



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática



UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

DIONISIO FELIPE DOS SANTOS JUNIOR

**SUPERFICIES QUÁDRICAS DE RECOLUÇÃO: UMA PROPOSTA DE
ENSINO APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

JUAZEIRO – BA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DIONISIO FELIPE DOS SANTOS JUNIOR

**SUPERFICIES QUÁDRICAS DE RECOLUÇÃO: UMA PROPOSTA DE
ENSINO APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Artigo apresentado à Comissão Local do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do vale do são Francisco – UNIVASF, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^o Dr. Severino Cirino de Lima Neto

JUAZEIRO – BA

2015



SUPERFÍCIES QUÁDRICAS DE REVOLUÇÃO: UMA PROPOSTA DE ENSINO APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Autor: Dionísio Felipe dos Santos Júnior (SANTOS JÚNIOR, D.F.)¹
Orientador: Prof^o Dr Severino Cirino de Lima Neto (NETO, S.C.L.)^{1,2}

¹ Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus Juazeiro – BA, dionisiofelipe1@hotmail.com

² Colegiado de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus Juazeiro – BA, Cirino.univasf@gmail.com

Resumo

Trabalho desenvolvido com alunos da turma do terceiro ano do Ensino médio Integrado do curso de Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia do Sertão Pernambucano, objetivando ensinar um método prático para se chegar às equações das superfícies quádricas de revolução. Aplicou-se exercício relacionado à visualização e à formulação das equações das superfícies de revolução como: elipsoide, hiperboloide de uma folha e de duas folhas, paraboloid e cone de revolução. As atividades foram desenvolvidas em dois momentos: no primeiro, os estudantes responderam a uma lista de exercícios; no segundo momento, como ferramenta facilitadora, foi feita a inserção e utilização da máquina giratória para obter os sólidos de revolução, vindo a auxiliar os estudantes na resolução dos exercícios.

Palavras-chaves: Cônicas; quádricas; simetria.

Abstract

The present study was developed with students from the third year of the integrated high school course of Electrotechnics of the Federal Institute of Education Science and Technology of the Sertão Pernambucano, aiming teach a practical method to reach equations of the quadric surfaces of revolution. Exercises were applied related to viewing and the formulation of equations of surfaces of revolution such as an ellipsoid, hyperboloid of one sheet and two sheets, paraboloid and cone of revolution. The activities were developed in two stages: in the first, students answered a list of exercises; in the second stage, as a facilitating tool, a rotary machine to obtain the solids of revolution was included and used, and came in to assist students into solving the exercises.

Keywords: Conical; quadrics; symmetry.

1. INTRODUÇÃO

A educação no Brasil sempre enfrentou muitos desafios, embora a legislação seja ampla e garanta sua total aplicação, modelos e técnicas são constantemente desenvolvidos, objetivando ajudar o aluno a reter o conhecimento científico que lhe é apresentado em sala de aula de maneira que sirva de guia na sua prática social. No entanto, a realidade encontrada nas escolas públicas difere da teoria, ensinar matemática, por exemplo, vinculada à realidade do aluno, usando a resolução de problemas. A discussão dos temas não é explorada em sala de aula, a prática de ensino se resume a regras mecânicas pouco ou nada atrativo ao aluno.

Essa ausência de participação do aluno na produção do conhecimento que deveria carregar por toda a vida, e a insistência em utilizar regras e técnicas sem sentido para o aluno, torna o ensino da matemática como algo sem valor, sinalizando para o aluno que a aprendizagem ocorra apenas para alcançar resultados satisfatórios nos testes.

É preciso que o educador seja capaz de alcançar os níveis de dificuldade dos alunos, através da participação ativa e direta, e ajudá-los utilizando diferentes estratégias cognitivas escolhidas para resolução dos problemas, encarando-o como alguém capaz de aprender o suficiente para participar da construção do seu próprio conhecimento.

Nesse sentido, Carraher, Schliemann e Carraher (2003, p. 15) relata que a escola não deve ser “o único ambiente responsável pelo desenvolvimento intelectual”, espera-se que nela o aluno seja capaz de aprender a relacionar conhecimentos para aplicá-los nas suas relações sociais e esse fato só ocorre se o ensino da matemática estiver dentro de uma proposta pedagógica baseada no contexto cotidiano que leva em consideração os problemas do dia-a-dia.

Assim Vergnaud (1993 apud JENSKE, 2011, P. 32-33) ressalva “que o conhecimento está organizado nos campos conceituais”, ou seja, “um conjunto de situações, problemas, relações, estruturas, conceitos e teoremas inter-relacionados”, que são úteis para ajudar o aluno a solucionar dificuldades, que segundo Magina (2005, p. 3) são “competências e concepções dos estudantes que vão se desenvolvendo ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola”.

A seguinte, portanto, indagação foi levantada: é possível melhorar a visão em três dimensões dos alunos, utilizando uma máquina giratória? Para respondê-la evidenciou-se o objetivo geral: ensinar um método prático para se chegar às equações das superfícies quádricas de revolução mediante análise de um ponto genérico, estabelecido por elas. Referenciando os

objetivos específicos: utilizar a máquina giratória para visualização das superfícies quádricas de revolu-

ção; identificar as interseções obtidas pelos planos coordenados; observar as simetrias das respectivas quádricas de revolução.

Realizou-se o trabalho com a turma do terceiro ano do Ensino médio Integrado do curso de Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia do Sertão Pernambucano. No campo percebeu-se que o conteúdo: “cônicas” havia sido trabalhado pelo professor da turma.

Com o intuito de investigar o assunto em profundidade, optou-se pela pesquisa em duas etapas, em que na primeira etapa, foi utilizado o método tradicional, onde foi utilizada a lousa, pincéis, desenhando uma elipse no plano xy e indagou os alunos dizendo: fazendo esta girar em torno do eixo y , desenhe a superfície que você consegue visualizar. Já na segunda etapa ele utilizou a Marygir¹, onde fez uma peça em forma de uma elipse girar em torno do eixo y , levando o aluno a perceber, em tempo real, qual a superfície gerada.

Em seguida, foi aplicado um exercício em que abordava perguntas relacionadas à visualização de sólidos de revolução, bem como perguntas relacionadas à formulação de equações das superfícies de revolução como: elipsoide, hiperboloide de uma folha e de duas folhas, paraboloides e cone de revolução.

1.2 Vislumbrando alguns conceitos

A escola como um sistema aberto, pensante e flexível deve ensinar matemática conectada a amplitude da vida, permitindo que o aluno compreenda sua realidade e crie possibilidade de intervir.

Segundo Carraher, Schliemann e Carraher (2003, p. 12), a matemática é definida como uma “ciência formal, isso significa que a lógica reconstruída da matemática é dedutiva”. Sendo assim, é considerada mais do que uma ciência é uma “forma de atividade humana” e como tal a aprendizagem em sala de aula deve ser o “momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal e a matemática como atividade humana, porque o que interessa nessa situação é a aprendizagem do aluno”.

A matemática como atividade humana ocorre mediante a forma particular de se organizar os objetos e eventos no mundo através do estabelecimento das relações entre os objetos do conhecimento do aluno, contá-los, medi-los, somá-los e, dividi-los, verificando os resultados das diferentes formas de organização que cada um escolhe. Nesse respeito, Alarcão (2003, p. 27) enfatiza que as

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

[...] aprendizagens na sociedade emergente terão de desenvolver-se de uma forma mais ativa, responsável e experienciada ou experiencial, as quais façam apelo a atitudes mais autônomas, dialogantes e colaborativas em uma dinâmica de investigação, de descoberta e de construção de saberes alicerçada em projetos de reflexão e pesquisa... que venha ao encontro da interseção dos saberes, dos conhecimentos, da ação e da vida.

Nesse sentido, a escola como instituição responsável em proporcionar a todos certa bagagem cultural que se tornou vital, tanto para a sociedade quanto para o aluno individualmente precisa evidenciar na sua metodologia de ensino uma dinâmica que permita ao aluno investigar e descobrir por si mesmo razões da sua forma de vida e ter a capacidade de construir saberes alicerçados na reflexão das ações que o cerca, sendo capaz de intervir para mudar o meio ao seu redor.

Essa dinâmica ocorre quando o espaço da sala de aula deixar de ser um espaço onde se transmite conhecimento para se transformar num espaço onde se procura e se produz conhecimento. Nesse sentido, a escolarização implica a utilização de estratégias de organização das aprendizagens do aluno, provocando a sua auto- aprendizagem.

Visando a uma aproximação entre a escola e a vida, as atividades didáticas a serem realizadas pelos alunos implicam, segundo Alarcão (2003, p. 28):

- Uma tomada de consciência do que sabiam ou precisavam saber para realizar a atividade;
- Pesquisa pessoal;
- Um trabalho colaborativo entre eles;
- Uma sistematização orientada;
- Uma reflexão individual e partilhada sobre a tarefa realizada e os processos de realização e aprendizagem que lhe eram inerentes;
- O apoio do professor como uma das fontes de saber e de regulação da aprendizagem.

A intervenção acima mencionada permite aos alunos uma aprendizagem autônoma, ou seja, dependem menos do professor por desenvolver a consciência crítica, serem mais responsáveis, valorizar suas capacidades e visualizar seu próprio progresso.

Considerar a realidade do aluno ao ensinar matemática pode render resultados significativos, Carraher, Schliemann e Carraher (2003, p. 34), apresentaram os dados de uma pesquisa realizada com crianças em que afirmam “os resultados indicaram uma decisiva influência do contexto sobre a solução de problemas de matemática”, segundo observado pelos pesquisadores o teste informal, onde as operações foram inseridas em

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015

contextos reais o resultado foi superior as operações do teste formal.

Pesquisas anteriores apresentaram resultados similares, quando o sujeito era exposto a uma situação matemática vivenciada no seu dia a dia, facilmente conseguia bons resultados, mas quando a situação era apresentada simbolicamente sem ligação com a realidade, os acertos eram raros (CARRAHER; SCHLIEMANN; CARRAHER, 2003).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Algumas equações do 2º grau com três variáveis, representam as superfícies quádricas de revolução. Na grande maioria trabalhada de modo a levar o aluno a memorizar suas equações. Mediante uma abordagem prática, com a utilização de Marygir, espera-se que o aluno do Ensino Médio seja capaz de adquirir conhecimento sobre estas superfícies, possibilitando-o a gerar suas equações.

2.1 Superfícies de revolução

Segundo Reis e Silva (2013, p. 128), “superfície de revolução é em geral uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana C em torno de um eixo”.

2.2 Elipsoide de revolução

Para Reis e Silva (2013, p. 127), “a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos, chama-se elipsóide de revolução”. Diante dessa definição, os autores conduzem o leitor a visualização de uma figura, onde é de inteira dificuldade para os alunos visualizarem em três dimensões a superfície gerada.

Diferentemente, quando se utilizou a Marygir, que para visualização do elipsóide de revolução, colocou-se nela uma elipse fixada no eixo giratório, o qual pode ser qualquer um dos eixos coordenados. Vejamos o caso em que a elipse esteja no plano yz, conforme figura 1 cuja equação é

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

(1)

Fazendo-a girar em torno do eixo y , teremos a superfície de revolução representada pela figura 2.

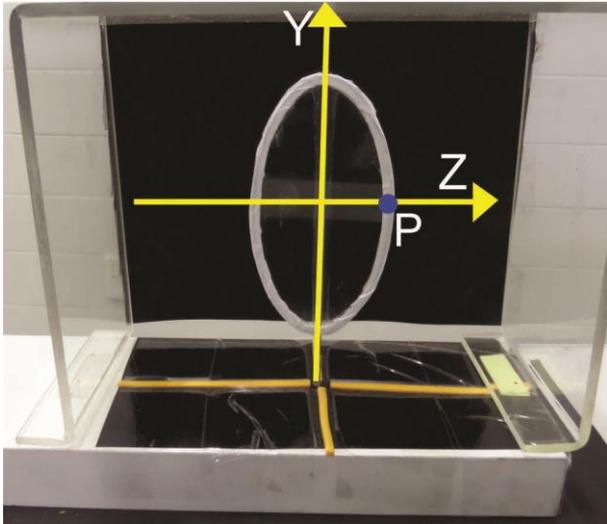


FIGURA 1: Elipse contida no plano zy de revolução

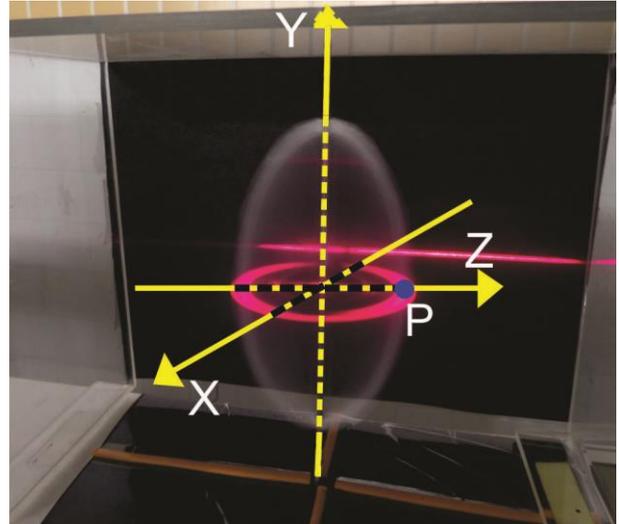


FIGURA 2: Elipsoide de revolução

Como o ponto $P(x, y, z)$ é simultaneamente pertencente à elipse, ao elipsoide e à circunferência, vemos que o raio R é igual a $|z|$ como mostra a figura 2, logo $R^2 = z^2$. Com isso podemos escrever a equação da elipse da seguinte forma

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{R^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

Onde vemos que o raio R é função de y . Como a circunferência está projetada no plano xz , podemos escrever sua equação como $x^2 + z^2 = R^2$, então substituindo na equação (2) teremos:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

Que corresponde à equação do elipsóide de revolução.

Da equação (3) pode ser feita algumas análises quanto às projeções sobre os planos coordenados, bem como suas simetrias em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

Quando Efimov (1972), faz a análise sobre o elipsoide, de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

Para o plano $x = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ x = k \end{cases} \quad (4)$$

1) Se $|k| < c$, o plano $x = k$ corta o elipsóide segundo a elipse conforme mostra a figura 3, cujos semi-eixos são

$$b' = b \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

(5a)

$$c' = c \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

(5b)

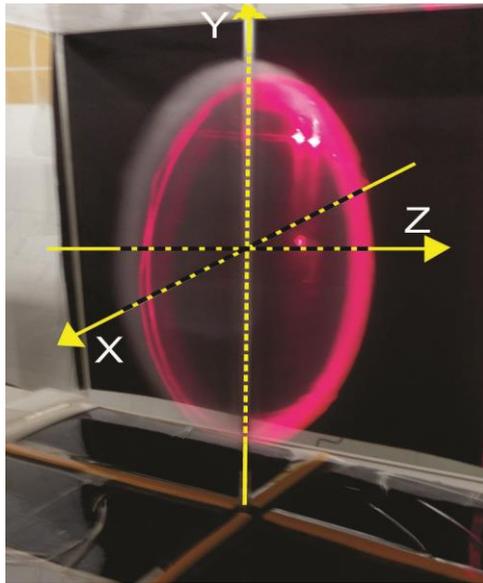


Figura 3: Elipsoide cortado pelo plano $x=k$

- 2) os semi-eixos b' e c' alcançam seu maior valor quando $k = 0$;
- 3) quando k cresce, b' e c' decrescem;
- 4) quando $k = \pm c$, os semi-eixos se anulam, ficando a elipse que intersecta o elipsoide degenerada a um ponto;
- 5) quando $k > c$, o plano $x = k$ não tem nenhum ponto comum com o elipsóide.

No plano $y = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações

$$\begin{cases} \frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

(6)

que de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

- 1) Se $|k| < b$, o plano $y = k$ corta o elipsóide segundo uma circunferência conforme representada na figura 4 cujo raio é

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução.
Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

$$c' = c \sqrt{1 - \frac{k^2}{b^2}}$$

(7)

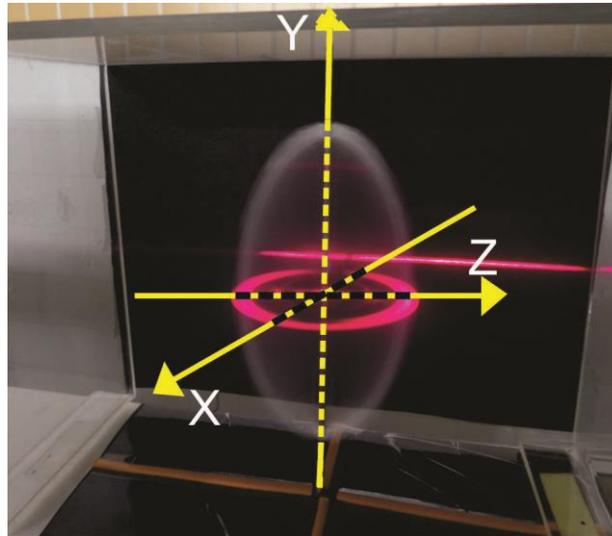


Figura 4: Elipsoide cortado pelo plano $y=k$

- 2) o raio c' alcançam seu maior valor quando $k = 0$;
- 3) quando k cresce, c' decrescem;
- 4) quando $k = \pm b$, o raio se anula, ficando a circunferência a qual intersecta o elipsoide degenerado a um ponto;
- 5) quando $k > b$, o plano $y = k$ não tem nenhum ponto comum com o elipsoide.

Para o plano $z = k$, a seção cônica obtida, será definida de acordo com as equações

$$\begin{cases} \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} \quad (8)$$

Que de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

- 1) se $k < c$, o plano $z = k$ corta o elipsóide segundo uma elipse conforme mostra a figura 5 cujos semi-eixos são

$$b' = b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

(9a)

$$c' = c\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

(9b)

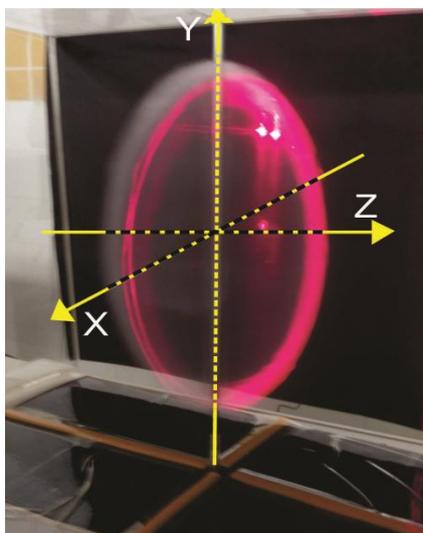


Figura 5: Elipsoide cortado pelo plano $z=k$

- 2) os semi-eixos b' e c' alcançam seu maior valor quando $k = 0$;
- 3) quando k cresce, b' e c' decrescem;
- 4) quando $k = \pm c$, os semi-eixos se anulam, ficando a elipse que intersecta o elipsoide degenerada a um ponto;
- 5) quando $k > c$, o plano $z = k$ não tem nenhum ponto comum com o elipsoide.

Quanto à simetria, segundo Santos (2001), o elipsoide de revolução é simétrico em relação aos planos coordenados, pois algebricamente, se o ponto (x, y, z) pertencer ao elipsoide de revolução, então os pontos $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$ também pertencerão; mostrando ser esta superfície simétrica em relação aos planos xy, xz e yz respectivamente. Ele também é simétrico em relação aos eixos coordenados, devido os

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

pontos $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$ também pertencerem à superfície. O elipsoide de revolução também é simétrico em relação à origem, em virtude do ponto $(-x, -y, -z)$ também pertencer à superfície.

2.3 Hiperboloide de revolução de uma folha

Conforme Efimov (1972, p. 206), “quando na equação do hiperboloide de uma folha, $a=b$, considera-se o hiperboloide de revolução de uma folha, como a superfície engendrada por uma hipérbole girando em torno de seu eixo não transverso”.

Para visualização desta superfície, colocou-se na máquina giratória uma hipérbole contida em qualquer um dos planos coordenados, escolhendo a hipérbole contida no plano xz , conforme a figura 6 cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (10)$$

Fazendo-a girar em torno do eixo z , gera-se a superfície de revolução conforme representada na figura 7.

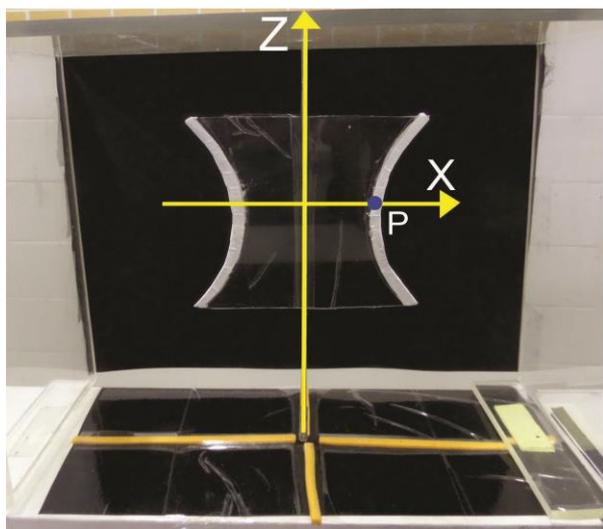


FIGURA 6: Hipérbole contida no plano xz
folha

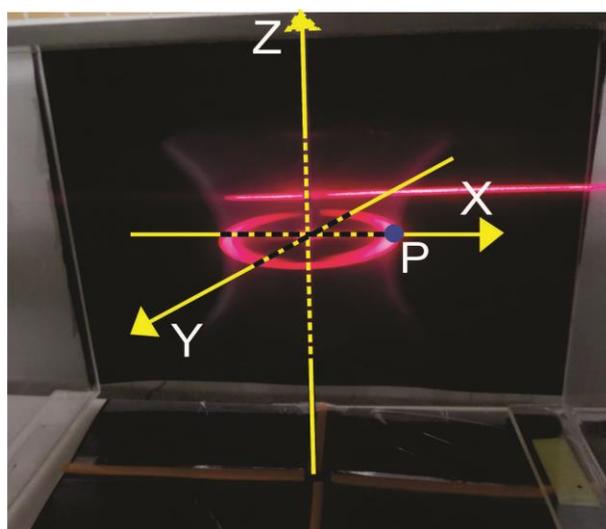


FIGURA 7: Hiperboloide de revolução de uma

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

Como vemos na figura 7, o ponto $P(x, y, z)$, pertence simultaneamente à hipérbole, ao hiperboloide e à circunferência. Temos que $R = x$, conseqüentemente $R^2 = x^2$. Sendo assim, podemos substituir x^2 por R^2 na equação (10) a qual ficará

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

Como a circunferência está projetada no plano xy , a mesma terá como equação

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (12)$$

Onde fazendo a substituição do valor de R^2 da equação (12) na equação (11), obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

Que corresponde à equação do hiperboloide de revolução de uma folha.

De acordo com Efimov (1972), a análise feita sobre o hiperboloide de uma folha, a depender do valor de k , podemos ter as seguintes situações:

Para o plano $x = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \quad (14)$$

1) Se $|k| < a$, o plano $x = k$ corta o hiperboloide de revolução de uma folha conforme a figura 8, segundo uma hipérbole cujos semi-eixos são

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}} \quad (15a)$$

$$c' = c \sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}} \quad (15 b)$$

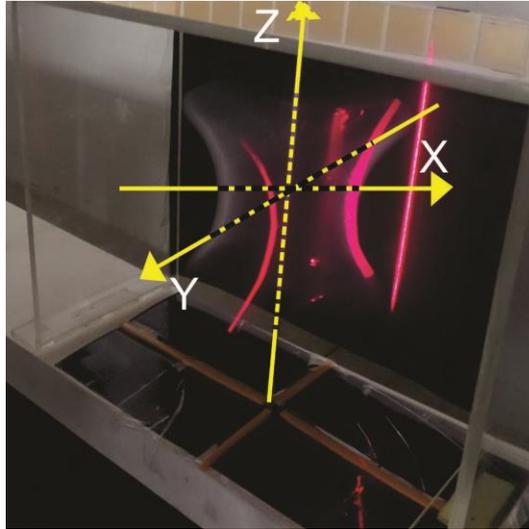


FIGURA 8: Hiperboloide de revolução de uma folha cortado pelo plano $x = k$

- 2) os semi-eixos a' e c' alcançam seu maior valor quando $k = 0$;
- 3) quando k cresce, a' e c' decrescem;
- 4) quando $k = \pm a$, os semi-eixos se anulam, ficando a hipérbole que intersecta o elipsoide degenerada a um ponto;
- 5) quando $k > a$, o plano $x = k$ não tem nenhum ponto comum com o hiperboloide.

A análise para o plano $y = k$ é análoga ao plano $x = k$.

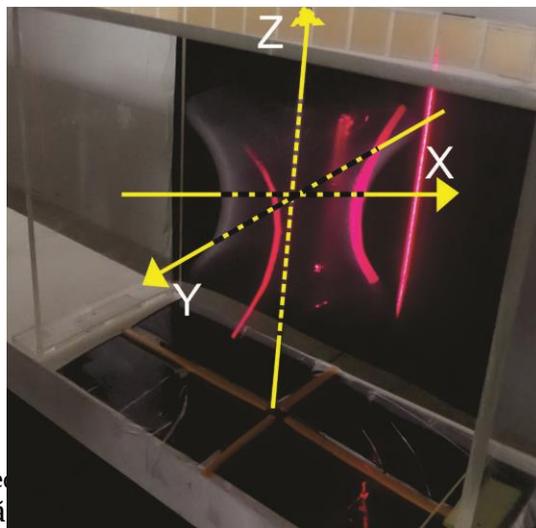


FIGURA 9: Hiperboloide de revolução de uma
folha cortado pelo plano $y = k$

Para o plano $z = k$, a seção cônica obtida, será definida de acordo com as equações

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

(16)

Que de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

1) se $|k| < c$, o plano $z = k$ corta o hiperboloide de revolução segundo a circunferência conforme a figura 10 cujo raio é

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}, \quad (17)$$

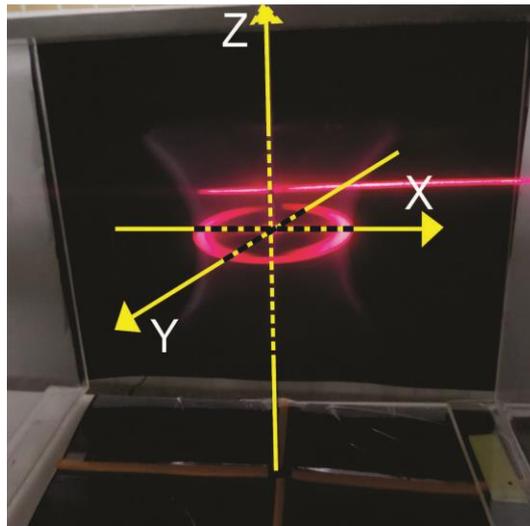


FIGURA 10: Hiperboloide de revolução de uma
folha cortado pelo plano $z = k$

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução.
Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

2) o raio a' alcançam seu menor valor quando $k = 0$, isto corresponde à circunferência de estrangulamento;

3) quando k cresce indefinidamente, a' cresce indefinidamente;

Quanto à simetria, para Santos (2001), o hiperboloide de revolução de uma folha é simétrico em relação aos planos coordenados, pois se o ponto (x, y, z) pertencer ao mesmo, então os pontos $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$ também pertencerão; mostrando ser essa superfície simétrica em relação aos planos xy, xz e yz respectivamente. Ela também é simétrica em relação aos eixos coordenados, devido os pontos $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$ pertencerem à superfície. O hiperboloide de revolução também é simétrico em relação à origem, em virtude do ponto $(-x, -y, -z)$ também pertencer à superfície.

2.4 Hiperboloide de revolução de duas folhas

Quanto a esta superfície, sua visualização se deu colocando na máquina giratória uma hipérbole contida em qualquer um dos planos, sendo escolhida a que está no plano xy , conforme a figura 11, cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18)$$

Fazendo-a girar em torno do eixo x , gera-se uma superfície de revolução conforme representada na figura 12.

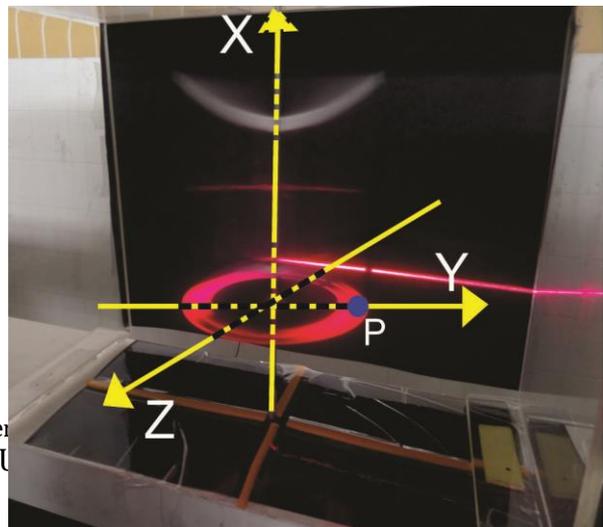
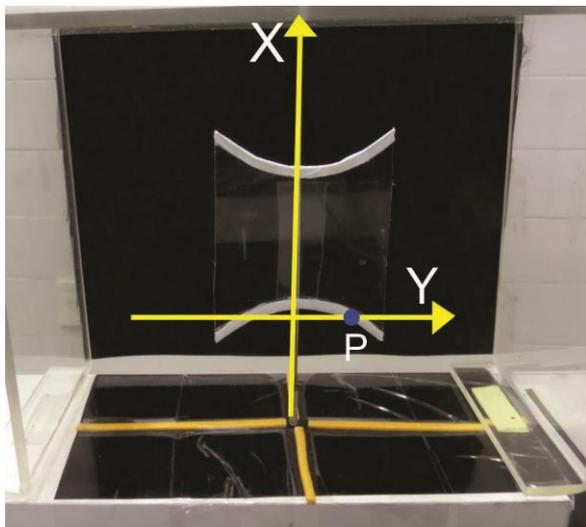


FIGURA 11: Hipérbole contida no plano xy
folhas

FIGURA 12: Hiperboloide de revolução de duas

De acordo com a figura 12, o ponto $P(x, y, z)$, pertence simultaneamente à hipérbole, ao hiperboloide e à circunferência. Temos neste caso que $k = |y|$, conseqüentemente $R^2 = y^2$. Sendo assim, podemos substituir y^2 por R^2 na equação 18, a qual ficará

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{R^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

Como a circunferência está projetada no plano yz , ela terá como equação

$$y^2 + z^2 = R^2 \quad (20)$$

Onde fazendo a substituição do valor de R^2 na equação 19, encontraremos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (21)$$

Que é a equação do hiperboloide de revolução de duas folhas.

Comparando ao que Efimov (1972), ele faz análise sobre o hiperbolóide de duas folhas, de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

Para o plano $x = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases} \quad (22)$$

1) Se $|k| > a$, o plano $x = k$ corta o hiperboloide de revolução de duas folhas,

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução.

conforme mostra a figura 13, segundo uma circunferência cujo raio é

$$b' = b\sqrt{\frac{k^2}{a^2} - 1} \quad (23)$$

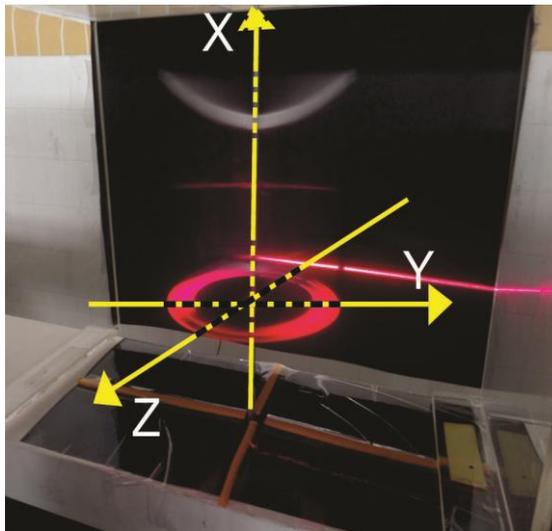


FIGURA 13: Hiperboloide de revolução de duas folhas cortado pelo plano $x = k$

2) quando k cresce, b' crescem;

3) quando $k = \pm a$, o raio se anula, ficando o plano que intersecta o hiperboloide degenerada a um ponto;

Para o plano $y = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \\ y = k \end{cases} \quad (24)$$

Conforme análises anteriores, de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

1) o plano $y = k$ corta o hiperboloide de revolução de duas folhas conforme mostra a figura 14, segundo uma hipérbole cujos semi-eixos são

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{k^2}{a^2}} \quad (25 a)$$

$$b' = b\sqrt{1 + \frac{k^2}{a^2}} \quad (25 b)$$

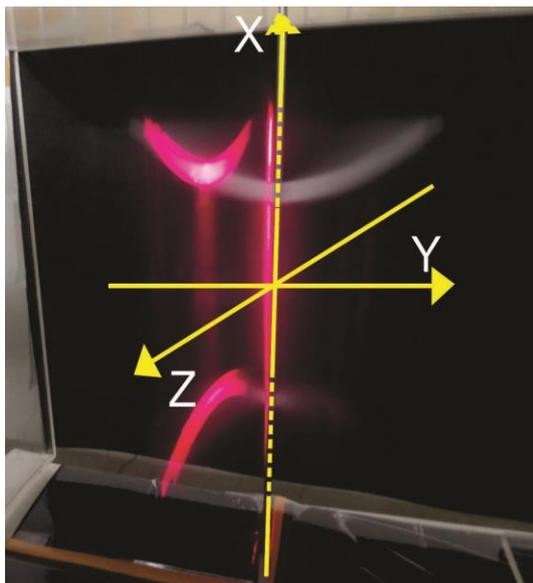


FIGURA 14: Hiperboloide de revolução de duas folhas cortado pelo plano $y = k$

2) quando k cresce indefinidamente, os semi-eixos a' e b' crescem;

Para o plano $z = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \\ z = k \end{cases}$$

(26)

Conforme análises anteriores, de acordo com o valor de k , podemos ter as seguintes situações:

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

1) o plano $z = k$ corta o hiperboloide de revolução de duas folhas conforme figura 15 segundo uma hipérbole cujos semi-eixos são

$$a' = a \sqrt{1 + \frac{k^2}{a^2}} \quad (27a)$$

$$b' = b \sqrt{1 + \frac{k^2}{a^2}} \quad (27b)$$

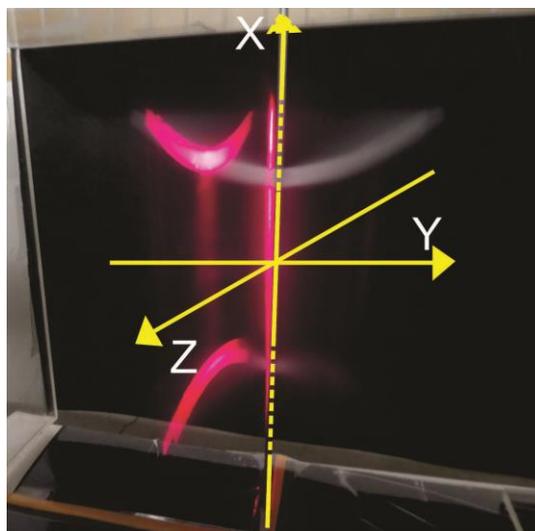


FIGURA 15: Hiperboloide de revolução de duas folhas cortado pelo plano $z = k$

2) quando k cresce indefinidamente, os semi-eixos a' e b' crescem;

Quanto à simetria, Santos (2001), diz que o hiperboloide de revolução de duas folhas é simétrico em relação aos planos coordenados, pois se o ponto (x, y, z) pertencer ao mesmo, então os pontos $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$ também pertencerão; mostrando ser essa superfície simétrica em relação aos planos xy, xz e yz respectivamente. Ela também é simétrica em relação aos eixos coordenados, devido os pontos $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$ pertencerem à superfície. O hiperboloide de revolução também é simétrico em relação à origem, em virtude do ponto

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

$(-x, -y, -z)$ também pertencer à superfície.

2.5 Parabolóide de revolução

De acordo com Steinbruch (1987, p.282) “se na equação do parabolóide elíptico tivermos $a=b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola.”

Utilizando a Marygir e realizando uma rotação em torno do eixo z de uma parábola contida no plano yz , conforme mostrado na figura 7, cuja equação é

$$z = by^2$$

(27)

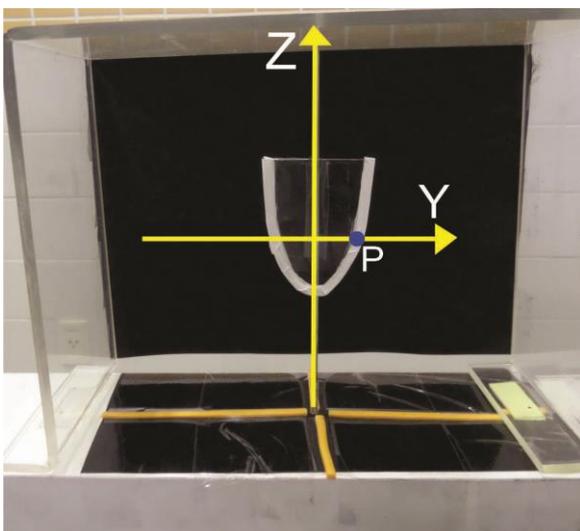


FIGURA 16: Parábola contida no plano YZ

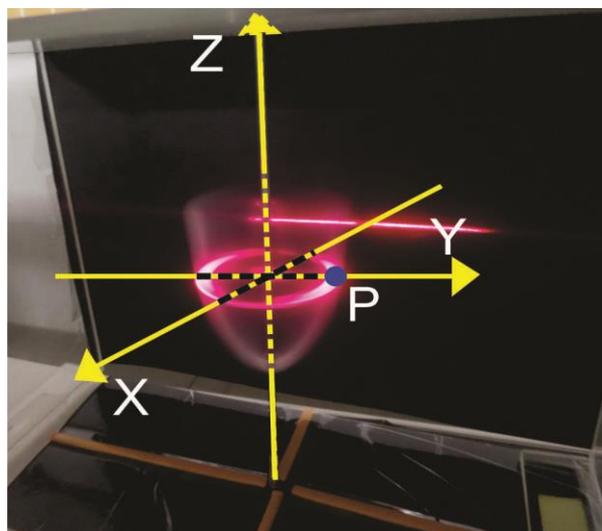


FIGURA 17: Parabolóide de revolução

Percebe-se que o ponto $P(x, y, z)$ pertence simultaneamente à parábola, ao parabolóide e à circunferência. Vemos que $R = |y|$, logo $R^2 = y^2$, com isso podemos escrever a equação da parábola como

¹Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

$$z = bR^2 \quad (28)$$

Pois R é função de y . Observa-se que a circunferência está projetada no plano xy , logo sua equação é dada por

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (29)$$

Que ao substituir na equação da parábola teremos

$$z = b(x^2 + y^2) \quad (30)$$

Que corresponde a equação do parabolóide de revolução.

Quanto à análise das projeções dos planos coordenados bem como dos planos paralelos a eles podemos ter as seguintes situações:

Para o plano $x = k$, a seção cônica obtida, será definida por duas equações como se segue:

$$\begin{cases} z = by^2 + bk^2 \\ x = k \end{cases}$$

(31)

Para o plano $x = k$, o parabolóide é cortado por uma parábola, conforme representada na figura 18.

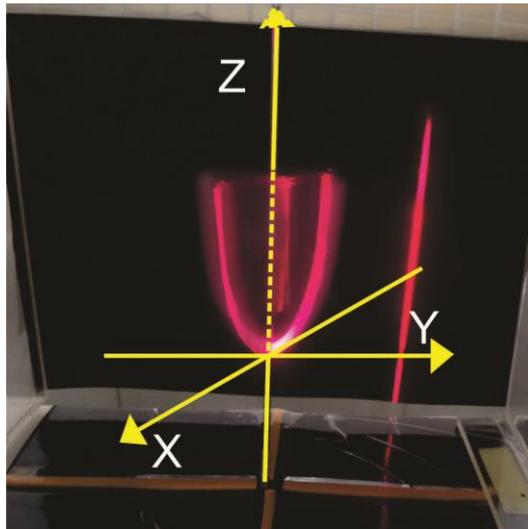


FIGURA 18: Paraboloides de revolução cortado pelo plano $x = k$

O mesmo ocorrendo para o plano $y = k$.

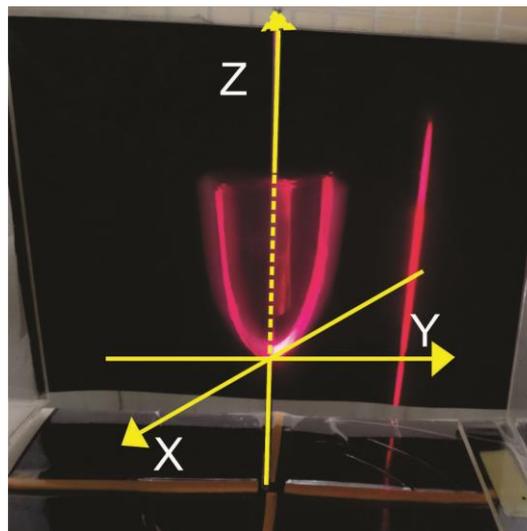


FIGURA 19: Paraboloides de revolução cortado pelo plano $y = k$

Já em relação ao plano $z = k$ teremos como seção cônica, uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt{\frac{k}{b}}$, conforme mostrado na figura 20, de equação

$$bx^2 + by^2 = k \quad (32)$$

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

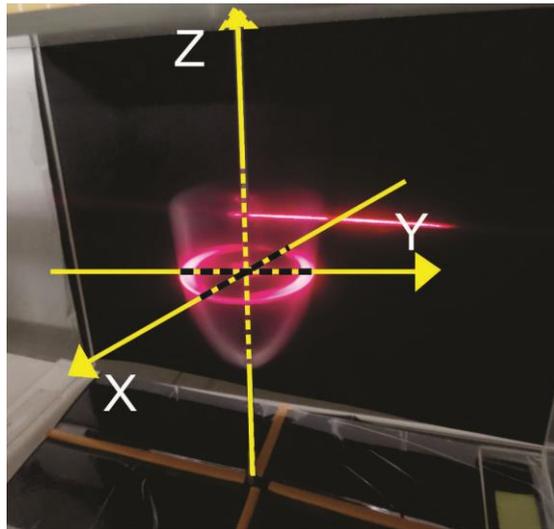


FIGURA 20: Parabolóide de revolução cortado pelo plano $z = k$

onde podemos fazer as seguintes análises:

- 1) quando $k = 0$, a circunferência se degenera num ponto;
- 2) à medida que k aumenta, o raio da circunferência aumenta.

Quanto à simetria, fazendo analogia a Santos (2001), o parabolóide de revolução é simétrico em relação aos planos coordenados xz e yz , pois se o ponto (x, y, z) pertence ao mesmo, então os pontos $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$ também pertencerão. Ela também é simétrica em relação ao eixo coordenado z , pois se o ponto (x, y, z) pertence ao mesmo, então o ponto $(-x, -y, z)$ também pertence à superfície.

2.6 Cone de revolução

Para chegar a esta superfície fez-se girar na máquina uma reta contida em qualquer um dos planos coordenados. Fazendo a escolha da reta no plano xy , conforme a figura 21, cuja equação é

$$y = a x \quad (33)$$

Fazendo-a girar em torno do eixo y , levará à superfície de revolução representada na figura 22.



FIGURA 21: reta no plano xy

FIGURA 22: Cone de revolução

Podemos dizer também que $R^2 = x^2$. Como a circunferência está sendo projetada no plano xz, sua equação é

$$x^2 + z^2 = R^2$$

(34)

Observa-se que o ponto $P(x, y, z)$ pertence simultaneamente à reta, ao cone de revolução e à circunferência. De modo análogo aos procedimentos anteriores, vê-se que $R = |x|$, que substituindo na equação da reta podemos escrevê-la

$$y = aR$$

(34)

Onde substituindo o valor de R da equação (34) na equação (35) tem-se

$$y^2 = a^2(x^2 + z^2)$$

(36)

Que corresponde à equação do cone de revolução.

Para análise das interseções de planos, tomemos Steinbruch (1987, p.272 -274), ele toma como referência um plano π , fazendo as seguintes análises:

1) caso o plano π seja perpendicular ao eixo de rotação da superfície, teremos como seção plana uma circunferência como mostra a figura 23.

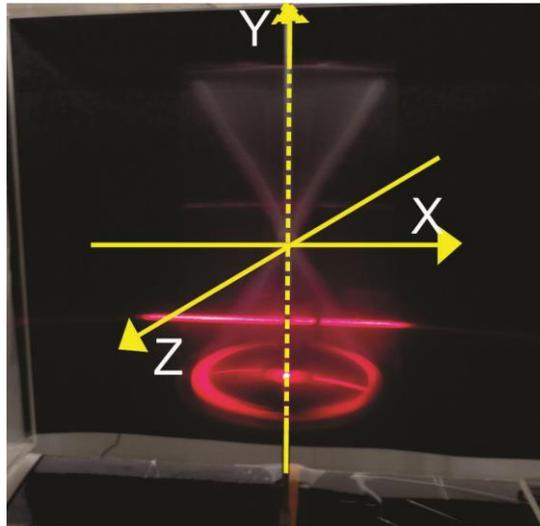


FIGURA 23: Cone de revolução cortado por um plano perpendicular ao eixo de rotação

2) caso o plano π seja oblíquo ao eixo de rotação, cortando apenas uma das folhas da superfície, teremos como seção plana uma elipse, como mostrado na figura 24 ;

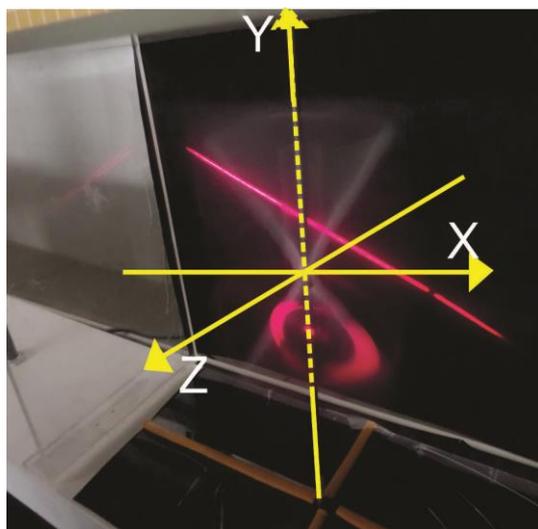


FIGURA 24: Cone de revolução cortado por um plano oblíquo ao eixo de rotação

3) caso o plano π seja paralelo a geratriz da superfície, teremos como seção plana uma parábola, como mostrada na figura 25 ;

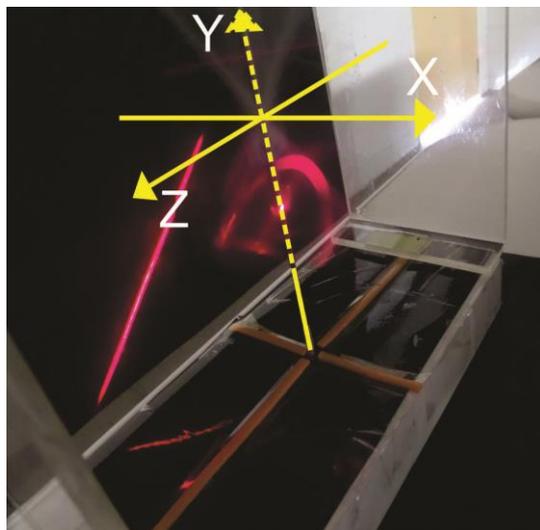


FIGURA 25: Cone de revolução cortado por um plano paralelo à uma das geratrizes

4) caso o plano π seja paralelo ao eixo de rotação, teremos como seção plana uma hipérbole, conforme mostrado na figura 26.

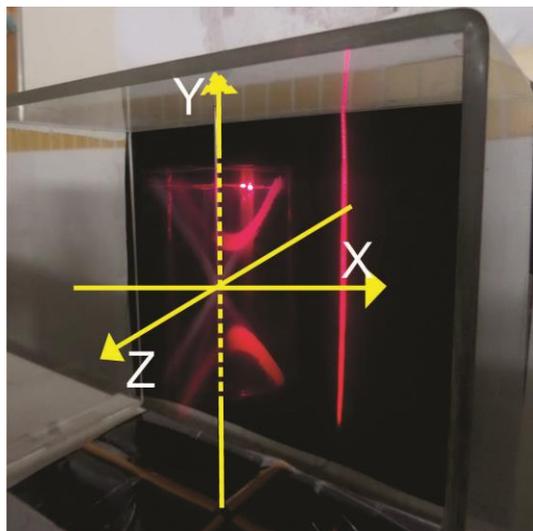


FIGURA 26: Cone de revolução cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução

3. METODOLOGIA

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

Inicialmente foi revisado o conteúdo sobre cônicas de maneira bem sucinta, devido o professor da turma já ter vivenciado com os alunos da turma. O experimento foi feito em duas etapas, primeiramente foi proposto aos alunos um exercício sobre a visualização e à formulação das equações das superfícies quádricas de revolução, partindo das cônicas impressas no papel, pediu para eles desenharem os sólidos gerados após a rotação em torno de algum eixo e em seguida, pediu que eles formulassem as equações dos referidos sólidos. Na segunda etapa, houve a inserção e utilização de uma máquina giratória, na qual os alunos conseguiram visualizar em tempo real a superfície quádrica de revolução. Vindo com isso a facilitar o ensino e aprendizagem do conteúdo proposto.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Primeira etapa

No primeiro momento, o pesquisador através de uma aula expositiva na turma do 3º ano do Ensino Médio Integrado do curso de Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, lembrou aos alunos as equações das cônicas, visto que, o professor da disciplina de Matemática, já tinha trabalhado este conteúdo.

O pesquisador expôs no quadro as equações das cônicas, resolvendo as duas primeiras perguntas elencadas no questionário que estava na posse dos alunos como referência para que eles seguissem o exemplo na resolução das demais questões solicitadas.

A turma é composta de 22 alunos, dos quais 21 participaram da pesquisa.

Em relação às questões 3, 5, 7, e 9 relacionadas à visualização das superfícies de revolução tendo como resultado o representado na figura 27.

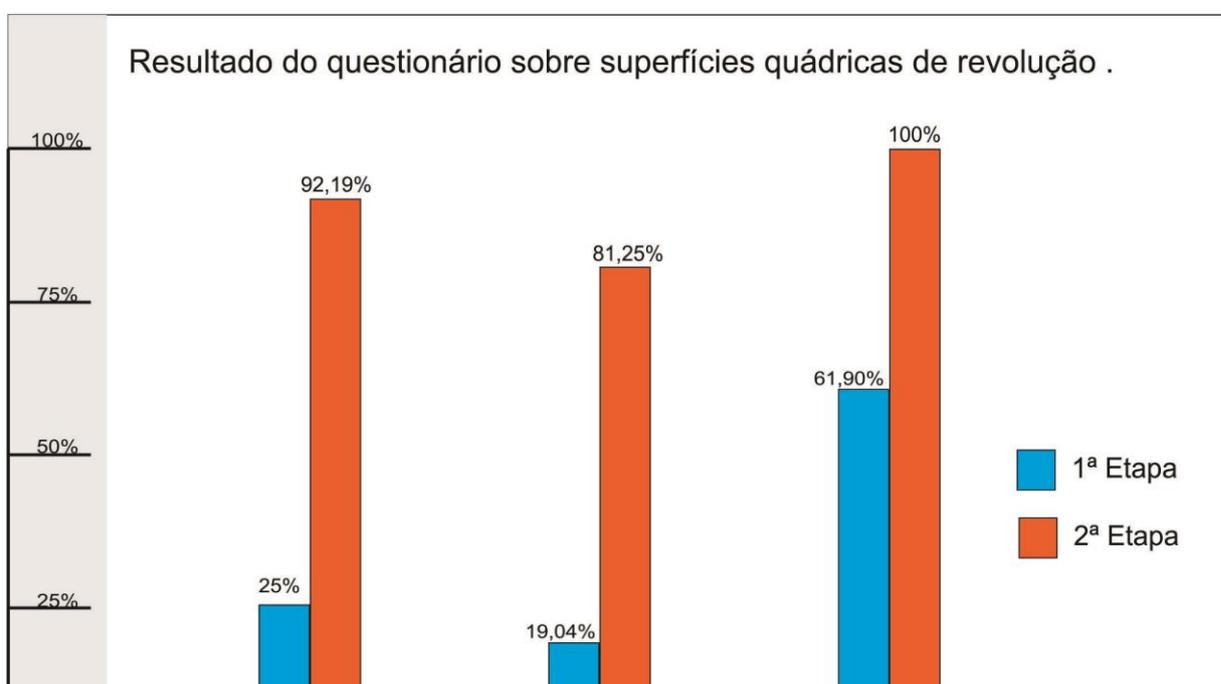


FIGURA 27: Percentual de acertos do questionário sobre superfícies quádricas de revolução

Observamos que, das quatro questões apresentadas aos alunos somando um total de 84 (oitenta e quatro) respostas, ocorreu 21 (vinte e um) acertos, equivalente a 25,00%, entretanto um número superior de erros, equivalente a 75,00% dos pesquisados.

O fato do índice de acertos ter sido inferior aos erros se deu em virtude da visão espacial dos alunos estar muito deficiente, por mais que eles já tenham tido anteriormente a disciplina de desenho geométrico, que os levam a ter uma visão espacial de muitos sólidos.

Nas questões 2, 4, 6, 8 e 10 relacionadas à formulação das equações das superfícies de revolução, o número de acertos equivale a 19,04%, contra a superioridade dos erros apontados por 80,96%, conforme mostrado na figura 27.

Essa discrepância, entre o número de acertos e o de erros, deu-se em virtude dos alunos não terem tomado como referência o exemplo dado pelo professor, o qual segundo análise, observou o receio dos mesmos no uso da álgebra.

A primeira questão referente à projeção da circunferência nos planos coordenados e sua equação, resultou em 61,90% de acertos contra 38,10% de erros conforme mostra a figura 27.

Quanto ao índice de acerto desta questão, foi de surpreender o pesquisador, pois esta foi trabalhada pelo mesmo, para que o aluno somente escrevesse em seu questionário, onde os conduziram a resolução das demais questões, e mesmo assim teve aluno que veio a errar.

4.2 Segunda etapa

A segunda etapa do questionário foi realizada com a utilização da máquina giratória, onde ela fez girar as cônicas elipse, hipérbole, parábola e uma reta, gerando como superfície, um elipsóide, um hiperbolóide de uma e duas folhas, um parabolóide e um cone todos de revolução.

Nesta etapa, participaram 16 alunos dentre os 22 que compõem a turma. Nesta fase, obtiveram os seguintes resultados:

Das questões 3, 5, 7 e 9 relacionadas à visualização de superfícies de revolução, 92,19% dos participantes acertam, enquanto 7,81% erraram, conforme representação na figura 27.

Quando comparamos os resultados da segunda fase em relação à primeira, percebemos uma evolução no entendimento dos alunos, pois nesta fase menos de 10,00% das questões os alunos erraram, enquanto na primeira fase erraram 75,00%.

As questões 2, 4, 6, 8 e 10 relacionadas à formulação das equações das superfícies de revolução, também, apresentaram resultados significativos, pois 81,25% acertaram e apenas 18,75% erram, conforme descrito na figura 27.

Um percentual de mais de 50,00% da turma demonstrou excelente entendimento do conteúdo após a inserção da máquina.

Na primeira questão relacionada à projeção de circunferência juntamente com sua equação, os alunos demonstraram total domínio do conteúdo, pois todos acertaram, conforme mostra a figura 27.

Esse resultado é significativo devido à quantidade de erros ocorridos na primeira fase, na ocasião 38,10% dos alunos erraram essa questão.

No momento da aplicação da máquina giratória para visualização da circunferência a qual fazemos a análise para se chegar às equações das superfícies quádricas e a visualização dos planos de intersecção com estas superfícies, a Marygir não dispunha de um acessório adequado, em que os alunos pudessem ver as cônicas formadas pelos planos de intersecção, portanto sugere-se que seja utilizado uma lanterna de laser juntamente com um cristal que faça gerar uma reta, na qual os alunos possam enxergar em tempo real as cônicas estabelecidas pelos planos cortantes estabelecido por esta reta.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da matemática sempre foi crucial tanto para educadores como para o educando, pois os alunos já chegam à escola com a falsa ideia de que decorar a tabuada lhes renderia bons resultados nos testes da referida disciplina.

Essa falsa ideia acompanhada pela falha na metodologia do ensino da matemática com regras e métodos que na grande maioria não são compreensíveis aos alunos, fato que dificulta sensivelmente o aprendizado.

Conforme observamos no decorrer dos estudos para realizar a fundamentação teórica desta pesquisa, enquanto o educador não se conscientizar de que a aprendizagem do aluno está intrinsecamente relacionada à sua realidade, continuaremos a ter sérias falhas no ensino da matemática.

A criatividade pode ser um fator preponderante para boas aulas de matemática, o educador não necessariamente precisa ficar preso ao quadro, livros, apostilas ou qualquer tipo de material pré-fabricado tanto por ele como pela escola, pelo contrário quanto mais usar da diversidade, tanto mais obterá maiores resultados no ensino.

O trabalho realizado com a turma do 3º ano do Ensino Médio Integrado do curso de Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano demonstrou que esse fato é uma realidade incontestável, pois os resultados da primeira etapa em que o pesquisador fez uso de uma aula expositiva e aplicou o questionário foi inferior ao resultado alcançado na segunda etapa.

Embora, na primeira etapa, o aluno visualizando as figuras impressas no questionário não foram capazes de responder com precisão à solicitação do investigador.

Na segunda etapa, o pesquisador utilizou uma máquina giratória, a qual fez girar as cônicas: elipse, hipérbole, parábola e uma reta, gerando como superfície: um elipsóide, um hiperbolóide de uma e duas folhas, um parabolóide e um cone todos de revolução. A atenção dada a essa atividade demonstrou que o ensino da matemática deve ir além de figuras apresentadas apenas no papel, quando o aluno é exposto à visualização em tempo real através de um equipamento, notamos que seu interesse aumenta, bem como sua capacidade de reconhecer e resolver questões aumenta significativamente em detrimento do impacto que objetos causam no ensino-aprendizagem, gerando maior interesse no conteúdo.

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015
SANTOS JUNIOR, D. F.

A apresentação de um equipamento levou aos alunos do 3º ano do Ensino Médio a uma melhoria na aprendizagem de um conteúdo, que embora seja ensinado apenas na universidade, observou que é possível para estes alunos aprenderem o conteúdo proposto.

Este trabalho se propôs a apresentar uma proposta de ensino com o conteúdo das superfícies quádricas de revolução para alunos do ensino médio, percebeu-se no decorrer da pesquisa que os alunos não encontraram dificuldades que não sejam vencidas por uma aula bem elaborada dentro de uma estrutura de ensino diferenciada e inter-relacionada.

Como sugestão para trabalhos futuros: investigar os efeitos gerados nos alunos quanto à aprendizagem ao utilizar equipamentos que permita a visualização do aluno ao conteúdo inserido em sala de aula através da exposição realizada pelo professor.

Outra linha de pesquisa pode ser ramificada deste trabalho, como desenvolver um trabalho usando a interdisciplinaridade, especificamente entre as disciplinas de Matemática, Arte e Informática (software maple/ajuda na confecção das imagens) e medir o nível de aprendizagem de matemática antes do uso destes recursos e depois da sua utilização.

Ainda, é possível desenvolver um trabalho investigatório sobre os sólidos de revolução para facilitação nos cálculos de área e volume destes.

6. REFERÊNCIAS

ALARCÃO, Isabel. **Professores reflexivos em uma escola**. São Paulo: Cortez, 2003.

CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN. **Na vida dez, na escola zero**. 13 ed. São Paulo, Cortez, 2003.

JENSKE, Grazielle. **A teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdos básicos da matemática: um estudo de caso**. Porto Alegre, 2011.

MAGINA, Sandra. **A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente**. 2005. Disponível em: <
www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf> Acesso em: 10 ago. 2014.

NICOLAU, Efimov. **Elementos de geometria analítica**. Ed. 423. Livraria Cultura Brasileira Editora Belo Horizonte. São Paulo: 1972.

¹ Máquina Giratória confeccionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015

RAMPAZZO, Lino. **Metodologia científica**: para alunos dos cursos de pós-graduação e pós-graduação. 3. ed. São Paulo: Loyola, 2005.

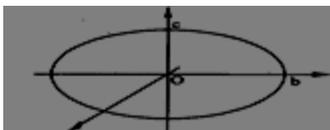
REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria analítica**. 2 ed. [Reimpr]- Rio de Janeiro: LTC: 2013.

SANTOS, Reginaldo J. **Superfícies e curvas no espaço**. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/regi>.

STEINBRUCH, Alfredo; Winterle, Paulo. **Geometria Analítica**. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

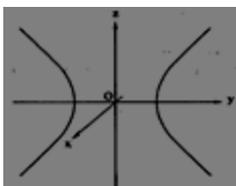
APÊNDICE A - Questionário sobre superfície de revolução

01- Ao girar uma elipse contida no plano XY , em torno do eixo Y conforme a figura. Em que plano estará projetada a circunferência? E qual a equação da mesma?



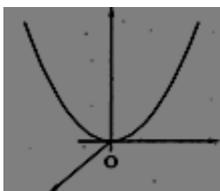
02- Qual a equação da superfície gerada no item 01?

03- Girando uma hipérbole contida no plano YZ , em torno do eixo Z como mostra a figura. Desenhe a superfície que você consegue visualizar.



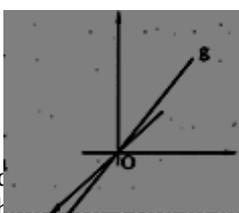
04- Qual a equação da superfície gerada no item 03?

05- Girando uma parábola contida no plano XZ , em torno do eixo Z , conforme a figura abaixo. Desenhe a superfície de revolução gerada.



06- Qual a equação da superfície de revolução gerada no item 05?

07- Ao girar uma reta contida no plano XY , em torno do eixo Y conforme a figura. Desenhe a superfície de revolução gerada.

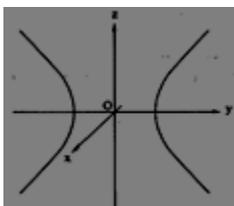


¹ Máscara mencionada pelo autor para geração das superfícies quádricas de revolução. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT-UNIVASF, 2015

SANTOS JUNIOR, D. F.

08- Qual a equação da superfície de revolução gerada no item 07?

09- Ao girar uma hipérbole contida no YZ, em torno do eixo real conforme a figura abaixo. Desenhe a superfície de revolução gerada.



10- Qual a equação da superfície de revolução gerada no item 09?

Apêndice B - Planilha de custo dos materiais utilizados para construção da Marygir

Para a construção da Marygir foram utilizados os materiais cujos preços estão discriminados na tabela abaixo.

Quantidade	Material	Preço (R\$)
01	Motor de dvd 5.9 volts	10,00
01	Eliminador de 5 volts de 5 mA	25,00
01	Mancal de acrílico	45,00
01	Base de madeira	20,00
01	Resistor variável de 1 k Ω	15,00
02	Viseira de capacete de moto	8,00
05	Eixo de rotação (raios de bicicleta)	0,00
01	Bucha de acoplamento 1cm (bomba de caneta)	0,00
02	Pedaços de fita adesiva dupla face	5,00
		Total: 128,00

Tabela 01 – Planilha de custo dos materiais utilizados para construção da Marygir

Apêndice C- Descrição da construção da Marygir



Figura 01 – Marygir com as peças contorndas em forma de cônicas

Conforme observado na figura 01 a Marygir é composta de um mancal de acrílico o qual fica apoiado numa base de madeira, na qual encontram-se instalados um motor de DVD de 5,9 volts ligado a um eliminador de 5,0 volts e 5 mA de corrente elétrica, juntamente com um resistor variável de 1 k Ω . No eixo do motor é fixada uma bucha (pedaço de 1cm de bomba de caneta esferográfica bic) para acoplamento dos eixos de rotação. No mancal deve-se fazer um orifício cujo diâmetro corresponde ao diâmetro do raio de bicicleta que é utilizado como eixo de rotação com o mínimo possível de folga. Quanto às peças que serão giradas, os moldes serão feitos com viseira de capacete de motocicleta, onde nas bordas foram desenhadas as cônicas utilizando-se esparadrapo ou fita crepe. A fita adesiva é utilizada para fixação do mancal de acrílico na base de madeira, onde basta utilizá-la em apenas uma das bases.