Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio

Aldenor Lopes Lemos Filho

Teresina
2013

Aldenor Lopes Lemos Filho

Dissertação de Mestrado:

Aplicações do Cáculo Diferencial e Integral no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação Institucional Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Piauí, na Universidade Federal oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina

2013

Lemos, Aldenor Lopes Filho.

Aplicações do cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio

Aldenor Lopes Lemos Filho – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, intitulada **"Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio."**, defendida por **ALDENOR LOPES LEMOS FILHO** em **13/8/2013** e aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva (UFPI)

Examinador

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva (UESPI)

Examinador

Dedico este trabalho à minha esposa (Cruizinha), ao meu filho (Aldenor Terceiro) e aos meus pais (Aldenor e Maria).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, um ser supremo e acima de qualquer vã religião.

Agradeço aos meus pais Aldenor Lemos e Maria Fernandes, pelo o apoio incondicional em tudo que realizo em minha vida e nessa etapa não foi diferente.

Agradeço a minha esposa amada, Cruizinha, que esteve sempre ao meu lado me dando força, sobre tudo nessa fase final da dissertação e ao meu amado filho Aldenor Terceiro, por ser a razão do meu existir e que não sabe o tanto que me dar forças para lutar todos os dias e vencer cotidianamente a batalha da vida.

Agradeço aos meus irmãos que sempre estão me apoiando, estando eles perto ou longe, aos meus amigos professores de minha querida cidade de Altos - Pi que tanto me ajudaram a concluir este mestrado, aos meus colegas da 1ª Turma do PROFMAT - UFPI, sem eles dificilmente estaria digitando estas linhas.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Alexande, pela paciência e o apoio dedicados a mim, sempre com uma palavra amiga, um sorisso no rosto e uma ideia para a dissertação, aproveito pra estender a todo o corpo docente do PROFMAT-UFPI que ministraram disciplinas na minha turma, a saber: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares, Prof. Dr. Jefferson Leite, Prof. Dr. Newton Santos, Prof. Dr. Jurandir Lopes, Prof. Dr. Paulo Alexandre, Profa. Dra. Liane Soares, Prof. Dr. Roger Peres e um agradecimento todo especial ao Prof. Dr. Juscelino Silva por todo a força que me deu durante o curso e agora na dissertação gentilmente me co-orientando.

Agradeço aos professores da banca examinadora Prof. Dr. Paulo Alexande, Prof. Dr. Juscelino Silva e Prof. Dr. Afonso Norberto por terem colaborado com minha dissertação.

Agradeço ao Prof. Msc. Raimundo Nonato Sousa pela ajuda com o Abstract.

Agradeço a SBM - Sociedade Brasileira de Matemática e ao MEC - Ministério da Educação por idealizar e realizar esse projeto gigantesco e de relevantes préstimos à educação brasileira.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que tanto ajudou nas despesas durante esses dois anos.

"O que sabemos é uma gota, o que não sabemos é um oceano".

Isaac Newton

Resumo

O domínio do Cálculo, em qualquer modalidade de ensino, sem dúvida nenhuma é muito importante. Esta ferramenta matemática que viabiliza a resolução de muitos problemas é o tema desse trabalho. Partindo da premissa que a Matemática é uma linguagem, o Cálculo, é um dos pilares fundamentais desta linguagem e como todo ramo da matemática foi construído ao longo dos séculos, tendo um maior avanço com os trabalhos de Newton e Leibniz. Este trabalho tem por objetivo mostrar a aplicabilidade do Cálculo no Ensino Médio, trazendo algumas sugestões de problemas que podem ser abordados em cada uma das três séries e um outro objetivo também é o de mostrar que alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral são totalmente acessíveis a alunos que estejam cursando o Ensino Médio.

Palavras-chave: Newton, Leibniz, Cálculo Diferencial e Integral, Ensino Médio, Cálculo no Ensino Médio.

Abstract

The mastery of Calculus, in any level of education is undoubtedly very important. This mathematical tool that enables the resolution of many problems is the subject of this work. Starting from the premise that mathematics is a kind of language, Calculus, is one of the cornerstones of this language and as a branch of mathematics it has been built over the centuries, having a major advance in the work of Newton and Leibniz. This work aims to show the applicability of Calculus in high school, bringing some suggestions for problems that can be addressed in each of the three series of this level of teaching. Another goal is also to show that some topics of differential and integral Calculus are fully accessible to students who are enrolled in high school.

Keywords: Newton, Leibniz, Differential and Integral Calculus, High School, Calculus in high school.

Sumário

Introdução

"A Matemática do ensino médio é uma vasta fonte de fundamentos básicos, organizados de tal forma que facilite o aprendizado do aluno tornado-o consciente da importância da Matemática no mundo desenvolvido no qual vivemos. Tais fundamentos nos dão suporte para solucionar belos e úteis problemas de nosso cotidiano". (Professor Juscelino Silva em palestra ministrada em 25 de julho de 2007 no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará - CEFETCE - Unidade Descentralizada de Juazeiro do Norte)

Um fato que deve ser repensado é a retomada do ensino do Cálculo no Ensino Médio, haja vista que alguns pesquisadores em Ensino da Matemática têm levantado a questão dos Fundamentos do Cálculo nessa modalidade de ensino, dada a sua importância para as ciências e tecnologias modernas. Ávila (1991, p.2) faz uma importante colocação a esse respeito, quando afirma que:

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN^s), recomendam que o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 69), preconiza-se que os alunos concluintes do Ensino Médio saibam

> usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

E é fato que o cálculo já traz em sua essência um fator de contextualização com outras ciências, Newton, um dos idealizadores desse ramo da matemática, iniciou seu *Método das Fluxões* tratando de uma curva que representava a trajetória de partículas em função do tempo, um problema que remete a Física no entanto com uma abordagem puramente matemática, desenvolvia-se assim a ideia de derivada e também o fator histórico da controversia (Newton x Leibniz) sobre quem foi realmente o "grande criador"do cálculo. Logo percebe-se que o cálculo possui os requisitos apresentados nas Orientações Curriculares Nacionais, embora constate-se que não é tema abordado nas escolas atualmente e não se pode contestar que o domínio dos tópicos, como: Limite, Derivada e Integral, possibilitam ao aluno de ensino médio a matematização de problemas quotidianos e por conseguinte a sua resolução.

Muitos são os questionamentos que surgem por motivo da não abordagem desse tema: - Será se os alunos não conseguem aprender? - Será se esses tópicos de Cálculo só serão importantes no Ensino Superior? - Será que os professores estão aptos a ensinar o cálculo?. Esse último questionamento vem tentando ser sanado, o próprio Ministério da Educação (MEC) em conjunto com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) lançaram em 2011 o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) para a capacitação em Rede Nacional de professores de matemática, prioritariamente aos que atuam na rede pública de ensino, para exatemente trabalhar temas que por ventura não foram bem abordados na graduação, como está na página do PROFMAT na internet:

> Os objetivos do PROFMAT são consistentes com a missão estatutária da SBM de "Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis"e também vem ao encontro da Proposta de Lei PL-8035/2010 (Plano Nacional de Educação), que coloca como um dos objetivos nacionais para o decênio 2011 - 2020: "Formar cinquenta por cento dos professores da educação básica

em nível de pós-graduação lato e stricto sensu e garantir a todos formação continuada em sua área de atuação".

E o Cálculo é um dos assuntos abordados na grade de disciplinas do PROFMAT, tendo uma disciplina, a saber, MA 22 - Fundamentos de Cálculo, com todo o ementário comum para um primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Eduardo Colli no manual que é parte integrante do kit de matemática do projeto *Aventuras na Ciência* intitulado "As certezas do acaso"afirma:

> Uma das maiores contribuições de Galileu foi dar caráter quantitativo às ciências da natureza, à filosofia natural, como eram chamadas na sua época. Ele afirmou: "A filosofia está escrita neste grande livro - o universo - que permanece sempre aberto a nossa vista, mas não podemos compreendê-la sem aprender primeiro a linguagem em que está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática...". À parte a motivação científica, a Matemática está presente na vida das pessoas, no trabalho ou no âmbito pessoal. Nas finanças, nos aspectos geométricos que surgem em variadas situações do cotidiano, nas representações gráficas, nas estatísticas. A Matemática é também linguagem e, por isso, é tratada com tanta importância na escola básica.

O nosso objetivo é inserir o Cálculo como feramenta de resolução de problemas no ensino médio, problemas estes dos mais diversos, desde maximização (minimização), otmização e finalmente as equações do tipo $x^p = p^x$ com p primo, para tanto iniciaremos com um breve histórico do Cálculo, em seguida apresentaremos algumas definições, proposições e teoremas do cálculo em uma variável real, como continuidade e derivada; seguindo, temos uma sequência de problemas básicos do Ensino Médio que são resolvidos com técnicas de derivada, passando a generalização das equações do tipo $x^p = p^x$ com p primo.

Capítulo 1

Breve Histórico do Cálculo

Abordaremos nesse capítulo um breve histórico do cálculo desde os primórdios com Isaac Newton e Leibniz, até a inconclusão da autoria desse importante ramo da matemática.

As primeiras ideias relacionadas ao Cálculo foram desenvolvidas por dois dos maiores matemáticos de toda história, que são Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716). Falaremos de forma breve sobre a vida de cada um deles[1].

No livro "A derivada e algumas aplicação", do professor Juscelino Silva (2012) apresentado no 2^0 Colóquio de Matemática da região nordeste realizado na Universidade Federal do Piauí, o autor apresenta um histórico a cerca desses dois matemáticos; vejamos alguns fatos relevantes.

1.1 Newton

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, no ano de 1642, Inglaterra, era de família abastada, Newton teve uma infância infeliz não tendo conhecido seu pai que morrera antes que ele completasse um ano de idade, e tendo sua mãe se casado novamente ele passa a morar com seus avós. Com a morte de seu padrasto em 1653, Newton passou a viver com a mãe, avó, um meio-irmão e duas meia-irmãs. Era um estudante de poucas habilidades e de

[1] Todo o texto do histórico do Cálculo foi retirado do livro do professor Juscelino Silva, A derivada e Algumas Aplicações

interesse diminuto e, por isso, foi logo cedo retirado da escola para cuidar dos interesses financeiros da família. Newton também não demonstrou interesse para desenvolver esta atividade. Em 1690, por influência de William Ayscough, tio de Newton, a família decidiu prepará-lo para a educação superior. Nesta época ele se alojava com a família de Stokes, o chefe da escola, que percebendo os talentos de Newton, foi um dos responsáveis por convencer a família de que ele possuía habilidades para o trabalho acadêmico.

Foi só em 1661, quando já era mais velho que a maioria dos colegas, que Newton ingressou no Trinity College de Cambridge. A pretenção de Newton era se formar em Direito. Newton teve em Cambridge acesso aos textos de Descartes, Gassendi, Hobbe e, em particular, de Boyle. Ele também mostrou interesse pelas teorias revolucionárias de Copérnico, Kepler e Galileu em astronomia e ótica. E foi gradualmente se envolvendo com os estudos de matemática e física. Existe um relato por parte de Moivre, de que seu interesse por matemática foi incrementado em 1663 quando comprou um livro de astronomia e não pôde entender a matemática envolvida. Foi então que passou a aprimorar-se em matemática. Passou a estudar a recém desenvolvida geometria analítica através dos textos de Viéte e René Descartes. Neste período ele aprendeu sobre o método de Wallis para encontrar um quadrado com área sob segmentos da parábola e da hipérbole, usando os indivisíveis. Com menos de 25 anos de idade ele iniciou sua carreira fazendo contribuições importantes para a matemática, mecânica, ótica e astronomia. Neste período, como ele próprio relatou depois, ele fez quatro de suas grandes descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação universal e a natureza das cores.

O *Método das Fluxões*, como ele denominava o cálculo, estava baseado no reconhecimento fundamental de que as operações da derivação e integração estavam associadas, sendo simplesmente uma a operação inversa da outra. Partindo da derivação como operação básica ele desenvolveu técnicas analíticas que unificavam diversas abordagens anteriores para solucionar questões que antes se julgava serem não correlacionadas, tais como o cálculo de áreas, tangentes a curvas, comprimento de segmentos de curvas e a localização de máximos e mínimos de funções. Newton relutou muito em publicar seus resultados ele tinha receio às críticas e ao plágio, ele tendia a não expor de pronto os seus métodos e, quando fazia, não os relatava com clareza.

Em outrubro de 1666 Newton escreveu um tratado sobre as fluxões. Seu trabalho não foi publicado imediatamente mas muitos matemáticos da época o conheciam de forma que o tratado exerceu grande influência sobre o desenvolvimento do cálculo naquele período. Ele iniciou suas considerações tratando uma curva como sendo trajetória de uma partícula, dada por suas coordenadas em função do tempo, em linguagem moderna ele representava a curva de uma função sob a sua forma paramétrica, usando o tempo como parâmetro - uma forma bastante apropriada para quem deseja estudar o movimento de uma partícula.

Em 1671 Newton escreveu *De Methodis et Fluxionum* mas não o conseguiu publicar até que John Colson preparou uma traduação para o inglês em 1736. Newton encontrou diversas dificuldades para publicar seus textos em matemática e, de certa forma, Barrow (que foi um dos professores de Isaac Newton no Trinity College) tinha parte da responsabilidade por isto, pois em tempos recentes os editores de Barrow tinham ido a falência e os demais editores se encontravam receosos em continuar a publicação de textos sobre matemática. O livro de Newton sobre Análise contendo um tratamento sobre séries infinitas foi escrito em 1669 e circulou pelos meios acadêmicos em forma manuscrita, só sendo publicado em 1771. Da mesma forma seu *Method of fluxions and infinite series* foi escrito em 1671 e somente traduzido para o inglês e publicado no ano de 1736. O original em latim só foi publicado muitos anos mais tarde. A obra seguinte de Newton, *Tractus de Quadratura Curvarum*, foi escrito em 1693 e só publicado em 1704 sob a forma de um apêndice em seu livro *Optiks*.

Em 1672 Newton foi aceito membro da Royal Society e publicou seu primeiro artigo sobre luz e a cor no periódico *Philosofical Transactions of the Royal Society*. Este artigo foi bem aceito pela comunidade científica, mas também deu origem a críticas e oposições. Hooke e Huygens argumentaram contra a tentativa de Newton de provar que a luz possuía natureza corpuscular e não ondulatória. Devido ao peso da opinião de Newton este foi um erro que persistiu por muito tempo no estudo da luz, até que experiências com o fenômeno da refração no século XIX, indicaram uma preferência pelo modelo ondulatório. As críticas recebidas levaram Newton a adotar um posição ainda mais retraída e ser mais reticente com relação a suas descobertas. Embora apreciasse a notoriedade ele ressentia enormemente as críticas recebidas e julgava que uma forma de evitá-las seria a não publicação de suas ideias.

As relações de Newton com Hooke se deterioraram em 1675, quando Hooke o acusou de plágio em algumas de suas conclusões em ótica. Isto fez com que Newton adiasse a publicação de suas conclusões em ótica até a morte do adversário, em 1703.

Em 1686 Halley, astrônomo e amigo de Newton, o convenceu a publicar uma descrição completa de suas descobertas sobre física e astronomia. Um ano mais tarde ele publicou o *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ou simplesmente *Principia*, como se tornou conhecido o livro. Este é considerado por muitos historiadores da ciência como o maior livro científico já escrito. Nele, Newton trata do movimento dos corpos em meios resistentes e não resistentes e sob a ação de forças centrípetas. Os resultados podem ser aplicados a órbitas celestes, projéteis, pêndulos e corpos em queda livre nas proximidades da superfície da Terra. Em seguida Newton forneceu explicações sobre as órbitas excêntricas dos cometas, as marés e suas variações, a precessão do eixo da Terra e a perturbação do movimento da Lua pela atração gravitacional do Sol. Este trabalho o transformou no principal cientista de sua época embora diversos pensadores da Europa continental e da própria Inglaterra relutassem em aceitar suas visões sobre gravitação como ação à distância, sua teoria corpuscular da luz, sua versão do cálculo em contraposição à versão de Leibniz e outros tópicos localizados.

Em 1703 Newton foi eleito presidente da Royal Society, mantendo este cargo até o final de sua vida. Em 1705 ele foi feito cavalheiro pela rainha Anne, sendo o primeiro cientista a receber esta distinção como reconhecimento por seu trabalho. Contudo, toda a última fase de sua vida foi dominada pelo ressentimento causado pela controvérsia com Leibniz sobre a autoria do Cálculo.

1.2 Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha, filho de Friedrich Leibniz e de Catharina Schuck. Leibniz perdeu o pai com apenas seis anos e aprendeu da mãe os valores religiosos e éticos que nortearam sua vida e filosofia. Na escola ele aprendeu a lógica de Aristóteles. Insatisfeito com a filosofia aristotélica, dominante na época, ele iniciou o desenvolvimento de suas próprias ideias sobre como aperfeiçoá-la. Ainda criança ele apreciava ler os livros de seu pai sobre metafísica e teologia nas visões de escritores católicos e protestantes. O próprio Leibniz reconheceu mais tarde como uma constante em sua vida a preocupação em estabelecer um ordenamento por trás do pensamento lógico e da dedução matemática, assim como uma tentativa sempre presente de estabelecer contatos entre pontos de vista conflitantes e o de unificar os diversos sistemas de pensamento.

Ao completar 16 anos, algo não muito incomum na época, Leibniz entrou para a Univeridade de Leipzig onde estudou filosofia e matemática. Nenhuma destas disciplinas era, na época, ensinada com grande nível de aprofundamento. Após sua graduação, obtida em 1663, ele passou um período em Jena estudando com Erhard Weigel, um filósofo e matemático com quem aprendeu a importância do método de provas matemáticas em assuntos tais como lógica e filosofia. Em 1667, Leibniz recebe o grau de doutor em Direito pela Universidade de Altdorf.

Em 1671 ele publicou *Hypothesis Physica Nova* onde afirmava, em acordo com Kepler, que o movimento é decorrente da ação do espírito sobre a matéria. Neste período, passou a se comunicar com Oldenburg, o secretário da Royal Society de Londres, um dos responsáveis por seu contato com Isaac Newton.

Diferente de Newton, Leibniz apreciava viajar pela Europa fazendo contatos com outros matemáticos e filósofos, aproveitando-se para isto de sua posição como diplomata. Juntamente com sua atuação na diplomacia ele inciou suas primeiras tentaivas para construir a máquina calculadora. Em Paris, no ano de 1972, Leibniz estudou matemática e física com Christian Huyggens de quem recebeu a sugestão de trabalhar com séries. Em 1673 Leibniz visita a Royal Society em Londres onde apresentou sua tentaiva incompleta de construir a calculadora. Nesta ocasião, em contato com Hooke, Boyle e Pell ele se atualizou sobre os resultados mas recentes obtidos em séries. Mais tarde, embora ausente de Londres, Leibniz recebeu críticas na Royal Society, especialmente no que se referia à máquina de calcular. Estas críticas tiveram um efeito interessante sobre Leibniz. Ele percebeu que seus conhecimentos em matemática eram, de fato, incompletos e que necessitavam de aprimoramento. Sem se abater ele redobrou seus esforços em se aprofundar nesta disciplina.

Leibniz foi aceito membro da Royal Society de Londres em 1673 e iniciou estudo sobre a geometria dos infinitesimais, trocando correspondência sobre estes esforços com Oldenburg que, por sua vez, o informou sobre os avanços de Newton nesta área. Deve-se notar que, neste período, Leibniz não gozava de grande reputação com os membros da Royal Society devido à sua incapacidade de concluir a máquina calculadora. Simultaneamente Oldeburg desconhecia que ele havia, devido a seus esforços para se superar, transformado-se em um gênio criativo da matemática.

Em Paris, na mesma época, Leibniz começou a desenvolver os princípios de sua versão do cálculo. Consciente de que, para o pleno desenvolvimento de uma ferramenta matemática, era necessária a adoção de uma notação conscistente e de fácil manipulação ele dedicou um bom tempo para o estabelecimento de sua notação que é basicamente a mesma que usamos até hoje. É sabido que suas primeiras anotações eram confusas e de difícil leitura. Já em 1675 ele escreveu um artigo manuscrito onde usava pela primeira vez a notação $f(x)dx$. No mesmo artigo ele apresentou a regra para diferenciação de um produto. Em 1676 Leibniz apresentou a diferenciação de:

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

para n inteiro ou fracionário.

Além de seus resultados em cálculo, Leibniz obteve outros resultados importantes em matemática. Ele trabalhou com sistemas aritméticos binários e com o conceito de determinantes, usado na solução de sistemas de equações lineares.

Capítulo 2

Alguns Resultados sobre Continuidade e Diferenciabilidade

Os resultados que iremos apresentar nesse capítulo, serão utilizados na resolução de problemas do ensino médio e são parte integrante do ementário de um primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral. Sendo que tais resultados serão também utilizados em algum momento em nosso trabalho na forma de aplicação para resolução de alguns dos problemas apresentados.

Para um aprofundamente nos tópicos desse capítulo recomendamos [6], [7], [10] e [11].

2.1 Alguns Resultados Sobre Continuidade

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre continuidade que utilizaremos posteriormente nos problemas que iremos resolver com utilização do Cálculo Diferencial e Integral.

2.1.1 Continuidade de uma Função

Apesar de continuidade ser uma característica global das funções, a definição é feita ponto a ponto. Ou seja, definimos a continuidade de uma função em um dado ponto (de seu domínio).

Definição 1. *(Continuidade de uma Função em um Ponto) Sejam* $\mathsf{f} : \mathsf{D} \to \mathbb{R}$ *uma função definida no domínio* $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}$ *e* $\mathsf{a} \in \mathsf{D}$*, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo* a

intersecta $D \setminus \{a\}$. *Dizemos que a função* f *é* contínua *em* a *se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 1. *Com a definição de continuidade de uma função em um ponto e o fato que para todo polinômio p com* $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$*; podemos concluir que sendo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função polinomial ela será contínua em todos os pontos de seu domínio.*

Definição 2. *(Continuidade de uma função) Seja* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* f *é contínua se* f *for contínua em todos os elementos de* D.

Obs 1. *Para provar que uma deteminada função é contínua, temos que verificar a definição em cada ponto de seu domínio. Por outro lado, para mostrar que uma certa função NÃO é contínua, basta descobrir um ponto de seu domínio no qual a definição de continuidade falhe.*

2.1.2 A Propriedade da Permanência de Sinal

Vejamos nessa subseção uma proposição que trata sobre o sinal de funções na vizinhança de um ponto.

Proposição 1. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e* $a \in D$ *tal que todo intervalo aberto contendo* a *intersecta* $D \setminus \{a\}$. *Suponha que* f *seja contínua em* a *e* $f(a) > 0$. *Então, existe um número* $r > 0$ *tal que,*

$$\forall x \in (r - a, a + r) \cap D \Rightarrow f(x) > 0.$$

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que para todo número real $r > 0$, existe $x \in (a - r, a + r) \cap D$ tal que $f(x) \leqslant 0$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap D$ tal que $f(a_n) \leqslant 0$.

Assim construímos uma sequência de números (a_n) tais que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. Isso quer dizer que $\lim(a_n) = a$. No entanto, $f(a_n) \leqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência não pode convergir para $f(a) > 0$. Isso contradiz o fato de f ser contínua em a.

□

Obs 2. *Essa propriedade garante, por exemplo, que ao estudarmos os sinais de uma função contínua, com zeros isolados, definida em um dado intervalo, só haja eventuais* *mudanças de sinais em torno desses pontos. Isso ocorre, por exemplo, no caso das funções polinomiais.*

2.1.3 Propriedades das Funções Contínuas

Mostraremos com a proposição seguinte que a adição de funções contínuas resulta em uma função contínua, o produto entre funções contínuas é uma função contínua e a divisão $\frac{f}{g}$ com $g \neq 0$ onde f, g são funções contínuas também é uma função contínua.

Proposição 2. *Sejam* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *funções,* $D \subset \mathbb{R}$ *tal que para cada* $a \in D$*, todo intervalo aberto contendo* a *intersecta* $D \setminus a$*. Se* f *e* g *são contínuas, então*

(i) $f + g : D \to \mathbb{R}$ *é contínua;*

(ii) $f.g : D \to \mathbb{R}$ *é contínua;*

(iii) $\frac{f}{g} : D^* \to \mathbb{R}$*, em que* $D^* = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$*, é contínua.*

Demonstração. Seja $a \in D$ um elemento qualquer do domínio. Como f e g são contínuas,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) = (f+g)(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f.g)(x) &= \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) \\ &= f(a).g(a) = (f.g)(a). \end{aligned}$$

Observe que, se $g(a) \neq 0$, a Propiedade da Permanência do Sinal garante a existência de algum $r > 0$ tal que, para todo $x \in (a - r, a + r) \cap D$, $g(x) \neq 0$. Mais uma vez,

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

$\square$

2.1.4 O Teorema de Weierstrass

Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos, isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

Demonstração. Com efeito, $f(X)$ sendo compacto, pois é, a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua, é limitado e fechado. Logo $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $rmsup f(X) = f(x_2)$ □

2.1.5 Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. Seja $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. O cojunto A não é vazio pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de A é maior do que todos os outros. Com efeito seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\varepsilon = d - f(\alpha)$, a continuidade de f no ponto α nos dá um $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta)$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertencem a A. Agora ponhamos $c = supA$. Como c é limite de uma sequência de pontos $x_n \in A$, temos:

$$f(c) = \lim f(x_n) \leqslant d.$$

Como A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$. □

2.2 Alguns Resultados Sobre Derivadas

Nesta seção serão apresentadas algumas das definições mais importantes a cerca de derivada, bem como proposições e teoremas que integram de forma substancial este conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral.

2.2.1 A Definição de Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo aberto I, em um ponto $x_0 \in I$, é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso este limite exista.

Se o limite existir a função f é dita derivável em x_0. Se f é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$ é a função derivada de f.

2.2.2 Derivada Conceito Geométrico

Geometricamente a derivada é o coeficiente angular da reta tangente a um certo ponto da curva que é gráfico de uma função $y = f(x)$. Encontrar a equação dessa reta está relacionado com o problema de encontrar a velocidade instantânea, problema que motivou Newton na criação do Cálculo.

Seja $f(x)$ uma função e seja x_0 um ponto de seu domínio, com $x_1 = x_0 + h$. Na figura 2.1, veja o gráfico de uma função $f(x)$, onde traçamos a reta secante que passa pelos pontos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$. Note que o gráfico foi traçado supondo $h > 0$. No entanto, a situação $h < 0$ também deve ser considerada.

O coeficiente angular da reta secante à curva que passa por $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$ é dado por:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtemos retas que cortam a curva em dois pontos A e B_i cada vez mais próximos. Intuitivamente percebemos que quando $x_0 + h$ se aproxima de x_0 então os pontos $f(x_0 + h)$ e $f(x_0)$ onde a reta corta a curva ficam cada vez mais próximos e assim estas se aproximam cada vez mais da tangente em x_0. Quando h se aproxima de zero, se o quociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

que representa o coeficiente angular da reta secante que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, se aproxima de um determinado valor esse, intuitivamente, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente.

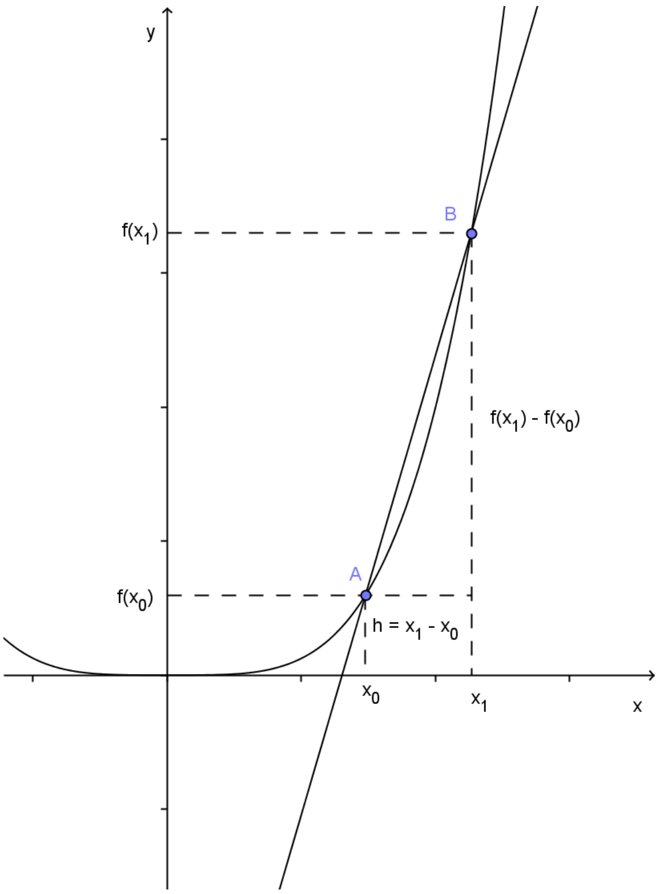


Figura 2.1:

Na verdade, o que fazemos é definir reta tangente da curva em $P = (x_0, f(x_0))$ como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Caso o limite não exista, não há reta tangente ao ponto, em resumo: A reta tangete a uma curva que é gráfico de $y = f(x)$ em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se o limite existir. É importante observar que o limite deve existir à direita e à esquerda de x_0.

Exemplo 2. *Vamos mostrar que a derivada da função* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq 0$ *é* $f'(x) = 2ax + b$. *De fato, veja:*

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c) - ((a(x_0)^2 + bx_0 + c))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a(x_0)^2 + 2ax_0h + ah^2 + bx_0 + bh + c) - (a(x_0)^2 + bx_0 + c))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0)^2 + 2ax_0h + ah^2 + bx_0 + bh + c - a(x_0)^2 - bx_0 - c}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ax_0h + ah^2 + bh}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ax_0h + bh}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{ah^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2ax_0 + b) + \lim_{h \to 0} ah^2 \\
&= 2ax_0 + b
\end{aligned}
$$

O que mostra que se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ então $f'(x) = 2ax + b$.

2.2.3 Valores Extremos de uma Função

Vejamos agora algumas definições que irão dar sustentação na demonstração de dois teoremas importantens do cálculo, o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio.

Definição 3. *Uma função* $f : D \to \mathbb{R}$ *tem máximo absoluto em* c *se* $f(x) \leqslant f(c)$ *para todo* x *no domínio D de* f. *Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor máximo de* f *em* D.

Definição 4. *Uma função* $f : D \to \mathbb{R}$ *tem mínimo absoluto em* c *se* $f(x) \geqslant f(c)$ *para todo* x *no domínio D de* f. *Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor mínimo de* f *em* D.

Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados valores extremos da função. É claro que nem todas as funções têm tal propriedade, elas restrigem-se a terem valores de máximo e mínimo local o qual iremos logo a frente mostrar um teorema importante para tais pontos do gráfico dessas funções.

Exemplo 3. *Na figura 2.2* $f(x)$ *tem mínimo absoluto igual a - 16 e na figura 2.3* $g(x)$ *tem máximo absoluto igual a 4, já a função da figura 2.4 não possui valores extremos.*

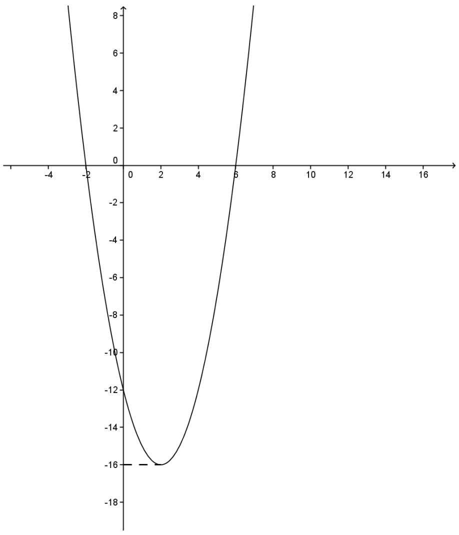


Figura 2.2:

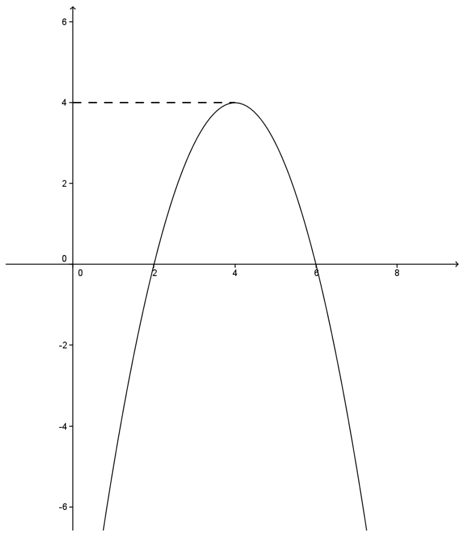


Figura 2.3:

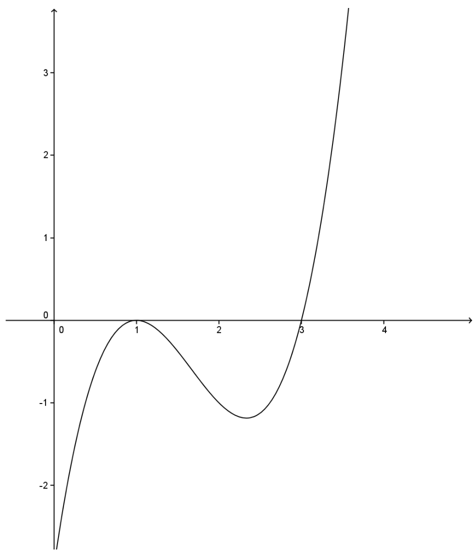


Figura 2.4:

Definição 5. *Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto* c *de seu domínio, se existir intervalo aberto* I*, tal que* $c \in I$ *e* $f(x) \leqslant f(c)$ *para todo* $x \in I$*. Neste caso, dizemos que* $f(c)$ *é valor máximo local de f.*

Definição 6. *Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto* c *de seu domínio, se existir intervalo aberto* I*, tal que* $c \in I$ *e* $f(x) \geqslant f(c)$ *para todo* $x \in I$*. Neste caso, dizemos que* $f(c)$ *é valor mínimo local de f.*

Teorema 1. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função* f *contínua em um intervalo aberto* I*. Se* f *tem máximo ou mínimo local em* $x = c$*,* $c \in I$ *e* f *é derivável em* c *então* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração. Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é análoga. Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leqslant f(c)$ $\forall x \in (a, b)$. Portanto $f(x) - f(c) \leqslant 0$, para todo $x \in (a, b)$. Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Comparando (2.1) com (2.2) teremos a seguinte conclusão:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0.$$

□

A recíproca do teorema NÃO é verdadeira, bastando para isso tomar a função $f(x) = x^3$, na qual $f'(x) = 3x^2$ então, $f'(0) = 0$, no entanto f não possui máximo ou mínimo local em $x = 0$. Na verdade a função não possui extremo local.

Definição 7. *Um ponto c no domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:*

(a) f não é derivável em $x = c$.

(b) f é derivável em c e $f'(c) = 0$.

O Teorema 1 nos diz que qualquer máximo ou mínimo local c deve ser ponto crítico, pois se f não for derivável em c então é ponto crítico (item (a) da definição acima) e se f for derivável em c então $f'(c) = 0$ pelo teorema e c é ponto crítico de f (item (b) da definição acima). Resulta que podemos reescrever o Teorema 1 como: Se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto crítico de f.

Portanto, a busca pelos máximos e mínimos locais de f deve se dar pelos pontos onde f não é derivável e pelos pontos onde é derivável e sua derivada é nula.

Para encontrar o máximo e mínimo absoluto da função definida em um intervalo, devemos ainda considerar seus valores no ponto inicial e final do intervalo, caso estejam no domínio da função. O seguinte método resume o procedimento para uma função definida em um intervalo fechado.

Para determinar o máximo e mínimo absoluto de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Determine os pontos críticos de f no intervalo (a, b).

2. Determine $f(a)$ e $f(b)$.

3. Compare os valores assumidos por f nos pontos críticos com $f(a)$ e $f(b)$. O maior dentre eles será o máximo absoluto de f em $[a, b]$ e o menor entre eles será o mínimo absoluto de f em $[a, b]$.

2.2.4 O Teorema de Rolle

Observe os gráficos abaixo, neles podemos notar o gráfico de funções definidas no intervalo $[a, b]$, em que $f(a) = f(b)$. O que se observa nos dois gráficos é que existem algum $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. O teorema de Rolle afirma que este é sempre o caso.

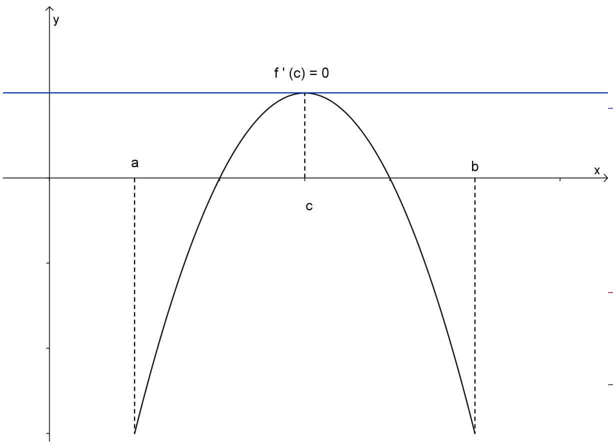


Figura 2.5:

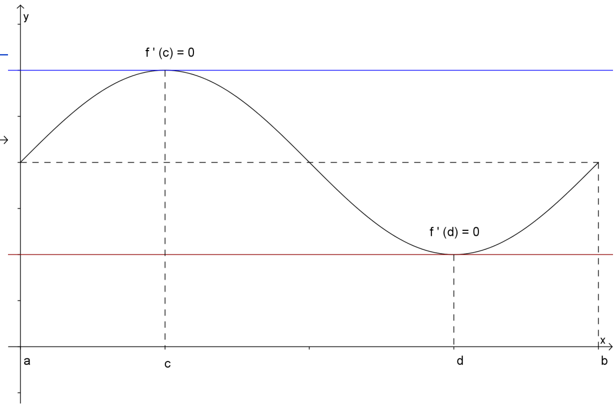


Figura 2.6:

Teorema 2. *(Rolle) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b) *e* $f(a) = f(b)$*, então existe pelo menos um número* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f contínua em $[a, b]$ possui valor máximo e mínimo no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, respectivamente.

Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo, por exemplo, $f(a) = m$ e $f(b) = M$, então, como $f(a) = f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$, o que prova o Teorema de Rolle neste caso.

Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f. Então c é extremo local de f e, pelo Teorema 1, como f é derivável em (a, b) temos $f'(c) = 0$, o que conlui a demonstração. $\square$

2.2.5 O Teorema do Valor Médio

Um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial é o chamado Teorema do Valor Médio. São inúmeras as aplicações desse teorema em problemas envolvendo funções.

Teorema 3. *(Valor Médio) Seja* f *uma função contínua no intervalo [a,b] e derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe pelo menos um número* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Para aplicar o Teorema de Rolle, faremos uso de uma função g, definida a partir de f e tal que $g(a) = g(b)$.

Seja a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Então g é contínua em [a,b] e derivável em (a,b), pois é diferença entre funções contínuas em [a,b] e deriváveis em (a,b). Além disso:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

$$\text{e } g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Logo $g(a) = g(b)$. Podemos então aplicar o Teorema de Rolle para g e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Sendo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

temos, $g'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$; o que completa a demonstração do Teorema do Valor Médio. □

Geometricamente o Teorema do Valor Médio garante que existe um $c \in (a, b)$ de forma tal que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto c é igual ao coeficiente angular da reta que passa por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, veja a figura abaixo:

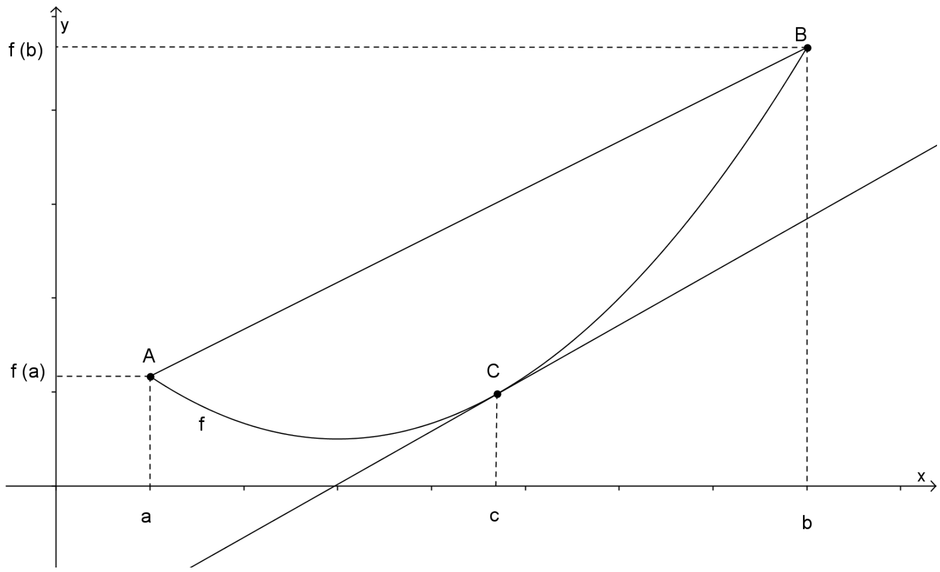


Figura 2.7:

Como consequência do Teorema do Valor Médio, apresentaremos a seguir uma proposição que associa o crescimento e decrescimento de uma função à sua derivada.

Proposição 3. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *então:*

(i) f *é não decrescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*. Além disso se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é crescente em* $[a, b]$*.*

(ii) f *é não crescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) \leqslant 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*. Além disso, se* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é decrescente em* $[a, b]$*.*

Demonstração. Demostraremos o item (i), o item (ii) é demonstrado de forma análoga. Suponha que f não seja decrescente em $[a, b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$. Se $h > 0$, temos $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x+h) \geqslant f(x) \Longrightarrow f(x+h) - f(x) \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Se $h < 0$, temos $x + h < x$ e, como f é não decrescente:

$$f(x+h) \leqslant f(x) \Longrightarrow f(x+h) - f(x) \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Em ambos os casos, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$. Portanto:

$$f'(x) = \lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Suponha agora que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sejam $x_0, x_1 \in [a, b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \geqslant 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geqslant 0 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_0)$ e, portantanto, f é não decrescente.

Por outro lado, se vale que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então fica garantido que $f'(c) > 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_0)$, o que mostra que f é crescente.

$\square$

2.2.6 O Teste da Derivada Primeira e da Derivada Segunda

Nesta seção iremos apresentar de forma sucinta os testes da primeira e da segunda derivada que trata a respeito dos pontos críticos do gráfico de uma função sendo mostrado um resultado importante que estabelece a natureza (se são pontos de máximo ou pontos de mínimo locais e/ou absolutos) de tais pontos.

No Teorema 1 vimos que se $f'(c) = 0$ então $x = c$ é um ponto crítico de f e $f(c)$ pode ser mínimo local, máximo local ou nenhum dos dois. Agora relacionamos crescimento e decrescimento de uma função com o sinal da derivada, podemos usar esta preposição para, dado um ponto com $x = c$ tal que $f'(c) = 0$, dizer em quais dos três casos ele se enquadra.

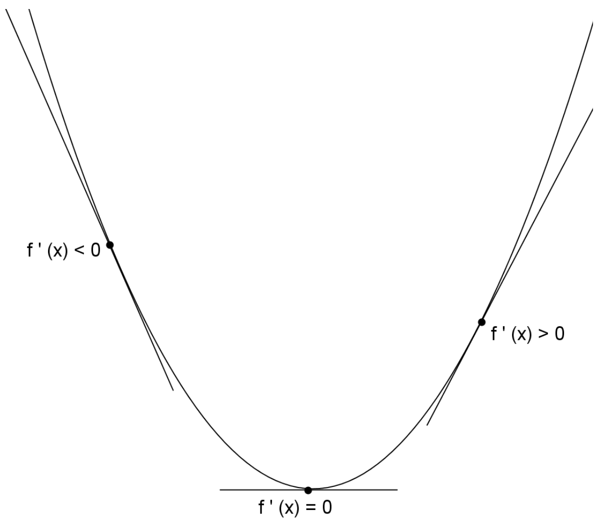


Figura 2.8:

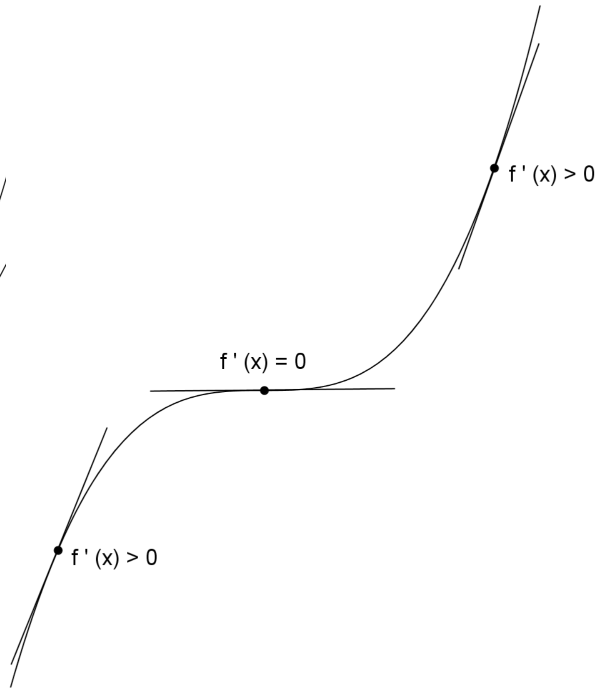


Figura 2.9:

Proposição 4. *(Teste da Derivada Primeira) Seja a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *e seja* c *um ponto crítico de* f.

(i) Se f' *passa de positiva para negativa em* c *então* f *tem máximo local em* c.

(ii) Se f' *passa de negativa para positiva em* c *então* f *tem mínimo local em* c.

(iii) Se f' *não muda de sinal em* c *então não tem máximo nem mínimo local em* c.

Demonstração. A demonstração do item (i) é da seguinte forma. Se f' passa de positiva para negativa em c então existem $x_0, x_1 \in (a, b)$, $x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$. Pela Proposição 2, f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$ segue que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c.

Analogamente, se f' passa de negativa para positiva em c, então existe intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. Portanto, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$, o que demonstra (ii).

Para provar o item (iii), seja $I \subset [a, b]$ um intervalo contendo c. Como f' não muda de sinal em c então há um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é crescente (respectivamente, decrescente) em $[x_0, c]$ e continua crescente (respectivamente decrescente) em

$[c, x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de c o que for necessário, podemos supor que $[x_0, x_1] \subset I$. Portanto, $f(c)$ não pode ser valor de máximo nem de mínimo de I.

□

Vejamos na proposição seguinte um outro teste a cerca dos pontos críticos do gráfico de uma função, o teste da derivada segunda.

Proposição 5. *(Teste da Derivada Segunda) Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'c) = 0$. Se $f''(c)$ existe, então:*

(i) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo local em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c. O teste é inconclusivo caso $f''(c) = 0$.

Demonstração. Demonstraremos o caso (i). O caso (ii) é análogo. Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Então:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Portanto,

$$a < x < c \Longrightarrow x - c < 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$$
$$c < x < b \Longrightarrow x - c > 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$. □

2.2.7 O Método das Aproximações Sucessivas

Neste método a sequência de aproximações do zero α de uma função $f(x)$ ($f(\alpha) = 0$) é obtida através de uma relação de recorrência da forma:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0, 1, 2, 3, ...$$

O ponto x_0 será considerado uma aproximação inicial do zero α da função $f(x)$ e $\phi(x)$ é uma função que tem α como ponto fixo, isto é, $\alpha = \phi(\alpha)$, essa função $\phi(x)$ é chamada função interação de $f(x)$.

A primeira pergunta a ser respondida é: dada uma função $f(x)$ com zero α, como encontrar uma função $\phi(x)$ que tenha α como ponto fixo? Isto pode ser feito através de uma série de manipulações algébricas sobre a equação $f(x) = 0$, transformando-a em uma equação equivalente da forma $x = \phi(x)$. Nestas transformações devem-se tomar os devidos cuidados para que $\phi(x)$ esteja definida em α e para que α pertença à imagem de ϕ. Como o zero α é desconhecido, é necessário determinar um intervalo I que contenha α e que esteja contido tanto no domínio quanto na imagem de ϕ. É necessário que o zero α de $f(x)$ seja único no intervalo I, caso contrário não será possível discernir qual o zero determinado.

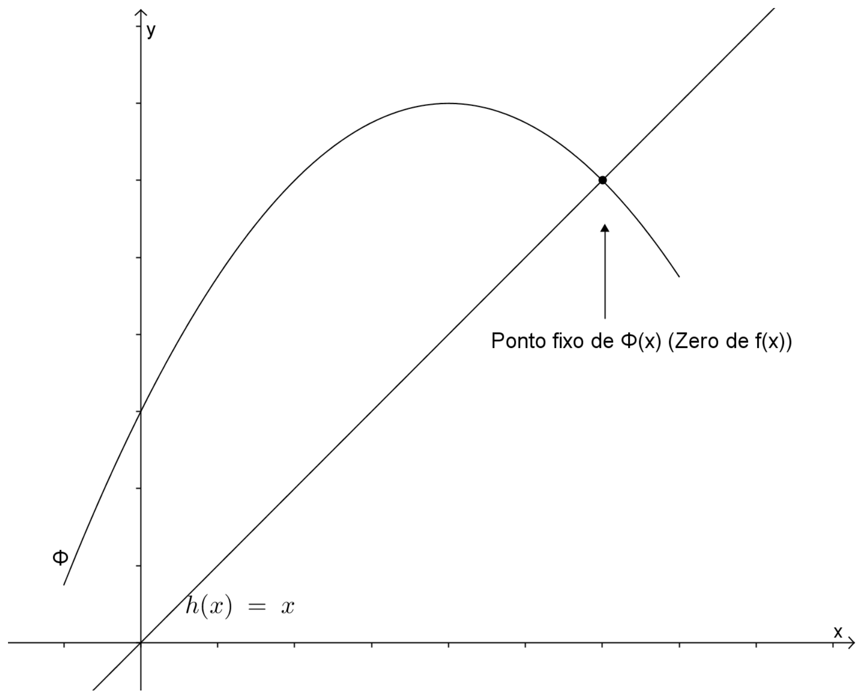


Figura 2.10:

Exemplo 4. *Encontre uma função $\phi(x)$(função interação) para função $f(x) = x^2 - x - 2$ e verifique se o ponto fixo de ϕ é zero da função $f(x)$.*

Fazendo $f(x) = 0$, teremos:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow \phi(x) = x^2 - 2.$$

Perceba que 2 é um ponto fixo de ϕ; pois $\phi(2) = 2$, agora vejamos se 2 é zero da função $f(x)$:

$$f(2) = 2^2 - 2 - 2 \Rightarrow f(2) = 0.$$

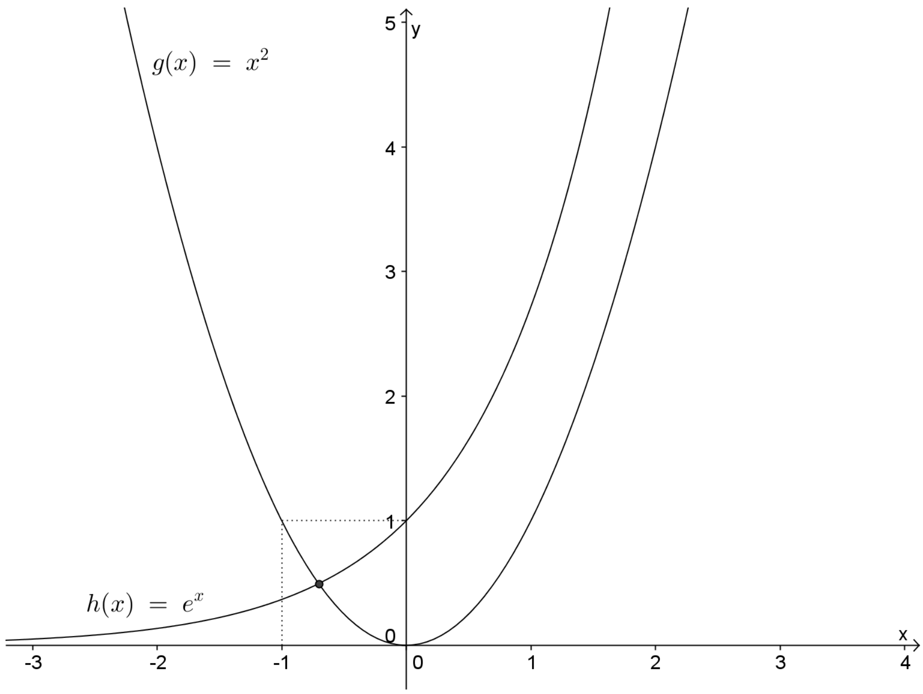
Então o ponto fixo de ϕ é nesse caso zero de $f(x)$.

Exemplo 5. *Encontre uma estimativa para o zero da função* $f(x) = x^2 - e^x$, *usando o metódo das aproximações sucessivas.*

Vamos iniciar a solução encontrando uma boa estimativa inicial para o valor da raiz de $f(x)$. Para isso, vamos usar o método gráfico para o isolamento de raízes. Escrevendo

$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow g(x) = x^2 \text{ e } h(x) = e^x,$$

temos:



Observe o esboço gráfico acima, e veja que uma raiz da equação $x^2 = e^x$ encontra-se no intervalo $[-1, 0]$. Devemos agora escolher uma função de iteração $\phi(x)$. Para isso, escrevemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - e^x &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{e^x}. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos ter como função iteração, os dois casos abaixo:

$$\phi(x) = \sqrt{e^x}$$
$$\phi(x) = -\sqrt{e^x}$$

Usando $\phi(x) = -\sqrt{e^x}$ e $x_0 = -1$, temos:

$x_0 = -1 \Rightarrow \phi(x_0) = \phi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} \simeq -0,606$

$x_1 = -0,606 \Rightarrow \phi(x_1) = \phi(-0,606) = -\sqrt{e^{-0,606}} \simeq -0,738$

$x_2 = -0,738 \Rightarrow \phi(x_2) = \phi(-0,738) = -\sqrt{e^{-0,738}} \simeq -0,691$

$x_3 = -0,691 \Rightarrow \phi(x_3) = \phi(-0,691) = -\sqrt{e^{-0,691}} \simeq -0,691$

$x_4 = -0,707$

Tabela 2.1: Aproximação do zero da função $f(x)$

x_n	$f(x) = x^2 - e^x$
x_0 = -1	0,632
x_1 = - 0,606	- 0,178
x_2 = - 0,738	0,067
x_3 = - 0,691	- 0,024
x_4 = - 0,707	0,007

Observe que $x = -0,707$ é um zero da função $f(x)$ com um erro inferior a um centésimo, o que já é um tanto quanto razoável.

Teorema 4. *Seja α um zero de uma função f, isolada em um intervalo $I = [a, b]$, $\alpha \in I$; e seja ϕ é uma função tal que $\phi(\alpha) = \alpha$. Se*

(i) ϕ e ϕ' são funções contínuas em I;

(ii) $|\phi'(x)| < 1; \forall x \in [a, b]$

(iii) $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$, para $n = 0, 1, 2, ...$

Então a sequência $\{x_n\}$ converge para α.

A demonstração desse importante teorema o leitor interessado pode encontra em [15] pp. 58, pp. 59 e pp. 60.

Capítulo 3

Aplicações do Cálculo no Ensino Médio

Neste capítulo iremos mostrar algumas aplicações do cálculo no ensino médio. Tais aplicações, em nossa opinião, justificam de forma parcial, que o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral tornam o ensino de determinados tópicos mas acessíveis aos alunos das três séies correspondentes.

3.1 Função Quadrática

Um tema que faz parte do conteúdo programático da 1^a série do Ensino Médio é a função quadrática, onde se justifica que as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico de tais funções é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, vejamos o problema seguinte que traz uma solução via cálculo dessa proposição.

Problema 1. *Mostre que em uma função quadrática o ponto de máximo (de mínimo) do gráfico desta função é* $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, *onde* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *com* $a \neq 0$ *e* $\Delta = b^2 - 4ac$.

Como foi dito, função quadrática é toda função $f(x)$ da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ com } a \neq 0.$$

Para mostar que o ponto de máximo (de mínimo) do gráfico desta função é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ utilizaremos a definição de derivada e o Teorema do Valor Médio.

Demonstração. De fato sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, e considerando sem perda de generalidade $a > 0$; $f'(x) = 2ax + b$ (veja Exemplo 2), como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ o valor para qual se tem $f'(x) = 0$ é um extremo absoluto da função e como $f"(x) = a > 0$ a função possui mínimo absoluto, logo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + be \\ f'(x) &= 0 \Longleftrightarrow \\ 2ax + b &= 0 \Longleftrightarrow \\ 2ax &= -b \Longleftrightarrow \\ x &= \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

Veja que:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= -\frac{\Delta}{4a}, \end{aligned}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Logo o ponto de mínimo do gráfico da função $f(x)$ será $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$\square$

3.2 A Equação $x^2 = 2^x$

O problema seguinte também trata de tópicos explanados na 1^a série do Ensino Médio, já tendo sido item de vestibular; e esse tipo de equação terá uma ”pequena” generalização no Capítulo 4.

Problema 2. *Quais os zeros da equação* $x^2 = 2^x$*?*

A Equação $x^2 = 2^x$ é um típico problema na qual sua solução é feita essencialmente com cálculo, não é difícil ver que ela tem três soluções, bastando para isso construirmos o gráfico da função $f(x) = x^2$ que é uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima e o gráfico da função $g(x) = 2^x$ que é uma curva que tem como assíntota o eixo x e toca o eixo y no ponto (0,1), essa técnica de construção de gráfico torna a álgebra, envolvida em tal problema, mais significativa, no entanto a construção do gráfico de uma função só é bem sucedida com o auxílio do cálculo. É fálcil ver que 2 e 4 são soluções da mesma, de fato:

$$2^2 = 2^2 \text{ e } 4^2 = 2^4.$$

O fato é que esta equação tem um zero negativo. Veja a figura abaixo que mostra em um mesmo plano o gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$.

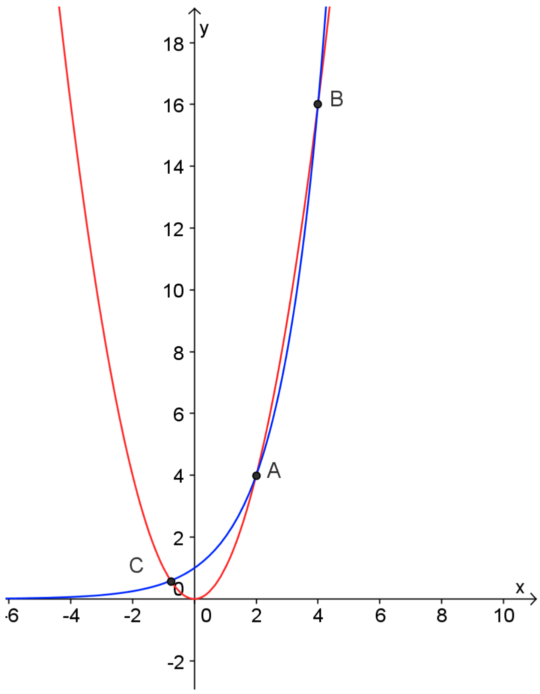


Figura 3.1:

Para encontrarmos a solução negativa dessa equação tomaremos duas funções auxiliares a função $\varphi(x) = 2^x - x^2$ e a função $\psi(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, onde $\ln(x)$ é o logarítimo neperiano de x (ou logarítmo natural) que tem base $e = 2,718281828...$, observe:
$\psi'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$, para cada $x > 0$, $\psi'(e) = 0$, $\psi'(x) > 0$, se $0 < x < e$ e $\psi'(x) < 0$, se $x > e$. Portanto ψ é (estritamente) crescente em $(0, e)$ e decrescente em (e, ∞) como $2 \in (0, e)$, segue-se $\dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{\ln(2)}{2}$; se $0 < x < 2$ e $\dfrac{\ln(x)}{x} > \dfrac{\ln(2)}{2}$; se $2 < x < e$. Para $e < x < 4$, $\dfrac{\ln(x)}{x} > \dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2}$; e $\dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{\ln(2)}{2}$; se $x > 4$.

Assim, os únicos zeros positivos da função $\varphi(x) = 2^x - x^2$ são $x = 2$ e $x = 4$.

Tomando $x < 0$, tem-se $\varphi'(x) = (\ln(2))\,2^x - 2x > 0$, logo $\varphi(x)$ é estritamente crescente em $(-\infty, 0)$. Também $\varphi(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ e $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} > 0$, logo pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), f tem um zero entre -1 e $-\frac{1}{2}$. Vamos mostrar que essa raiz não é um número racional, e portanto é irracional e que esse número não é algébrico, ou seja, ele não é raiz de um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros, logo tal raiz é um número transcendente; o número e citado acima é transcendente.

Demonstração. Vamos mostra que a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ não é um número racional.

De fato, suponhamos por absurdo, que a fração irredutível e positiva $\frac{p}{q}$ fosse tal que $2^{-\frac{p}{q}} = \left(-\frac{p}{q}\right)^2$. Eliminando denominadores e elevando ambos os membros, à potência q, teríamos então:

$$2^p.p^{2q} = q^{2q}.$$

Ora, se p for ímpar, o primeiro membro da igualdade acima é um número inteiro que contém um número ímpar de fatores iguais a 2 enquanto o segundo membro contém um número par (talvez zero) de fatores 2. Se, entretanto, p for par então q será ímpar, logo o primeiro membro é divisível por 2 mas o segundo não é. Então de qualquer forma tem-se uma contradição: concluímos que não existe um número racional $r = \frac{p}{q} > 0$ tal que $2^{-r} = (-r)^2$.

Para mostrar que a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é um número transcendente utilizaremos o Teorema de Gelfond-Schneider[1], cujo enuciado é o seguinte:

Se a, b são números algébricos e b é irracional entao a^b é transcendente (exceto, evidentemente, quando $a = 0$ ou $a = 1$).

Ora, 2 é claramente algébrico e, como vimos, a raiz negativa x de nossa equação é irracional. Se x fosse algébrico então, pelo Teorema de Gelfond-Scheider 2^x seria transcendente. Mas se x é algébrico, x^2 também será. Logo não pode ser $2^x = x^2$.

[1]Para ver uma demostração deste importante teorema veja [13]

Conclusão a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é um número irracional e transcendente.

$\square$

Agora vejamos um método para aproximar numericamente a raiz negativa da equação $2^x = x^2$.

Consideremos a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = 2^{-\frac{x}{2}}$. Se $a \geqslant 0$ for tal que $f(a) = a$, então $-a$ será a raiz negativa de $2^x = x^2$.

Para resolver equações da forma $f(x) = x$, existe um método, chamado "das aproximações sucessivas", visto no capítulo anterior, que funciona muito bem quando a derivada da função cumpre uma condição do tipo $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$, onde λ é constante.

No nosso caso, temos $f'(x) = -\dfrac{\ln(2)}{2}.e^{-\frac{x}{2}}$. Como o valor de $\ln(2) \cong 0,69$, e podemos escrever $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{2}$ e como $0 < \lambda < 1$. Portanto $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$ para todo $x \geqslant 0$. O método das "aproximações sucessivas" opera assim: começamos com qualquer número $x_0 \geqslant 0$. A sequência de aproximações $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ convergirá para um limite $a \geqslant 0$, o qual é a única solução da equação $f(x) = x$.

Então $-a$ será a única solução negativa de $2^x = x^2$. Fazendo os cálculos, e começando com $x_0 = 0$, obtemos as aproximações sucessivas: $x_1 = 1, x_2 = f(x_1) = 0,7071067811, x_3 = f(x_2) = 0,7826540277, ..., x_{18} = 0,7666646959$.

E apartir daí, vêm $x_{18} = x_{19} = x_{20}$ e etc. Isto significa que aproximações melhores para a solução procurada só podem ser obtidas com 11 ou mais casas decimais. Na verdade, x_{18} é uma excelente aproximação para tal raiz; até mesmo exagerada para a maioria dos usos. Então a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é $x \cong -0,7666646959$.

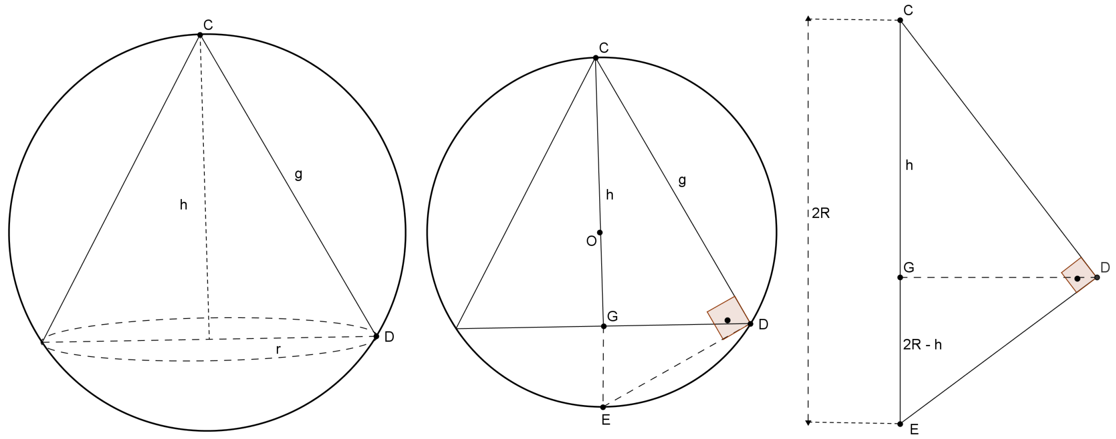
3.3 O Problema do Cone Inscrito em uma Esfera

Um dos conteúdo abordados na 2^a série do Ensino Médio é a geometria espacial, apresentaremos a seguir uma aplicação do Cálculo Diferencial e Integral em problemas de geometria espacial.

Problema 3. *Encontre as dimensões do cone de base circular de máximo volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio 1.*

Inicialmente devemos perceber que este cone deve ser reto afinal de contas se ele for oblíquo, digamos o cone ζ_1, podemos escrever nesta esfera um cone ζ_2 com base igual a base de ζ_1 sendo ζ_2 reto, e nesse caso ζ_2 tem volume maior que ζ_1. Então sendo o cone inscrito na esfera, reto, são válidas as relações abaixo:

$g^2 = 2R.h$ e $r^2 = h.(2R - h)$, veja as figuras abaixo:



Com isso, sendo V o volume do cone teremos:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h.$$

Mas como $r^2 = h.(2R - h)$ e $R = 1$, ficaremos com:

$$V(h) = \frac{1}{3}.\pi.(2h - h^2).h.$$

Que é uma função que dá o valor do volume V do cone em função da altura h do mesmo, sendo que $0 < h < 2$, daí derivando $V(h)$, teremos:

$$V'(h) = \frac{1}{3}.\pi.(4h - 3h^2).$$

Resolvendo a equação $V'(h) = 0$, para obtermos os pontos críticos da função $V(h)$, termos: $\frac{1}{3}.\pi.(4h - 3h^2) = 0 \Rightarrow 4 - 3h = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}$.

E como $V''(h) = \frac{1}{3}.\pi.(4-6h)$ e $V''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}.\pi.\left(4-6.\frac{4}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3} < 0$, pelo teste da derivada segunda $V(h)$ possui um máximo local em $h = \frac{4}{3}$, então o cilidro terá altura $h = \frac{4}{3}$ e raio $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.4 O Problema do Triângulo Circunscrito a Elipse

Na 3^a série do Ensino Médio um conteúdo presente no plano de curso é a geometria analítica, no qual iremos apresentar um problema envolvendo cônicas que é resolvido facilmente com aplicação do cálculo.

Problema 4. *Considere a elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1.$$

Demonstre que, dentre todos os triângulos, com base sobre o eixo dos x, que circunscrevem a elipse acima o que possui menor área é aquele que possui altura igual a 3b.

Observe a figura abaixo:

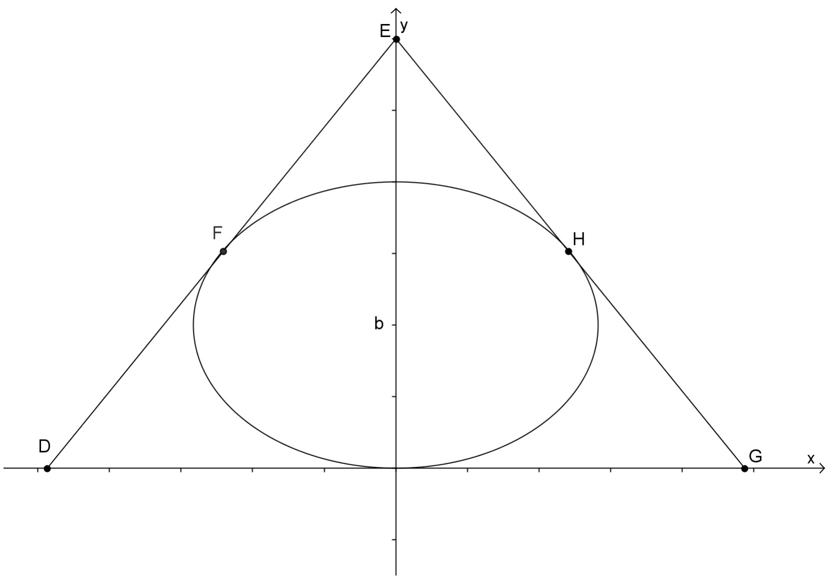


Figura 3.2: Elipse Circunscrita

Demonstração. Temos inicialmente, que para $y \geqslant b$ podemos considerar a função:

$$y = y(x) = b + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a].$$

Considerando a parte superior da elipse, isto é, aquela a qual $y \geqslant b$, tem-se que a equação da reta tangente que passa no ponto $H(x, y(x))$ é dada por

$$\beta - y(x) = y'(x)(\alpha - x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, os pontos de intersecção da reta acima com os eixos coordenados são dados por

$$E = \left(0, y'(x)\left(\frac{y(x)}{y'(x)} - x\right)\right) \text{ e } T = \left(x - \frac{y(x)}{y'(x)}, 0\right).$$

Além disso a área $A(x)$ do triângulo EDG é dada por

$$A(x) = -y'(x).\left[x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right]^2,$$

cuja derivada é

$$\begin{aligned}
A'(x) &= -y''(x).\left[x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right]^2 - 2y'(x).\left[x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right].\left[1 - \left(\frac{y'(x)y'(x) - y(x).y''(x)}{(y'(x))^2}\right)\right] \\
&= \frac{-y''(x).\left[x.y'(x) - y(x\right]^2}{\left[y'(x)\right]^2} - 2.\left[x.y'(x) - y(x)\right].\left[1 - 1 + \frac{y(x).y''(x)}{(y'(x))^2}\right] \\
&= \frac{\left[x.y'(x) - y(x)\right]}{\left[y'(x)\right]^2}.\left[-x.y'(x).y''(x) + y(x).y''(x) - 2.y(x).y''(x)\right] \\
&= \frac{\left[x.y'(x) - y(x)\right]}{\left[y'(x)\right]^2}.\left[-x.y'(x).y''(x) - y(x).y''(x)\right] \\
A'(x) &= -y''(x).\left(x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right).\left(x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right)
\end{aligned}$$

Veja que os dois primeiros termos de $A'(x)$ são diferentes de zero:

$$y''(x) = \frac{-a^3 b}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} < 0 \text{ e } x - \frac{y(x)}{y'(x)} > 0$$

pois é a altura do triângulo EDG; com isso $A'(x) = 0$ se, e somente se,

$$\left[x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right] = 0,$$

o que equivale a termos $x.y'(x) = -y(x)$. Derivando a equação da elipse, obteremos:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{(y - b)y'(x)}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)y'(x).x}{b^2} = 0$$

implicando em:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(y - b)y(x)}{b^2}.$$

E substituindo $\dfrac{x^2}{a^2}$ na equação da elipse, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{[y(x)-b]\,y(x)}{b^2}+\frac{[y(x)-b]^2}{b^2} &= 1\\
[y(x)]^2-by(x)+[y(x)]^2-2by(x)+b^2 &= b^2\\
2y(x) &= 3b.
\end{aligned}$$

Agora, veja que a altura $h(x)$ em questão é exatamente (observe as coordenadas do ponto E)

$$h(x)=y(x)-y'(x).x=2y(x)=3b.$$

Por último, note que nos pontos da elipse tais que $\left[x+\dfrac{y(x)}{y'(x)}\right]=0$, é satisfeita, temos:

$$A''(x)=-2y''(x)x\left[\frac{2y'(x)-y(x)y''(x)}{[y'(x)]^2}\right]>0$$

implicando que o ponto crítico encontrado é de mínimo, como queríamos demosntrar. $\square$

Capítulo 4

Uma generalização da equação $x^2 = 2^x$

Agora vejamos uma pequena generalização das equações apresentadas na seção 3.2.

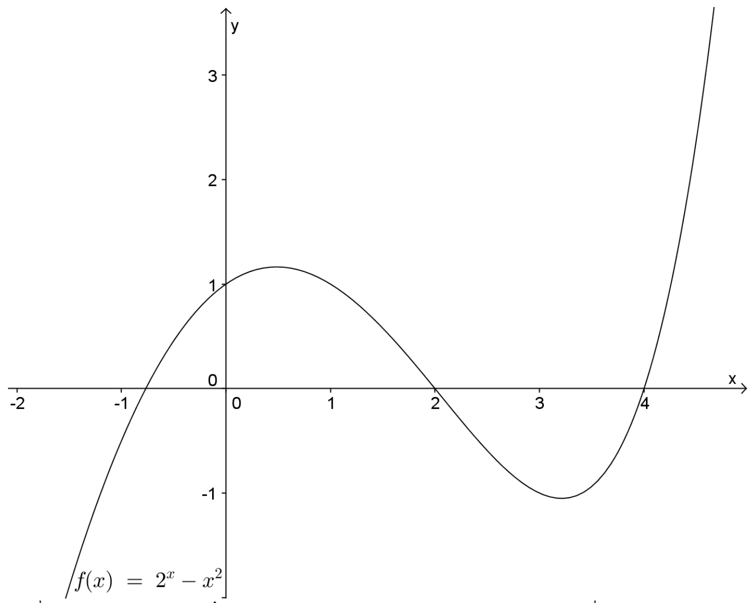
4.1 Equações do tipo $p^x = x^p$, com p Primo e Ímpar

Para tal generalização iremos considerar a função $f(x) = p^x - x^p$, com p primo ímpar e a função $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

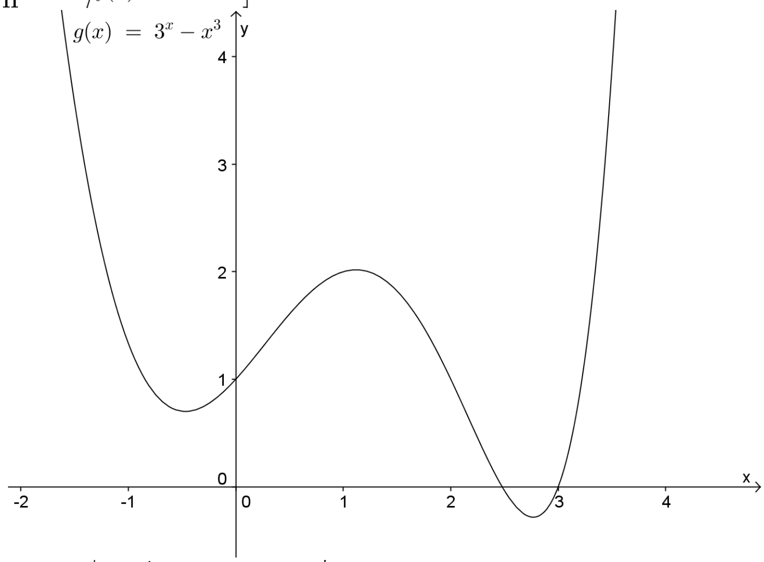
É fácil perceber que $f(x) > 0$, $\forall x < 0$. Logo os zeros de $f(x)$ ocorrem no semi-eixo positivo de Ox e um zero trivial é $x = p$, por outro lado sendo $g(x)$ contínua e crescente em $(0, e)$ e decrescente em $(e, +\infty)$, então g passa por um máximo absoluto em $x = e$. Assim, existe um único $\alpha \in (0, e)$ tal que $g(\alpha) = g(p) = \dfrac{\ln(p)}{p} > 0 = g(1)$, e portanto $\alpha > 1$.

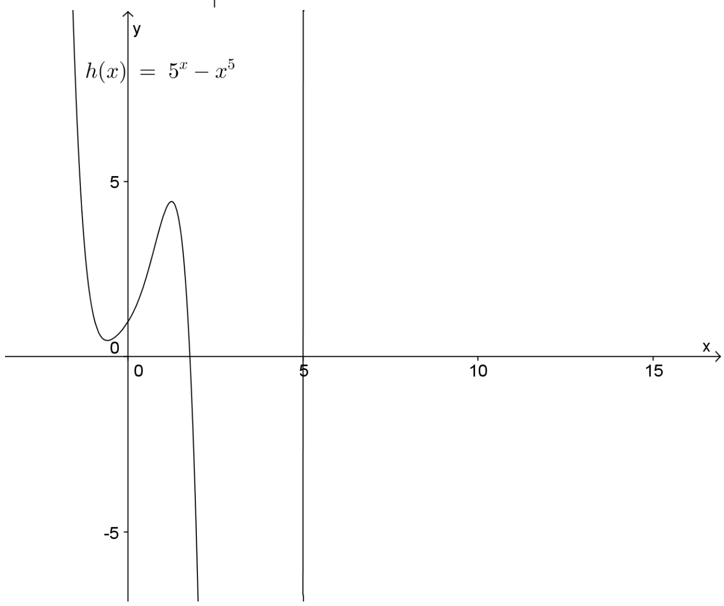
Então nesse caso, $f(x)$ tem exatamente dois zeros $x = \alpha \in (1, p)$ e $x = p$.

Observe as figuras abaixo que mostram o gráfico (ou parte dele) de algumas funções do tipo $f(x) = p^x - x^p$ com p primo.


y
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
3
4
x
-1
$f(x) = 2^x - x^2$

h


$g(x) = 3^x - x^3$
y
4
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
3
4
x


y
$h(x) = 5^x - x^5$
5
0
0
5
10
15
x
-5

Ainda utilizando a função $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ podemos responder ao seguinte questionamento:

Quem é o maior e^{π} ou π^{e}?

Veja que tomando novamente a função $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, $g(x)$ é contínua e crescente em $(0, e)$ e decrescente no intervalo de $(e, +\infty)$, logo como vimos anteriormente $x = e$ é um ponto de máximo absoluto de $g(x)$.

Isso porque,

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \text{ e } g'(e) = 0.$$

E ainda,

$$g''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3} \text{ e } g''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} g(e) &> g(\pi) \\ \frac{1}{e} &> \frac{\ln \pi}{\pi} \\ \pi &> e \ln \pi \\ \ln \pi^{e} &< \pi \\ \pi^{e} &< e^{\pi}. \end{aligned}$$

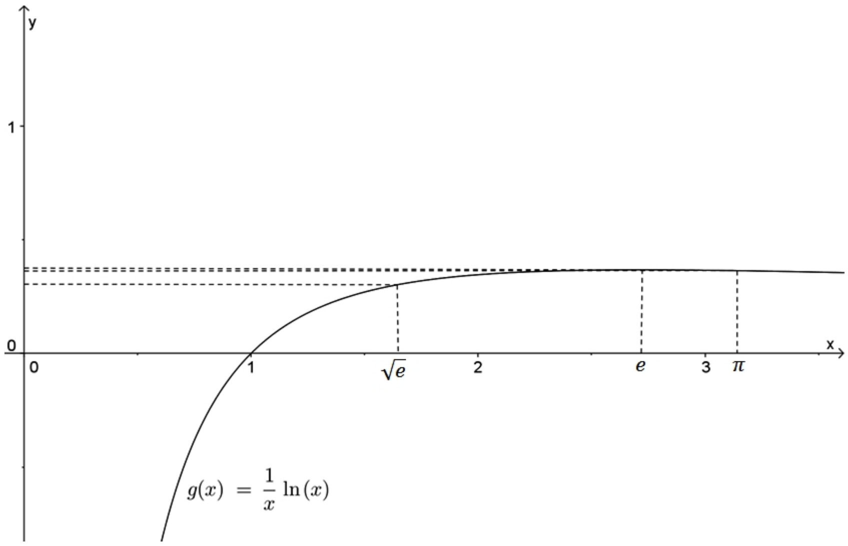


Figura 4.1: Gráfico da função g(x)

Iremos agora elencar algumas definições importantes que foram usadas anteriormente nesse trabalho.

4.1.1 Números Algébricos e Números Transcendentes

Definição 8. *Qualquer solução de uma equação polinomial da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x n - 1 + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_i's$ *são inteiros, é chamado número algébrico.*

Portanto um número α é algébrico se pudermos obter uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. Como consequência disso, qualquer número racional $\alpha = \frac{p}{q}$, é algébrico, porque obviamente α é a raiz da equação

$$qx - p = 0.$$

Da mesma forma, como consequência dessa definição, todo número inteiro, é algébrico.

Definição 9. *Um número real que não é algébrico é transcedente.*

Para mostrar a existência de números transcendentes são necessárias algumas definições e alguns teoremas que fogem ao propósito do nosso trabalho. No entanto, iremos comentar alguns exemplos envolvendo números algébricos e números trancendentes.

Exemplo 6. *Mostre que $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é um número algébrico. Fazendo $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ e elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:*

$$x^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\left(x^2 - 1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 - 2 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

Como $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros α é um número algébrico.

Exemplo 7. *Mostre que para todo $a \in \mathbb{Z}^*$, o número complexo $i\sqrt{a}$ é um número algébrico.*

Para demonstrar esse fato basta perceber que se $x = i\sqrt{a}$, teremos $x^2 = -a$, implicando em $x^2 + a = 0$.

Esperamos com este simples trabalho, ajudar a atividade dos professores que atuam no ensino médio, pois muitas são as dificuldades encontradas pelos mesmos. Vale lembrar que muitas outras aplicações de Cálculo Diferencial e Integral podem ser encontradas nas referências bibliográficas apresentadas.

Referências Bibliográficas

[1] Bastos, Gervásio Gurgel - *Revista Matemática Universitária* N^0 *34*. SBM, 2003.

[2] Colli, Eduardo - *As Certezas do Acaso*, Kit Aventuras na Ciência, USP-UFRJ-UNICAMP, 2013.

[3] Dolce, Osvaldo, José Nicolau Pompeo - *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 10*, 6ª Edição, São Paulo, Atual, 2005.

[4] Eves, H. - *Introdução à História da Matemática, Quinta Edição* Tradução Hygino H. Domigues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

[5] Figueredo, Djairo Guedes - *Números Irracionais e Transcendentes*, 3ª Edição, Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[6] Fundamentos de Cálculo, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

[7] G., Ávila - *Cálculo das funções de uma variável*, vol. 1. LTC, 2003.

[8] Iezzi, Gelson, Carlos Murakami, Nilson José Machado - *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 8*, 6ª Edição, São Paulo, Atual, 2005.

[9] Lima, Elon Lages - *Revista do Professor de Matemática* N^0 *03*. SBM, 1983.

[10] Lima, Elon Lages - *Análise Real volume 1 Funções de Uma Variável*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2009.

[11] Lima, Elon Lages - *Curso de Análise vol. 1*. Projeto Euclides - IMPA, 2009.

[12] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM)*. Brasil. MEC/SEMTEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.

[13] Niven, Ivan - *Numbers: Rational and Irrational*. The L. W. Singer Company New Mathematical Library, 1961.

[14] Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias Volume 2. MEC, 2006.

[15] Ruggiero, Márcio A. Gomes; Lopes, Vera L. R. - *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2ª Edição, São Paulo: Departamento de Matemática Aplicada IMECC - Unicamp, Makron Books, 1996.

[16] Silva, Juscelino P. - *A Derivada e Algumas Aplicações*. EDUFPI, (15) 277–297, 2012.