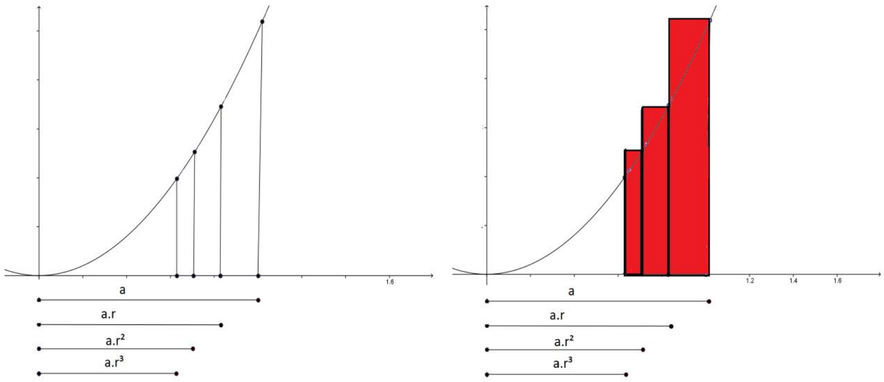


Figura 2.1: Reresentação gráfica do cálculo da áreaa abaixo da curva pelo método de Fermat

Construindo retângulos cuja a base é definida pelos termos da progressão e a altura é definida pela curva a qual deseja-se obter a área, a soma das áreas dos infinitos retângulos formados está mais próxima da área procurada conforme mais próximo a razão r estiver de 1.

Consideramos a progressão geométrica definida por $a_k = ar^k$ no qual $0 < r < 1$, o i-ésimo retângulo possui base $a \cdot r^{i-1} - a \cdot r^i$ e altura $(a \cdot r^{i-1})^n$. assim a área dos k primeiros retângulos, denotada por A_r^k é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} A_r^k &= a^n(a - ar) + (ar)^n(ar - ar^2) + \cdots + (ar^{k-1})^n(ar^{k-1} - ar^k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} ar^i(1-r)(ar^i)^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} a^{n+1}r^{i(n+1)}(1-r) \\ &= a^{n+1}(1-r)\sum_{i=0}^{k} r^{i(n+1)} \end{aligned}$$

Observando que $\sum_{i=0}^{k} r^{i(n+1)}$ é a soma dos termos de uma PG de razão $r^{(n+1)} < 1$ e primeiro termo 1, então a área dos infinitos retângulos é:

$$A_r = \lim_{k \to \infty} A_r^k = a^{n+1}(1-r)\frac{1}{1 - r^{n+1}}$$

Observando que $(1-r^{n+1}) = (1-r)\cdot(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n)$, temos que:

$$A_r = a^{n+1}(1-r)\frac{1}{1-r^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n}$$

Assim fazendo r se aproximar de 1 podemos concluir que:

$$\lim_{r\to 1} A_r = \lim_{r\to 1}\frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n} = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad \text{com } n \in \mathbb{N}$$

que corresponde a

$$\int a^n da = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

O trabalho de Fermat foi expressivo, pois não calculava a área de apenas uma curva, mas de toda a família de curvas oferecida pela equação $y = x^n$. Ele percebeu que a mesma fórmula funcionava para curvas fornecidas pelas equações do tipo $y = x^{-m}$, com $m \neq 1$, chamadas de hipérboles generalizadas, o que é inusitado, pois as equações $y = x^n$ e $y = x^{-m}$, formam, em primeiro momento, curvas muito diferentes. A primeira é continua em qualquer ponto, já a segunda possui uma descontinuidade em $x = 0$, tendendo ao infinito.

Utilizando o mesmo artifício da situação anterior pensemos agora na área abaixo da curva $y = x^{-m}$ em que $m \in \mathbb{N}$. $x \in [a, \infty[$.

Consideremos novamente a progressão geométrica $a_n = ar^k$, agora com $r > 1$. O somatório abaixo nos dá a área dos k retângulos circunscritos a curva.

$$\begin{aligned} A_r^k &= \sum_{i=0}^{k}(ar^i)^{-m}(ar^{i+1}-ar^i)^n \\ &= \sum_{i=0}^{k}(ar^i)^{-m}ar^i(r-1) \\ &= (r-1)a^{1-m}\sum_{i=0}^{k} r^{i(1-m)} \end{aligned}$$

Assim como anteriormente vemos que o somatório converge quando $m > 1$, de modo que fazendo k tender ao infinito temos:

$$
\begin{aligned}
A_r &= (r-1)a^{1-m}\frac{1}{1-r^{i-m}}\\
&= (r-1)a^{1-m}\frac{1}{1-\frac{r}{r^m}}\\
&= (r-1)a^{1-m}\frac{r^m}{r^m-r}\\
&= (r-1)a^{1-m}\frac{r^{m-1}}{r^{m-1}-1}
\end{aligned}
$$

Considerando a substituição $(r^{m-1}-1) = (r-1)(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{m-2})$, temos a área abaixo da curva, que a dada por:

$$\lim_{r\to 1} A_r = \lim_{r\to 1}\frac{a^{1-m}r^{m-1}}{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{m-2}} = \frac{a^{1-m}}{m-1} \quad \text{com } m\in\mathbb{N}, n>1$$

A fórmula de Fermat falhava em uma única curva, da qual toda a família deriva o seu nome, a hipérbole $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, pois para $n = 1$, não poderíamos efetuar o cálculo, pois o somatório proposto anteriormente não seria uma PG convergente, assim não poderíamos utilizar o artifício de soma dos infinitos termos da progressão geométrica convergente.

Para resolver esse caso excepcional, Gregory Saint Vincent (1584-1667) observou no desenvolvimento de Fermat uma característica nas hipérboles que associa a mesma a regra dos logaritmos, conforme acompanhamos na próxima seção.

2.2 Faixas de hipérboles

Para resolver o problema apontado por Fermat em obter a quadratura da curva $y = x^{-1}$, o matemático Gregory Saint Vicent observou que a área dos retângulos circunscritos a curva $y = x^{-1}$, cuja base é expressa por uma progressão geométrica de razão $r > 1$ na quadratura são sempre iguais. Isto é, considerando que a progressão geométrica $a_n = ar^{n-1}$, são pontos da abscissa então a base de cada retângulo formado por essa progressão geométrica é:

$$\begin{aligned}(a - ar) &= a(1 - r) \\ (ar - ar^2) &= ar(1 - r) \\ ar^2 - ar^3 &= ar^2(1 - r)\end{aligned}$$

Já as alturas dos retângulos formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{r}$.

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}$$

Assim multiplicando as bases pelas alturas vemos que as áreas são todas iguais a $(1 - r)$. Isto tem um significado muito importante do ponto de vista matemático, pois conforme a distância de 0 cresce geometricamente, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais, ou seja aritmeticamente, o que implica que relação entre distância e área nas faixas da hipérbole $y = x^{-1}$ é igual a relação logarítmica.

Essa relação foi observada por Alfonso Antonio de Sarasa em 1647 quando comentava o trabalho "*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*"(Obra geométrica sobre a quadratura do circulo e secções cônicas) escrita por seu professor Gregory Saint Vincent. No trabalho Gregory determinou a área da hipérbole $y \cdot x = 1$ utilizando retângulos de larguras diferentes, inscritos e circunscritos na cônica, e o método de compressão que consiste em estabelecer infinitas aproximações poligonais, Sarasa reconheceu que a quadratura da hipérbole está intimamente ligada a propriedade de produto de logaritmos, e posteriormente Isaac Newton, ao pensar na área da curva e o eixo horizontal como uma variável, formulou o teorema fundamental do cálculo, publicado em 1693 em seu ensaio "*On the quadrature of curves*"(sobre as quadraturas das curvas).

O procedimento para calcular a área da hipérbole é significante, podendo contribuir ao ensino de geometria e pode dar uma noção de cálculo ainda no ensino médio, trazemos aqui a releitura do procedimento utilizado por Sarasa adaptado a linguagem matemática utilizada atualmente.

O nosso objetivo é calcular a área da faixa da hipérbole citada, que é a área da região abaixo do ramo positivo da hipérbole $y \cdot x = 1$, limitada inferiormente pelo eixo x e lateralmente por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, $b > a$. para designar essa faixa utiliza-se a notação $F(a, b)$.

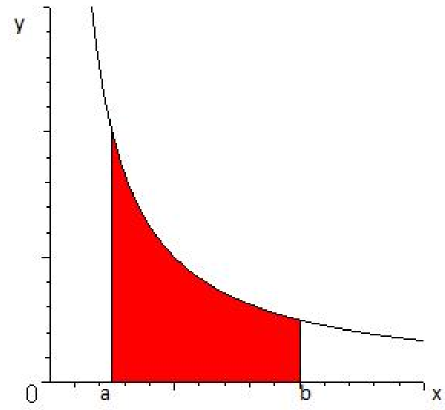


Figura 2.2: Faixa abaixo da curva.

Para calcular a área desta faixa, poderíamos, numa primeira tentativa, aproximá-la pela soma das áreas de retângulos nela inscritos e circunscritos. Por exemplo suponha que desejemos calcular a área entre $x = 0.5$ e $x = 2$, assim teremos $F(0.5, 2)$. Iniciando pela aproximação utilizando retângulos inscritos a curva teremos:

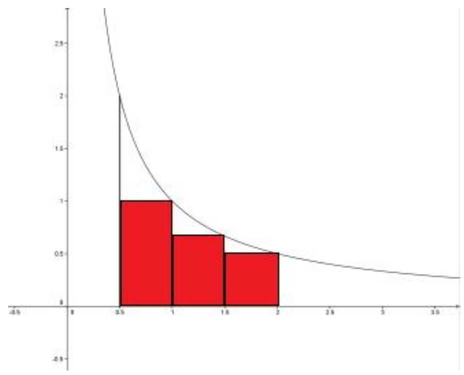


Figura 2.3: 3 retângulos inscritos na curva.

A soma das áreas dos retângulos é igual a:

$$F(0.5, 2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{12}$$

Utilizando agora a soma das áreas dos retângulos circunscritos a curva, teremos:

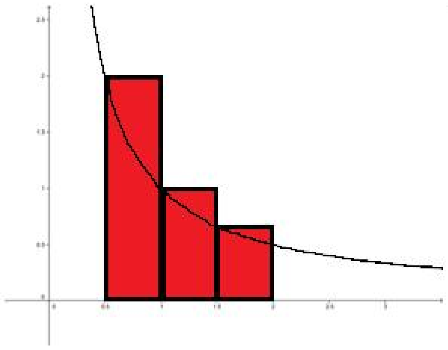


Figura 2.4: 3 retângulos circunscritos na curva.

A soma das áreas dos retângulos é igual a:

$$F(0.5, 2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{11}{6}$$

Logo nota-se que a área da faixa da hipérbole, é algo compreendido entre $\frac{13}{12}$ e $\frac{11}{6}$.

Observe como esta aproximação melhora, quando é aumentado o número de retângulos de três para cinco.

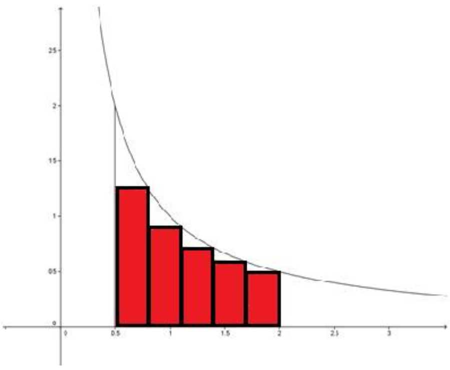


Figura 2.5: 5 retângulos inscritos na curva.

Refazendo o cálculo da soma das áreas dos retângulos, nota-se que o resultado é maior que o anterior.

$$F(0.5, 2) = 0,3 \cdot \left(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{2} \right) \cong 1,188483575$$

Analogamente é utilizado a soma das áreas dos retângulos circunscritos a curva.

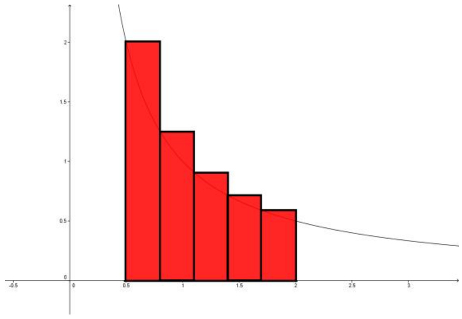


Figura 2.6: 5 retângulos circunscritos na curva.

Refazendo, o cálculo da soma das áreas do retângulo, é percebido que o resultado é menor que o anterior.

$$F(0.5, 2) = 0,3 \cdot \left(\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,8} + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.7} \right) \cong 1,638483575$$

Então, a área da faixa da hipérbole está entre $1,1884$ e $1,6385$, qué é uma aproximação melhor que a anterior.

A vantagem em se utilizar retângulos de mesma base é que podemos perceber que a diferença entre as áreas dos retângulos inscritos e circunscritos pode ser obtida pela multiplicação da base do retângulo pela diferença $a - b$, dos limites laterais da área a ser considerada. Assim se obtivermos retângulos com base cada vez menor essa diferença será cada vez menor e consequentemente a aproximação da área abaixo da curva também será melhor, conforme podemos evidenciar na desigualdade:

área dos retângulos inscritos $<$ **área da faixa** $<$ **área dos retângulos circunscritos**

a relação fundamental entre a área da faixa da hipérbole e a propriedade de logaritmos pode ser evidenciada pelo seguinte raciocínio:

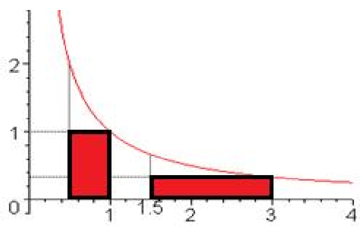


Figura 2.7: Representação da relação fundamental de área de faixas por retângulos inscritos na curva.

Ao calcular a área dos dois retângulos inscritos na hipérbole acima, nota-se que essas áreas têm mesma medida:

$$F(0.5,1) = 1 \times 0,5 = 0,5 \qquad F(1.5,3) = \frac{1}{3} \times 1,5 = 0,5$$

Essa propriedade é tida com teorema fundamental da área de faixas e pode ser generalizada da seguinte maneira:

Teorema: Qualquer que seja o número real $k > 0$, as faixas $F(a, b)$ e $F(ak, bk)$ têm a mesma área.

Demonstração: Observe primeiramente o seguinte fato. Dado um retângulo inscrito em F, cuja base é o segmento $[a, b]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em F e com base no segmento $[ak, bk]$ tem mesma área que o anterior, pois

$$F(a,b) = \frac{1}{b} \cdot (b-a) = \frac{1}{bk} \cdot (b-a) \cdot k = \frac{1}{bk} \cdot (bk - ak) = F(ak, bk)$$

Seja $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ abscissas pertencentes ao intervalo $[a, b]$, consideremos n retangulos inscritos em $F(a, b)$ cujas bases são limitadas por $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$. multiplicando k por cada uma das abscissas, obtemos valores no intervalo $[ak, bk]$ e portanto n polígonos retangulares P' inscritos na faixa $F(ak, bk)$, cada um dos retângulos P' tem mesma área que os retângulos correspondentes em P. A demonstração para as aproximações com retângulos circunscritos é análoga.

Isso significa que as áreas dessas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações por retângulos inscritos e circunscritos, e portanto são iguais.

Convencionando que a área $F(a, a)$ é zero, e assim quaisquer que sejam $a < b < c$ reais positivos.

$$\text{Área } F(a,b) + \text{Área } F(b,c) = \text{Área } F(a,c)$$

Vamos agora definir os logaritmos a partir da propriedade fundamental referente as áreas das faixas hiperbólicas.

2.3 Os logaritmos naturais

Considerando a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\ln(x) = \begin{cases} \text{Área } F(1,x) & \text{se } x \geq 1 \\ \text{-Área } F(1,x) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Em notação moderna essa função pode ser definida por:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Usando a propriedade fundamental das áreas das faixas, podemos enunciar o teorema.

Teorema: Se x e y são ambos positivos então, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Demonstração: Trabalhando com as áreas das faixas, tem-se:

$$\ln(xy) = \text{Área } F(1,xy) = \text{Área } F(1,x) + \text{Área } F(x,xy)$$

Usando o teorema fundamental das áreas das faixas no último termo desta equação, temos:

$$\text{Área } F(1,y) = \text{Área } F(x,xy)$$

Portanto:

$$\ln(xy) = \text{Área } F(1,xy) = \text{Área } F(1,x) + \text{Área } F(1,y) = \ln(x) + ln(y)$$

o que prova a igualdade desejada.

Teorema: A função $\ln(x)$ é crescente.

Demonstração: Dados x e y, tal que $x < y$, temos que:

$$\ln(x) = \text{Área } F(1,x) < \text{Área } F(1,x) + \text{Área } F(x,y) = \text{Área } F(1,y) = \ln(y)$$

A função logaritmo definida desta forma, resolve o problema que Napier se deparou. Obter o logaritmo de um número real x consiste em teoria calcular a área abaixo da faixa de hipérbole entre 1 e x.

2.4 A base do logaritmo natural.

A ideia inicial de logaritmos era relacionar os elementos de uma certa progressão geométrica aos elementos de uma certa progressão aritmética de modo que o logaritmo do produto de dois elementos da progressão geométrica seja igual a soma dos logaritmos de dois elementos da progressão aritmética.

Diante desta ideia inicial cabe questionar qual é a progressão geométrica que está associada a progressão aritmética $(0, 1, 2, 3, 4, \cdots)$ por meio do logaritmo natural.

Para fazer isso, basta descobrir qual o valor de x ao qual $\ln x = 1$, pois de posse deste resultado e pelas propriedades de logaritmos, sabemos que $\ln x^2 = 2$, $\ln x^3 = 3$ e assim sucessivamente.

Ao valor de x no qual $\ln x = 1$ iremos representar pela letra e. Em símbolos representamos esta afirmativa por:

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Não é dificil demonstrar que:

$$\ln e^x = x \ln e = x$$

Logo

$$e^{\ln e^x} = e^x$$

Se admitirmos $y = e^x$, temos que:

$$e^{\ln y} = y$$

Nosso objetivo agora é encontrar uma expressão que permita estabelecer o valor de e.

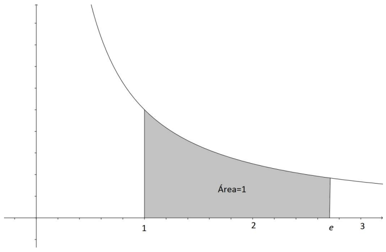


Figura 2.8: Área abaixo da curva $1/x$ com valor igual a 1

Podemos observar que $e > 1$, pois números reais positivos menores que 1 tem logaritmos negativos, também vê-se que $e > 2$, pois a área do quadrado de base 1, circunscrito no intervalo $(1, 2)$ da curva, mede 1. Assim $\ln 2 < 1$.

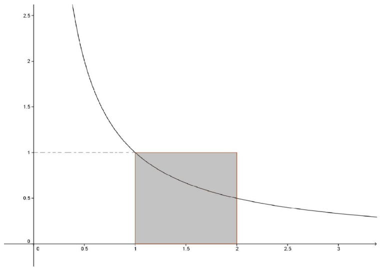


Figura 2.9: Quadrado inscrito na curva no intervalo $(1, 2)$

Concluímos também que $e < 3$, pois a soma das áreas dos retângulos de base $0, 25$, inscrito no intervalo $(1, 3)$ da curva, mede mais que 1. Assim $\ln 3 > 1$.

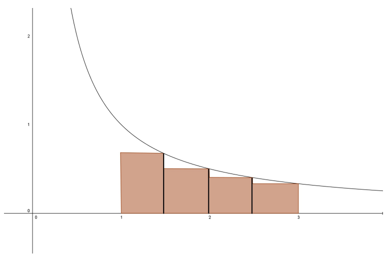


Figura 2.10: Retangulos de base $0, 25$ inscritos no intervalo $(1, 3)$ da curva.

Vamos demonstrar que:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Suponhamos primeiro $x > 0$, então $\ln(1 + x)$ é igual a área da faixa $F(1, 1 + x)$, que está contida num retângulo cuja base mede x e a altura mede 1.

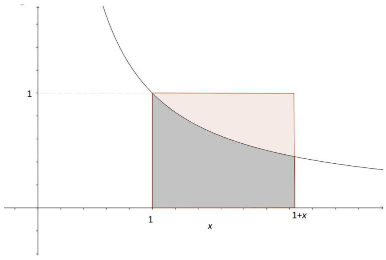


Figura 2.11: Retângulo de base x inscrito na curva no intervalo $(1, 1+x)$.

A área desse retângulo é x, logo podemos escrever $\ln(1+x) < x$, dividindo ambos os lados da igualdade por x e utilizando as propriedades de logaritmo temos.

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) < 1$$

$$\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] < 1 = \ln e$$

Como a função logaritmo natural é crescente significa dizer que:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} < e \tag{2.1}$$

Notamos agora que $F(1, 1+x)$ contém o retângulo de base x e altura $\frac{1}{1+x}$,

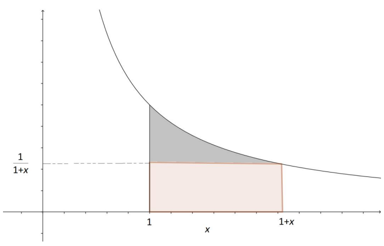


Figura 2.12: Retângulo de base x circunscrito na curva no intervalo $(1, 1+x)$

podemos então escrever sucessivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+x} &< \ln(1+x) \\
\frac{1}{1+x} &< \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \\
\frac{1}{1+x} &< \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Tomando exponenciais de ambos os membros da desigualdade, resulta:

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+x}} &< e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \\
e^{\frac{1}{1+x}} &< (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Juntando as desigualdades 2.1 e 2.2, escrevemos:

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

Fazendo agora x tender a zero, vemos que:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Para fazer x tender a zero, criaremos uma sequencia $a_n = \frac{1}{n}$, que possui limite zero quando n tendo ao infinito, assim substituindo x por a_n temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

que é a base do logaritmo natural.

Capítulo 3

Outras discussões acerca de logaritmos

Neste terceiro capítulo trazemos a história e as contribuições de dois grandes gênios da matemática no desenvolvimento dos logaritmos, Isaac Newton e Leonard Euler. Na primeira seção mostramos um breve histórico da vida de Newton bem como um algoritmo que chega a valores de logaritmos naturais, que ele extraiu de seu teorema de expansão binomial, associado ao cálculo integral. Já na segunda seção vemos como Euler definiu os logaritmos de números negativos, pondo fim a uma discussão antiga entre Leibniz , Jean Bernoulli e Johann Bernoulli. É definido também função logarítmica com linguagem dos dias atuais. Essa definição dá-se graças aos esforços de todos os matemáticos que estudamos anteriormente, e outros que de alguma maneira contribuíram para a sistematização dos logaritmos.

Como referências bibliográficas utilizamos [1], [7], [9], [10], [11], [12] e [14].

3.1 Logaritmos segundo Newton

No dia 25 de dezembro de 1642 nasceu Isaac Newton em uma casa na cidade de Woolsthorp na Inglaterra, já órfão de pai e com cerca de $1,5$ kg poucos acreditavam que sobreviveria, não sabiam que mais tarde aquela pequena criança se tornaria um gigante da Matemática e da Física.

Em 1644 a mãe de Newton, Hannah Ayscough, casou-se novamente com o reverendo Barnabas Smith, indo viver na cidade de North Witham. O novo padrasto de

Newton não quis acolhe-lo em seu seio familiar, assim Newton ficou em Woolsthorpe com os avós. Porém antes de casar-se Hannah exigiu de seu novo marido que lhe concedesse um pedaço de terra que seria dado ao seu filho Isaac Newton.

Somente em 1653, com a morte de Barnabas, Hannah volta para Woolsthorpe, juntamente com duas filhas e um filho de seu segundo casamento. Para Newton que nascerá sem pai, passara a infância sem mãe e agora tendo que dividi-la com três irmãos, não foi fácil. Talvez isso tenha contribuído para a formação de sua personalidade, sempre isolado e de mau humor.

Aos doze anos foi para cidade de Skillington Stokes onde ingressou na escola secundária de Granthan, morava na casa de um farmacêutico chamado Clark e era considerado o mais inteligente entre todos os colegas. Enquanto todos brincavam, Newton gastava todo o dinheiro mandado pela sua mãe enchendo o sótão da casa do senhor Clark com ferramentas para estranhas invenções mecânicas.

Fascinado por relógios solares, construiu os seus próprios e montou uma espécie de calendário que era usado tanto pela família do senhor Clark como por vizinhos e conhecidos. No seu calendário além de distinguir as fases do sol era capaz de dizer equinócios e solstícios, que são respectivamente um ponto na terra em que o dia tem mesma duração que a noite e os dias de maior e menor duração durante o ano.

Aos 17 anos Newton volta a Woolsthorpe para administrar as terras da família, porém logo sua mãe percebe que o mesmo não tem vocação para ser um fazendeiro. Newton gastava muito de seu tempo imaginando invenções de ferramentas mecânicas e esquecia dos cuidados com os animais, gerando grandes prejuízos a família.

Com argumentos que era um desperdício manter o garoto na fazenda, o diretor da escola Grantham o Sr. Stockes convenceu a mãe de Newton a deixá-lo voltar a casa do Sr. Clark para tentar ingressar em uma universidade. Assim em 1661 Newton parte para Cambridge, onde ingressou no Trinity College passando a estudar assuntos que até então não conhecia.

A princípio Newton não se destaca na universidade, por não ser suficiente o dinheiro mandado por sua mãe, vê-se obrigado a prestar serviços domésticos aos professores e alunos ricos. Na Universidade de Cambridge havia poucos estudos relacionados a matemática. A cadeira nessa área só foi criada em 1663, e ocupada por Issac Barrow, que logo viu um grande potencial em Newton passando a protege-lo.

Em 1664 Newton consegue uma bolsa de estudos, onde deixou de ser servidor e passou a receber moradia, alimentação e uma verba para o seu sustento. Com mais tempo para se dedicar aos estudos Newton espantava seus contemporâneos com a velocidade que aprendia tudo que era relacionado a matemática, mesmo sem demonstrações, ele enxergava soluções por intuições. Assim em um ano já conhecia toda a matemática desenvolvida até então.

Várias são as cartas relatando o entusiasmo de Barrow por Newton, onde o mesmo colocava a comunidade cientifica da época que o seu protegido provocaria em breve a admiração do mundo.

Entre 1665 e 1666 a Universidade de Cambridge se viu obrigada a fechar as portas por causa da peste negra, doença responsável pela morte de mais de 25 milhões de pessoas em toda a Europa, e dizimou dois terços da população da Inglaterra. Nesse período Newton voltou para sua fazenda em Woolsthorpe, período esse que 50 anos após o próprio Newton titulou como o mais frutífero de sua vida.

Sozinho, Newton se propôs a adotar abordagens revolucionárias para alcançar uma nova compreensão do universo, datam desta época a descoberta das leis da gravitação universal, o Cálculo Diferencial e Integral e o teorema Binomial. Vamos aqui estudar uma pequena contribuição de Newton na compreensão do estudo de logaritmos.

A primeira grande descoberta de Newton aconteceu entre 1664 e 1665, quando percebeu que a expansão e $(a+b)^n$ quando n é um inteiro, revela $n+1$ elementos que estão expressos no triangulo de Pascal. Porém é possível estender o triangulo de Pascal para que o próprio revele a mesma expansão nos casos em que n é negativo, assim a expansão se torna uma série infinita.

Para entender o raciocínio de Newton vamos escrever o triangulo de Pascal em forma de escadaria, os zeros no final de cada linha indicam que a expansão é finita.

$n=0$	1	0	0	0	0	0
$n=1$	1	1	0	0	0	0
$n=3$	1	2	1	0	0	0
$n=4$	1	3	3	1	0	0
$n=5$	1	4	6	4	1	0

Para melhor compreensão dos argumentos de Newton utilizaremos aqui uma linguagem matricial para designar cada termo do triângulo de pascal. Nesta representação percebe-se que qualquer linha pode ser obtida se for somado o termo acima do número com anterior a ele localizado na mesma linha, ou seja:

$$a_{nm} = a_{(n-1)m} + a_{(n-1)(m-1)}$$

Por exemplo para obter o quarto termo da quinta linha representado por a_54, temos:

$$a_{54} = a_{44} + a_{43} = 1 + 3 = 4$$

Newton prolongou a tabela para traz, sabendo que cada linha começa com o número 1, ele fez cada elemento menos o elemento que está acima de seu anterior, ou seja:

$$a_{(n-1)m} = a_{nm} - a_{(n-1)(m-1)}$$

Por exemplo, para obter o segundo termo da linha denominada por $n = -1$, Newton fez:

$$a_{(-1)2} = a_{02} - a_{(-1)(-1)} = 0 - 1 = -1$$

Obtendo:

$n = -3$	1	-3	6	-10	15	-21	28
$n = -2$	1	-2	3	-4	5	-6	7
$n = -1$	1	-1	1	-1	1	-1	1
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	1	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	1	0	0	0	0	0

Newton não demonstrou sua generalização da expansão binomial para valores negativos, porém ele tinha indícios que estava no caminho certo, pois para $n = -1$, os elementos no triângulo de Pascal fornece os coeficientes $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$. Se usarmos esses coeficientes para expandir $(1 + x)^{-1}$, em potências de x obteremos a série infinita:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + \cdots$$

Que é a soma dos termos de uma PG de primeiro elemento igual a 1 e razão igual a $-x$. Sabemos que se $x \in (-1, 1)$, essa série será convergente[1], logo podemos usar a

[1]Demonstração nos apêndices

soma da PG, que resultará em:

$$S = \frac{1}{1+x}$$

Assim Newton sabia que sua conjectura deveria estar certa pelo menos nesse caso, para os casos em que $|x| > 1$, é fácil provar que a sequencia não converge[2]. Porém Newton usou um artifício para estender seu domínio para todos os reais positivos.

Newton percebeu que a curva descrita pela equação $y = \frac{1}{x+1}$, pode ser obtida a partir do deslocamento da curva $y = \frac{1}{x}$ uma unidade para a esquerda.

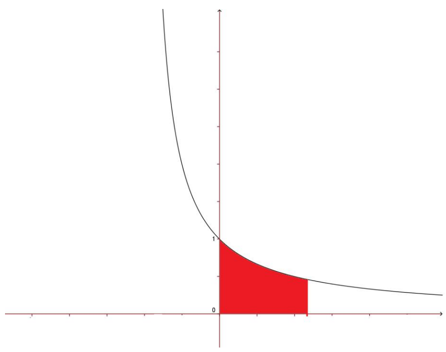


Figura 3.1: Área abaixo da curva $1/1+x$ no intervalo $(0, a)$.

Calcular a área abaixo da hipérbole, entre $x = 0$ e $x = a$, significava, como já havia sido evidenciado por Gregory St. Vincent, calcular o logaritmo de a em uma certa base[3].

Notando que $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+\cdots$, Newton então percebeu que poderia calcular a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x+1}$ utilizando a área abaixo da curva definida pela expressão do lado direito da igualdade. Para calcular esta ele recorreu a fórmula proposta por Fermat para obter quadraturas de curvas do tipo $y = x^n$ com $n \neq -1$, substituindo cada termo da sequência pela identidade $\int x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, de modo que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$$

Vemos que nesse período Newton já dominava algumas relações do Cálculo diferencial e Integral. Pois está implícito o uso da relação:

[2]Demonstração nos apêndices

[3]Base e como evidenciamos na secção a base do logaritmo natural

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

bem como o uso em expansões infinitas.

Se substituir na fórmula x por $-x$, obteremos a série que calcula os valores de logaritmos no intervalo $[0,1[$ na mesma base.

$$\ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Para estender o domínio dessa série, fazendo-a calcular todos os logaritmos reais positivos, Newton fez $t = \frac{1+x}{1-x}$, assim como $(1-x) \leq 1 \leq (1+x)$, podemos escrever qualquer $t \in \mathbb{R}_+$. Assim

$$\begin{aligned}
\ln t &= \log\frac{(1+x)}{(1-x)} \\
\ln t &= \log(1+x) - \log(1-x) \\
\ln t &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right) \\
\ln t &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Essa série foi publicada por Nicolaus Mercartor em seu livro *Logarithmotechnia* de 1668, segundo Mercartor chegou a Série independente de Newton e de Sarasa. Fato é que Newton e Mercartor se conheceram em 1669, em que discutiram por cartas principalmente o movimento da lua.

A fórmula obtida por Newton e Mercartor é um tanto notável uma vez que estabelecia uma expressão para obter logaritmos de números, livrando assim a necessidade do cálculo de áreas. Atualmente essa identidade é conhecida como Série de Mercartor-Newton.

3.2 O logaritmo de um número negativo

Uma grande controvérsia entre Leibniz e Jean Bernoulli entre os anos de 1712 e 1713 permitiu um grande avanço na teoria dos logaritmos, registros mostram que no século XVII e inicio do século XVIII a função exponencial era conhecida como a inversa da função logarítmica, com esse ponto de vista a função logarítmica só poderia ser definida para números reais positivos o que deixava Bernoulli inquieto.

Leibniz era de opinião que o logaritmo de um número negativo real não poderia existir, pois toda a potência de um número real positivo a é um número positivo.

Já para Bernoulli um número real negativo poderia ter logaritmo real, essa conclusão era feita pois Bernoulli imaginava a função logaritmo de base a como uma função f continua e monótona que satisfizesse duas condições, que estão enunciadas abaixo:

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 \\ f(x \cdot y) &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Com essa definição de logaritmo Bernoulli chegou a conclusão que $f(0)$ não teria sentido, pois:

$$\begin{aligned} f(a \cdot 0) &= f(a) + f(0) \\ f(0) &= f(a) + f(0) \\ f(a) &= 0, \end{aligned}$$

o que contraria a condição inicial que $f(a) = 1$.

Assim Bernoulli definiu a função logaritmo em $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, e que $\log(-x) = \log(x)$ usando o seguinte artifício matemático.

Se $f(x) = \log|x|$ e $\log 1 = 0$, temos:

$$0 = \log 1 = f(1) = f\left((-1) \cdot (-1)\right) = f(-1) + f(-1),$$

e assim $f(-1) = 0$, de modo que

$$f(-x) = f((-1) \cdot x) = f(-1) + f(x)$$

$$f(x) = \log x = \log|-x| \quad \text{para todo } x > 0.$$

Aparentemente o problema estaria resolvido, porém Bernoulli se esbarrou em uma identidade válida para os logaritmos que era muito conhecida na época. Sendo a a base do sistema de logaritmos, então

$$a^{\log x} = x$$

Com a proposta de Bernoulli essa igualdade passaria a ser expressa da seguinte maneira.

$$a^{\log x} = |x|$$

Seguiu-se uma grande controvérsia entre as duas grandes e respeitáveis mentes da matemática na época. Leibniz olhava para o logaritmo de x na base a como o expoente y tal que $a^y = x$. Já Bernoulli insistia na validez da regra $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. O fato é que as duas ideias só podem ser compatíveis quando nos limitamos a considerar os logaritmos de números positivos.

Em 1714 Roger Cotes desenvolveu no *Philosophical Transactios* um importante teorema que foi republicado em seu *Harmonia Mensurarum* (1722), que em termos de notação atual se escreve $i\phi = \log(\cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi))$. Cotes estava ciente da periodicidade das funções trigonométricas, porém não conseguiu mostrar que o logaritmo de um número possui infinitos valores diferentes.

Anos mais tarde, entre 1727 e 1731, uma segunda discussão sobre logaritmos de números negativos se evidenciou entre o jovem Leonard Euler (1707-1783) e seu referenciado professor Johann Bernoulli. Como antes Bernoulli argumentava que $\log x = \log -x$, porém Euler encontrou inconsistências que não permitia gerar uma teoria satisfatória, nos anos entre 1731 e 1747 Euler fez progressos significativos no domínio das relações que envolviam números imaginários.

Durante o ano de 1747 Euler discutiu o assunto com D'Alembert em correspondências, das quais poucas cartas de Euler sobreviveram. Entre elas, cabe destacar uma que Euler desaprova conclusões levantadas por D'Alambert acerca de $\log(-1) = 0$. Na carta Euler dizia que agora tinha penetrado no assunto, $\log n$ possui um número infinito de valores e são todos imaginários, exeto quando n é um número positivo, que possui um logaritmo Real.

Em 1747 Euler escreveu um artigo que foi publicado apenas em 1862 com o titulo de *sur les logarithmes des nobres négatifs et imaginaires.* Logo após, em 1749, Euler volta ao tema com novos argumentos e publica outro artigo, agora intitulado por *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes negatifs et imaginaires.* Iremos aqui reescrever os argumentos que determinam logaritmos de números negativos.

Antes de tudo relembraremos alguns conceitos básicos relativos ao conjunto dos números Complexos. Denotamos por i um número especial que satisfaça a seguinte condição:

$$i^2 = -1 \therefore i = \sqrt{-1}.$$

Assim o conjunto dos números Complexos $\mathbb{C}$ é formado por todo número que pode ser escrito na forma $a+bi$, em que a e b são números Reais. O número a é tido com parte real do número e b é a parte imaginária do número. Um número que não possui a parte real é chamado de número complexo puro, um número que não possui a parte imaginária é chamado de número real e um número que possui as duas partes é chamado simplesmente de complexo.

Observe que, dados dois números reais a e b, podemos encontrar um número positivo ρ e um número real θ tais que $a = \rho\cos(\theta)$ e $b = \rho\,\mathrm{sen}\,(\theta)$. De fato, tomando $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ temos que:

$$-1 \leq \frac{a}{\rho} \leq 1, \qquad -1 \leq \frac{b}{\rho} \leq 1.$$

Escolhendo θ tal que $a = \rho\cos(\theta)$ e notando que

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 = 1,$$

então podemos concluir que $b = \rho\,\mathrm{sen}\,(\theta)$ de modo que para qualquer número complexo w temos:

$$w = a + bi = \rho\cos(\theta) + i\rho\,\mathrm{sen}\,(\theta).$$

Os números complexos também podem ser representados num plano, onde a reta das abscissas é a reta da parte real e a reta das ordenadas é a reta da parte imaginária esse plano é denominado *Plano de Gauss* conforme ilustração abaixo.

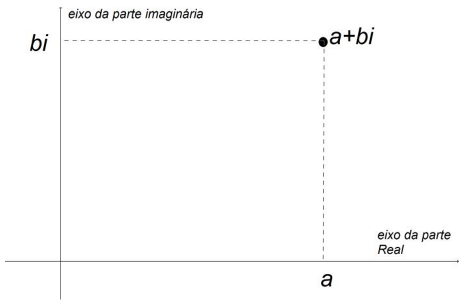


Figura 3.2: Ilustração de um número complexo no Plano de Gauss.

Geometricamente, o módulo de um número complexo $w = a+bi$ é o comprimento do segmento de reta ρ que vai do ponto de origem até o ponto (a, b) e o argumento de w é o ângulo θ que este forma com o eixo das abscissas no sentido anti-horário.

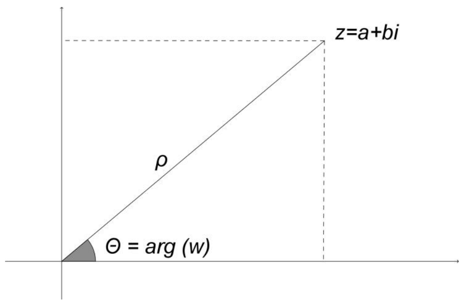


Figura 3.3: Ilustração do módulo de um número complexo no Plano de Gauss.

Assim aplicando o teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas, podemos expressar w como equação trigonométrica relativa a ρ e θ, pois,

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \rho \cdot \cos(\theta) + i \cdot \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ w &= \rho\left(\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)\right). \end{aligned}$$

Com isso podemos iniciar o desenvolvimento dos argumentos que estabelecem os logaritmos negativos.

Na época de Euler já eram conhecidas as fórmulas de aproximação de funções por polinômios, as quais conhecemos por séries de Taylor. Se f derivável infinitas vezes em um certo intervalo I e seja $a \in I$ então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

Com essa série podemos obter polinômios que expressam as funções e^x, $\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$, conforme segue:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \\
\operatorname{sen}(\theta) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad -\infty < x < \infty \\
\cos(\theta) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

Assim Euler primeiro adotou como base de suas exponenciais e de seus logaritmos o número que é base dos logaritmos hiperbólicos, que Euler denotou por e. Então o ponto de partida para a teoria exponencial e do logaritmo é a definição de e^z com z complexo.

No caso particular em que $z = iy$, um imaginário puro, levando-se em conta o valor das potências sucessivas de $i = \sqrt{-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \cdots, \\
e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right),
\end{aligned}$$

Então Euler percebeu que aparecia as séries correspondentes de $\cos(y)$ e $\operatorname{sen}(y)$.

$$e^{iy} = \cos(y) + i\operatorname{sen}(y)$$

É importante ressaltar que embora Euler não as tenha feito, essas identidades atualmente podem ser demonstradas com o rigor matemático necessário.

Considerando a identidade anterior, para um número complexo $z = x + iy$ qualquer, Euler definiu:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}\,(y)),$$

de modo que a exponencial de um número complexo tenha propriedades consistentes com as propriedades de números reais.

Lembrando a representação dos números complexos no plano Gauss e as relações trigonométricas relativa a ρ e θ, temos que $\rho = e^x$ é a distância do ponto e^{x+iy} até a origem, e $\theta = y$ é o ângulo compreendido entre o eixo das abscissas e $\rho = e^x$ no sentido anti-horário, podemos concluir que todo número complexo $w \neq 0$, pode ser escrito na forma e^z para algum z.

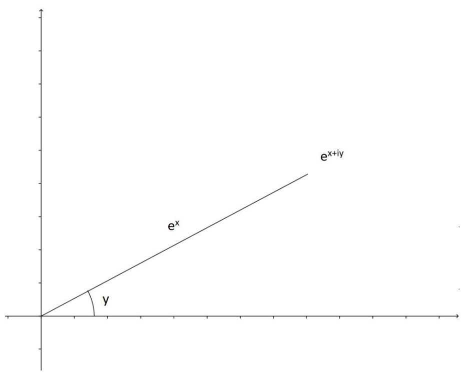


Figura 3.4: módulo de e^{x+iy} no Plano de Gauss.

Euler então definiu o logaritmos de um número complexo w como um número z tal que $e^z = w$, isto é:

$$\log w = z \;\Leftrightarrow\; e^z = w.$$

Sendo $w = r(\cos(\theta) + i \cdot \,\mathrm{sen}\,(\theta))$ e $z = a + bi$ então, pela definição de Euler,temos

$$e^a(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}\,(b)) = r(\cos(\theta) + i \cdot \,\mathrm{sen}\,(\theta)).$$

Logo, para que essa igualdade seja consistente quando consideramos números reais, devemos ter:

$$a = \ln(r), \qquad b = \theta + 2k\pi.$$

Notando que os números Reais podem ser vistos como subconjunto dos Complexos, a definição dada por Euller então estendeu a noção de logaritmos para números negativos.

Por exemplo, para $z = -1 = \cos(\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi)$ temos,

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i$$

em que $k \in \mathbb{Z}$.

Assim se x é um número real positivo temos:

$$-x = x(\cos(\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi)) = e^{\log x + \pi i}$$

$$\log(-x) = \log x + (2k+1)\pi i$$

É importante observar que o logaritmo de um número complexo, em princípio, é uma infinidade de números complexos. Isto pode ser contornado impondo a restrição de que o argumento de um número complexo deve estar em um intervalo de tamanho 2π. A respeito disso Euler havia citado em seu artigo que *"vemos portanto que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si mas também de todos os logaritmos dos demais números"*.

Ocorre para os logaritmos o mesmo que ocorre com ângulos, pois cada seno e cosseno tem uma infinidade de arcos diferentes, assim cada número tem uma infinidade de logaritmos diferentes. Porem observamos que enquanto os arcos fornecem senos e cossenos todos reais, os logaritmos de um mesmo número são todos imaginários, com uma exceção, se o número dado for positivo.

Através das contribuições de Euller, podemos notar que os números complexos formam o "maior"conjunto com a propriedade de que o logaritmo de um número resulta em um número do próprio conjunto. Outra contribuição importante se refere ao método utilizado por Euller.

3.3 Definição axiomatica da função logaritmica

Embora historicamente as funções logarítmica tenham sido originadas envolvendo movimentos e relações entre progressões geométricas e aritméticas, na atualidade a função logaritmica é definida usando duas de suas principais propriedades que esboçaremos a seguir. Estas duas propriedades sintetizam todas as demais propriedades possuidas pelas funções logaritmicas. A forma de definição exposta abaixo é uma característica atual da matemática, chamada de definição axiomática, essa definição no entanto, se deu graças ao tedioso trabalho desenvolvido pelos nomes descritos anteriormente.

Da visão axiomática, dizemos que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma *função logaritmica* se cumpre as seguintes condições:

$i-$ $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é crescente, isto é, $x > y$ se e somente se $f(x) > f(y)$.

$ii-$ Para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, temos que $f(x.y) = f(x) + f(y)$.

Nestes termos chamamos de base do nosso sistema de logaritmo o número $a \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) = 1$.

Como consequência da definição encontramos algumas propriedades demonstráveis. Vejamos algumas delas.

Propriedade 1: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $f(x) = 0 \to f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x) = 0$ desta primeira condição temos que se $f(x) = f(x.x) = f(x^2)$ então $x = x^2$, temos também que o domínio da função é definido em $\mathbb{R}_+^*$ portanto $x = 1$

$(\Leftarrow)$ Se $x = 1 \to f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, portanto $f(1) = 0$.

Propriedade 2: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > 0, \qquad y < 1 \Leftrightarrow f(y) < 0$$

Demonstração: Como $f(1) = 0$, pela primeira condição de logaritmos temos que $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

De modo análogo se $1 > y$, pela primeira condição de função logaritmo temos que $f(1) > f(y)$.

Propriedade 3: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$f(x^n) = -f(x^{-n})$$

Demonstração: Temos que $0 = f(1) = f(x^0) = f(x^{n-n}) = f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n})$

Portanto se $f(x^n) + f(x^{-n}) = 0$ então $f(x^n) = -f(x^{-n})$.

Propriedade 4: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$f(x^n) = n.f(x)$$

com $n \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Se $f(x^n) = \underbrace{f(x \cdot x \cdots x)}_{n\ vezes} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ vezes} = n \cdot f(x)$

Podemos estender essa propriedade para $f(x^q) = q \cdot f(x)$ com $q \in \mathbb{Q}$. Basta fazer $q = \frac{m}{n}$, assim temos $n \cdot f(x^q) = f(x^q)^n = f\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = f(x^m) = m \cdot f(x)$, assim concluímos que a propriedade é valida. Uma sequência $a_n = \frac{m}{n}$ em que os termos de a_n são aproximações racionais de um número irracional, nos permite a partir do conceito de continuidade[4] estender essa definição também para q irracional.

Propriedade 5: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Demonstração: Como $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1})$ Pela propriedade 3 temos que $f(y^{-1}) = -f(y)$ portanto $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

Propriedade 6: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$f\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{f(x)}{n}$$

Demonstração: P3 - $f\left(\sqrt[n]{x}\right) = f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ pela propriedade 4 podemos observar que $f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} f(x) = \frac{f(x)}{n}$

Propriedade 7: Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz i e ii, então:

$$a^{f(x)} = x$$

Demonstração: Tendo como válidas as propriedades 1 a 6, basta tomarmos os logaritmos de ambos lados da igualdade para verificar a veracidade da mesma. Assim temos:

$$\begin{aligned} f\left(a^{f(x)}\right) &= f(x) \\ f(x) \cdot f(a) &= f(x) \end{aligned}$$

[4]Ver pág. 18 condições de continuidade, na verdade a teoria dos logaritmos nos fornece a melhor maneira de definir a^r quando r é irracional.

Como a é aqui a base de nosso sistema de logaritmos temos que f(a)=1 e consequentemente a igualdade é válida.

Propriedade 8: A função logaritmo $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente e inferiormente.

Demonstração: Para provar que a função é ilimitada superiormente e inferiormente temos que demonstrar que dados arbitrariamente números reais α e β, é sempre possível encontrar $f(x) < \alpha$ e $f(y) > \beta$. Provaremos primeiro que f é ilimitada superiormente, para isso basta encontrar n tão grande tal que $n > \frac{\beta}{f(2)}$, sabemos pela propriedade 2 que $f(2) > 0$, assim segue que:

$$n > \frac{\beta}{f(2)}$$

$$n \cdot f(2) > \beta$$

Pela propriedade 4

$$f(2^n) > \beta$$

Assim basta tomar $y = 2^n$ para obtermos $f(y) > \beta$.

Agora demonstraremos que f é ilimitada inferiormente, para isso basta encontrar m tão grande tal que $m > \frac{|\alpha|}{f(2)}$, usando o mesmo artifício da demonstração anterior temos que:

$$f(2^m) > |\alpha|$$

Pela propriedade 3 podemos concluir que:

$$f(2^{-m}) < \alpha$$

Assim tomando $x = 2^{-m}$ obteremos $f(x) < \alpha$, logo f é ilimitada inferiormente. O que termina nossa demonstração.

Vamos estabelecer uma relação entre PG's e PA's que contemple a definição e as propriedades de logaritmos.

3.4 O número e como base especial

Conforme foi exposto no capitulo 4, os logaritmos estão explicitamente relacionados com a ideia de função exponencial, função essa que é caracterizada pela seguinte relação:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* | f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Pode-se ver nessa caracterização que conforme x aumenta, $f(x)$ também aumenta, lentamente a princípio, mas cada vez mais rapidamente em direção ao infinito. Em geral o gráfico cartesiano da função exponencial aparece da forma abaixo.

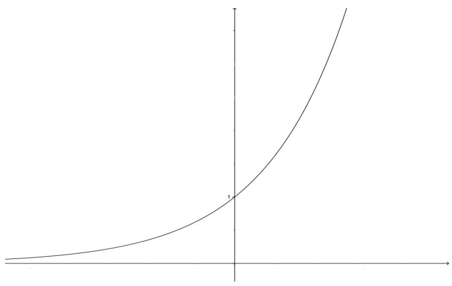


Figura 3.5: Gráfico da função exponencial.

Gráfico de uma simplicidade excepcional, visto que não apresenta características comuns de gráficos de funções algébricas, como pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão e assíntotas verticais. Por ser tão simples a função exponencial, poderia ser fato para considerá-la pouco interessante do ponto de vista algébrico, porém a sua taxa de variação a torna única e a remete (juntamente com o logaritmo) como uma das funções mais importantes da álgebra.

Define-se a taxa de variação de uma função $y = f(x)$ por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que Δy é a variação em $f(x)$ e Δx é a variação em x. A taxa de variação de uma função f é outra função chamada de derivada da função f.

Baseados no conceito que a função exponencial é a inversa da função logaritmo natural. Calcularemos a derivada da função $f(x) = e^x$. Iniciando com $y = e^x$, temos:

$$y = e^x$$

Tomando-se o logaritmos de ambos os lados

$$\ln y = \ln e^x = x$$

Derivando ambos os lados em relação a x, pelo teorema fundamental do cálculo temos que:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

Multiplicando ambos os lados por y, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Substituindo y por e^x temos:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Isso mostra que a taxa de variação da função exponencial de base e é igual à própria função exponencial de base e, isso a torna única, e ela é o melhor modelo para explicar vários fenômenos da natureza. A regra da cadeia amplia esse resultado da maneira habitual para uma forma mais geral que é:

Se u é qualquer função derivável de x, então:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Usaremos esse resultado para derivar a^x. Antes disso notemos que:

$$\ln a^x = x\ln a = (x\ln a)\ln e = \ln e^{x\ln a} \Leftrightarrow a^x = e^{x\ln a}$$

Sendo assim, dado $u = x\ln a$, temos pela definição anterior que:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = e^u \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Como $\ln a$ é uma constante, temos que a derivada de uma função exponencial de base qualquer é proporcional a própria função exponencial.

Com isso temos que o número e tem importância como base de funções exponenciais e consequentemente logarítmicas, pois somente ele explica fenômenos que variam proporcionalmente ao seu estado inicial.

Capítulo 4

Alternativas para o ensino de logaritmos

Este capítulo busca refazer o trabalho proposto pelos matemáticos, com uma linguagem atual e conveniente a utilização no ensino médio, buscamos trazer uma proposta para ser utilizada no ensino de logaritmos fazendo uma correlação entre o conteúdo de logaritmos e o conteúdo de sequencias e progressões.

4.1 Logaritmos definidos a partir de relações entre progressões

A concepção dos logaritmos, feita a partir dos trabalhos de Napier, Brigs e Bürgi, sugere que logaritmos são obtidos com funções que fazem corresponder os elementos de uma certa PG aos elementos de uma certa PA. Tanto logaritmos com Progressões são assuntos que devem ser abordados no ensino médio.

Mesmo com a forte relação entre esses conteúdos, no ensino médio são ensinados separadamente, não estabelecendo nenhuma relação entre eles. Buscamos aqui propor uma sequência para ser abordada em sala de aula, com uma ênfase maior no ensino de logaritmos, que é o tema principal desse trabalho, mas deixamos ao professor a criatividade em adequar a os conteúdos a sua realidade de ensino.

4.1.1 Sequencias e progressões

A matemática utiliza ferramentas lógicas para explicar o mundo, muitas destas ferramentas são obtidas observando padrões numéricos que ocorrem em uma quantidade ordenada de números. Estes números ordenados podem ser definidos como sequências.

Neste estudo é definido como sequência todo coleção ordenada de números em que a partir de um certo número dessa coleção, que é chamado de termo, pode-se definir o próximo termo utilizando operações matemáticas com termos anteriores a este.

Nessas condições é possível classificar sequências quanto a sua ordem, em que é chamado de sequências de primeira ordem, aquelas que cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido através de seu anterior operado a uma constante, sequências de segunda ordem aquela que cada termo, a partir do terceiro, pode ser obtido através de seus dois termos anteriores operados a constantes, de enésima ordem aquela sequência que os termos a partir do $(n+1)^0$ podem ser obtidos utilizando-se de operações com seus n termos anteriores.

O foco deste estudo são as sequências de primeira ordem caracterizadas pelas operações de adição e multiplicação, a estas sequências daremos o nome de Progressões.

4.1.2 Progressões e logaritmos

Como é de conhecimento comum, define-se como Progressão Aritmética (PA) toda sequência em que qualquer termo é definido pelo termo anterior somado a uma constante $r \neq 0$ qualquer, esta constante é chamada razão. Progressão Geométrica (PG) é toda sequência em que qualquer termo é definido pelo termo anterior multiplicado a uma constante qualquer, em que essa constante também é chamada razão.

Nestas definições de PA e PG é mostrado claramente que a operação característica das PAs e das PGs são respectivamente a soma e produto, então fazer transformar uma PG em uma PA é teoricamente transformar produtos em somas.

Assim dados os conjuntos A e B formados pelos termos da PG e da PA, respectivamente, como podemos construir uma função $f : A \to B$ que faz corresponder o n-ésimo termo da PG ao n-ésimo termo da PA.

Queremos aqui ilustrar quais são as características desta função f que transforma cada elemento de uma PG em cada elemento de uma PA. Assim tomando ao conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_s, \cdots, a_k, \cdots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_s, \cdots, b_k, \cdots\}$, temos que a função $f : A \to B$ pode ser definida por $f(a_i) = b_i$, assim:

$$f(a_1) = b_1$$

Os termos da PA que são a Imagem da função f descrita acima podem ser descritos pela equação recursiva $b_n = b_1 + r(n-1)$ em que r é a razão da PA e n é a ordem do termo. Já os termos da PG que são o Domínio da função f podem ser descritos pela equação recursiva $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ onde q é a razão da PG. Que fique claro que $q \neq 1$ e também $q \neq -1$, pois se um desses casos ocorrer o Domínio da função f fica restrito a um ou dois elementos, o que não é interessante aos nossos estudos. Com isto temos que:

$$f(a_i) = b_i = b_1 + r(i-1)$$

$$f(a_i) = f(a_1) + r(i-1)$$

Como a_i é o produto de a_1 com uma potencia de q fica estabelecido que lei ou função que associa cada termo da PG ao termo de mesma ordem da PA. faz que:

$$f\left(a_1 \cdot q^{i-1}\right) = f(a_1) + r(i-1)$$

Quando são associados os termos da PG aos termos de mesma ordem da PA , a potência se reduz ao produto e o produto se reduz a soma. A questão é como estabelecer uma PA e uma PG em que dada a função que associa essas progressões temos um conjunto fechado para as operações indicadas. Ou seja, dada uma PG e uma PA, o que é necessário para que a função que faz associar essas progressões garanta que o produto de dois elementos da PG seja correspondente soma de dois elementos da PA.

Para analisar esse fato tomam-se os termos a_s e a_k de uma PG e b_s e b_k de uma PA. Observe que:

$$f(a_s) = f(a_1) + r(s-1) = b_1 + r(s-1) = b_s$$

$$f(a_k) = f(a_1) + r(k-1) = b_1 + r(k-1) = b_k$$

$$f(a_s \cdot a_k) = ?$$

Neste ponto devemos analisar quais são as condições para que $a_s \cdot a_k \in \mathrm{Dom}(f)$, observando a equação recursiva dos termos do domínio de f vemos que:

$$a_s \cdot a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{s+k-1}$$

Assim para que $a_s \cdot a_k \in \text{Dom}(f) = \{a_n \in A | a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\}$, ou $a_1 = q$, ou $a_1 = 1$. No caso em que $a_1 = q$, temos:

$$f(a_1) = f(q) = b_1$$

$$f(a_s \cdot a_k) = f\left(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{s+k-1}\right) = f\left(a_1 \cdot q^{s+k}\right) = b_1 + r(s+k) = b_{s+k+1}$$

$$f(a_s \cdot a_k) = f(a_{s+k+1}) = f(a_s) + f(a_k) - b_1 + r$$

Já no caso em que $a_1 = 1$, temos que:

$$f(a_1) = f(1) = b_1$$

$$f(a_s \cdot a_k) = f\left(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{s+k-1}\right) = f\left(a_1 \cdot q^{s+k-1}\right) = b_1 + r(s+k-1) = b_{s+k}$$

$$f(a_s \cdot a_k) = f(a_{s+k}) = f(a_s) + f(a_k) - b_1$$

Desse modo concluímos que é necessário que $a_1 = 1$ e $b_1 = 0$ para que a função que faz associar essas progressões garanta que o produto de dois elementos da PG seja correspondente soma de dois elementos da PA.

A razão da PG não pode ser negativa, pois se isso ocorrer haverá um termo $a_p = -k$, fazendo $f(-k) = f(-1) + f(k)$, como $a_1 = 1$, e $q \neq 1 \neq -1$ então o termo $-1 \notin \text{Dom}(f)$.

Assim temos que dadas uma PG e uma PA de razão positiva, cujo 1° termos da PA é 0 e o primeiro termo da PG é 1 a função f que associa cada termo da PG ao termo de mesma ordem da PA tem em sua característica que:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

Essa função tem as mesmas características da Função logarítmica, logo também a chamaremos de função logarítmica.

Vamos agora tomar uma PG e uma PA como indicado acima para construir uma Função logarítmica. Observemos o exemplo de uma PG de razão 5 e uma PA de razão 1.

PG	PA
1	0
5	1
25	2
125	3
625	4
3125	5
15625	6

Ao multiplicar quaisquer dois números da coluna da esquerda, basta somar os correspondentes da direita e observar quais resultados faz-se corresponder, sendo assim, para saber por exemplo o resultado de 25×125, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} PG & & PA \\ 25 \times 125 & \longrightarrow & 2+3 \\ 3125 & \longleftarrow & 5 \end{array}$$

Da mesma forma se descobrir uma potência de um número da coluna da esquerda, basta observar o número da coluna da direita e multiplicá-la pela potência observando o resultado que faz-se corresponder na esquerda, assim para saber por exemplo o resultado de 25^3, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} PG & & PA \\ 25^3 & \longrightarrow & 2 \times 3 \\ 15625 & \longleftarrow & 6 \end{array}$$

Essa ferramenta é muito útil, porém da forma em que está apresentada parece limitada, pois não é informado por exemplo qual o resultado de 17×19 ou 7^2. Isso pode ser resolvido se preenchido os grandes espaços deixados na tabela, assim deve-se tornar a função logaritmo continua.

Um procedimento que pode ser utilizado é criar uma nova PG que contém a PG original, em que a cada dois termos consecutivos da PG original cria-se um novo termo que é a média Geométrica dos termos consecutivos, e a cada dois termos consecutivos da PA, cria-se um novo termo que é a média Aritmética dos termos consecutivos. A função logaritmo fará corresponder o novo termo da PG ao novo termo da PA. Como é observado na sequencia ilustrada abaixo:

Tabela 4.1: Tabela com relação original PG→PA

PG	1	5	25	125	625	3125
PA	0	1	2	3	4	5

Tabela 4.2: Tabela com nova relação PG→PA

PG	1	$\sqrt{5}$	5	$5\sqrt{5}$	25	$25\sqrt{5}$	125	$125\sqrt{5}$	625
PA	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

Pode-se repetir esse artifício infinitas vezes, assim para qualquer racional que esteja representado na PA é possível encontrar um número Real que se associe a este na PG, mas surge uma dificuldade, se quizermos que se obtenha na mesma relação um número da PG que associe a um irracional na PA, não alcançaremos êxito utilizando o artifício explorado anteriormente.

Observa-se a tabela inicial que os termos referentes a PG estão escritos na forma q^{n-1} já os termos da tabela referentes a PA estão escritos na forma $(n-1)$, em que n é a ordem de cada elemento. Ao fazer a relação PG→PA, está procurando um valor para n em que $f(a_n) = f\left(q^{n-1}\right) = (n-1)$, ou seja, que expoente devo dar a razão da PG para que o resultado seja a_n.

Fazer isso com expoente racional já foi discutido no capitulo anterior, agora qual o significado do expoente irracional? Para isso devemos explorar as condições de continuidade da função.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto X, diz-se continua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma *função* continua quando f é continua em todos os pontos $a \to X$.

Assim para definir a^x, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, é considerado duas sequencias de números racionais, uma denominada A_1 crescente formada por números menores que x, e outra denominada A_2 decrescente formada por números maiores que x ambas se aproximando de x.

$$A_1 = (r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots)$$

$$A_2 = (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots)$$

Nota-se que: $a)$ todo úmero de A_1 é menor que qualquer número de A_2. $b)$ existem dois racionais r e s tais que $r < x < s$ e a diferença $s - r$ e menor que qualquer número positivo e arbitrário. Logo os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r | r \in A_1\}$$

$$B_2 = \{a^s | s \in A_2\}$$

Se $a > 1$ demonstra-se[1] que: $a)$ todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2, $b)$ existem dois números a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições $f : PG \to PA$ é continua, logo qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.

Retomando o procedimento estabelecido no exemplo anterior observa-se inicialmente que os termos da linha de cima estão escritos na forma 5^{n-1}, em que n é a ordem de cada termo, e os termos da linha de baixo estão escritos na forma $n - 1$. Assim podemos explorar outro procedimento para encontrar aproximações Racionais relacionados a qualquer Real pertencente a PG.

Utilizando-se da indagação inicial de encontrar o resultado de 17×19, temos que primeiramente escrever 17 e 19 conforme os termos da linha de cima. Ou seja, para $5^x = 17$ e $5^y = 19$, encontrando qual será o valor de x e y.

Vemos que x e y pertencem ao intervalo $(1, 2)$, pois $5^1 = 5$ e $5^2 = 25$, sabe-se também que x e y são irracionais, pois dado $a^b = c$ se $c \in \mathbb{Z}$ então $b \in \mathbb{N}$ ou $b \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Pela condição de continuidade podemos encontrar aproximações racionais de x e y, para isso observa-se as potências de 17 e de 19 que se aproximam das potências de 5. Temos assim:

$$17^4 = 83521 \qquad \text{e} \qquad 5^7 = 78125$$

Pode-se substituir 174 por 57 para se ter uma aproximação do valor do logaritmo de 17 na base 5, Logo:

[1]Demonstração em anexo

$$\begin{aligned}
5^x &= 17 \\
(5^x)^4 &= 17^4 \\
5^{4x} &\cong 5^7 \\
4^x &\cong 7 \\
x &\cong \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

De forma análoga, notamos que:

$$19^6 = 47045881 \qquad \text{e} \qquad 5^{11} = 48828125, \text{ logo } y \cong \frac{11}{6}$$

Para saber o resultado de 17×19, basta somar seus respectivos logaritmos e observar que número tem como logaritmo o resultado desta soma. Assim como $\frac{7}{4} + \frac{11}{6} = \frac{43}{12}$ e $5^{\frac{43}{12}} \cong 320$, temos que $17 \times 19 \cong 320$.

A primeira vista parece inapropriado a construção de uma tabela, para resolver multiplicações, pois essa seria muito longa, sendo que necessitaria conter todos os números de 1 até o valor do resultado final da multiplicação. Porém pode-se fazer corresponder sempre um número entre o 1° e o 2° termo da PG, que tenha um resultado decimal igual ao logaritmo que se queira calcular, ou seja, quando era procurado o resultado do logaritmo de 17 na base 5, sabia-se que o resultado estava entre 1 e 2, o que faltava descobrir era qual a parte decimal, existe algum numero entre 1 e 5 que possui logaritmo com a mesma parte decimal que o logaritmo de 17. Esse número é obtido se for dividido o número 17 pela maior potência de 5 menor que 17, como é exposto abaixo:

$$17 = \frac{17}{5} \times 5 = 2,14 \times 5$$

Pela correspondência utilizada anteriormente tem-se:

$$5^x = 17 = 2,14 \times 5 \rightarrow 5^{x-1} = 2,14$$

Assim se for construída uma tabela de logaritmos de 1 a 5, pode-se encontrar o logaritmo de qualquer número na referida base.

O expoente da base ao qual o número é dividido e chamado de mantissa, assim na base 5 o número 17 pode ser representado por $2,14$ na mantissa 1, ou seja, o logaritmo de 17 na base 5 é igual a 1 somado ao logaritmo de $2,14$.

A base 10, ou seja, quando a razão da PG é 10, é a mais utilizada e de mais fácil manuseio, pois as correspondências de qualquer número para os números da tabela é trivial.

$$1432 = 1,432 \times 10^3$$

Também observa-se que o logaritmo de 10 é 1, o logaritmo de 102 é 2, o logaritmo de 10^n é n.

Como para o estudo de logaritmo as potências das bases recebem o nome de mantissa, assim o logaritmo de 1432 é igual ao logaritmo de $1,432$ na mantissa 3.

4.1.3 Utilizando planilhas eletrônicas

A utilização de tecnologias computacionais tem sido cada vez mais frequentes no ensino. Na matemática essas ferramentas geralmente são utilizadas no aspecto gráfico e na obtenção de cálculos.

Um software que pode ser utilizado para esses fins são as planilhas eletrônicas. Portanto traremos aqui uma sequência didática para utilização destas planilhas no ensino de logaritmos, lembramos que cabe a criatividade do professor adequações a sua realidade de ensino.

Uso de Prostaférese na multiplicação de números

Já comentamos que anterior a invenção de logaritmos, regras chamadas de Prostaférese eram amplamente usadas no meio cientifico para se obter resultados de multiplicações e de divisões por meio de tabelas trigonométricas. As tabelas de logaritmos substituíram essas regras pois alem de obter resultados de multiplicações e de divisões também fazem potencias e radicais.

Vamos aqui elucidar como eram feitos os cálculos de multiplicação e divisão a partir de algumas destas regras prostaferéticas, que são:

$$\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(A)\cdot\cos(B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)}{2}$$
$$\cos(A)\cdot\operatorname{sen}(B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(A)\cdot\operatorname{sen}(B) = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

Todas estas fórmulas trazem explicita a transformação de produtos em somas e diferenças. Podemos usar uma planilha eletrônica para elucidar o seno e o cosseno de alguns números.

Primeiro dividimos $1,57$ em intervalos de $0,01$(a escolha $1,57$ se dá pela proximidade de $\frac{\pi}{2}$) para isso em uma certa coluna colocamos em uma célula $0,01$, na seguinte $0,02$, selecionamos as duas e com o cursor arrastamos pelas células seguintes da coluna até chegarmos ao valor desejado $6,3$.

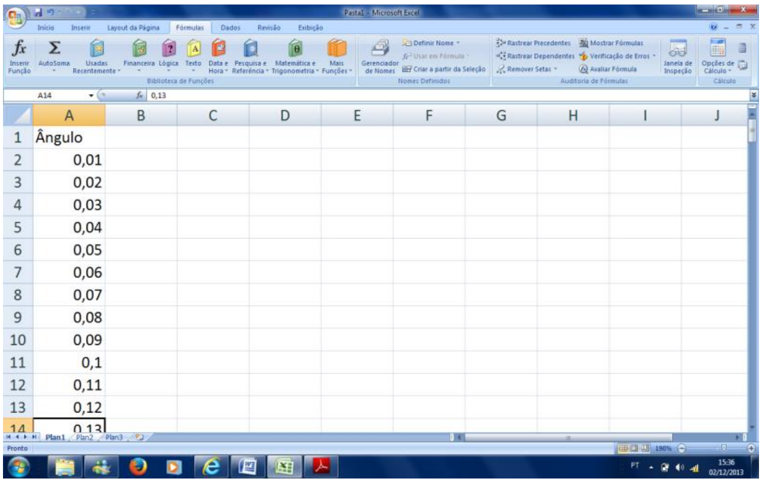


Figura 4.1: Planilha Eletrônica.

No campo inserir funções podemos criar colunas do seno e do cosseno de cada ângulo fragmentado do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, para isso basta digitar =sen(célula que deseja obter o seno), e arrastar por toda a coluna o resultado de modo análogo obtemos o cosseno digitando =cos(célula que deseja obter o cosseno). Assim teremos:

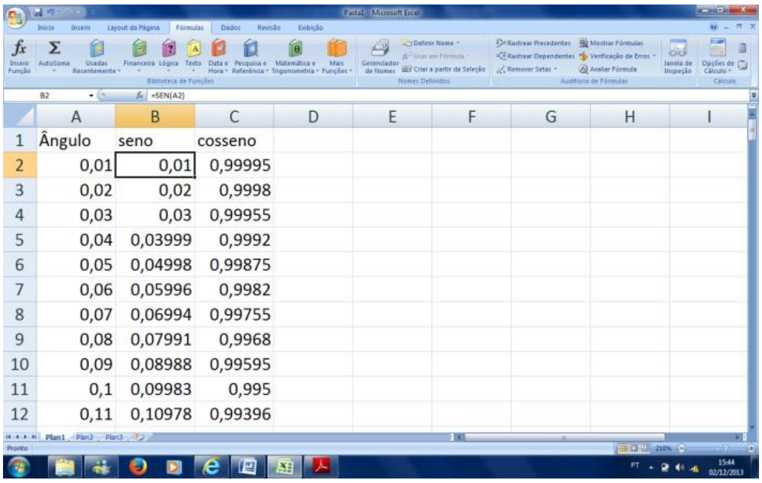


Figura 4.2: Planilha eletrônica.

De posse das tabelas trigonométricas podemos trabalhar cálculos de produtos usando as regras prostaféreticas.

Exemplo: obter o produto de 83×41 usando a regra:

$$\operatorname{sen}(A) \cdot \operatorname{sen}(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

Primeiramente procuramos os ângulos A e B cujo valor de $\operatorname{sen}(A) = 0,83$ e de $\operatorname{sen}(B) = 0,41$, na tabela temos que $A = 0,98$ e $B = 0,42$. Assim fazemos:

$$\begin{aligned}
0,83.0,41 &= \operatorname{sen}(0,98) \cdot \operatorname{sen}(0,42) \\
0,83.0,41 &= \frac{\cos(56) - \cos(1,4)}{2} \\
0,83.0,41 &= \frac{0,84726 - 0,16997}{2} \\
0,83.0,41 &= 0,338645
\end{aligned}$$

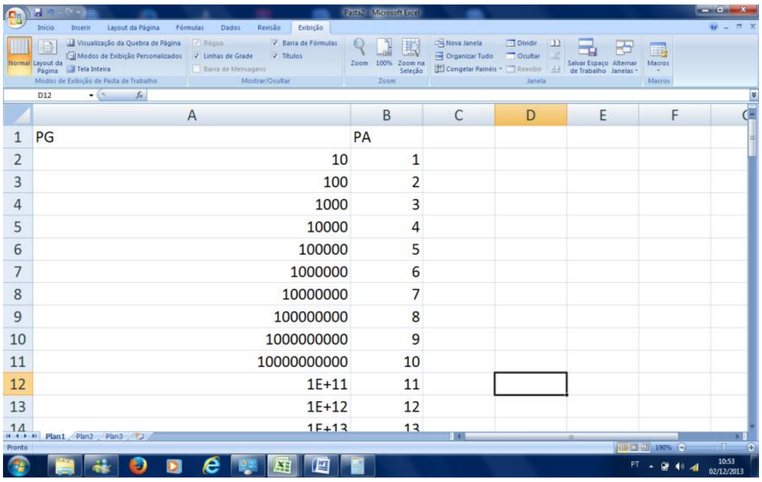
Ao substituir 83 por $0,83$ e 41 por $0,41$ reduzimos o produto em 4 ordens, assim para retornar ao produto original deveremos multiplicar o resultado por 10^4, obtendo:

$$83 \cdot 41 \cong 3386$$

Podemos utilizar qualquer uma das regras prostaféreticas relacionadas para obter esses cálculos, é interessante destacar a inutilidades destas regras no cálculo de potências e raízes.

Obtenção de logaritmos a partir de uma PG associada a uma PA.

Trabalharemos aqui com a PG de razão 10 associadas a uma PA de razão 1, conforme estudamos na seção anterior esta é a mais trivial no ponto de vista computacional. Na planilha eletrônica crie a PG e a PA citadas:

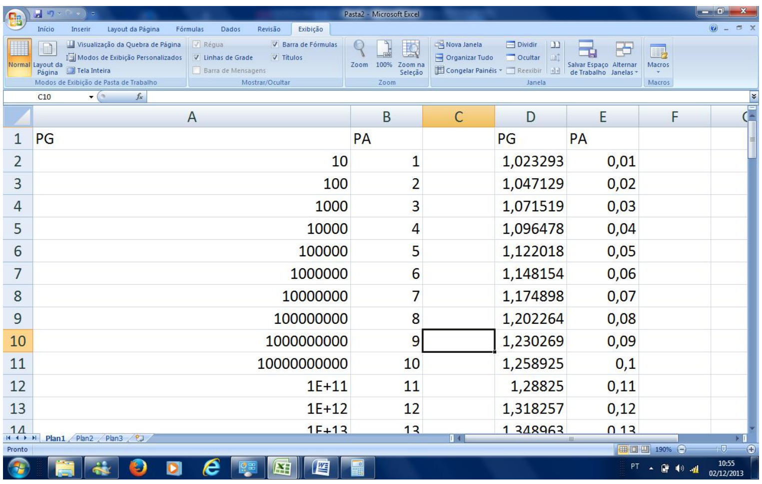


	A	B	C	D	E	F
1	PG	PA				
2	10	1				
3	100	2				
4	1000	3				
5	10000	4				
6	100000	5				
7	1000000	6				
8	10000000	7				
9	100000000	8				
10	1000000000	9				
11	10000000000	10				
12	1E+11	11				
13	1E+12	12				
14	1E+13	13				

Figura 4.3: Planilha Eletrônica.

Temos que a função $f : PG \to PA$ é uma função logarítmica, ou seja nesta função vale a propriedade que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Porem a PG e a PA estão apresentadas de uma maneira discreta, existindo "grandes espaços"entre dois números, preencheremos estes "espaços"utilizando expoentes decimais. Lembramos que quanto menor é a distância entre dois números da PA, maior é a precisão da tabela de logaritmos.

Como vimos na seção anterior o logaritmo de qualquer número tem a parte decimal igual ao logaritmo de algum valor do intervalo $[0, 1]$. Então preencheremos os "espaços"apenas neste intervalo. Assim temos:



	A	B	C	D	E	F
1	PG	PA		PG	PA	
2	10	1		1,023293	0,01	
3	100	2		1,047129	0,02	
4	1000	3		1,071519	0,03	
5	10000	4		1,096478	0,04	
6	100000	5		1,122018	0,05	
7	1000000	6		1,148154	0,06	
8	10000000	7		1,174898	0,07	
9	100000000	8		1,202264	0,08	
10	1000000000	9		1,230269	0,09	
11	10000000000	10		1,258925	0,1	
12	1E+11	11		1,28825	0,11	
13	1E+12	12		1,318257	0,12	
14	1E+13	13		1,348963	0,13	

Figura 4.4: Planilha Eletrônica

Vamos agora usar a propriedade de logaritmos para obter o produto 83×41, temos então que:

$$f(83 \cdot 41) = f(83) + f(41)$$

Para obter $f(83)$ e $f(41)$, observemos que 83 e 41 pertencem ao intervalo $[10, 100]$ logo os logaritmos destes valores devem estar no intervalo $[1, 2]$, falta então descobrir a parte decimal destes logaritmos, para isso dividiremos 83 e 41 pela maior potência de 10 que é menor que estes números. Temos então que:

$$\frac{83}{10} = 8,3$$
$$\frac{41}{10} = 4,1$$

Assim podemos concluir que:

$$f(83) = f(10 \cdot 8,3) = f(10) + f(8,3) = 1 + 0,92 = 1,92$$
$$f(41) = f(10 \cdot 4,1) = f(10) + f(4,1) = 1 + 0,62 = 1,62$$

Portanto:

$$f(83 \cdot 41) = f(83) + f(41) = 1,92 + 1,62 = 3,54$$

$$3,54 = 3 + 0,54 = f(1000) + f(3,467) = f(3467)$$

Sendo assim temos que:

$$83 \cdot 41 \cong 3467$$

Vamos agora utilizar a propriedade

$$f\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{f(x)}{n}$$

E também nossa tabela para calcular $\sqrt[7]{53}$, temos que:

$$f\left(\sqrt[7]{53}\right) = \frac{f(53)}{7} = \frac{f(10)+f(5,3)}{7} = \frac{1,725}{7} = 0,2464$$

$$0,2464 = f(1,74)$$

Sendo assim:

$$\sqrt[7]{53} \cong 1,74$$

Vemos que os logaritmos possuem grande vantagem do ponto de vista computacional em relação as regras prostaféreticas, por isso teve tanto sucesso na época de sua criação sendo pauta de estudos de vários matemáticos da época. Dentre os estudiosos se destacam Napier, Bürgi, Brigs, Sarasa, Newton, Mercartor e Euller. Sendo Euller o maior responsável em descobrir a importância do logaritmo natural, a base e, e a definição da função logaritmo como inversa da função exponencial. Muitos dizem que o uso da notação e é dada em homenagem a Euller. Porém o próprio Euller utilizava essa notação designando função exponencial.

Considerações finais

Este trabalho serve de subsídio ao professor de matemática que muitas vezes limitado ao livro didático não consegue fomentar, contextualizar e dar importância ao ensino de Logaritmos.

A partir da história da matemática vemos que o ensino de logaritmos não pode ser desvinculado da noção de Progressões Geométricas e Aritméticas, esta vinculação dá ao professor de matemática ferramentas que permitem relacionar assuntos que geralmente são ensinados separadamente. Também vemos que anterior a criação do cálculo diferencial e integral, os matemáticos já possuíam algoritmos que permitiam o cálculo de Integrais de algumas funções, esses algoritmos eram usados principalmente para calcular a área A de uma região S abaixo de uma curva. Limitações desse algoritmo e a busca de melhorá-los permitiu aos matemáticos fazerem a definição de um logaritmo especial, chamado de logaritmo natural, e posteriormente a criação do cálculo diferencial e integral.

Este trabalho traz releituras de forma clara e compreensível dos procedimentos matemáticos utilizados na época da concepção dos logaritmos com a linguagem matemática utilizada hoje, permitindo ao professor de matemática a adequação destes conhecimentos a suas aulas na educação básica. Mostra também a ligação que esse conhecimento tem com outros conhecimentos pertencentes ao currículo de matemática do ensino médio no Brasil, como progressões, funções polinomiais, binômio de Newton, trigonometria e números complexos dando ao professor a oportunidade de relacionar esses conhecimentos tornando a matemática mais significativa ao aluno.

Apêndices

Definições de funções exponenciais

Lema 1

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.

Demonstração:

1° parte

Provemos por indução sobre n, a proposição: $n > 0 \to a^n > 1$;

Para $n = 1$ temos $a^1 = a > 1$

Existe um conjunto $X \subset R$ em que a proposição seja verdadeira para todo e qualquer $n \in X$, provaremos que a proposição é verdadeira para $n + 1$.

$$a > 1 \to a \cdot a^n > a^n \to a^{n+1} > a^n > 1$$

2° parte:

Provar, a por redução ao absurdo, a proposição:

$$a^n > 1 \to n > 0$$

Supondo que $n \leq 0$, temos que: $-n \geq 0$. Nota-se que $n = 0 \to a^n = 1$ e pela primeira parte

$$-n \geq 0 \to a^{-n} \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n, e antendo o sentido da desigualdade pois a^n é positivo, temos:

$$a^{-n} \geq 1 \to a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \to 1 \geq a^n$$

O que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$. Logo $n > 0$.

Lema 2.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos que $a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.

Demonstração:

1° parte

Provemos a proposição $r > 0 \to a^r > 1$.

Façamos então $r = \frac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{N}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}$$

Pelo lema 1, se $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$, pelo mesmo lema $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$, ou seja,

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$$

2° parte

Provar agora a proposição: $a^r > 1 \rightarrow r > 0$.

Fazer $r = \dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Supondo $q > 0$ e considerando que na 1° parte provamos $a^{\frac{1}{q}} > 1$, temos pelo lema 1:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \rightarrow q > 0$$

Logo: $q > 0$ e $p > 0 \rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$

Supondo, agora, $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo lema 1 temos:

$$a^{-\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1 \rightarrow -p > 0 \rightarrow p < 0$$

Lema 3

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos: $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.

Demonstração:

$$a^s > a^t \leftrightarrow a^s \cdot a^{-t} > a^t \cdot a^{-t} \leftrightarrow a^{s-t} > 1 \overset{Lema\ 2}{\leftrightarrow} s - r > 0 \leftrightarrow s > r$$

Demonstração da convergência da série geométrica.

Considerar a série geométrica de razão $-x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots$$

Seja

$$S_n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n$$

A soma parcial dos $n + 1$ primeiros termos da série, tendo em vista que

$$-x \cdot S_n = -x + x^2 - \cdots + (-x)^n + (-x)^{n+1} = S_n + (-x)^{n+1} - 1$$

Obtêm:

$$-xS_n - S_n = (-x)^{n+1} - 1$$

$$S_n = \frac{(-x)^{n+1} - 1}{-x - 1}$$

Se $|-x| < 1$, então $(-x)^{n+1} \to 0$ e a expressão anterior torna-se, no limite,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \frac{-1}{-x - 1} = \frac{1}{x + 1}$$

Se $|-x| > 1$, a série é divergente, como é fácil ver, já que $(-x)^{n+1} \to \pm\infty$

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo; **Cálculo das funções de uma variável Volume 1**, 7° Ed., LTC Editora, Rio de Janeiro, 2003.

[2] ÁVILA, Geraldo; **Cálculo das funções de uma variável Volume 2**, 7° Ed., LTC Editora, Rio de Janeiro, 2004.

[3] BOYER, Carl Benjamin; **História da Matemática**, Tradução Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1974.

[4] CAJORI, Florian; **Uma História da Matemática**, Tradução de Lázaro Coutinho, Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

[5] CONTADOR, Paulo Roberto Martins; **Matemática: uma breve história**, Volume II, 2º Ed. Editora e Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[6] EVES, Howard; **Introdução a história da matemática**, Tradução Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp. Campinas-SP, 2004.

[7] FINNEY, Ross; **Cálculo de George B. Thomas Jr.**, Volume 1, 10° Ed., Pearson Addison Wesley, São Paulo, 2002.

[8] IEZZI, **Fundamentos da Matemática Elementar V- Logaritmo e Função Exponencial**

[9] LIMA, Elon Lages; **Logaritmos**, 4° Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

[10] LIMA, Elon Lages; **Análise Real Volume 1, Funções de uma variável**, 9° Ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[11] LIMA, Elon Lages; **Meu Professor de Matemática e outras histórias**, 5° Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2011.

[12] MAOR, Eli; *e*: **A história de um Número**, tradução de Jorge Calife, 3° Ed. Editora Record, Rio de Janeiro, 2006

[13] OLIVEIRA, Andréia Julio de; **O ensino de Logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2005.

[14] PRADO, Flávia Regina Oliveira do; CARVALHO, José Pedro Pereira de, **Números negativos têm logaritmos?**, Disciplinarum Scientia, Série Ciências Exatas, v.2, n.1, p.99-105, Santa Maria 2001.

[15] SOARES, Evanildo Costa; **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**, Dissertação (Mestrado em ensino de ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Natal, 2011