MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPP

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE MATERIAIS CONCRETOS: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

ALCIDES PERES JUNIOR

Dourados-MS

2014

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPP

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE MATERIAIS CONCRETOS: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

ALCIDES PERES JUNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação Local do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves

Dourados-MS

2014

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UEMS

P51e Peres Junior, Alcides

O ensino das cônicas através de materiais concretos: uma proposta pedagógica/Alcides Peres Junior. Dourados, MS: UEMS, 2014.

38p. ; 30cm.

Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, 2014.

Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves.

1.Cônicas 2. Material concreto 3. Ensino da matemática I. Título.

CDD 20.ed. 516.15

ATA DE APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 12 do mês de março do ano de dois mil e quatorze, realizou-se a apresentação do trabalho de conclusão de curso sob o título: **"O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE MATERIAIS CONCRETOS"** de autoria do acadêmico **ALCIDES PERES JUNIOR**, aluno do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional oferecido pelo polo da UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

A comissão julgadora esteve constituída pelos professores: Aguinaldo Lenine Alves, orientador/presidente, Alberny Alves Ferreira, primeiro examinador e Adriana de Fátima Vilela Biscaro, segundo examinador. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a comissão julgadora considerou o candidato

(X) aprovado.

( ) aprovado com correções.

( ) reprovado.

E, para constar, foi lavrada a presente Ata, que vai ser assinada pelos membros da Comissão Julgadora.

Dourados, 12 de março de 2014.

____

Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves/ Orientador/Presidente

____

Prof. Dr. Alberny Alves Ferreira/ Primeiro Examinador

____

Profa. Msc. Adriana de Fátima Vilela Biscaro/ Segundo Examinador

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois, que me deu força, me encorajou e me protegeu durante essa jornada, à minha filha Maria Fernanda, à minha esposa Thays, pelo companheirismo, paciência, dedicação, e compreensão da minha ausência nesse período e a minha família e amigos pelo incentivo nos momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

- À minha família e amigos pelo incentivo e pela força que me deram durante esse curso.

- Ao Prof. Dr. Aguinaldo Lenine, pela orientação e incentivo recebidos durante este período.

- Aos Professores da banca: Dr. Alberny Alves Ferreira (UEMS) e Msc. Adriana de Fátima Vilela Biscaro (UFGD), pela colaboração na avaliação deste trabalho.

- Ao Prof. Dr. Vando Narciso e sua equipe de professores e técnicos administrativos, que não mediram esforços para trazer este mestrado para nossa cidade.

- A todos os professores do programa PROFMAT pela dedicação à nossa turma e pelos ensinamentos que nos transmitiram ao longo desse curso.

- Aos colegas de curso pela amizade e pelo companheirismo durante esse período.

- A UEMS e SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) por tornarem possível este sonho.

- A CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

RESUMO

O presente trabalho propõe a utilização de materiais concretos para o ensino das cônicas, onde estes são frisados de forma a serem um expediente facilitador do ensino desse conteúdo. A utilização de materiais concretos nas aulas de matemática vem ao encontro do desejo dos educadores de tornarem as aulas mais dinâmicas e participativas, principalmente no que tange ao envolvimento dos alunos. Esta interligação de abordagens, partindo do concreto e chegando a provas matemáticas, desperta o prazer e evidencia o verdadeiro significado de "fazer matemática", pois torna real, concreto e mais simples para alunos e professores o caminho explorar-conjecturar-demonstrar, base da construção do conhecimento científico. O ensino-aprendizado de matemática traz no seu cerne a percepção de que será trabalhoso e desgastante, tanto por parte dos alunos quanto dos professores. A adoção de materiais concretos nas aulas oferece subsídios para uma melhor aprendizagem, pois busca através dos exercícios, o desenvolvimento da percepção e clareza no raciocínio, além de possibilitar uma maior participação dos alunos, afastando, a priori, a possibilidade de alguma aversão à disciplina.

PALAVRAS-CHAVES: Ensino-aprendizagem. Matemática. Materiais concretos.

ABSTRACT

This paper aims to highlight the use of concrete materials for teaching of conic where they are stressed so as to be an expedient facilitator of teaching that content. The use of concrete materials in mathematics lessons meets the educators' desire to become more dynamic and participatory classes, especially in regard to the involvement of students. This interconnection approaches, leaving the concrete and reaching mathematical proofs , arouses the pleasure and shows the true meaning of " doing math " because it makes it real, concrete and simpler for students and teachers the way to explore - to conjecture - to show, the basis of construction of scientific knowledge. The teaching and learning of mathematics at its core brings the perception that it will be laborious and exhausting, both by students and teachers. The adoption of concrete materials in the classroom provides grants to better learning because it searches through the exercises, the development of perception and clarity in reasoning, beyond making possible a greater participation of students, removing a priori the possibility of some aversion to the mathematics.

KEYWORDS: Teaching-learning. Mathematics. Concrete materials.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi vista, pelos alunos e pelo público em geral, como uma disciplina abstrata, no entanto, todos a necessitam. Inúmeras atividades do dia-a-dia não seriam possíveis sem o auxilio de cálculos ou analises matemáticos. À medida que se aprofunda nos estudos matemáticos, a tendência é que seus conteúdos se tornem cada vez mais dificultosos. Os alunos do nível fundamental apresentam menos dúvidas sobre a utilidade imediata do que estão estudando (DRUCK, 2005). Nesse nível, a Matemática é mais do que simples habilidade, é uma medida de cidadania. Ninguém pode se considerar verdadeiramente inserido na sociedade se não tiver alguma familiaridade com as quatro operações aritméticas, as frações, as unidades de medida e os conhecimentos básicos de Geometria. Ao se aproximar do Ensino Médio, fica mais difícil identificar a utilidade imediata da Matemática (DRUCK, 2005).

É óbvio que se almeja nos alunos, patamares teóricos cada vez maiores, porém, sem uma base sólida isso não será possível. Sendo assim, encontrar alternativas que facilitem e motivem suas compreensões são tarefas desafiadoras para todos os professores de matemática do ensino básico.

Estas tarefas não devem ser feitas de forma reduzida por um grupo de professores, mas sim por todos que, de alguma forma, estejam ligados ao ensino da matemática, seja atuando em sala de aula, colaborando na formação de currículos e diretrizes ou, ainda, produzindo livros e material didático (DRUCK, 2005).

Diante desta concepção, o trabalho apresenta uma proposta para ensinar o conteúdo das cônicas a partir de um material concreto.

O empenho no estudo das cônicas remonta à épocas antigas e estão entre os mais sistemáticos e exaustivamente já analisados.

Atualmente, as cônicas exercem um papel de primordial importância no desenvolvimento da tecnologia moderna, como na física, na astronomia, na ótica na engenharia, na arquitetura, etc. (GUIMARÃES & BELLEMAIN, 2002). Apesar de toda a sua importância, seu estudo geralmente tem sido completamente abandonado ou relegado a um segundo plano, isto por falta de carga horária dos professores ou simplesmente pela falta de interesse. Mesmo quando ministrado, este conteúdo se reduz à simples manipulação e/ou memorização de fórmulas, com isto, oculta-se sua importância.

2. A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A utilização de materiais manipulativos, ou concretos, como recurso didático para o ensino de Matemática na escola básica tem como apoio a pedagogia construtivista baseados nos estudos da epistemologia genética de Piaget, cujas principais características são: a) A construção do pensamento lógico/Matemático com o auxilio de materiais concretos. b) A concepção da matemática como uma construção humana. c) Prioriza o processo não o produto. d) Aprender a aprender. e) desenvolver o pensamento lógico formal. f) Toma a Psicologia como núcleo central de orientação pedagógica, isto é, os alunos constroem seus conhecimentos matemáticos de acordo com os níveis de desenvolvimento da sua Inteligência e o erro é visto como uma manifestação positiva de grande valor pedagógico (D'AMBRÓSIO, 1990).

A base da Teoria de Piaget (1971) é a ideia de equilíbrio. Para ele, todo organismo procura manter um estado de equilíbrio ou de adaptação do seu meio agindo no sentido de superar a perturbação estabelecida pela relação com o meio, este processo de equilibração e desequilibração é dinâmico e busca constantemente a passagem de um estado superior de equilíbrio, denominado por Piaget de equilibração majorante (D'AMBRÓSIO, 1990).

Dois mecanismos são acionados para alcançar um novo estágio cognitivo: a assimilação, que permite o indivíduo atribuir significados a partir de suas experiências anteriores aos elementos do ambiente com o qual interage, neste caso, as estruturas dos indivíduos não são alteradas, e a acomodação, que ocorre quando os indivíduos são atraídos por uma transformação que atende as demandas do meio ambiente (CARVALHO, 1990).

Baseando-se nestes estudos, pode-se afirmar que numa aula onde os alunos dispõem de materiais concretos para manipular, as chances de aprendizagem são maiores, tendo em vista as reais possibilidades de desenvolverem ações que lhes propiciem a construção de um saber consistente e significativo (CARVALHO, 1990).

De acordo com os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998, p. 57), um dos princípios norteadores no Ensino Fundamental é a utilização dos recursos didáticos numa perspectiva problematizadora. "Os [...] Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão".

De acordo com os objetivos a serem alcançados, o uso de materiais manipulativos requer um planejamento minucioso, já que um mesmo material pode servir para a realização de diferentes atividades com diferentes níveis de complexidade. Para isto, a escolha dos materiais a serem utilizados numa determinada aula depende de vários fatores, como por exemplo:

- ✓ A ordem didática: adequação ao conteúdo, aos objetivos e à metodologia.
- ✓ A ordem prática: o material está disponível? É possível adquirí-lo? Está em condições de uso?
- ✓ A ordem metodológica: é coerente com o nível de aprendizagem dos alunos?
- ✓ Seu manuseio oferece algum tipo de risco para os alunos?
- ✓ Tens domínio dos procedimentos? (CARVALHO, 1990).

Outro aspecto importante a ser observado nesta proposta está relacionado ao tempo, já que, geralmente, a utilização desse tipo de recurso exige maior disponibilidade de tempo, tanto para o preparo das aulas, quanto para o ritmo de aprendizagem de cada indivíduo.

Segundo Carvalho, 1990, na manipulação de materiais didáticos a ênfase não está sobre os objetos, mas sim nas operações que com eles se realizam.

Se, por um lado, o manuseio de materiais concretos permite aos alunos experiências físicas à medida que este tem contado direto com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo, ou comparando com outros de mesma natureza, por outro lado permiti-lhe também experiências lógicas por meio das diferentes formas de representação que possibilitam abstrações empíricas e abstrações reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas (CARVALHO, 1990).

3. ORIGENS DAS CÔNICAS

A história das cônicas teve inicio na Grécia antiga, onde Menaechmus (350 A.C), um dos pioneiros no estudo das cônicas, estudou-as sob o ponto de vista da intersecção de cone e plano utilizando a excentricidade. Euclides (300 A.C.), escreveu um livro sobre as seções cônicas, porém, com o tempo o mesmo se perdeu. Mesmo assim, este fato possibilitou a Apolônio (225 A.C), criador dos nomes elipse, parábola e hipérbole, escrever sete livros sobre as cônicas, sendo os quarto primeiros baseados no de Euclides (BUNT, JONES, BEDIENT, 1976). Em 1604, Kepler um astrônomo e matemático alemão, descobriu através de observações astronômicas que os planetas se movimentavam em trajetórias elípticas, fato comprovado matematicamente mais tarde, em 1670 por Isaac Newton (BOYER, 1985).

4. O ENSINO DAS CÔNICAS NO BRASIL

Para Bourbaki (BOURBAKI, p. 161) a última contribuição essencial da matemática grega foi a teoria das cônicas, já que mesmo não tendo ideia dos princípios fundamentais da Geometria Analítica, faziam uso de “coordenadas” para o estudo de figuras particulares, em relação a dois eixos no plano.

Para Heath (HEATH, p.XVII-XXXX) a ideia de considerar as cônicas como secções planas de um cone de base circular é de Menaechmus (~350, a.C.) aluno de Eudoxio, que utilizou a solução do problema clássico grego da duplicação do cubo. O livro II da Coleção Matemática de Papus (HUTCHINS, p.596) mostra a importante contribuição de Apolônio (262-190, a. C.) sobre as cônicas. Neste estudo de Apolônio que é feito em três livros, o mesmo utiliza proporções, principalmente da quarta proporcional. Essa abordagem continua até o início do Renascimento, onde as cônicas tomam outra dimensão e é usada pelos arquitetos e artistas da época (ALPOIN, 1748).

Leonardo da Vinci (1452- 1519), uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento foi outro que utilizou largamente as curvas cônicas tanto em seus desenhos como nas construções de suas “maquinas”. Com isto, acabou inspirando José Fernandes Pinto Alpoin, militar português e um dos principais nomes da arquitetura do século XVIII no Brasil colonial, a escrever seu livro denominado “*Exame de Bombeiros”*, adotado nas Aulas de Artilharia e Fortificação em 1699. Neste livro as cônicas, principalmente a parábola, aparecem como trajetória de projéteis (ALPOIN, 1748).

Em 1792 com a criação da Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, uma escola de ensino superior, localizada no Rio de Janeiro e considerada uma precursora do ensino superior militar e de engenharia o livro de Bézout: *Cours de Mathématiques a l´usage des Gardes Du Pavillon et de La Marine*, que traz uma seção totalmente dedicada às cônicas é adotado como um dos principais livros. Posteriormente, esta mesma obra foi adotada pela Escola de ensino secundário de Guardas da Marinha, criada em 1810, pelo então, príncipe regente D. João VI (BEZOUT, 1766).

No Colégio Pedro II, criado em 1838 e considerado um marco na educação no Brasil, o livro de Sylvestre François Lacroix, professor de Matemática da École Politechnique, da École Central des Quatre Nations e do College de France, muito embora não contivesse o item “*cônicas*” foi imposto oficialmente. Porém, com o passar dos anos, produções de livros didáticos publicados no Brasil e que contemplava o estudo das cônicas, como os de Ottoni, Serrasqueiro, FIC, Gabaglia, etc., passaram a ser adotados (BEZOUT, 1766).

No início do século XX, Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, um professor de matemática e diretor do Colégio Pedro II apoiado no *Erlanger Programm* de Felix Klein, conseguiu com que o governo brasileiro aprovasse uma reforma importante no ensino escolar. Nesta reforma, estudos de aritmética, álgebra e geometria que antes eram fragmentados, passaram a ser considerados como uma única disciplina, a disciplina de Matemática. Apesar disto, as cônicas ainda foram pouco apresentadas (VALENTE, 2004).

Na década de sessenta do século passado introduziu-se no ensino secundário a disciplina de Desenho Geométrico e Projetivo, com isto, o estudo das cônicas passou a fazer parte do currículo e automaticamente contemplado nos livros didáticos, mesmo assim com pouco destaque. Nos dias de hoje, com a introdução em massa dos aplicativos de "geometria dinâmica", teoricamente o tema cônicas, deveria ocupar um lugar de destaque no ensino da matemática, entretanto isto não acontece mesmo com todo o esforço do governo federal (DANTE, 2004).

5. POR QUE ELIPSE, PARABOLA E HIPÉRBOLE

A construção mecânica das curvas *elipse, parábola* e *hipérbole,* foi atribuída por volta de 350 a.C., a Menaecmus, discípulo e sucessor do matemático Eudoxo. Entretanto, a extração destas curvas de uma superfície cônica mediante seções planas, foi atribuída a Apolônio (III séc. a.C.), daí a denominação comum de *seções cônicas.*

Os nomes *elipse, parábola* e *hipérbole,* foram utilizados por Apolônio, que os tirou de uma terminologia pitagórica (VI séc. a.C.) específica para áreas. Assim, quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de *elipse, parábola* ou *hipérbole***.** Se a referida base do retângulo fosse menor do que o segmento obtinha-se a elipse, pois *elipse* quer dizer *falta*. Caso a base do retângulo fosse igual ao segmento, obtinha-se a parábola, já que *parábola* corresponde a *igual* e analogamente, caso a base do retângulo fosse maior que o segmento, obtinha-se a hipérbole, pois *hipérbole* exprime *excesso* (RPM nº 07).

A Figura 1 apresenta a extração das curvas cônicas (*elipse, parábola e hipérbole*) através de seções planas executadas em um cone reto.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a cônica será:

- uma parábola, se π for paralelo a uma geratriz.

- uma elipse, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície.

- uma hipérbole, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície.

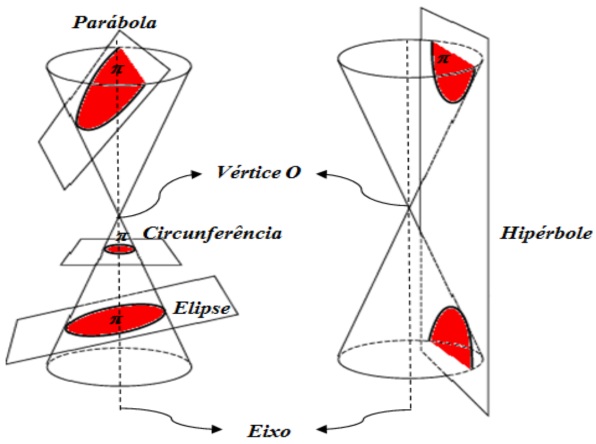


Figura 1: extração das cônicas através de seções planas em um cone reto.

A Figura 1 apresenta a metodologia utilizada por Apolônio na definição dos termos elipse, parábola e hipérbole. Para isso considere uma cônica de vértice $\boldsymbol{A}$, eixo principal $\boldsymbol{AB}$ e parâmetro $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{p}$ é o comprimento da corda perpendicular ao eixo principal por um foco da cônica).

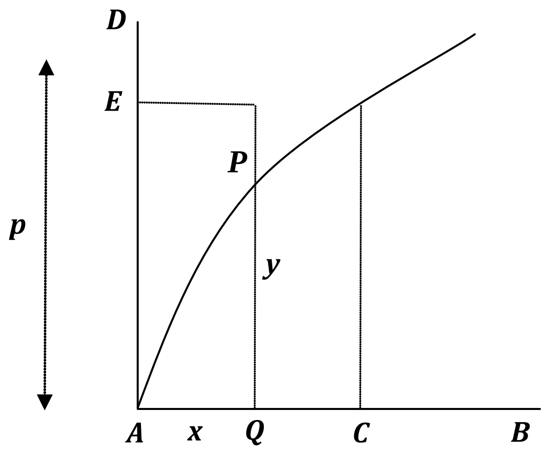


Figura 2: Curva que determina elipse, hipérbole ou parábola.

Seja $\boldsymbol{P}$ um ponto qualquer da curva e $\boldsymbol{Q}$ sua projeção ortogonal sobre $\boldsymbol{AB}$. Pelo vértice $\boldsymbol{A}$ trace uma reta perpendicular a $\boldsymbol{AB}$ sobre a qual tome $\boldsymbol{AD = p}$. A seguir, construa um retângulo de base $\boldsymbol{AQ}$, situada sobre a reta $\boldsymbol{AB}$, e lado $\boldsymbol{AE}$ sobre $\boldsymbol{AD}$ de modo que a sua área seja $\overline{PQ}^2$. Conforme $\boldsymbol{AE < AD}$, $\boldsymbol{AE = AD}$ ou $\boldsymbol{AE > AD}$, Apolônio denominou a cônica de elipse, parábola ou hipérbole. Em outros termos, se considerar a curva referida a um sistema cartesiano de eixos coordenados com eixo dos $\boldsymbol{x}$ (abscissas) sobre $\boldsymbol{AB}$ e eixo dos $\boldsymbol{y}$ (ordenadas) sobre $\boldsymbol{AD}$ e se designar as coordenadas do ponto $\boldsymbol{P}$ por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, a curva será um *elipse* se $\boldsymbol{y^2 < px}$, uma p*arábola* se $\boldsymbol{y^2 = px}$ e uma *hipérbole* se $\boldsymbol{y^2 > px}$.

Realmente, pela Geometria Analítica, sabe-se que no caso de uma elipse e de uma hipérbole se tem:

$$y^2 = px \mp \frac{px^2}{d}$$

onde, $\boldsymbol{d}$ é o comprimento do eixo principal da curva que passa pelo vértice $\boldsymbol{A}$.

O aparecimento das cônicas no dia-a-dia das pessoas é vasto. Na engenharia e na arquitetura as cônicas podem ser utilizadas na construção de pontes, cúpulas, torres, pórticos, arcos, projetos de antenas parabólicas, formato dos faróis dos carros, etc. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer utilizou as cônicas para projetar diversas de suas obras, como por exemplo, a catedral de Brasília e o conjunto da Pampulha, em Belo Horizonte (VALLADARES, 1998).

Em se tratando do ensino de cônicas para alunos do ensino fundamental, a mesma é bastante explorada no tema funções, pois esta representa o gráfico de uma função polinomial de segundo grau. Para alunos do ensino médio, por exemplo, este assunto pode ser explorado no ensino de funções ou ao comportamento dos gases, já que a lei que rege a variação do seu volume quando varia sua pressão, isotermicamente, descreve o gráfico de um dos ramos da hipérbole (VALLADARES, 1998).

Nos tópicos seguintes, cada cônica será estudada de maneira específica onde serão definidas além de seus principais elementos, suas equações algébricas.

5.1 Elipse

Define-se como elipse, o conjunto de pontos $\boldsymbol{P}$ do plano, cuja *soma* das distâncias a dois pontos fixos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ desse plano é constante. Para isto, considere no plano dois pontos distintos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ onde $\boldsymbol{d(F_1, F_2) = 2c;\ c \in IR}$ e, seja um escalar $\boldsymbol{a}$ tal que $\boldsymbol{2a > 2c}$. Dá-se o nome de Elipse, ao conjunto que satisfaz a seguinte condição: $\boldsymbol{d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a}$.

A Figura 3 exibe o conjunto de pontos que satisfaz a equação $\boldsymbol{d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a}$.

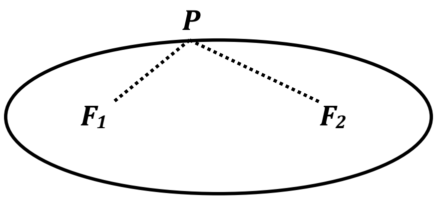


Figura 3: Conjunto de pontos que satisfaz a construção de uma elipse.

Conforme mostra a Figura 4, na prática, para se construir uma elipse no papel, sugere-se: nos pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ fixe dois percevejos e neles amarre um fio não esticado. Tome um lápis e distenda (estique) com sua ponta o fio, marcando um ponto $\boldsymbol{P}$. Então a soma das distâncias $\boldsymbol{d(P,F_1) + d(P,F_2)}$ é o comprimento do fio. Ao deslizar o lápis sobre o papel, mantendo o fio sempre esticado, estará sendo descrita a elipse, e os pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ serão chamados de focos da elipse. A constante $\boldsymbol{2a}$ será o comprimento do fio.

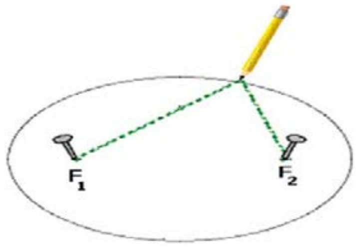


Figura 4: Construção da elipse com lápis, barbante e tachinha.

Observação 1: Ao variar as posições de F_1 e F_2, a forma da elipse irá variar, assim, quanto mais próximos os focos mais a elipse se assemelha a uma circunferência. Pôr outro lado, quanto mais afastados os focos, mais achatada será a elipse.

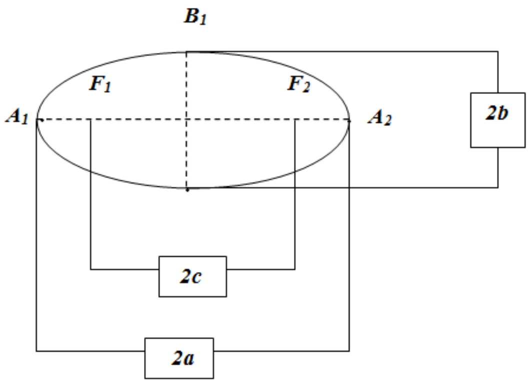
5.1.1 Elementos da Elipse

Utilizam-se as seguintes nomenclaturas para se definir os elementos de uma elipse:

- ***Focos:*** Os pontos F_1 e F_2;
- ***Distância focal:*** A distância $2c$ entre F_1 e F_2;
- ***Centro:*** O ponto médio C do segmento F_1F_2;
- ***Eixo maior:*** O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$, que contém F_1 e F_2;
- ***Eixo menor:*** O segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ onde $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C;
- ***Vértices:*** Os pontos A_1, A_2, B_1, B_2;
- ***Excentricidade:*** O número $e = c/a$,
- ***A excentricidade é responsável pela "forma" da elipse: elipse com excentricidade perto de zero são aproximadamente circulares, e elipses com excentricidade próxima de 1 são achatadas.***

Observação 2: Sendo $c < a$ tem-se $0 < e < 1$. Porém, caso $F_1 = F_2$, tem-se a distância focal $c = 0$ e neste caso, a elipse reduz-se a uma circunferência de raio $a = b$. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$.

Figura 5: Principais elementos de uma elipse qualquer.



A Figura 6 mostra que em toda a elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ veja:

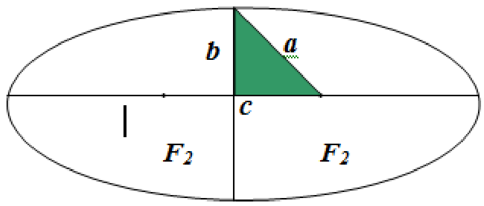


Figura 6: Verificação da relação $a^2 = b^2 + c^2$ para uma Elipse qualquer.

5.1.2 Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema Cartesiano.

Primeiro Caso: Eixo maior sobre o eixo coordenado ***x***.

Conforme exibe a Figura 7, considere $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse cujos focos são definidos por $F_1\ (-c, 0)$ e $F_2\ (c, 0)$.

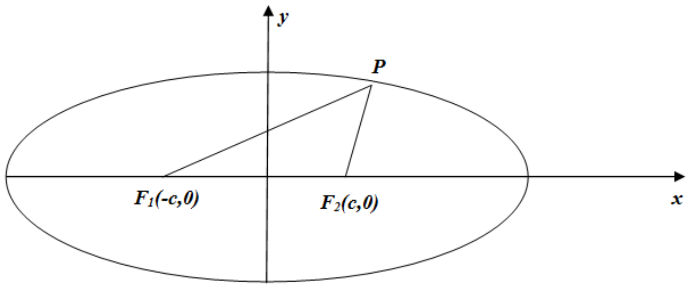


Figura 7: Elipse com centro na origem do plano cartesiano e eixo maior sobre ***x***.

Como por definição a elipse é formada pelo conjunto de pontos que satisfaz a equação $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, ao substituir os pontos em destaque pelas suas respectivas coordenadas, tem-se:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

Elevando os dois membros ao quadrado, tem-se:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 4a^2 - 4xc \Rightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = a^2 - xc \Rightarrow$$

$$\left(a\,.\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 \Rightarrow$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2\,xc + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - 2\,a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2\,xc + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$ tem-se: $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Então, dividindo ambos os membros por a^2b^2 tem-se:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}\ .$$

Portanto, a equação da elipse com centro na origem e eixo maior no eixo x será:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

onde a é o eixo maior e b é o eixo menor.

Segundo caso: Eixo maior sobre o eixo coordenado y.

Conforme exibe a Figura 8, ao se proceder de maneira análoga ao primeiro caso, obtém-se a seguinte equação reduzida para a elipse com centro na origem do plano cartesiano e eixo maior sobre o eixo y:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

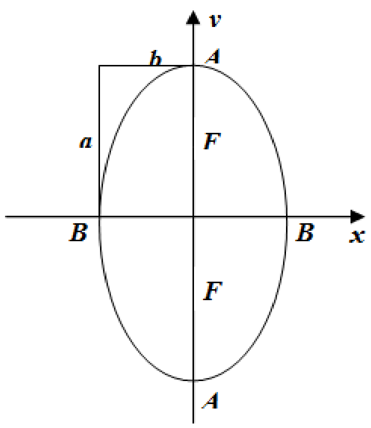


Figura 8: Elipse com centro na origem do plano cartesiano e eixo maior sobre ***y***.

Observação 3: Tendo em vista que $a^2 = b^2 + c^2$, segue que: $a^2 > b^2$ e daí $a > b$, com isso tem-se que o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2, onde ***a*** é a medida do semi-eixo maior. Ainda mais, se na equação a^2 é denominador de x^2, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos ***x***.

Exemplos:

a) A equação reduzida da elipse representada na Figura 9 é dada por: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

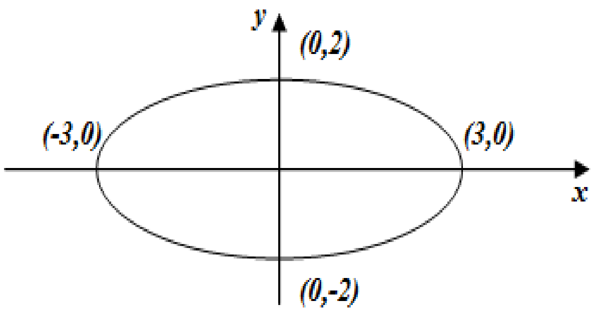


Figura 9: Representação geométrica da elipse cuja equação reduzida é dada por: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) A equação reduzida da elipse representada na Figura 10 é dada por: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

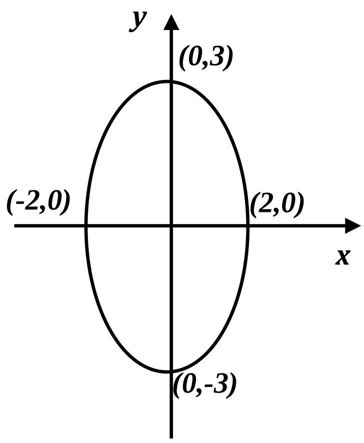


Figura 10: Representação geométrica da elipse cuja equação reduzida é dada por:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

5.1.3 Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema Cartesiano.

Considere uma elipse de centro ***C(h, k)*** e seja ***P(x, y)*** um ponto qualquer da mesma.

Primeiro caso: Eixo maior paralelo ao eixo coordenado ***x*.**

Conforme exibe a Figura 11, considere ***P(x, y)*** um ponto qualquer da elipse cujo centro está situado num ponto ***C(h, k)*** do plano. Neste caso, seus focos serão definidos pelos pontos: $F_1\ (h - c, k)$ e $F_2\ (h + c, k)$.

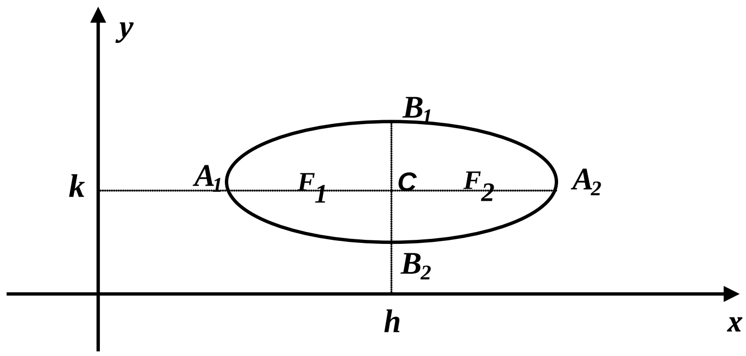


Figura 11: Elipse com centro num ponto qualquer ***C(h, k)*** e eixo maior paralelo ao eixo ***x***.

Observação 4: A equação desta elipse será dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, ou seja, cálculos análogos aos realizados para a elipse com centro na origem.

Segundo caso: Eixo maior paralelo ao eixo coordenado ***y*.**

Conforme exibe a Figura 12, considere ***P(x, y)*** um ponto qualquer da elipse cujo centro está situado num ponto ***C(h, k)*** do plano. Neste caso, seus focos serão definidos pelos pontos: $F_1\ (x, k - c)$ e $F_2\ (x, k + c)$.

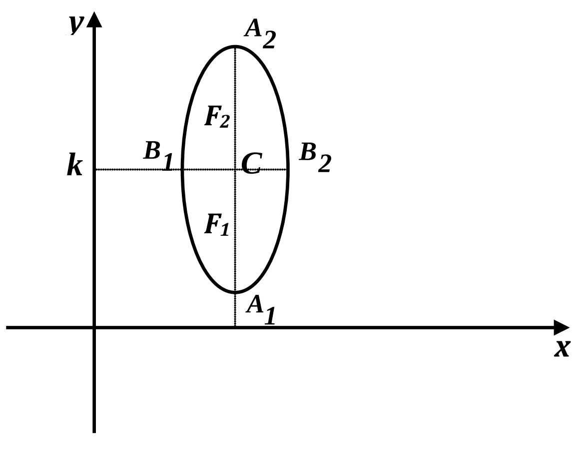


Figura 12: Elipse com centro num ponto qualquer ***C(h, k)*** e eixo maior paralelo ao eixo ***y***.

Observação 5: A equação desta elipse será dada por: $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$, ou seja, cálculos análogos aos realizados para a elipse com centro na origem.

5.2 Hipérbole

A Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja *diferença* das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos F_1 e F_2 desse plano é constante. Para isto, considere no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 onde $d(F_1, F_2) = 2c$; $c \in IR$ e, seja um escalar a tal que $2a<2c$. Define-se como Hipérbole, o conjunto que satisfaz a seguinte condição:

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a.$$

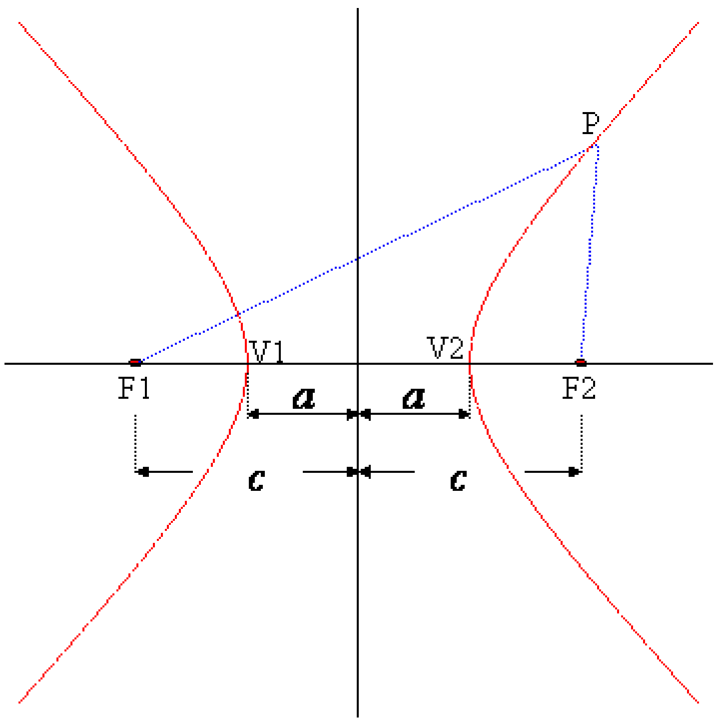


Figura 13: Conjunto de pontos que satisfaz a construção de uma hipérbole.

A Figura 13 exibe o conjunto de pontos que satisfaz a equação $d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a$.

Como se observa na Figura 13, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Sendo assim, para que um ponto ***P*** qualquer esteja na hipérbole é necessário que: $d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$, ou seja, caso ***P*** esteja no ramo da direita à diferença será $+ 2a$ e, em caso contrário, será $– 2a$.

Conforme mostra a Figura 14, na prática, para se construir uma hipérbole no papel, sugere-se: pegue dois alfinetes, uma régua com furo em uma das extremidades, um lápis e um barbante. Com um alfinete no furo da régua, fixe o mesmo num dos focos da hipérbole que se deseja construir, este foco pode ser definido como F_1, enquanto, no outro foco, definido como F_2, fixe o segundo alfinete. Prenda cada uma das extremidades do barbante em cada foco. Encostando a ponta do lápis na régua de modo que o barbante fique esticado, define-se um ponto P pertencente à hipérbole. Com isto, pode-se observar que a diferença entre as distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é constante (igual ao comprimento do eixo real da hipérbole). Girando a régua em torno de F_1, deslize a ponta do lápis pelo barbante junto à régua mantendo o mesmo sempre esticado, com isto obtém-se um dos ramos da hipérbole. Usando o mesmo procedimento, porém fixando a extremidade furada em F_2 e a extremidade livre do barbante em F_1, obtém-se o outro ramo da hipérbole.

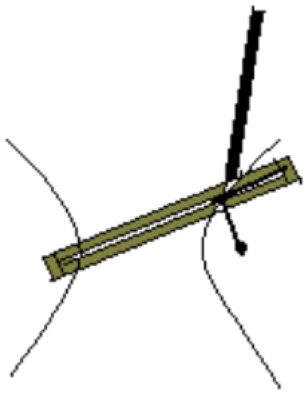


Figura 14: Construção da Hipérbole com lápis, barbante, régua e alfinete.

Observação 6: Ao variar as posições de A_1 e A_2, a forma da Hipérbole irá variar. Assim, quanto mais próximos estiverem seus vértices mais aberta será a Hipérbole. Por outro lado, quanto mais afastados os vértices, mais achatada será a Hipérbole.

Conforme Figura 15, considere: uma reta que passa por F_1 e F_2, os pontos de interseção desta reta com a hipérbole A_1 e A_2 e outra reta perpendicular a primeira e que passa pelo ponto médio C do segmento F_1F_2. Com isto, percebe-se que a hipérbole é uma curva simétrica em relação às duas retas (horizontal e vertical) e também em relação ao ponto C, já que, sendo P_1 um ponto da hipérbole, tem se: P_2 simétrico a P_1 em relação à reta horizontal, P_3 simétrico a P_1 em relação à reta vertical e P_4 simétrico a P_1 em relação ao ponto C.

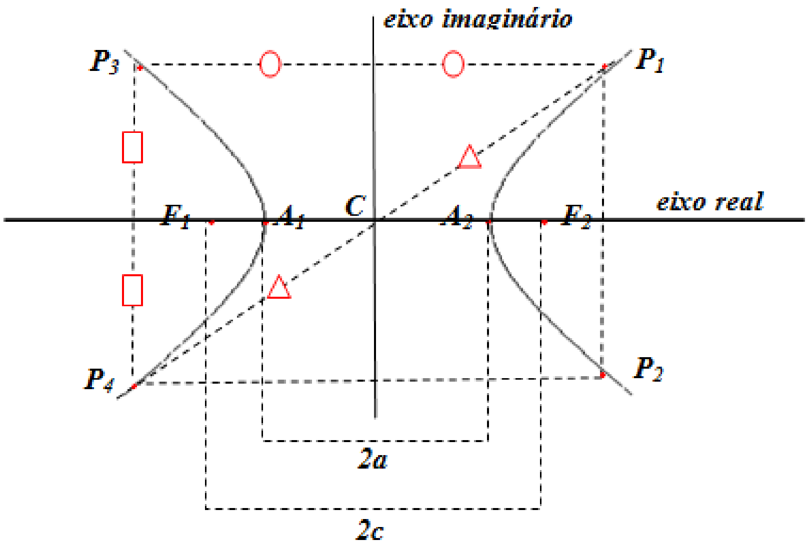


Figura 15: Simetria da hipérbole.

Observação 7: Outras duas relações importantes da hipérbole são:

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2) \text{ e } d(A_1, A_2) = 2a.$$

5.2.1 Elementos da hipérbole

Utiliza-se as seguintes nomenclaturas para se definir os elementos de uma hipérbole:

- ***Focos:*** Os pontos F_1 e F_2;
- ***Distância focal:*** A distância $2c$ entre F_1 e F_2;
- ***Centro:*** O ponto médio C do segmento F_1F ou A_1A_2;
- ***Vértices:*** Os pontos de interseção A_1 e A_2 da hipérbole com a reta que contém F_1 e F_2;
- ***Eixo real ou transverso:*** O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- ***Eixo imaginário ou conjugado:*** O segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ onde $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C;
- ***Excentricidade:*** O número $e = c/a$,

Observação 8: Sendo $c > a$ tem-se $e > 1$.

A excentricidade de uma hipérbole está relacionada com a abertura de seus ramos, já que mantendo seus focos fixos e variando os vértices A_1 e A_2, verifica-se que : quanto mais próximos estiverem os vértices, maior será a abertura dos ramos e quanto mais afastados, menor a abertura de seus ramos.

Observação 9: Conforme mostra a Figura 16, Para caracterizar o eixo imaginário $\boldsymbol{B_1B_2}$ de uma hipérbole realiza-se o seguinte procedimento: considere uma circunferência de raio $\boldsymbol{c}$ (onde $\boldsymbol{c}$ é a metade da distância focal) e cujo centro esteja localizado no ponto $\boldsymbol{C}$ anteriormente definido como centro da hipérbole. Tome um valor arbitrário para $\boldsymbol{a}$ (onde $\boldsymbol{a}$ será a metade da distância $\boldsymbol{d(A_1, A2)}$) e marque os pontos $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ que definem o vértice da hipérbole. Por estes pontos, trace cordas perpendiculares ao diâmetro $\boldsymbol{F_1F_2}$**.** Os quatro pontos de interseção destas cordas, com a circunferência, definem os vértices de um retângulo ***MNPQ***, cujas dimensões são dadas por $\boldsymbol{2a}$ e $\boldsymbol{2b}$. Definidas estas dimensões, percebe-se então a seguinte relação: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os lados do triângulo retângulo $\boldsymbol{A_2CB_2}$.

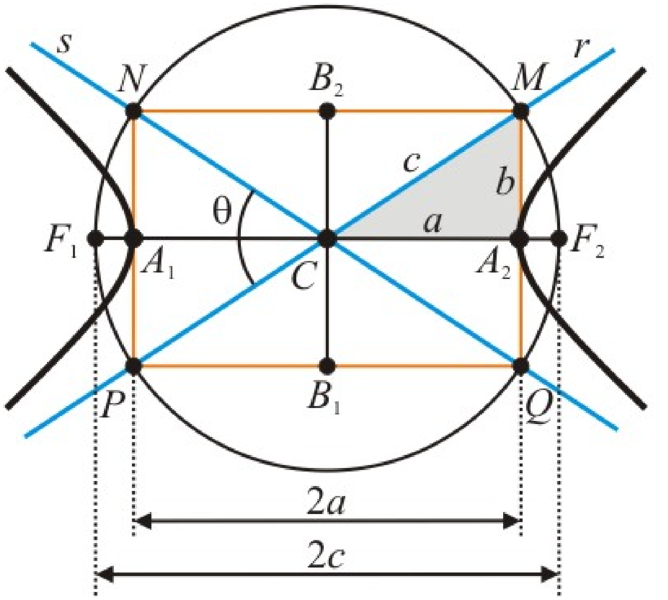


Figura 16: caracterização do eixo imaginário $\boldsymbol{B_1B_2}$ de uma hipérbole.

Após a caracterização do eixo imaginário da hipérbole, surge a condição de se definir outros dois elementos importantes, suas assíntotas. As assíntotas de uma hipérbole nada mais são do que duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ que contêm as diagonais do retângulo ***MNPQ*** e que constitui um excelente guia para traçar seu gráfico, já que os ramos da hipérbole tendem a se aproximam das assíntotas no infinito sem, no entanto, jamais atingi-las.

As equações das assíntotas de uma hipérbole que possui o centro na origem do plano cartesiano são dadas pelas seguintes equações***:*** $\boldsymbol{y = \pm (b/a)x}$, onde $\boldsymbol{\pm b/a}$ representam os coeficientes angulares das assíntotas.

Observação 10: Quando $a = b$ tem-se uma hipérbole equilátera, cujas assíntotas neste caso, são perpendiculares entre si.

5.2.2 Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema Cartesiano.

Primeiro caso: Eixo real sobre o eixo coordenado x

Conforme exibe a Figura 17, considere $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole cujos focos estão situados nos pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Como por definição a hipérbole é formada pelo conjunto de pontos que satisfaz a equação $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, ao substituir os pontos em destaque pelas suas respectivas coordenadas e procedendo analogamente aos cálculos utilizados na dedução da equação da elipse, chega-se à equação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ onde a é o semi-eixo real e b o semi-eixo imaginário.

Observação 11: Lembre-se que neste caso a relação utilizada é a seguinte: $c^2 = a^2 + b^2$.

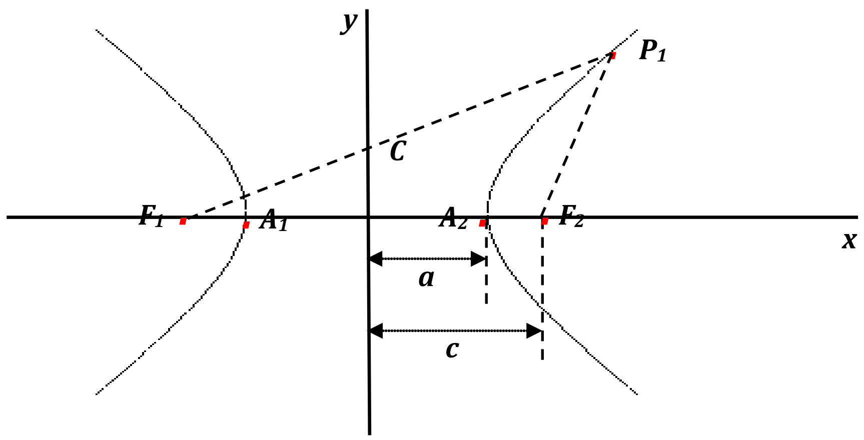


Figura 17: Hipérbole com centro na origem do plano cartesiano e eixo real sobre o eixo x.

Observação 12: A hipérbole representada na Figura 17 intercepta o eixo coordenado x nos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ e sua interseção com o eixo coordenado y é vazia, porém, é uma curva simétrica em relação a ambos os eixos. Resolvendo esta equação em relação x obtém: $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$. Portanto, a hipérbole não entra na região vertical entre as retas $x = -a$ e $x = a$ e suas assintotas são representadas pelas retas $y = \pm (b/a)x$.

Segundo caso: Eixo real sobre o eixo coordenado ***y***

Conforme Figura 18, ao se proceder de maneira análoga ao primeiro caso, obtém-se a equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo ***y***: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

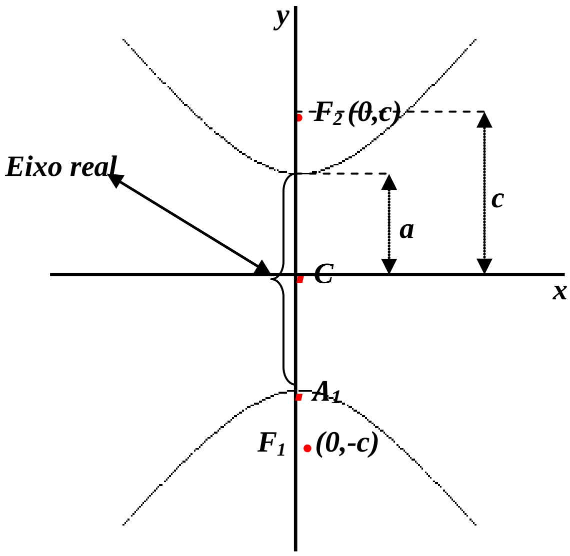


Figura 18: Hipérbole com centro na origem do plano cartesiano e eixo real sobre o eixo ***y***.

Observação 13: Neste caso, as assíntotas são as retas $y = \pm (a/b)x$.

5.2.3 Equação da Hipérbole de Centro Fora da Origem do Sistema Cartesiano.

Considere uma hipérbole de centro ***C(h, k)*** e seja ***P(x, y)*** um ponto qualquer da mesma.

Primeiro caso: Eixo real paralelo ao eixo coordenado ***x.***

Conforme exibe a Figura 19, considere ***P(x, y)*** um ponto qualquer da hipérbole cujo centro está situado num ponto ***C(h, k)*** do plano. Neste caso, seus focos serão definidos pelos pontos: $F_1\ (h - c, k)$ e $F_2\ (h + c, k)$.

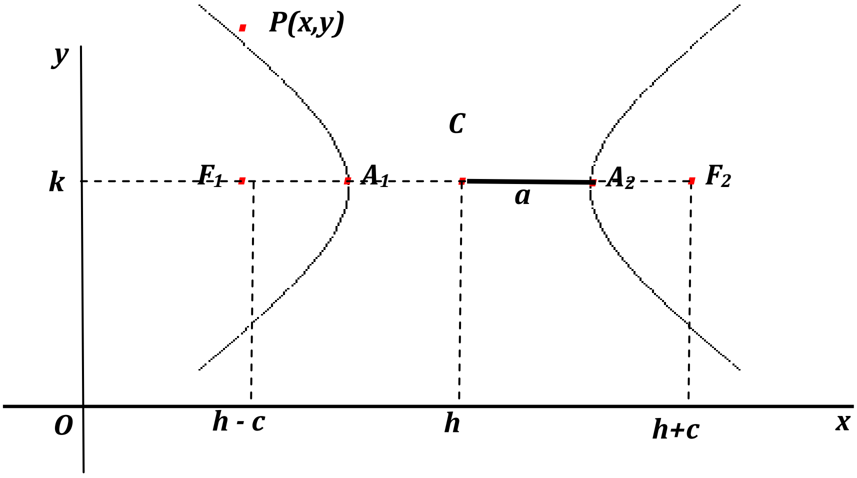


Figura 19: Hipérbole com centro num ponto qualquer ***C(h, k)*** e eixo real paralelo ao eixo ***x***.

De forma análoga ao estudo realizado para a elipse, a equação da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo coordenado ***x*** e centro em ***C(h, k)*** tem equação: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Segundo caso: Eixo real paralelo ao eixo coordenado ***y***

Conforme exibe a Figura 20, considere ***P(x, y)*** um ponto qualquer da hipérbole cujo centro está situado num ponto ***C(h, k)*** do plano. Neste caso, seus focos serão definidos pelos pontos: F_1 ***(x, k - c)*** e F_2 ***(x, k + c)***, enquanto que sua equação será dada por: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

Observação 13: A excentricidade (***e***) da hipérbole é definida como a razão entre os comprimentos dos segmentos F_1F_2 e A_1A_2. Neste caso, tem-se: $e = \frac{c}{a} > 1$.

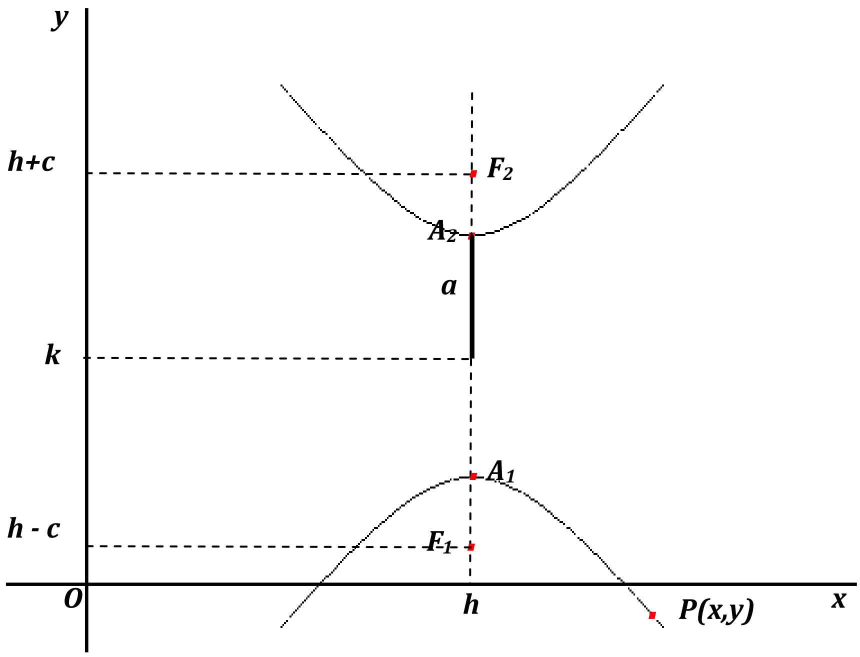


Figura 20: Hipérbole com centro num ponto qualquer ***C(h, k)*** e eixo real paralelo ao eixo ***y***.

5.3 Parábola

Considere um plano π determinado por uma reta d e um ponto $F \notin d$. Define-se como parábola o conjunto de todos os pontos de π que equidistam de F e de d. Segue desta definição que, dados F e $d \in \pi$, $\forall P \in \pi$ equidistante de F e d, pertence a uma parábola, ou seja: $d(P, F) = d(P, d) \Leftrightarrow P \in$ Parábola.

A Figura 21 exibe a forma geométrica do conjunto de pontos de π que satisfazem as condições acima citadas.

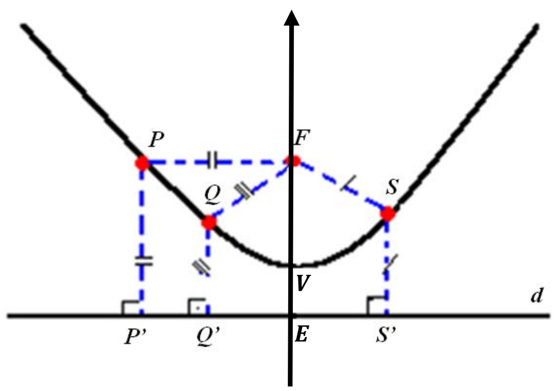


Figura 21: Conjunto de pontos que satisfaz a construção de uma parábola.

A Figura 22 apresenta um método manual (*Método de Kepler*) para se construir uma parábola usando um barbante preso a uma régua (*em forma de* ***T*** *invertido*) que desliza sobre uma mesa. Para isto, o barbante deve ter o mesmo comprimento da régua e deve ser fixado nos pontos ***B*** e ***F***. A parábola será obtida firmando-se o lápis no barbante e, mantendo-o esticado, deslizando a régua sobre a guia da mesa. A partir dessa construção, é possível obter a definição da parábola traçada como um lugar geométrico.

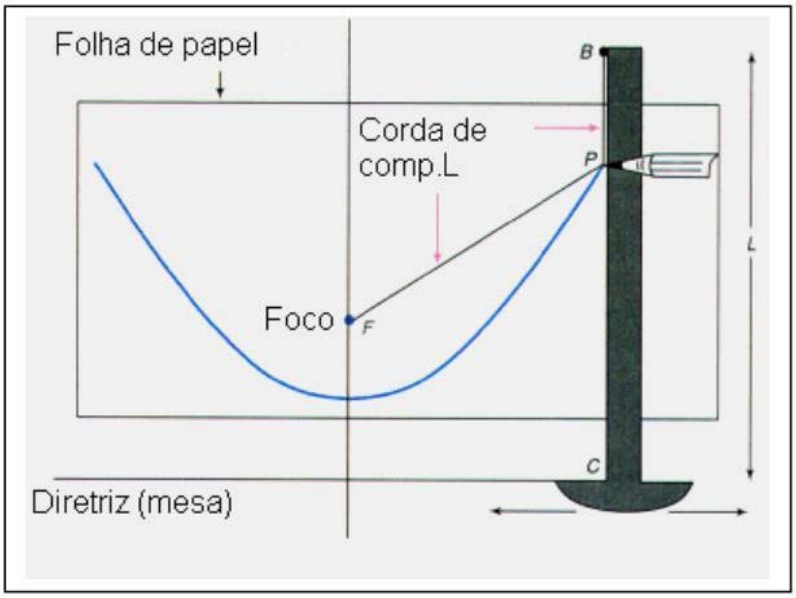


Figura 22: Construção manual da Parábola através da utilização de lápis, barbante e régua.

Como o barbante tem o mesmo comprimento da régua, a curva traçada (parábola), pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos do plano, tais que a distância a um ponto fixo (***F*** *no desenho*), dito foco, é igual à distância a uma reta fixa (*a mesa*, *na construção acima*), dita diretriz ***d***.

5.3.1 Elementos da Parábola.

Utiliza-se as seguintes nomenclaturas para se definir os elementos de uma parábola:

- ***Foco:*** Ponto fixo ***F*** não pertencente à reta ***d***;
- ***Diretriz:*** Reta ***d***;
- ***Eixo focal:*** Reta ***E*** que passa pelo foco ***F*** e perpendicular a diretriz ***d***;
- ***Vértice V:*** Ponto de intersecção da parábola com o eixo focal situado exatamente no ponto médio do segmento ***FA***, onde $A = E \cap d$;
- ***Raio focal:*** Segmento de reta de extremos no foco ***F*** e num ponto ***P*** qualquer da parábola;
- ***Parâmetro****:* é a distância ***p*** do foco ***F*** a diretriz ***d***;
- ***Excentricidade:*** Define-se como excentricidade ***e*** da parábola, a razão entre as distâncias de um ponto arbitrário ***P*** da curva ao foco ***F*** e de ***P*** à diretriz ***d***. Neste caso, sempre $e = 1$.

Observação 14: Deve-se considerar o fato de que ***F*** $\notin$ ***d***, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

5.3.2 Equação da Parábola com Vértice na Origem do Sistema Cartesiano e Concavidade Para Cima.

Seja ***P(x, y)*** um ponto qualquer da parábola apresentada na Figura 23, cujo foco está localizado no ponto $F(0, \frac{p}{2})$. Conforme definição tem-se: ***d(P, F) = d(P, P')*** onde ***P'*** é a projeção ortogonal de ***P*** sobre a diretriz ***d***.

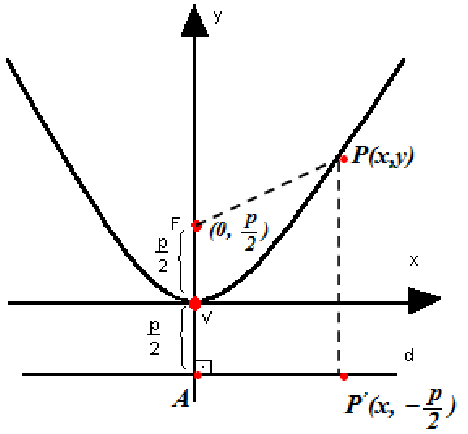


Figura 23: Parábola com centro na origem do sistema cartesiano e concavidade voltada para cima.

Como por definição a parábola é formada pelo conjunto de pontos que satisfaz a equação ***d(P, F) = d(P, P')***, ao substituir os pontos em destaque pelas suas respectivas coordenadas, tem-se:

$$d(P,F) = d(P,P') \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - yp + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + yp + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 2py$$

A equação resultante é definida como *equação reduzida da parábola* e constitui a forma padrão da equação da parábola cujo vértice está na origem do sistema cartesiano e o eixo focal coincide com o eixo coordenado ***y***.

Observação 15: Através da equação reduzida da parábola, pode-se afirmar que o termo ***2py*** será sempre positivo ou nulo, já que o mesmo é igual a $x^2 \geq 0$. Com isto, os termos ***y*** e ***p***, terão sempre sinais iguais e consequentemente, se $p > 0$ a parábola terá concavidade voltada para cima e caso $p < 0$ a parábola terá concavidade voltada para baixo.

5.3.3 Equação da Parábola com Vértice na Origem Sistema Cartesiano e Concavidade Para a Direita.

Seja ***P(x, y)*** um ponto qualquer da parábola apresentada na Figura 24, cujo o foco ***F*** está localizado no ponto $F(\frac{p}{2}, 0)$. Sua equação reduzida é obtida de forma análoga ao caso anterior, ou seja: $y^2 = 2px$.

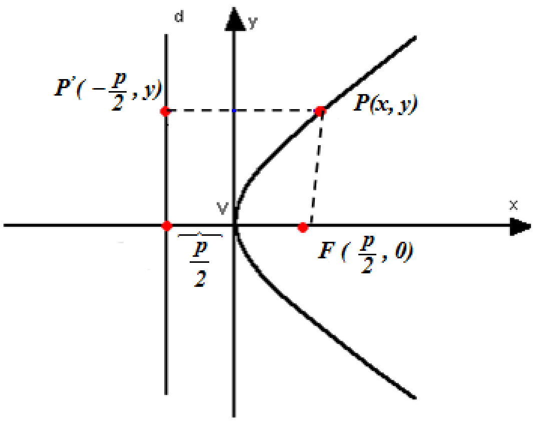


Figura 24: Parábola com centro na origem do sistema cartesiano e concavidade voltada para a direita.

Considerando a Figura 24, vê-se claramente que o foco ***F*** é dado por $F(\frac{p}{2}, 0)$, a diretriz ***d***: é a reta $x = -\frac{p}{2}$ e o eixo focal ***E*** é a reta $y = 0$.

Observação 16: De forma análoga, tem-se que o termo ***2px*** será sempre positivo ou nulo, já que o mesmo é igual a $y^2 \geq 0$. Com isto, os termos ***x*** e ***p***, terão sempre os mesmos sinais e, se $p > 0$ a parábola terá concavidade voltada para direita, caso $p < 0$, a mesma terá concavidade voltada para esquerda.

5.3.4 Equação da Parábola de Vértice Fora da Origem do Sistema Cartesiano.

5.3.4.1 Eixo focal paralelo ao eixo coordenado O*y*.

Seja uma parábola de vértice ***V(h, k)*** e eixo focal paralelo ao eixo coordenado ***y***, sendo ***h*** e ***k*** coordenadas de ***V*** em relação ao sistema ***x0y***, conforme mostra a Figura 25.

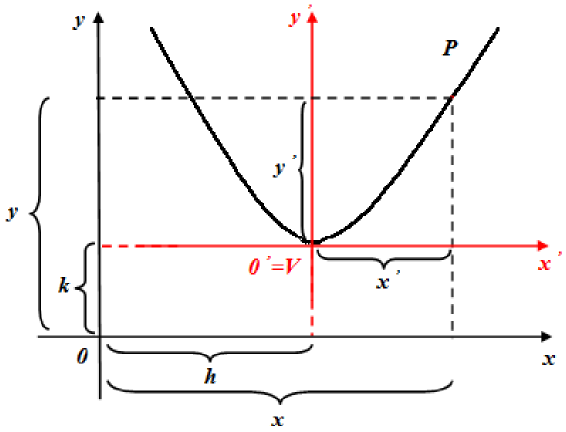


Figura 25: Parábola com centro fora da origem do sistema cartesiano e eixo focal paralelo ao eixo coordenado *y*.

Se ***P (x, y)*** é um ponto qualquer da parábola em relação ao sistema ***x0y*** e ***x'0' y'*** é um novo sistema de eixos onde ***V*** coincide com ***0'***. Então, conforme a Figura 25 tem-se: $x'^2=2py'$.

Como pela translação de eixo tem-se: $x' = x - h$ e $y' = y - k$, então, fazendo as devidas substituições, obtém-se a seguinte equação: $(x - h)^2 = 2p(y - k)$ que é definida como *forma padrão da equação da parábola* de vértice ***V(h, k)*** e eixo paralelo ao eixo dos ***y***.

5.3.4.2 Eixo focal paralelo ao eixo coordenado O*x*.

De forma análoga ao caso anterior, tem-se: $(y - k)^2 = 2p\ (x - h)$.

Observação 17: Quando $p > 0$ a parábola terá concavidade voltada para cima ou para a direita. Caso $p < 0$ a parábola terá concavidade voltada para baixo ou para a esquerda.

5.3.4.3 Equação da parábola na Forma Explícita

Sabe-se que a forma padrão da equação da parábola com vértice em um ponto ***V(h, k)*** qualquer do plano e eixo de simetria paralelo ao eixo ***y*** é dada por: $(x - h)^2 = 2p\ (y - k)$.

Para transformar esta equação padrão para a forma explícita, basta isolar o ***y***, sendo a mesma escrita da seguinte maneira: $y = ax^2 + bx + c$, onde os coeficientes ***a***, ***b*** e ***c*** são reais obtidos através do desenvolvimento da forma padrão.

Caso a equação tenha o eixo de simetria paralelo ao eixo $\boldsymbol{x}$, deve-se então isolar o $\boldsymbol{x}$, ficando a mesma escrita da seguinte maneira: $\boldsymbol{x = ay^2 + by + c}$.

Observação 18: Quando o eixo de simetria da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, a equação se torna “mais complicada”, mas mesmo assim se enquadra na forma geral da equação do ***2°*** grau com duas variáveis que é dada através da seguinte forma: $\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$. Para torná-la mais “acessível” basta executar de forma correta o processo de rotação dos eixos coordenados, assim sendo, a equação fica reduzida a seguinte forma $\boldsymbol{A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0}$; que facilmente será identificada.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática apresenta dificuldades tanto para os alunos quanto para os professores. Dentro deste contexto, é cada vez maior o grau de dificuldade que docentes enfrentam, pois o número de alunos que são promovidos às séries seguintes e não conseguem acompanhar os conteúdos ora abordados, é maior todos os anos.

O ensino das cônicas no Ensino Médio deve ser diferenciado para aumentar o interesse dos alunos e levá-los ao entendimento deste assunto. Através de pesquisas realizadas em alguns livros, foi possível perceber que a maioria deles traz o assunto de forma analítica, somente com a utilização de fórmulas. Os alunos, muitas vezes, só têm contato com esse conteúdo quando vão para um curso na área de ciências exatas, no qual é tratado o tema “cônicas”, levando-os a uma frustração por não terem os pré-requisitos necessários para este tópico.

Com o desenvolvimento deste trabalho prático, tentou-se resgatar o interesse dos alunos no estudo da geometria, indo além dos métodos tradicionais, ou seja, buscando através de aulas práticas, com materiais manipuláveis (materiais concretos), uma participação mais efetiva dos mesmos. Além de um breve relato histórico, apresentaram-se também algumas propostas diferenciadas para o trabalho das cônicas, que ajudarão os professores de ensino médio na elaboração de suas aulas, tendo a Geometria como foco principal.

Pode-se concluir também que o estudo da geometria por meio de materiais manipuláveis em aulas práticas, além de aumentar o interesse dos alunos, melhora a aprendizagem, pois conseguem visualizar exemplos concretos.

Embora no meio acadêmico ocorra uma discussão contra e a favor do uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática, é preciso ressaltar que este procedimento metodológico é mais um recurso didático o qual os professores podem utilizar. Jamais se pode preconizar que a utilização deste procedimento exclua outras formalidades da Matemática, tais como demonstrações e outras conjecturas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALPOIN, J.F.P.; **Exame de bombeiros.** Madri - Francisco Maritnezpad, 1748 http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 1995

BEZERRA. M. J. **Curso de Matemática**. São Paulo - Companhia Ed. Nacional, 1974. http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014.

BEZOUT, M. **Cours de mathématiques, a l´ usage des grandes du pavillon et de La marine**. Paris, Musier fils libraire, 1766. http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014

BITTAR, M.; FREITAS, J.L.M.; **Fundamentos e Metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental.** 2 ed. – Campo Grande, MS. Ed. UFMS, 2005

BOURBAKI, N. **Éléments d´histoire des mathématiques**. Paris, Hermann, 1974 http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014

BOYER, Carl B; **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

BUNT, Lucas N.H.; JONES, Phillip S.; BEDIENT, Jack D; **The historical roots of elementary mathematics.** Dover Publications, 1976.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo. Ed. Cortez, 1990.

CATUNDA, O. DANTAS, M.S. NOGUEIRA, N.C. **Matematica 1**, Rio de Janeiro, Livro Tecnico, 1971. http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática.** São Paulo, Ed. Ática, 1990.

DANTE, L.R. **Matemática, contexto e aplicações**. São Paulo – Editora Ática, 2004.
http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf - Acesso em fevereiro/2014

DRUCK, S. **Matemática Ensino Médio**. Ed. Brasília, 2005.

GUIMARAES, L. C., BELFORT, E. & BELLEMAIN, F. **Geometry: Back to the Future. Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics**, 2002.
http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap384.pdf - Acesso em dezembro/2013

LIMA, E.L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática), 2001.

NETO, E. R. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática, 1988.

RAMALHO Jr, Francisco; FERRARO, Nicolau G; SOARES, Paulo A.T. **Os fundamentos da Física.** 8 ed. São Paulo: Moderna, 2004, v. 2.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VALLADARES, R. J. C. **Elipse, sorrisos e sussurros**. Revista do Professor de Matemática, nº 36, p.24-28, SBM, São Paulo, 1998.
http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/monografia_eric.pdf - Acesso em janeiro/2014.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília. MEC/SEF, 2001. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental.

Revista do Professor de Matemática, nº7, SBM, São Paulo, 1991.
Revista do Professor de Matemática, nº34, p.22-27, SBM, São Paulo, 1997.

Revista do Professor de Matemática, nº35, p.09-14, SBM, São Paulo, 1997.
Revista do Professor de Matemática, nº 36, p.24-28, SBM, São Paulo, 1998.
Revista do Professor de Matemática, nº 33, p.10-15, SBM, São Paulo, 1997.