UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA: PROFMAT/SBM

ADÃO DE AGUIAR BIANO

O ESBOÇO DE GRÁFICOS DE POLINÔMIOS DE 2º E 3º GRAUS USANDO DERIVADAS.

BARRA DO GARÇAS - MT
2015

ADÃO DE AGUIAR BIANO

O ESBOÇO DE GRÁFICOS DE POLINÔMIOS DE 2º E 3º GRAUS USANDO DERIVADAS.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**, linha de pesquisa Análise Numérica.

Orientador: Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto

Barra do Garças - MT

2015

Biano, Adão de Aguiar

O Esboço de Gráficos de Polinômios de 2º e 3º graus usando Derivadas / Adão de Aguiar Biano, Mato Grosso - 2015.

72f.: ibl.

Orientador: Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Mato Grosso. Centro Universitário do Araguaia, Barra do Garças, 2015.

Inclui bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1.O contexto histórico do Cálculo e sua importância no Ensino Médio. 2.Conceitos básicos de Cálculo. 3.O esboço de gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando Derivadas. 4.Aplicando conceitos de Cálculo no dia a dia em sala de aula.

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Avenida Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - Cep: 78060900 -Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8713/8710 - Email : geraldo@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "O esboço de gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas"

AUTOR : Adão de Aguiar Biano

defendida e aprovada em 23/02/2015.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador Doutor(a) Adilson Antônio Berlatto
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Interno Doutor(a) Carlos Rodrigues da Silva
Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Examinador Externo Pós-Doutor(a) Ricardo Nunes de Oliveira
Instituição : Universidade Federal de Goiás - UFG

BARRA DO GARÇAS,23/02/2015.

À Deus.

Agradecimentos

Agradeço a **Deus**, que sempre esteve presente me iluminando nesta longa e difícil jornada, pois sem Ele sei que não chegaria até aqui;

Aos meus pais, **José e Regina**, que são pessoas humildes e batalhadoras e que, apesar das dificuldades encontradas, não mediram esforços para me apoiar e auxiliar durante esta caminhada;

Aos meus irmãos, **Jenilson, Rosana e Vanilza**, que sempre me incentivaram para que eu pudesse chegar até aqui;

À minha esposa **Consuelo**, por me incentivar a concluir este trabalho e pela compreensão nas horas que não pude lhe dar atenção;

À minha turma, **a 1ª Turma do Mestrado Profissional em Matemática de Barra do Garças-MT**, que sempre colaborou comigo e incentivou nas horas de preocupações;

Ao professor **Jocirei**, por ser um dos idealizadores do Curso e ter me recepcionado muito bem em sua casa;

Ao colega de turma **Júlio e sua esposa Divina**, por me receber bem em sua residência e me apoiar sempre;

À **Banca Examinadora**, por ter aceitado ler e avaliar este trabalho.

Água mole em pedra dura,
tanto bate até que fura.

Ditado popular.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta diferenciada para esboçar gráficos de polinômios de 2º e 3º graus, onde sugerimos o uso de derivadas para realizar esta tarefa. Para isto desenvolvemos alguns conceitos básicos de cálculo no início do trabalho, tais como: noções de limites, o problema da reta tangente, definição de derivadas e como derivar funções polinomias. Na sequência trabalhamos outros conceitos prévios de cálculo que nos dará o suporte necessário para chegarmos ao esboço dos gráficos de polinômios de 2º e 3º graus, e finalmente, deixamos no final do trabalho uma sugestão para os professores do ensino médio de como aplicar o que foi proposto, em sala de aula para que os seus alunos tenham uma aprendizagem significativa.

Palavras chave: Derivadas, Ensino Médio, Polinômios.

Abstract

In this work is submitted a differentiated of proposal to draft graphics of polynomials of second and third degrees, where we suggest the use of derivative to accomplish this task. For this we developed some basic concepts of calculus in early labor, such as limits notions, the problem of the tangent line, derivative's definition and how to derive polynomial functions. In the following other previous concepts calculus that will give us the necessary support to reach the outline of graphics polynomials of second and third degrees, and finally leave at the end of work a suggestion for the high school teachers how to apply what was proposed in the classroom so that students have a significant learning.

Keywords: Derivative, High School, polynomials.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

"Os números governam o mundo".

(Pitágoras)

No final do século XIX até meados do século XX era trabalhada a introdução ao cálculo nas escolas secundárias, pois isto estava previsto no currículo. Porém, a partir das décadas de 60 e 70 do século XX o cálculo deixou de fazer parte dos currículos do ensino médio. Desse período até os dias atuais a maioria dos professores não tem ensinado os conceitos básicos de cálculo neste nível de ensino.

Diante deste contexto elaboramos este trabalho com o objetivo de reverter esta situação e para isto deixamos uma sugestão para os professores do ensino médio, de como trabalhar o esboço de gráficos de polinômios de $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ graus usando derivadas.

Veremos que os conceitos são básicos e que é possível de serem aplicados em sala de aula, pois tendo em vista que os alunos já estudaram as operações com polinômios e simplificações algébricas, observamos que se estes dominarem bem esses conteúdos, os mesmos não terão dificuldades em derivar um polinômio, pois estas tarefas são semelhantes.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. O capítulo inicial mostrará um pouco da história do cálculo e em particular o contexto histórico das derivadas,mostrando quais foram os principais matemáticos que contribuiram para o surgimento do cálculo e para chegar até a definição atual de derivada dada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857), segundo ele a derivada é: O limite de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h se aproxima de 0. Assim, a forma da função que serve como o limite da razão anterior dependerá da forma da função dada $y = f(x)$. Além disso, faremos uma abordagem do cálculo no currículo do ensino médio e sua importância para este nível de ensino. Veremos que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a garantir ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar seus conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores, portanto fica clara a importância do cálculo para este nível de ensino.

No segundo capítulo, apresentaremos a nossa proposta para o currículo do ensino médio e alguns conceitos básicos de cálculo que nos auxiliará na compreensão da mesma, tais como: a noção de limites, o problema da reta tangente, a definição de derivada e como derivar funções polinomiais. Nosso objetivo é mostrar uma maneira diferenciada de esboçar gráficos de polinômios de 2º e 3º graus, para isto faremos uso das derivadas para realizarmos esta tarefa, veremos que derivar um polinômio é algo que pode ser tranquilamente trabalhado no ensino médio.

Iniciaremos o terceiro capítulo falando sobre o crescimento e decrescimento de uma função, seus máximos e mínimos e posteriormente, apresentaremos os testes da primeira e segunda derivadas, para compreendermos a concavidade dos gráficos, observamos que estes conceitos estão estritamente relacionados com a primeira e segunda derivada das funções e finalmente faremos um roteiro de como esboçar gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas, além de mostrar alguns exemplos no final do capítulo mencionado.

Finalizando o trabalho, mostraremos no quarto capítulo o motivo pelo qual não trabalhamos com polinômios de grau 4 ou maiores, as diferenças entre os esboços de gráficos dos polinômios de 2º e 3º grau, e veremos que ao avançarmos de 2ºgrau para 3º grau, o nível de dificuldade aumenta em alguns pontos. Além disso, mostraremos como nossa proposta pode ser aplicada em sala de aula, para isto deixaremos algumas sugestões de atividades que podem auxiliar os professores ao abordarem este tema e contribuir para que os alunos tenham uma aprendizagem significativa sobre o mesmo. Nas atividades de esboço de gráficos de 2º grau fizemos um paralelo entre a solução sem uso de derivadas e a solução com o uso de derivadas, e ainda mostramos algumas aplicações práticas para o cotidiano. Já nas atividades de esboço de 3º grau fizemos apenas uma solução, fazendo uso de derivadas, pois não encontramos livros didáticos que traziam essas soluções sem o uso de derivadas.

Para elaboração deste trabalho fizemos uso de pesquisas bibliográficas em livros, artigos e dissertações, além de consultas em alguns sites na internet. Usamos também alguns softwares matemáticos, tais como: GeoGebra, Quick Math e Corel Draw, para construção dos gráficos e na edição do texto usamos o Latex, no qual o editor utilizado foi o TeXnicCenter.

Capítulo 1

O Contexto Histórico do Cálculo e sua importância no Ensino Médio

Neste capítulo abordaremos de forma breve um pouco da história do cálculo e o contexto histórico das derivadas, que foram baseados nos livros de Carl B. Boyer (História da Matemática) e George B. Thomas (O Cálculo-vol.1), além disso, mostraremos como o cálculo é tratado no currículo do ensino médio e veremos por que o cálculo é importante para este nível de ensino.

1.1 Um pouco de História do Cálculo

Alguns dos principais conceitos matemáticos (aqueles que lidam com grandezas e formas) surgiram dentro das mais antigas civilizações e com as tentativas feitas pelos egípcios, babilônios e gregos para solucionar problemas práticos, tais como:

- Como reduzir as taxas cobradas aos agricultores do vale do Nilo tendo em vista a área alagada e tomada pelo rio a cada ano?
- Como dobrar o volume do pedestal da estátua em homenagem ao deus Apolo?

Os problemas acima fizeram com que eles chegassem à resolução de algumas equações, ao cálculo de áreas e volumes de figuras simples. Como retângulo e trapézio; cones e cilindros. Posteriormente, surgiram outros matemáticos que já utilizavam conceitos de cálculo para resolver problemas, podemos citar alguns deles: Pierre de Fermat

(1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677), John Wallis (1616-1703), James Gregory (1638-1675) e outros, porém não havia uma determinada sistematização.

O Cálculo é uma expressão simplificada, adotada pelos matemáticos quando estes se referem à ferramenta matemática usada para analisar, qualitativamente ou quantitativamente, variações que ocorrem em fenômenos que abrigam uma ou mais componentes de natureza essencialmente física. Quando do seu surgimento, no século XVII, o cálculo tinha por objetivo resolver quatro classes principais de problemas científicos e matemáticos daquela época:

1. Determinação da reta tangente a uma curva, em um dado ponto desta.
2. Determinação do comprimento de uma curva, da área de uma região e do volume de um sólido.
3. Determinação dos valores máximo e mínimo de uma quantidade, por exemplo, as distâncias máxima e mínima de um corpo celeste a outro, ou qual ângulo de lançamento proporciona alcance máximo a um projétil.
4. Conhecendo uma fórmula que descreva a distância percorrida por um corpo, em um intervalo qualquer de tempo, determinar a velocidade e a aceleração.

Destes problemas citados acima, ocuparam-se grandes cientistas do século XVII, embora o clímax destes esforços, a invenção ou descoberta do Cálculo, coube a Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Após o estabelecimento dos fundamentos do Cálculo, torna-se possível à análise de problemas físicos de real importância, com precisão e rigor jamais experimentados. Foram estabelecidos os fundamentos da Mecânica dos Sólidos e dos Fluidos e teve início o estudo das Equações Diferenciais e Integrais, que é de suma importância na solução de diversos tipos de problemas relacionados à engenharia e a física.

1.2 Principais contribuições de Newton e Leibniz para o surgimento do Cálculo.

Tanto Newton como Leibniz contribuíram muitíssimo com o surgimento do cálculo, principalmente na parte das derivadas ou Calculo Diferencial e das Integrais ou Cálculo Integral. Além disso, os dois tiveram participações distintas e importantes no desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo. Newton fez outras descobertas voltadas à física como:a lei da Gravitação e a natureza das cores.

Vale ressaltar que em 1665, Newton fez descobertas de como exprimir funções em termos de séries infinitas. Neste mesmo ano ele começou a pensar na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variando continuamente, ou fluentes; tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias e temperaturas. A ligação desses dois problemas ficou conhecida como: meu método.

A grande contribuição de Leibniz à matemática foi o cálculo, mas outros aspectos de sua obra merecem atenção, exemplo: a generalização do teorema binomial ao multinominal - a expansão de expressões como $(x + y + z)^n$ é atribuída a ele, como também a primeira referência no Ocidente ao método de determinantes.

Leibniz, na verdade, foi um dos maiores formadores de notação, inferior apenas a Euler. Foi o primeiro matemático proeminente a usar sistematicamente o ponto para multiplicação e a escrever proporções na forma $a : b = c : d$. O uso de : para divisão é ainda comum. Devemos também a Leibniz o símbolo $\sim$ para é semelhante a. No entanto, os símbolos de Leibniz para diferenciação e integração são seus maiores triunfos no campo da notação. Além disso, Leibniz teve um papel muito importante na lógica.

1.3 História das Derivadas

A derivada tem inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento, além daquelas encontradas nos livros de cálculo, que são aplicações na própria matemática. Um dos exemplos é a utilização da mesma para esboçar gráficos de polinômios.

Curiosamente a derivada surgiu primeiro que o limite. Ela estava presente em problemas geométricos de tangência, por exemplo, como determinar uma reta que intersecta uma dada curva em um único ponto.

No século XVII, Pierre Fermat (1601-1665) utilizou a fórmula $y = tx^n$, onde t é constante e $n = 2, 3, 4, 5, ...$ e ele denominou esta, como sendo as famílias de parábolas superiores. Esta introdução de símbolos algébricos a fim de estudar a geometria de curvas colaborou muito para o desenvolvimento da derivada e do cálculo diferencial e integral como um todo. Foi ele quem desenvolveu um procedimento algébrico para determinar os máximos e mínimos sobre uma determinada curva. Em uma linguagem geométrica, esses pontos pertencem a reta tangente à curva e suas respectivas inclinações é igual a zero.

Christiaan Huygens (1629-1695) inventou um processo algébrico que gerou os pontos de inflexão de uma curva e este fato está relacionado à segunda derivada da função.

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), apesar de realizarem trabalhos independentes entre si, mostraram a relação entre as derivadas e as integrais. Por exemplo, em suas contribuições para o Teorema Fundamental do Cálculo, ambos tinham seguidores que colaboraram para o desenvolvimento do cálculo no decorrer do tempo. Outros matemáticos importantes também colaboraram para o desenvolvimento do mesmo, por exemplo, Jean le Rond d Alembert (1717-1783). Porém somente no século XIX foi dada a definição atual de derivada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857), segundo ele a derivada é: O limite de $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quando h se aproxima de 0. Assim, a forma da função que serve como o limite da razão anterior dependerá da forma da função dada $y = f(x)$. Para mostrar esta dependência, esta nova função é denominada *Derivada*.

Nas seções que seguem veremos como o cálculo está relacionado no currículo do ensino médio e sua importância para este nível de ensino.

1.4 O Cálculo no currículo do ensino médio

De acordo com Brasil (1999), o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a garantir ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores. Os alunos apresentam muitas dificuldades em matemática, tais como, leitura e interpretação de gráficos, álgebra e outros conceitos elementares. Isto pode ser constatado ao observar os resultados do Sistema Nacional de Avaliação Escolar na Educação Básica (SAEB) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com relação à Matemática. Quando esses alunos ingressam no nível superior em áreas que envolvem ciências exatas, estes têm uma enorme dificuldade nas disciplinas de Cálculo e nas que estão relacionadas a ele. Trabalhos mostram que o índice de reprovação em Cálculo é muito alto em várias faculdades do Brasil. Diante deste contexto nos perguntamos: Por que não ensinar conceitos básicos de Cálculo no Ensino Médio? Do mesmo modo que fizemos este questionamento, o professor Geraldo Ávila, em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, também questiona a inclusão de conceitos básicos de Cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Segundo Carvalho (1996), já houve no currículo das escolas secundárias do Brasil uma pequena introdução ao Cálculo, primeiramente em 1891, com a reforma por Benjamim Constant no início da República e posteriormente no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando no currículo escolar oficialmente até 1961. Porém, nas décadas de 60 e 70 o Cálculo deixou de fazer parte dos currículos brasileiros após a reforma da Matemática Moderna.

Segundo Ávila (1991, p.3), o Cálculo vem desempenhando um papel de fundamental importância no desenvolvimento das ciências e da tecnologia e, em relação ao currículo de matemática no ensino médio, o autor diz o seguinte: descartá-lo do ensino é grave, porque deixaria de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Atualmente, alguns livros didáticos do Ensino Médio abordam conceitos básicos de Cálculo, como é o caso, por exemplo, de Giovani, J.R.; Bonjorno, J.R.(2000) que introduzem a noção de limites e a ideia de soma infinita ao se trabalhar com a soma de termos de uma progressão geométrica de razão positiva e menor do que 1. Neste, livro do 1º ano do Ensino Médio, os autores trabalham estes conceitos com uma linguagem acessível aos alunos, para que os mesmos possam ter uma melhor compreensão dos mesmos.

O livro Matemática: ensino médio, v. 3 de Kátia C. S. Smole; Maria I. de S. V. Diniz (2010), introduz conceitos básicos de Derivada, tais como, velocidade instantânea de uma função, interpretação de derivada, função derivada, sinal da derivada e pontos máximo e mínimo de uma função. Além disso, aborda noções intuitivas de limites, mas somente com a finalidade de definir derivadas como limites.

Já o livro de Dante, L. R. Matemática: contexto e aplicações. V. 3. (2010), aborda os conceitos de Derivadas sem mostrar as noções intuitivas de limites, porém o autor expõe de maneira mais detalhada esses conceitos, mostrando as principais propriedades operatórias das derivadas, aplicações e interpretação geométrica. Observe que os dois livros citados acima são do 3º ano do ensino médio e como sabemos os conceitos de funções são trabalhados logo no 1º ano desta mesma etapa, assim, seria mais viável que as noções intuitivas de derivadas fossem trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio e não no 3º ano. Observe o que diz Ávila (1996) sobre esse assunto: "o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções". Na visão do autor, o ensino de derivada é muito importante para compreender inúmeras propriedades das funções. Se seu ensino for ministrado desde a primeira série do Ensino Médio, pode ser trabalhado de forma interdisciplinar, relacionando à Física com a Matemática, além disso, nos auxilia nos estudos de polinômios e de outras aplicações científicas. Desse modo, o ensino das ideias intuitivas do cálculo pode ser um instrumento poderoso na aprendizagem de diversos conteúdos do Ensino Médio.

> O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e poder de alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, um uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a derivada de uma função. (ÁVILA, 1991, p.4).

O fato de introduzir os conceitos básicos de derivadas no ensino médio não vai aumentar os conteúdos programáticos do currículo escolar, mas sim contextualizar as principais propriedades das funções. Segundo Ávila (1991),"a ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão isto sim, mal estruturado". Os professores ocupam a maioria do tempo para introduzir um extensa nomenclatura com pouca utilidade de aplicação, porém seria mais viável que parte deste tempo fosse utilizada para se trabalhar com as noções de cálculo e aplicações, contemplando assim, o que está proposto nos PCN.

1.5 A importância do Cálculo no Ensino Médio

O índice de reprovação nas disciplinas de cálculo é muito alto na maioria das universidades do Brasil e muitas destas trabalham em seu currículo com uma disciplina de Pré-Cálculo, Introdução ao Cálculo ou Fundamentos de Matemática, pois as dificuldades dos alunos são muito grandes.

Diante deste contexto, se os conceitos de cálculo fossem trabalhados no ensino médio, poderíamos de certa forma contribuir para a melhoria do desempenho dos alunos nas universidades nas disciplinas de cálculo. Além disso, o cálculo é muito importante para a formação da educação básica, pois ele tem varias aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Observe o que diz Ávila:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, nas ideias que tem grande relevância numa variedade de aplicações cientificas no mundo moderno. (ÁVILA, 1991, p.3.)

Fica clara a importância do cálculo no ensino médio, pois podemos trabalhar a realidade dos alunos usando aplicações do cálculo.

De acordo com Ávila, descartar o Cálculo do ensino é grave, pois deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Cálculo

Neste capítulo apresentaremos nossa proposta de trabalho e mostraremos alguns conceitos básicos de cálculo que nos auxiliará no decorrer do texto. As ideias desse capítulo estão baseadas nas Notas de Cálculo para o PROFMAT de Abramo Hefez e no livro de Geometria Analítica de Gelson Iezzi.

2.1 Como esboçar gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas.

Durante a prática docente nós professores percebemos que os alunos têm uma enorme dificuldade em esboçar gráficos de polinômios de primeiro e segundo grau. Já os gráficos de terceiro grau na maioria das vezes não são trabalhados em sala de aula e quando trabalhados, são expostos de maneira errônea pelos professores, que pedem para que os alunos atribuam valores quaisquer para x e ache um valor correspondente para y.

O uso do Cálculo no Ensino Médio é muito importante, pois através dele podemos trabalhar os conceitos de derivadas e aplicá-los na construção de gráficos de polinômios.

Observe o que diz Ávila:

> Seria muito proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa. (1991, p.5)

Em particular o uso de derivadas no ensino médio pode e deve ser trabalhada para facilitar os esboços de gráficos dos polinômios e fazer com que os alunos tenham uma aprendizagem significativa sobre esses conceitos.

É neste contexto que surgiu a ideia de escrevermos este trabalho e deixar aqui uma sugestão para os professores aplicarem as derivadas no esboço de gráficos dos polinômios mencionados anteriormente.

Em busca de uma resposta para nosso problema de pesquisa, veremos nas próximas seções alguns conceitos básicos de cálculo, que serão os pré requisitos para chegar ao produto final do que foi proposto.

2.2 Noções de Limites

Ao estudarmos progressões geométricas no ensino médio, tivemos o primeiro contato com a noção de limite. Este fato podia ser percebido ao estudarmos, por exemplo, o comportamento da sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, quando n tende ao infinito. É fácil ver que, à medida que n cresce o valor de $\frac{1}{2^n}$ se aproxima cada vez mais de zero. Portanto, essa sequência é convergente, ou seja, seu limite quando n tende ao infinito é zero. Denotamos por:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Além disso, podemos usar as funções para compreender o conceito de limite. Por exemplo, vamos analisar o que ocorre com os valores de $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2}$, de domínio $\mathbb{R} - \{2\}$, quando x se aproxima de 2. Como $x \neq 2$, dividindo o numerador e o denominador por $x - 2$, obtemos $f(x) = \dfrac{3x(x-2)}{x-2} = 3x$, observe o gráfico 2.1:

Agora, vamos atribuir valores próximos de 2 para x, tanto menores quanto mai-

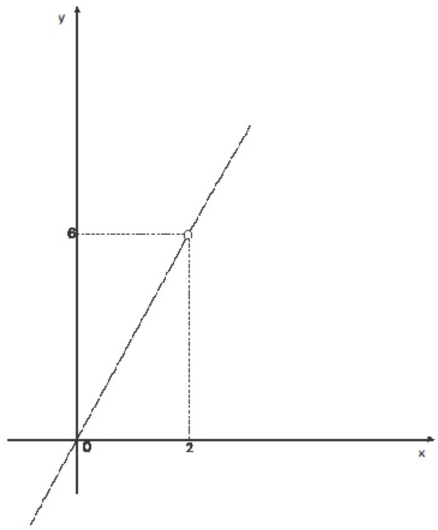

Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2}$

ores e verificar o que ocorre com a imagem dos mesmos. Observe:

$$f(1,99) = 5,97$$

$$f(1,999) = 5,997$$

$$f(1,9999) = 5,9997$$

$$f(1,99999) = 5,99997$$

e

$$f(2,01) = 6,03$$

$$f(2,001) = 6,003$$

$$f(2,0001) = 6,0003$$

$$f(2,00001) = 6,00003$$

Os cálculos e análise do gráfico 2.2 nos mostram que, para x cada vez mais próximos de 2, $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos de 6. Logo, o limite de $f(x)$,

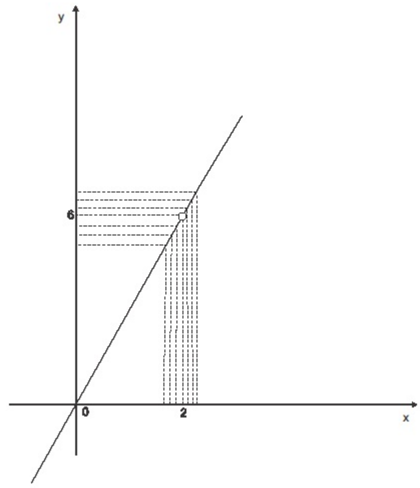

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = 3x$ com x tendendo a 2

para x tendendo a 2 é 6. Em símbolos temos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6.$$

Em outras palavras, dizemos que $f(x)$ se aproxima de b quando x se aproxima de a, se toda possível sequência de valores de x, pertencentes ao domínio da função tendendo para a (mas diferentes de a), corresponde a uma sequência de valores de $f(x)$ tendendo para b. Observe o gráfico 2.3:

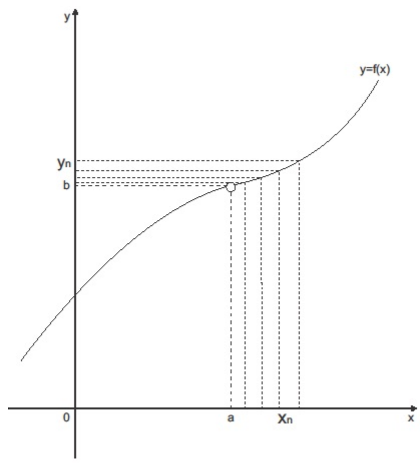

Figura 2.3: Gráfico de sequências tendendo a a

Generalizando:

Definição 1 *Seja f uma função definida para todo número real em algum intervalo aberto* *contendo a, exceto possivelmente o próprio número a. O limite de $f(x)$ quando x tende a a será b, escrito como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, se a seguinte afirmativa for verdadeira: dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \epsilon$.*

Observação 1 *No cálculo do $\lim_{x\to a} f(x)$, estamos interessados no comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não no que ocorre com $f(x)$ para $x = a$.*
No exemplo acima, existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, mas não existe $f(2)$.

2.3 O Problema da Reta Tangente

Dada uma função f, considere $y = f(x)$, x_0 um ponto do domínio de f e $x_1 = x_0+h$, onde x_1 pertence ao domínio. Considere também os pontos distintos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$ sobre este gráfico e a reta s secante que passa por eles. Vamos considerar o caso em que $h > 0$. O coeficiente angular da reta s é:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observe o gráfico 2.4:

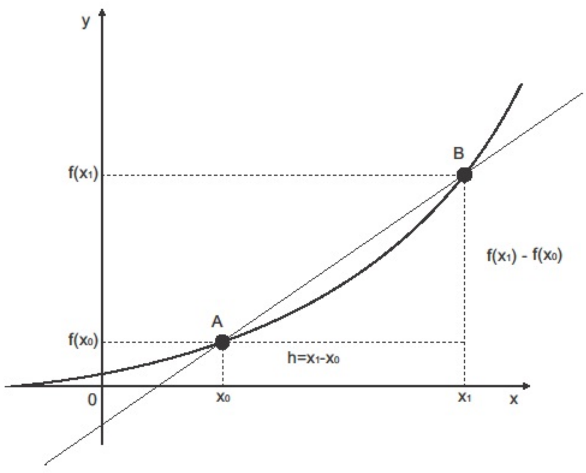

Figura 2.4: Reta secante a uma curva

Quando x_1 tende a x_0, o coeficiente angular de s tende a

$$\lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Quando h se aproxima de zero (ou seja, quando x_1 se aproxima de x_0), obtemos várias retas secantes que cortam a curva em dois pontos A e B_i, cada vez mais próximos. Veja a figura 2.5:

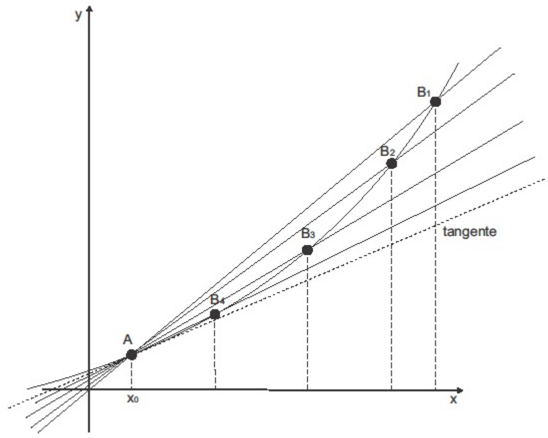

Figura 2.5: Gráfico com algumas retas secantes e uma tangente

Consequentemente quando $x_0 + h$ se aproxima de x_0 então os pontos $f(x_0 + h)$ e $f(x_0)$ onde a secante corta a curva ficam cada vez mais próximos, desse modo estas secantes se aproximam cada vez mais da tangente em x_0.

Quando h tende a 0, e o quociente $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, se aproxima de um determinado valor, então esse deverá ser o coeficiente angular da reta tangente. Assim, definimos a reta tangente como a reta que passa por A e cujo coeficiente angular é dado por,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observação 2 *Não há reta tangente no ponto dado, se o limite acima não existir.*

2.4 Definição de Derivada

Sejam f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$.

Assim, se uma função possui uma derivada em x_0, então esta será derivável em

x_0. Ou seja, a função f será derivável em x_0 se $f'(x_0)$ existir. A função será derivável em um intervalo aberto, se ela for derivável em todo número nesse intervalo aberto.

Nas seções seguintes, desenvolveremos alguns cálculos que serão úteis nos próximos capítulos. Estaremos interessados em funções polinomiais, por isso precisamos de saber quais são as derivadas das funções constantes, soma e produto de duas funções e de funções do tipo $f(x) = x^n$.

2.5 Derivada da Função Constante

Seja $f(x) = c$ uma função constante. Assim, o gráfico de f é uma reta horizontal(figura 2.6), que tem coeficiente angular igual a zero. A reta tangente em qualquer ponto é a própria reta, portanto, também tem coeficiente angular igual a zero. Resumindo: se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$. Fazendo o cálculo do limite para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

2.6 Derivada da Soma de duas funções

Vamos provar que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas destas funções.

Proposição 1 *Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I. Se duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função soma $f + g$ é derivável em x_0 e vale que:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

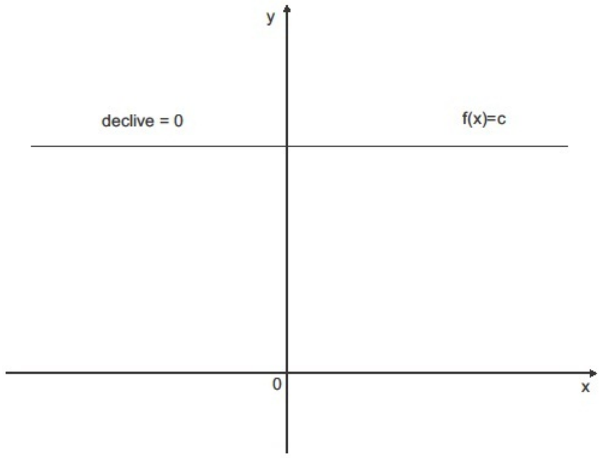

Figura 2.6: Função constante

Demonstração: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. Então: $(f+g)(x+h)-(f+g)(x) = f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x)) = (f(x+h)-(f(x))+(g(x+h)-g(x))$ Portanto,

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

Neste caso os limites existem, pois são deriváveis em x_0.

2.7 Funções Contínuas

Dizemos que a função f é contínua no número a se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais dessas condições não forem verificadas em a, a função f será descontínua em a.

Exemplo 1 *Vamos verificar se as funções abaixo são contínuas nos pontos indicados.*

a) $f(x) = x^2 + 3$, *em* $x = 2$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases}$, *em* $x = 0$

a) Temos que: $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. Então $f(2)$ existe. Além disso, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, pois $\lim_{x\to 2^+} x^2 + 3 = \lim_{x\to 2^-} x^2 + 3 = 2^2 + 3 = 7$. Portanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 7$. Logo, f é contínua em 2. Observe o gráfico 2.7:

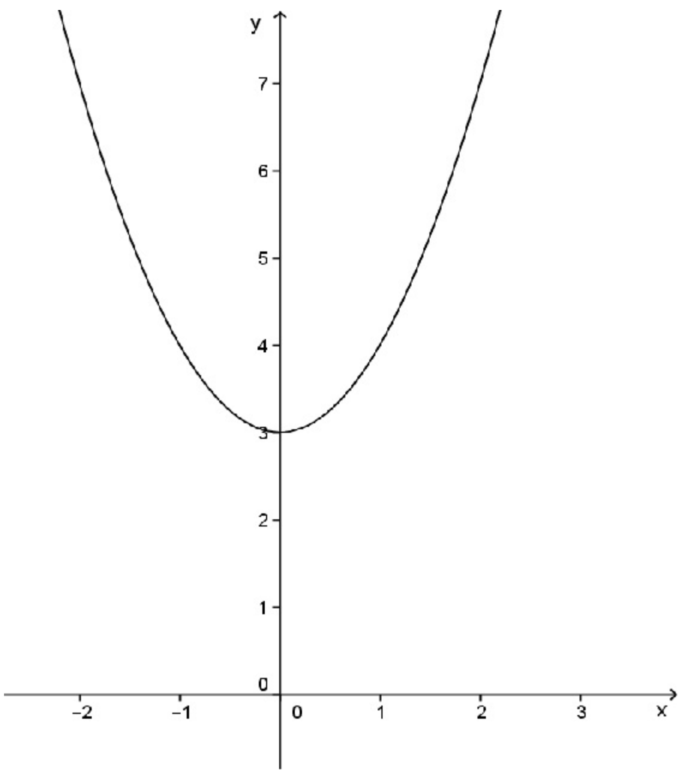

Figura 2.7: $f(x) = x^2 + 3$ é contínua em 3

b) Temos que: $g(0) = 0$. Além disso, $\lim_{x\to 0} g(x)$ é infinito, pois $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Porém, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ não é $g(0)$, então g não é contínua em 0. Observe o gráfico 2.8:

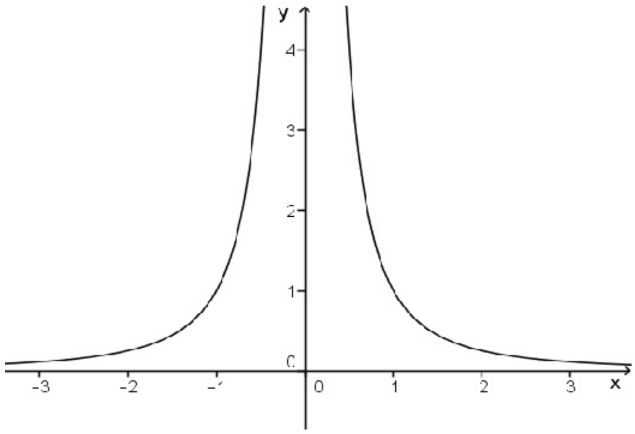

Figura 2.8: $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é descontínua em 0.

Teorema 2 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em $a \in I$ então f é contínua em a.*

Demonstração: Temos que: $f(a+h) - f(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}.h.$
Passando ao limite quando h tende a 0:

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \lim_{h\to 0} h.$$

Assim, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0} h = 0$.
Portanto,

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h) - f(a)] = f'(a).0 = 0$$

e isso mostra que f é contínua em a.

2.8 Derivada do Produto de duas funções

Nesta seção nosso objetivo é obter uma fórmula para a derivada do produto das funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Proposição 3 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um intervalo I. Se duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função produto $(fg)(x)$ é derivável em x_0 e vale que*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Demonstração:Temos que,

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h}.$$

Se $f(x+h).g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h).g(x+h) - f(x+h).g(x) + f(x+h).g(x) - f(x).g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h).\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h).\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h). \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x). \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Como f é derivável em x então f é contínua em x, logo, $\lim\limits_{h\to 0}(x+h) = f(x)$. Também, $\lim\limits_{h\to 0} g(x) = g(x)$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

resultando assim em:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

2.9 Derivada do Quociente de duas funções

Nesta seção nosso objetivo é obter uma fórmula para a derivada da função $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)$.

Proposição 4 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um intervalo não trivial I.*

Se duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, então a função $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ é derivável em x_0 e vale que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Demonstração: Seja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x).g(x)$ ao denominador, então

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x)}{h.g(x).g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[g(x)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \left[f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x).g(x+h)} =$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x)\lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0} g(x+h)}$$

Como g é derivável, em x, então g será contínua em x; assim temos que $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.
Além disso, $\lim\limits_{h \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim\limits_{h \to 0} f(x) = f(x)$.
Com esses resultados e as definições de $f'(x)$ e $g'(x)$ obtemos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo 2 *Vamos calcular a derivada da função:*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1)'.x^2 - 1.(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0.x^2 - 1.2x}{x^4} = -\frac{2x}{x^4}$$

2.10 Derivada da Potência

Vamos demonstrar a proposição abaixo em duas partes: na primeira parte encontraremos a derivada de x^n para $n > 0$ usando a derivada do produto e indução. Na segunda parte, encontraremos a derivada de x^n para $n < 0$ usando a derivada do quociente.

Proposição 5 *Seja $f(x) = x^n$ derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $n < 0$. Em ambos os casos:*

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

Demonstração: Se $n = 0$ o resultado se segue imediatamente, pois $x^0 = 1$, cuja a derivada é 0. Provaremos o caso $n > 0$ por indução. É válido para $n = 1$, pois $f(x) = x^1 = x$ e $f'(x) = 1 = 1.x^{1-1} = x^0$. Suponha que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = kx^{k-1}$, então, aplicando a regra do produto, temos que $g(x) = x^{k+1} = x.x^k$ é derivável e $(x^{k+1})'(x.x^k)' = x'.x^k + x.(x^k) = x^k + kxx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k$, o que completa a prova do caso em que $n > 1$. Suponha agora que $n < 0$, então $n = -m$, com $m > 0$ e $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, se $x \neq 0$ então, pela derivada do quociente $\frac{1}{x^m}$ é derivável e vale que:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'(x^m) - 1(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Exemplo 3 *Vamos encontrar a derivada da função $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.*

Usando as propriedades das derivadas da soma, da potência e da constante, temos que:

$$(x^3 + x^2 + 1)' = (x^3)' + (x^2)' + (1)' = 3.x^{3-1} + 2.x^{2-1} + 0 = 3x^2 + 2x$$

2.11 Polinômios

Definição 2 *Chamamos de expressão polinomial ou polinômio na variável real x toda expressão da forma: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, em que: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, , a_2, a_1, a_0$ são números reais e o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão,com $n \geq 0$. Se o polinômio for constante, então seu grau é zero, caso o polinômio seja nulo, então ele não possui grau.*

Observe alguns exemplos de expressões polinomiais:

- $2x + 5$, expressão polinomial de grau 1;
- $x^2 + 2x + 1$, expressão polinomial de grau 2;
- $x^3 + 2x$, expressão polinomial de grau 3.

2.11.1 Função Polinomial

Dados os números reais: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...a_2, a_1, a_0, n \in \mathbb{N}$, a função P de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, é denominada função polinomial ou simplesmente polinômio.

As expressões $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, ..., a_2x^2, a_1x^1, a_0$ são chamados de termos; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes de P, e x é a variável real dessa função.

Assim:

- $c(x) = 5$ é uma função polinomial de grau 0 (função constante) ou um polinômio de grau 0;
- $f(x) = 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 1 (função afim) ou um polinômio de grau 1;
- $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2 (função quadrática) ou polinômio de grau 2;
- $h(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ é uma função polinomial de grau 3 ou um polinômio de grau 3.

Definição 3 *A raiz ou zero de uma função polinomial $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, $a_n \neq 0$ é o número real c, tal que $P(c) = 0$.*

2.11.2 Derivada de um Polinômio

Seja o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$,$\mathrm{a}_n \neq 0$, então aplicando a derivada da soma, da potência e da constante, temos que a derivada de $P(x)$ é dada por:

$$P'(x) = n.a_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + 2.a_2x^1 + 1.a_1x^0 + 0.$$

Exemplo 4 *Vamos calcular a derivada dos polinômios abaixo:*

a) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 3$

b) $Q(x) = x^3 - x^2 + 5$

a) Temos que: $P'(x) = 3.2x^{3-1} + 2.3x^{2-1} - 1.5x^{1-1} + 0 = 6x^2 + 6x - 5$

b) Temos que: $Q'(x) = 3.x^3 - 2.x^2 - 1 + 0 = 3x^2 - 2x$

Capítulo 3

O esboço de gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas

Este capítulo mostrará quais são os conceitos prévios que devemos ter antes de trabalhar o esboço dos gráficos dos polinômios, além disso, mostraremos aqui quais são os passos necessários para chegar ao esboço do gráfico de um polinômio dado. As ideias desse capítulo estão baseadas nas Notas de Cálculo para o PROFMAT de Abramo Hefez e no livro de Cálculo 1 de Louis Leithold.

3.1 Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Vamos relacionar a propriedade de crescimento de uma função e sua derivada. A figura 3.1 abaixo mostra uma parte do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 1$. Observe que a função é crescente no intervalo $[-1, 0]$ e decrescente no intervalo $[0, 1]$. No intervalo em que é crescente, a reta tangente a um ponto qualquer é uma reta crescente (portanto a derivada da função é positiva) e no intervalo em que é decrescente, a reta tangente a um ponto qualquer é uma reta decrescente (portanto a derivada da função é negativa). A derivada é nula em $x = 0$.

Desse modo, a relação entre crescimento e derivada é a seguinte: a função é crescente nos intervalos de derivada positiva e decrescente nos intervalos de derivada negativa. Utilizando o Teorema do Valor Médio citado abaixo, vamos verificar o que foi explicado acima:

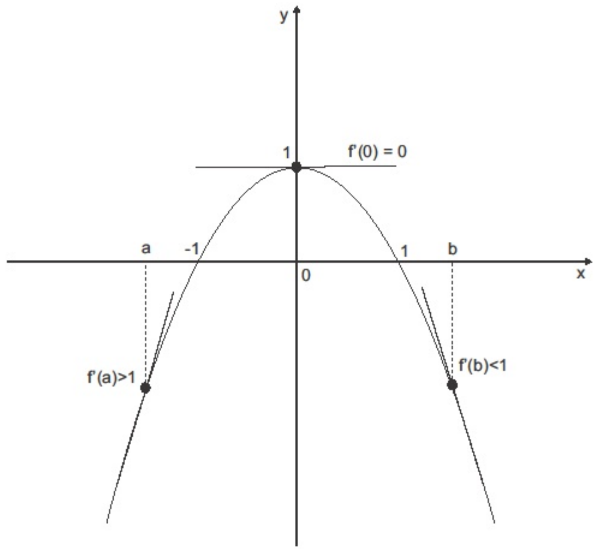

Figura 3.1: Gráfico ilustrando o crescimento e decrescimento de uma função

3.1.1 Teorema do Valor Médio

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De fato, vamos mostrar que:

Proposição 6 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) então:*
a) f é não decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.
b) f é não crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração: a) Suponha que f seja não decrescente em $[a, b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$. Se $h > 0$, temos $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente: $f(x + h) \geq f(x)$ implica que $f(x + h) - f(x) \geq 0$ implica que $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$.
Se $h < 0$, temos $x + h < x$ e, como f é não decrescente:
$f(x + h) \leq f(x)$ implica que $f(x + h) - f(x) \leq 0$ implica que $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$.

Em ambos os casos, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Portanto,

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Suponha agora que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Sejam $x_0, x_1 \in [a,b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \geq 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geq 0$ implica que $f(x_1) \geq f(x_0)$ e, portanto, f é não decrescente. Por outro lado, se vale que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então fica garantido que $f'(c) > 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) > 0$ implica que $f(x_1) > f(x_0)$, isso mostra que f é crescente.

b) Suponha que f seja não crescente em $[a,b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$. Se $h < 0$, temos $x + h < x$, usando o fato de que f é não crescente: $f(x+h) \geq f(x)$ implica que $f(x+h) - f(x) \geq 0$ implica que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$.

Se $h > 0$, temos $x + h > x$ e, como f é não crescente:

$f(x+h) \leq f(x)$ implica que $f(x+h) - f(x) \leq 0$ implica que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$.

Em ambos os casos, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Portanto,

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0.$$

Suponha agora que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Sejam $x_0, x_1 \in [a,b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do valor médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \leq 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \leq 0$ implica que $f(x_1) \leq f(x_0)$ e, portanto, f é não decrescente. Por outro lado, se vale que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então fica garantido que $f'(c) < 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) < 0$ implica que $f(x_1) < f(x_0)$, isso mostra que f é crescente.

Nos exemplos a seguir iremos estudar os intervalos de crescimento e decrescimento de algumas funções.

Exemplo 5 *Seja $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento desta função.*

Como $f'(x) = 2x - 5$, então se $f'(x) > 0$ implica que, $2x - 5 > 0$, assim $2x > 5$ implica que, $x > \dfrac{5}{2}$ e $f'(x) < 0$ implica que, $x < \dfrac{5}{2}$.

A derivada tem valor zero em $x = \dfrac{5}{2}$. O valor da função no ponto $x = \dfrac{5}{2}$ é $f(\dfrac{5}{2}) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5.\left(\dfrac{5}{2}\right) + 6 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{2} + 6 = -\dfrac{1}{4}$. Portanto, o trinômio decresce (derivada negativa) no intervalo $(-\infty, \dfrac{5}{2})$, atinge o ponto $V = (\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{4})$ e passa a crescer (derivada positiva). O vértice é um ponto de mínimo da função.(Ver gráfico 3.2) Vamos representar os sinais de $f'(x)$ pela tabela a seguir:

Intervalo	Sinal de f'	f
$x < \dfrac{5}{2}$	Negativo (-)	Decrescente
$x > \dfrac{5}{2}$	Positivo (+)	Crescente

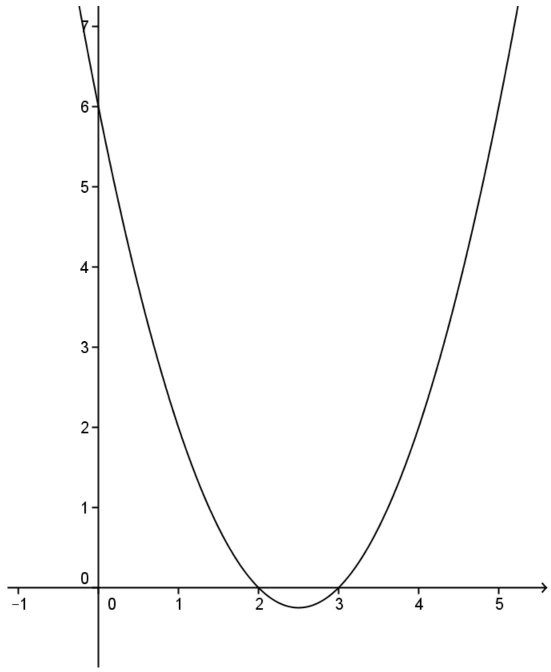

Figura 3.2: Gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Exemplo 6 *Seja* $f(x) = x^3 - 3x$. *Vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento desta função.*

Vamos verificar os sinais da derivada $f'(x)$. Como $f(x) = x^3 - 3x$, então $f'(x) = 3x^2 - 3$. O gráfico de $f'(x) = 3x^2 - 3$ é uma parábola voltada para cima, com zeros em $3x^2 - 3 = 0$ então $x = \pm 1$. Desse modo, os sinais de $f'(x)$ são os seguintes:

- $f'(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > 1$;
- $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 1$.

Vamos representar os sinais de $f'(x)$ pelo diagrama a seguir:

Intervalo	Sinal de f'	f
$x < -1$	Positivo (+)	Crescente
$-1 < x < 1$	Negativo (-)	Decrescente
$x > 1$	Positivo (+)	Crescente

Agora vamos determinar os valores da função nos pontos $x = \pm 1$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) = 2$$

$$f(1) = 1^3 - 3.1 = -2$$

Portanto, podemos concluir que:

1. A função é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$ atingindo o ponto $P = (-1, 2)$;
2. A função é decrescente no intervalo $(-1, 1)$, atingindo o ponto $Q = (1, -2)$;
3. A função é crescente no intervalo $(1, \infty)$. Observe o gráfico 3.3:

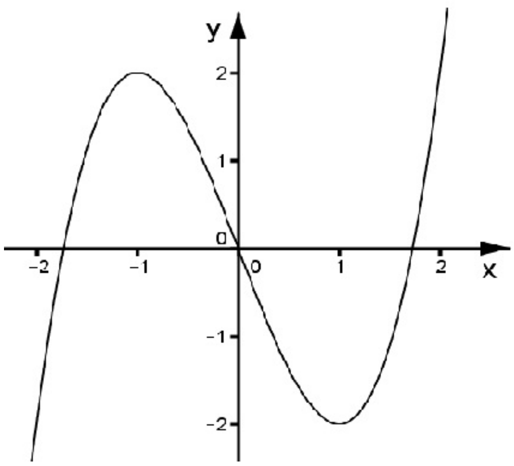

Figura 3.3: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$

3.2 Máximos e Mínimos

Definição 4 *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D.*

Definição 5 *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D.*

Observação 3 *Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados valores extremos da função.*

Exemplo 7 *A função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-2)^2$ possui máximo absoluto em $x = -1$ e mínimo absoluto em $x = 2$.*

Definição 6 *Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.*

Definição 7 *Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f.*

Observação 4 *Os pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados extremos locais.*

Exemplo 8 *A função $f(x) = x^2$ tem mínimo local e absoluto em $x = 0$ (Figura 3.4).*

A função $f(x) = x^3$ não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo absolutos. Também não possui extremos locais (Figura 3.5).

Desse modo, vimos que uma função pode ou não ter máximos e mínimos absolutos e relativos, porém devemos saber como determinar quando uma função tem valores extremos e como identifica-los. Para melhor compreendermos este fato, veremos o teorema abaixo:

Teorema 7 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.*

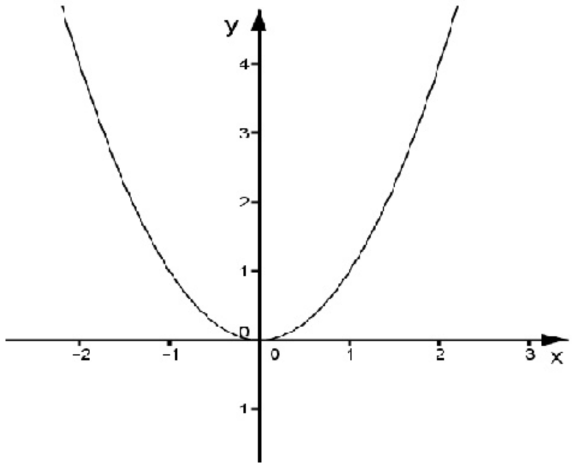

Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = x^2$

Demonstração: Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é análoga. Como f é derivável em c, então

$$lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) < f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{3.1}$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{3.2}$$

Comparando as desigualdades 3.1 e 3.2 e considerando que são o mesmo número, daí temos que

$$lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0.$$

Definição 8 *Um ponto c no domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguinte casos:*

- *f não é derivável em $x = c$;*

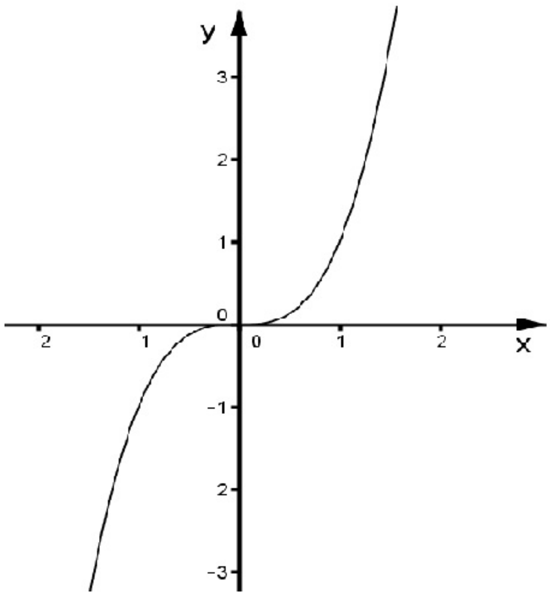

Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = x^3$

- *f é derivável em c e $f'(c) = 0$.*

Assim, podemos reescrever o Teorema 7 como: Se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto critico de f.

3.3 Teste da primeira derivada

Proposição 8 *Seja a função $f = [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) e seja c um ponto crítico de f.*
a) Se f' passa de positiva para negativa em c então f tem máximo local em c;
b) Se f' passa de negativa para positiva em c então f tem mínimo local em c;
c) Se f' não muda de sinal em c então não tem máximo nem mínimo local em c.

Demonstração: a) Se f' passa de positiva para negativa em c então existem $x_0, x_1 \in (a, b)$,$x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$. Pela proposição 6, f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$, segue que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c.
b) Analogamente, se f' passa de negativa para positiva em c, então existe intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. Portanto, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$.

c) Seja $I \subset [a,b]$ um intervalo contendo c. Como f' não muda de sinal em c então há um intervalo $[x_0,x_1]$ contendo c tal que f é crescente (respectivamente, decrescente) em $[x_0,c]$ e contínua crescente (respectivamente, decrescente) em $[c,x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de c o que for necessário, podemos supor que $[x_0,x_1] \subset I$. Portanto, $f(c)$ não pode ser valor máximo e nem mínimo em I.

Exemplo 9 *Vamos aplicar o Teste da primeira derivada para determinar os extremos locais da função*

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5.$$

Primeiro vamos determinar os pontos críticos de f: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Fazendo $f'(x) = 0$, temos que: $3x^2 - 4x + 1 = 0$, e isso implica que:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1) = 0$$

se, e somente se, $x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = 1$.

Agora, vamos analisar o sinal da derivada em uma vizinhança de $x = \dfrac{1}{3}$ e $x = 1$.

Intervalo	Sinal de f'	f
$x < \frac{1}{3}$	Positivo (+)	Crescente
$\frac{1}{3} < x < 1$	Negativo (-)	Decrescente
$x > 1$	Positivo (+)	Crescente

Portanto:

- $x = 1$ é mínimo local, pois f' passa de negativa para positiva em $x = 1$;
- $x = \dfrac{1}{3}$ é máximo local, pois f' passa de positiva para negativa em $\dfrac{1}{3}$.

3.4 Teste da segunda derivada

Se a derivada de f' existir ela será chamada de *segunda derivada* ou de *função segunda derivada* e poderá ser denotada por f''.

Proposição 9 *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$.Se $f''(c)$ existe então:*

a) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo local em c;

b) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c.

O teste é inconclusivo caso $f"(c) = 0$.

Demonstração: Suponha que $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Portanto, $a < x < c$ implica que $x - c < 0$ e $\dfrac{f'(x)}{x-c} < 0$ implica que $f'(x) > 0$; $c < x < b$ implica que $x - c > 0$ e $\dfrac{f'(x)}{x-c} < 0$ implica que $f'(x) < 0$. Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Pelo teste da primeira derivada, f tem máximo local em $x = c$.

O caso b) é análogo.

Exemplo 10 *Vamos encontrar os valores de máximo e mínimo absoluto da função $f(x) = x^3 - 4x^2$.*

A função é derivável no intervalo aberto $(-2, 2)$. A derivada da função é $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Os únicos pontos críticos de f são os valores em que $f'(x) = 0$, isto é: $3x^2 - 2x = 0$ implica que $(3x - 2) = 0$ implica que $x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

Os valores de f nos pontos críticos são: $f(0) = 0$ e

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$

Os valores de f nos pontos inicial e final do intervalo são:
$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 = -8 - 4 = -12$ e $f(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

Comparando estes números, concluímos que o mínimo absoluto da função no intervalo é $f(-2) = -12$ e o máximo absoluto da função é $f(2) = 4$. Vamos determinar os máximos e mínimos locais para $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) =$ -x^4.

A função $f(x) = x^3$ não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo absolutos. Além disso, não possui extremos locais. Observe a figura 3.6. A função $g(x) = x^4$ tem mínimo local e absoluto em $x = 0$. Observe a figura 3.7. Já a função $h(x) = -x^4$ tem máximo local e absoluto em $x = 0$. Observe a figura 3.8:

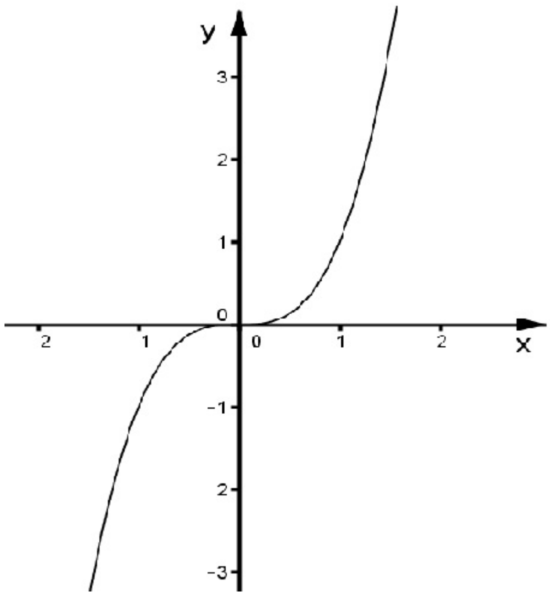

Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x^3$

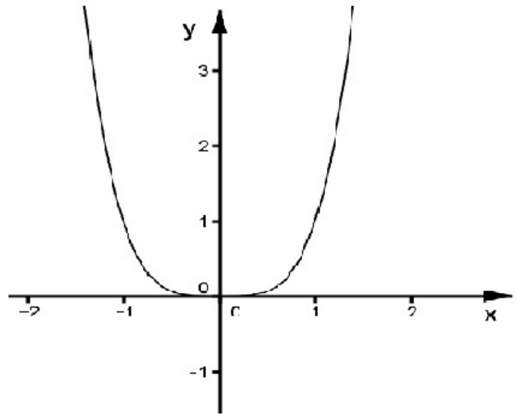

Figura 3.7: Gráfico de $g(x) = x^4$

3.5 Concavidade e Ponto de Inflexão

Nesta seção vamos verificar a relação da concavidade do gráfico da função com sua segunda derivada. Observe os gráficos 3.9 e 3.10 das funções f e g:

Podemos perceber que tanto o gráfico da função f, quanto o gráfico da função g são crescentes no intervalo $[a, b]$, porém a forma da curvatura desses gráficos são distintas. Veja que o gráfico de f entre os pontos A e B se situa sob a reta que liga A e B, enquanto que o gráfico de g está sobre a reta que liga A e B. Outra maneira de distinguir os dois tipos de curva é através das tangentes nos respectivos pontos dessa curva. Observe os gráficos 3.11 e 3.12 abaixo:

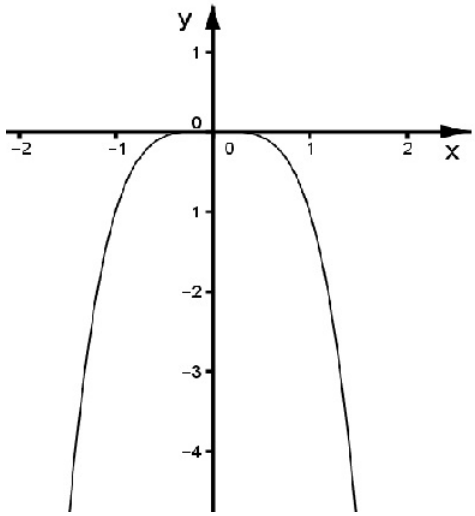

Figura 3.8: Gráfico de $h(x) = -x^4$

Definição 9 *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I. Se o gráfico de f se situa sempre acima das retas tangentes no intervalo I, dizemos que o gráfico tem concavidade para cima em I. Se o gráfico de f se situa sempre abaixo das retas tangentes no intervalo I, dizemos que tem concavidade para baixo em I.*

Pelo gráfico 3.11, podemos observar que ao aumentarmos o valor de x, as retas tangentes aumentam a inclinação, o que indica que $f'(x)$ é uma função crescente, quando o gráfico tem concavidade voltada para cima. Como a derivada de uma função crescente é positiva, devemos ter $(f'(x))' = f"(x)$ positivo no caso em que a concavidade estiver voltada para cima. Já o gráfico 3.12, nos mostra que ao aumentarmos o valor de x, as tangentes diminuem de inclinação, o que indica que $f'(x)$ é uma função decrescente quando o gráfico tem concavidade voltada para baixo. Sabemos que a derivada de uma função decrescente é negativa, então devemos ter $f"(x)$ negativo no caso em que a concavidade estiver voltada para baixo. Observe a proposição abaixo, denominada Teste da Concavidade. Ela nos mostra que a recíproca do resultado acima é válido.

Proposição 10 *Seja f uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I.*
Se $f"(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para cima em I;
Se $f"(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.

Demonstração: Vamos provar apenas o item a), pois o caso b) é análogo.

Seja f uma função duas vezes derivável em um intervalo I tal que $f"(x) > 0$ para todo x. Queremos provar que o gráfico de f tem concavidade para cima, o que é

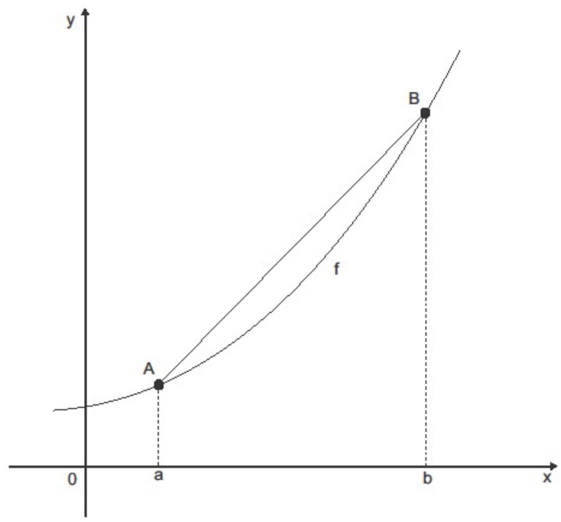

Figura 3.9: Concavidade para cima

o mesmo que dizer que $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(a, f(a))$, para qualquer $a \in I$.

Portanto, dado $a \in I$, devemos provar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a),$$

para todo $x \in I$, x$\neq a$.

Vamos primeiro lidar com o caso $x > a$. Aplicando o Teorema do valor médio no intervalo $[a, x]$, temos que existe um $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a). \tag{3.3}$$

Como $f"(x) > 0$ em I então $f'(x)$ é uma função crescente e, portanto $f'(a) < f'(c)$. Multiplicando essa equação pelo fator positivo $(x - a)$, resulta:
$f'(c) < f'(a)$, que implica que $f'(c)(x - a) > f'(a)(x - a)$ implica que $f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a)$. Porém, pela equação 3.3, $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$, logo $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ o que mostra que a curva está acima da tangente em $(a, f(a))$ para $x > a$.

O caso $x < a$ é análogo. Existe $c \in (x, a)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ e $f'(c) < f'(a)$ já que f' é crescente. Multiplicando pelo fator negativo $(x - a)$ inverte-se o sinal da desigualde e $f'(c) < f'(a)$ implica que $f'(c)(x - a) > f'(c)(x - a)$, que implica

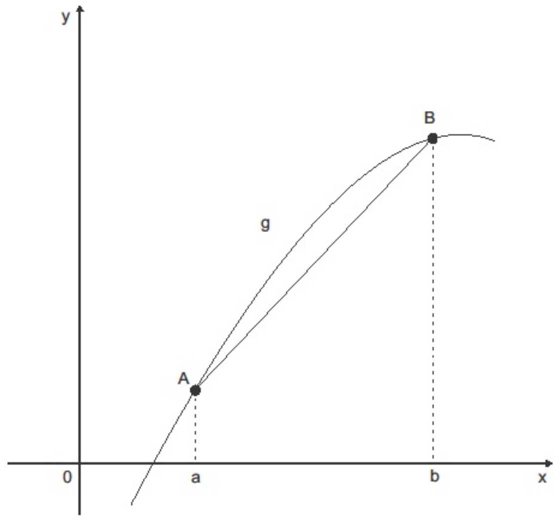

Figura 3.10: Concavidade para baixo

que $f(x) - f(a) > f'(c)(x - a)$ o que mostra que $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemplo 11 *Vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento e a concavidade do gráfico da função $f(x) = 2x^3$.*

A primeira derivada é $f'(x) = 6x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Portanto a função é crescente em todo intervalo aberto que não contenha $x = 0$ e, além disso, podemos observar que é crescente em toda a reta.
A segunda derivada é $f''(x) > 0$ para $x > 0$ e $f''(x) < 0$ para $x < 0$. Portanto, o gráfico tem concavidade voltada para cima no intervalo $(0, \infty)$ e concavidade voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$.

Definição 10 *Um ponto P no gráfico de uma função $f(x)$ é chamado ponto de inflexão se f é contínua em P e há uma mudança de concavidade do gráfico de f no ponto P.*

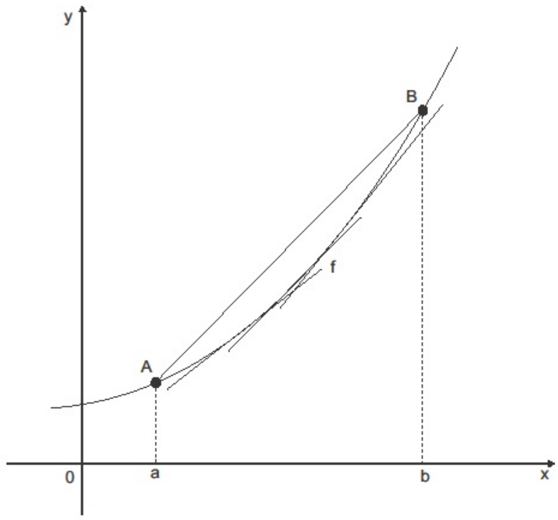

Figura 3.11: Concavidade para cima

3.6 O esboço de gráficos de polinômio de 2º grau.

Para esboçarmos gráficos de polinômios de 2º grau devemos proceder da seguinte forma:

1º passo: Verificar se o polinômio $p(x)$ possui raiz real. Para isso podemos utilizar a fórmula de Bháskara $\left(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ e analisarmos os seguintes fatos:

- Se $\Delta > 0$ o polinômio possui 2 raízes reais e distintas;
- Se $\Delta = 0$ o polinômio possui uma única raiz real;
- Se $\Delta < 0$ o polinômio não possui raiz real.

Caso possua devemos encontrá-las;

O número $b^2 - 4ac$ é chamado *discriminante* da equação e é simbolizado pela letra grega Δ.

2º passo: Encontrar o ponto crítico da função;

3º passo: Determinar se a concavidade do gráfico de $p(x)$ é voltada para baixo ou para cima;

4º passo: Encontrar o ponto de interseção com o eixo y e esboçar o gráfico de $p(x)$.

Exemplo 12 *Vamos esboçar o gráfico de cada um dos polinômios abaixo, usando derivadas:*

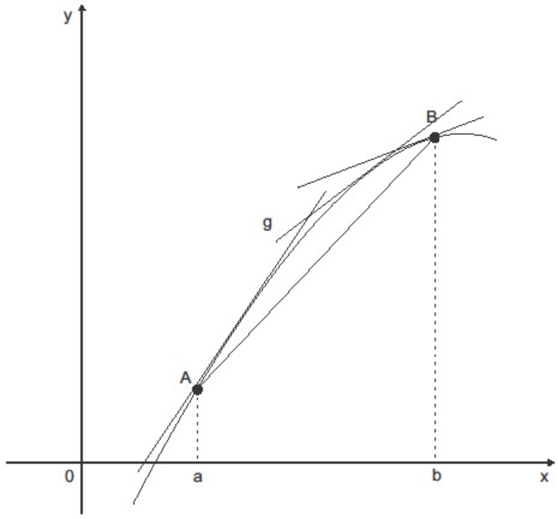

Figura 3.12: Concavidade para baixo

1. $p(x) = x^2 - 3x + 2$

2. $p(x) = -x^2 + 4x - 4$

1) 1ºpasso: Vamos verificar se o polinômio $P(x)$ possui raiz real. Como $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então $P(x)$ possui raiz real. Aplicando a fórmula de Bháskara, temos que suas raízes são: 1 e 2;

2ºpasso: Vamos encontrar o ponto crítico de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2.x^{2-1} - 1.3x^{1-1} = 2x^1 - 3x^0 = 2x - 3$

Fazendo $P(x) = 0$, temos que: $2x - 3 = 0$ implica que $2x = 3$ implica que $x = \dfrac{3}{2}$. Assim, $P(\frac{3}{2}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \left(\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{9}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4}$.

Logo, o ponto de mínimo é $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

3ºpasso: Vamos descobrir a concavidade de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2x - 3$, então a segunda derivada será,

$$P"(x) = 1.2x^{1-1} = 2 > 0$$

Portanto, a concavidade é voltada para cima.

4ºpasso: Podemos observar que a intersecção da curva com o eixo y é: $(0, 2)$. Agora, só nos resta fazermos o esboço do gráfico (Figura 3.13):

2) 1ºpasso: Vamos verificar se o polinômio $P(x)$ possui raiz real. Como $\Delta = b^2 - 4ac = 0$,

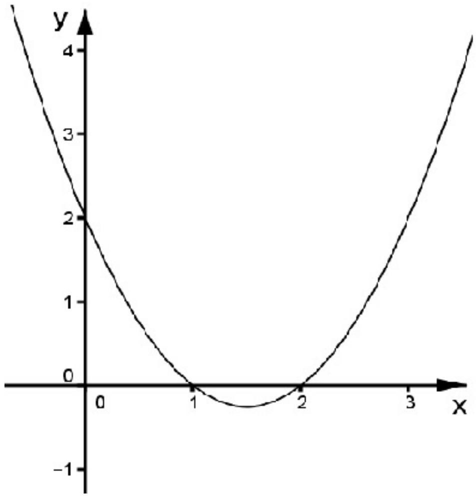

Figura 3.13: Gráfico de $p(x) = x^2 - 3x + 2$

então $P(x)$ possui raiz real. Aplicando a fórmula de Bháskara, temos que sua raiz é: 2;

2ºpasso: Vamos encontrar o ponto crítico de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2.(-x^{2-1}) + 1.4x^{1-1} = -2x^1 + 4x^0 = -2x + 4$

Fazendo $P(x) = 0$, temos que: $-2x + 4 = 0$ implica que $-2x = -4(-1)$ implica que $2x = 4$ implica que $x = 2$. Assim, $P(2) = -2^2 + 4.2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$.

Logo, o ponto de mínimo é $(2, 0)$.

3ºpasso: Vamos descobrir a concavidade de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = -2x + 4$, então a segunda derivada será,

$$P"(x) = 1.(-2)x^{1-1} = -2 < 0$$

Portanto, a concavidade é voltada para baixo.

4ºpasso: Podemos observar que a intersecção da curva com o eixo y é: $(0, -4)$. Agora, só nos resta fazermos o esboço do gráfico (Figura 3.14):

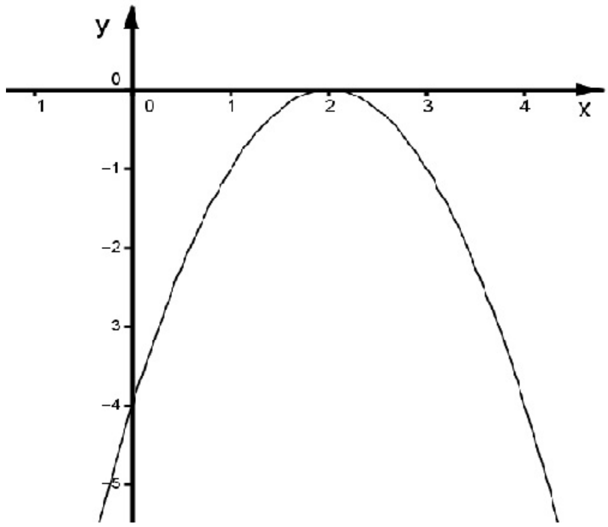

Figura 3.14: Gráfico de $p(x) = -x^2 + 4x - 4$

3.7 O esboço de gráficos de polinômio de 3º grau.

Para esboçamos o gráfico de um polinômio de 3º grau devemos proceder da seguinte forma:

1º passo: Encontrar os pontos críticos p_1 e p_2 da função $p(x)$;

2º passo: Encontrar a interseção com o eixo y e verificar se a função possui ou não raízes reais. Para isso devemos fazer o seguinte: uma vez encontrados p_1 e p_2, basta calcularmos $f(p_1)$ e $f(p_2)$ e analisarmos que se, $f(p_1)\ .\ f(p_2) \geq 0$ a função não possui raiz real entre p_1 e p_2 e se $f(p_1)\ .\ f(p_2) < 0$, a função $p(x)$ possui raiz real entre p_1 e p_2;

3º passo: Determinar a concavidade do gráfico da função $p(x)$;

4º passo: Determinar o ponto de inflexão;

5º passo: Esboçar o gráfico de $p(x)$.

Exemplo 13 *Vamos esboçar o gráfico de cada um dos polinômios abaixo, usando derivadas:*

1. $p(x) = x^3 - 3x^2$

2. $p(x) = x^3 - 3x - 2$

1) 1ºpasso: Vamos encontrar os pontos críticos p_1 e p_2 de $p(x)$;

A primeira derivada de $p(x)$ é dada por: $p'(x) = 3x^2 - 6x$. Fazendo $p'(x) = 0$, temos que: $3x^2 - 6x = 0$ implica que $x(3x - 6) = 0$ implica que $x = 0$ ou $3x - 6 = 0$ implica que

$x = 2$. Portanto, $p_1 = 0$ e $p_2 = 2$

$2^{\underline{o}}$passo: Fazendo $x = 0$, temos que $y = 0$, então o ponto de interseção com o eixo y é $(0, 0)$, agora vamos verificar se a função possui ou não raízes reais; Calculando $f(p_1)$ e $f(p_2)$, temos:

$$f(0) = 0^3 - 3.0^2 = 0$$

e

$$f(2) = 2^3 - 3.2^2 = 8 - 12 = -4.$$

Observe que : $f(0).f(2) = 0$, então $p(x)$ possui raiz real entre p_1 e p_2, são elas 0 e 3;

$3^{\underline{o}}$passo: Vamos determinar a concavidade do gráfico de $p(x)$. A primeira derivada de $p(x)$ é $p'(x) = 3x^2 - 6x$, então a segunda derivada de $p(x)$ é:

$$p\text{"}(x) = 6x - 6 > 0.$$

para $x > 1$, portanto a concavidade é voltada para cima no intervalo $(1, \infty)$ e voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$;

$4^{\underline{o}}$passo: Para determinarmos o ponto de inflexão, basta calcularmos $f(1) = 1^3 - 3.1^2 = 1 - 3 = -2$. Logo, o ponto de inflexão é $(1, -2)$;

$5^{\underline{o}}$passo: Vamos esboçar o gráfico de $p(x)$ (Figura 3.15):

2) $1^{\underline{o}}$passo: Vamos encontrar os pontos críticos p_1 e p_2 de $p(x)$;

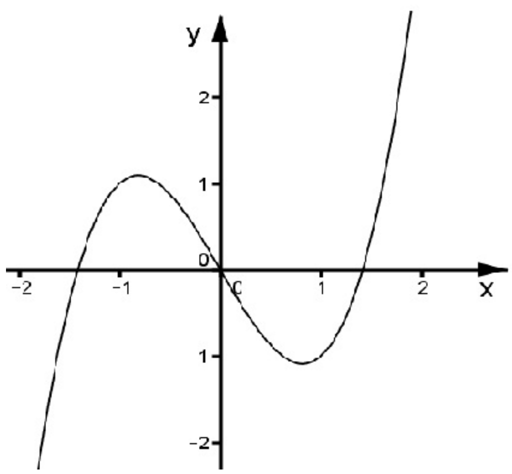

Figura 3.15: Gráfico de $p(x) = x^3 - 2x$

A primeira derivada de $p(x)$ é dada por: $p'(x) = 3x^2 - 3$. Fazendo $p'(x) = 0$, temos que:

$3x^2 - 3 = 0$ implica que $3x^2 = 3$ implica que $x = \pm 1$ Portanto, $p_1 = 1$ e $p_2 = -1$

$2^{\underline{o}}$passo: Fazendo $x = 0$, temos que $y = -2$, então o ponto de interseção com o eixo y é $(0, -2)$, agora vamos verificar se a função possui ou não raízes reais; Calculando $f(p_1)$ e $f(p_2)$, temos:

$$f(1) = 1^3 - 3.1 - 2 = -4$$

e

$$f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0.$$

Observe que : $f(1).f(-1) = 0$, então $p(x)$ possui raiz real entre p_1 e p_2, que é 2;

$3^{\underline{o}}$passo: Vamos determinar a concavidade do gráfico de $p(x)$. A primeira derivada de $p(x)$ é $p'(x) = 3x^2 - 3$, então a segunda derivada de $p(x)$ é:

$$p"(x) = 6x > 0.$$

para $x > 0$, portanto a concavidade é voltada para cima no intervalo $(0, \infty)$ e voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$;

$4^{\underline{o}}$passo: Para determinarmos o ponto de inflexão, basta calcularmos $f(0) = 0^3 - 3.0 - 2 = -2$. Logo, o ponto de inflexão é $(0, -2)$;

$5^{\underline{o}}$passo: Vamos esboçar o gráfico de $p(x)$ (Figura 3.16):

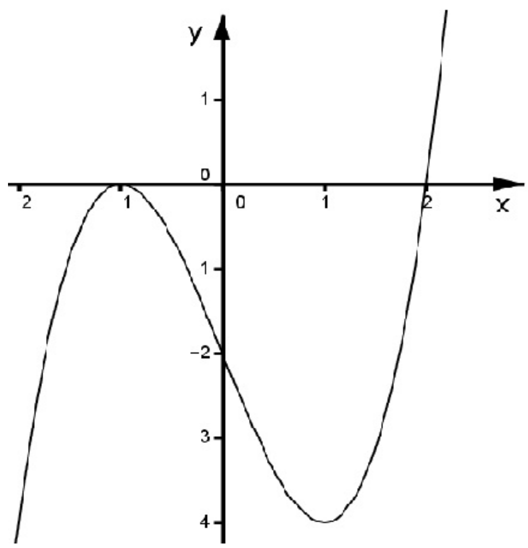

Figura 3.16: Gráfico de $p(x) = x^3 - 3x - 2$

Capítulo 4

Aplicando conceitos de cálculo no dia a dia em sala de aula

Neste capítulo mostraremos como aplicar o que foi proposto em nosso trabalho em sala de aula, para isto deixaremos algumas atividades resolvidas para orientar os professores na aplicação de exercícios relacionados a este tema. Optamos por não trabalhar com polinômios de graus maiores que 3, pois a dificuldade seria grande para resolver uma equação de grau maior ou igual a 3, além disso, os métodos de resoluções para equações de grau 3 não são adequados para se trabalhar no ensino médio.

4.1 Aplicação de nossa proposta em sala de aula

Como é de conhecimento de todos que as funções são trabalhadas com maiores detalhes no 1º ano do Ensino Médio, podemos introduzir os conceitos de derivadas nesta etapa de ensino.

No momento em que iniciarmos o conteúdo de funções polinomiais do 2º grau, podemos passar para os alunos uma noção de reta tangente a uma curva (parábola) e em seguida definir de maneira simples o conceito de derivadas, e citar alguns exemplos envolvendo limites, se necessário. Posteriormente, pode se trabalhar com as regras básicas de derivação, exemplo: derivada da função constante, derivada da potência e derivada da soma, com relação às demonstrações fica a critério de cada professor e de acordo com o nível de capacidade de abstração dos alunos, pois o fundamental é que os alunos compreendam como derivar funções polinomiais simples. Para isso, devemos explicar aos alunos que a derivada da função constante é sempre igual a zero e que a derivada da soma de funções é a soma das derivadas destas funções, enfim que a derivada de um polinômio nada mais é que realizar operações de subtração nos expoentes e multiplicação nos coeficientes de um polinômio, perfeitamente factível para um aluno do ensino médio.

Sabemos que no 8º ano do ensino fundamental os alunos tem um contato direto com a álgebra, onde estudam as operações com polinômios e frações algébricas, desse modo, se estes alunos aprenderem a multiplicar polinômios e simplificar frações algébricas, os mesmos não terão nenhuma dificuldade em derivar polinômios no ensino médio, pois existe uma semelhança muito grande na realização destas tarefas. Observe alguns exemplos mostrando essa relação:

Exemplo 14 *Vamos derivar a função* $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

De acordo com as regras de derivação vistas anteriormente, temos:
$p'(x) = 3.2x^{3-1} + 2.3x^{2-1} + 0 = 6x^2 + 6x^1 = 6x^2 + 6x$

Exemplo 15 *Vamos multiplicar os polinômios abaixo:*
$p(x) = (2x^2 + x)$ *e* $q(x) = (x + 1)$

Temos que: $(2x^2 + x).(x + 1) = 2x^{2+1} + 2x^2 + x^{1+1} + 1.x = 2x^3 + 2x^2 + x^2 + x = 2x^3 + 3x^2 + x$

Exemplo 16 *Vamos simplificar as frações algébricas abaixo:*

1. $\dfrac{2x^3}{x} = 2x^{3-1} = 2x^2$
2. $\dfrac{x^2}{x} = x^{2-1} = x^1 = x$

No ensino médio podem ser trabalhados os conceitos de crescimento, decrescimento, concavidade e pontos máximos e mínimos das funções polinomiais de 2º e 3º graus, porém de maneira fragmentada. A vantagem de utilizar a derivada no esboço de gráficos é que podemos trabalhar esses conceitos de maneira integrada, isto é, cada um desses conceitos citados acima está relacionado à derivada da função polinomial, seja com a primeira derivada, seja com a segunda derivada. Uma vez apresentado todo esse contexto acima em sala de aula aos alunos, podemos mostrar alguns exemplos de aplicação de esboço de gráficos de funções polinomiais 2º e 3 º graus, utilizando derivadas, e em seguida aplicar uma lista de exercícios aos mesmos para verificarmos se a aprendizagem destes foi significativa.

4.2 A diferença entre os esboços de gráficos de 2º e 3º graus.

No esboço de gráficos de polinômios de 2º grau, podemos perceber que ele sempre será uma parábola, existirá apenas um ponto crítico, corta o eixo x em dois pontos no máximo e não existe ponto de inflexão. Com relação ao esboço de gráficos de polinômios de 3º grau, podemos perceber que na maioria dos casos existe dois pontos críticos, corta o eixo x em três pontos no máximo e possui ponto de inflexão, portanto devemos calcular a segunda derivada para determiná-lo.

Ao avançar de grau 2 para grau 3, as dificuldades aumentam para encontrar os pontos críticos de algumas funções, quando as raízes da equação de 2º grau, que é obtida derivando a função inicial e igualando a zero, são números irracionais. Consequentemente, aumentam as dificuldades para encontrarmos as raízes da função polinomial de grau 3.

Para esboçarmos o gráfico de uma função polinomial de segundo grau sem o uso de derivadas, devemos proceder da seguinte forma: primeiro devemos verificar se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Para isto, basta verificarmos o sinal do coeficiente de x^2, ou seja, se $a > 0$ implica que a concavidade da parábola é voltada para cima e se $a < 0$ implica que a concavidade da parábola é voltada para baixo. Agora devemos encontrar as raízes (interseção com o eixo x), se estas existirem, para isto faremos $p(x) = 0$ e utilizaremos a fórmula de Bháskara $\left(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ e observaremos que se $\Delta > 0$ a equação possui 2 raízes reais e distintas, se $\Delta = 0$ a equação possui uma unica raiz real e se $\Delta < 0$ a equação não possui raiz real. Feito isto, devemos determinar o vértice da parábola utilizando as seguintes fórmulas: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Por último devemos fazer $x = 0$ e substituir na equação para encontrarmos a interseção com o eixo y. Finalmente, faremos o esboço do gráfico da função desejada.

Os livros didáticos não mostram como esboçar gráficos de polinômios de 3º grau sem uso de derivadas.

4.3 Sugestão de atividades.

Na atividade 1 apresentaremos duas soluções para cada item: na solução 1 não será aplicado a derivada para esboçarmos o gráfico, já na solução 2 usaremos a derivada para realizar a mesma tarefa. Nas atividades 2 e 3 mostraremos algumas aplicações das funções polinomiais de $2^{\underline{o}}$ grau no cotidiano. Já nas atividades 4 e 5 será exposta uma única solução, com uso da derivada, para esboçarmos os gráficos dos polinomios de $3^{\underline{o}}$ grau.

Atividade 1 *Vamos esboçar o gráfico das funções polinomiais abaixo:*

- *a)* $p(x) = x^2 - 2x + 3$
- *b)* $P(x) = x^2 - 5x + 6$

Solução 1: a) Basta seguir os passos indicados anteriormente:

$1^{\underline{o}}$passo: O coeficiente $a = 1 > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima;
$2^{\underline{o}}$passo: Vamos encontrar as raízes reais (se estas existirem). Observe que:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-2)^2 - 4.1.3 = 4 - 12 = -8 < 0$
Logo, a equação não possui raiz real.
$3^{\underline{o}}$passo: Vamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola. Temos que:
$x_v = -\dfrac{b}{2a}$
$x_v = -\dfrac{(-2)}{2.1} = \dfrac{2}{2} = 1$
e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ implica que $y_v = -\dfrac{(-8)}{4.1} = \dfrac{8}{4} = 2$
Logo, as coordenadas do vértice são: $V = (1, 2)$.
$4^{\underline{o}}$passo: A intersecção da parábola com o eixo y (eixo das ordenadas) é o ponto $(0, 3)$, pois se $x = 0$ implica que $y = 3$. Finalizando, vamos esboçar o gráfico(figura 4.1):

Solução 2: a) Aplicando um pouco de Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, mais especificamente, aplicando os conceitos de derivadas para resolvermos o mesmo exemplo, citado anteriormente, devemos proceder da seguinte forma:
$1^{\underline{o}}$passo: Vamos verificar se o polinômio $P(x)$ possui raiz real. Como $\Delta < 0$, então $P(x)$ não possui raiz real;
$2^{\underline{o}}$passo: Vamos encontrar o ponto crítico de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:
$P'(x) = 2.x^{2-1} - 1.2x^{1-1} = 2x^1 - 2x^0 = 2x - 2$
Fazendo $P(x) = 0$, temos que: $2x - 2 = 0$ implica que $2x = 2$ implica que $x = 1$. Assim,

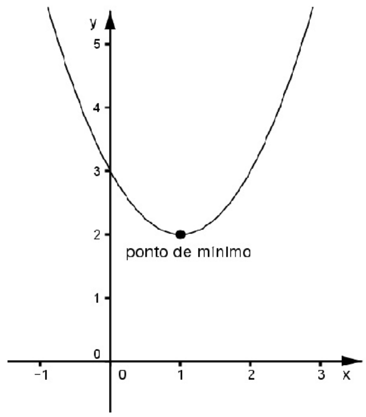

Figura 4.1: Gráfico de $p(x) = x^2 - 2x + 3$ ilustrando ponto de mínimo

$P(1) = 1^2 - 2.1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$

Logo, o ponto de mínimo é $(1, 2)$.

$3^{\underline{o}}$passo: Vamos descobrir a concavidade de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2x - 2$, então a segunda derivada será,

$$P"(x) = 1.2x^{1-1} = 2 > 0$$

Portanto, a concavidade é voltada para cima.

$4^{\underline{o}}$passo: Podemos observar que a intersecção da curva com o eixo y é: $(0, 3)$. Agora, só nos resta fazermos o esboço do gráfico (fugura 4.2):

b)$P(x) = x^2 - 5x + 6$

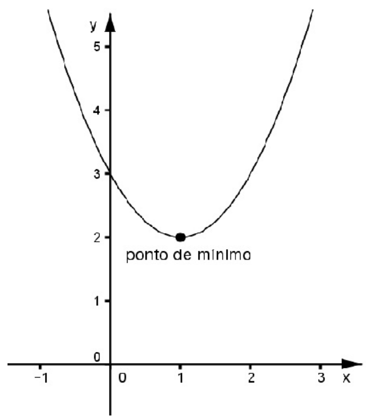

Figura 4.2: Gráfico de $p(x) = x^2 - 2x + 3$ ilustrando ponto de mínimo

Solução 1: 1ºpasso: O coeficiente $a = 1 > 0$, então a parábola tem concavidade para cima;

2ºpasso: Vamos encontrar as raízes reais (se estas existirem). Observe que:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1 > 0$

E suas raízes são: 2 e 3. Assim, a intersecção da parábola com o eixo x será nos pontos $(2, 0)$ e $(3, 0)$;

3ºpasso: Vamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola. Temos que:

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$

$x_v = -\dfrac{(-5)}{2.1} = \dfrac{5}{2}$

e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ implica que $y_v = -\dfrac{1}{4.1} = \dfrac{1}{4}$

Logo, as coordenadas do vértice são: $V = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

4ºpasso: A intersecção da parábola com o eixo y (eixo das ordenadas) é o ponto $(0, 6)$, pois se $x = 0$ implica que $y = 6$. Finalizando, vamos esboçar o gráfico (4.3):

Solução 2: 1ºpasso: Vamos verificar se o polinômio $P(x)$ possui raiz real. Como $\Delta > 0$,

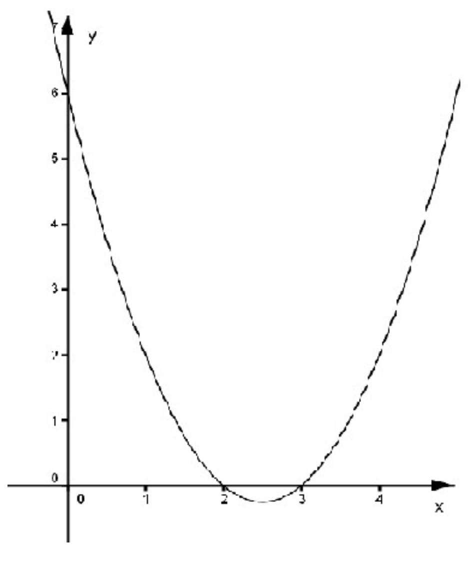

Figura 4.3: Gráfico de $p(x) = x^2 - 5x + 6$

então $P(x)$ possui raiz real. Aplicando a fórmula de Bháskara, temos que suas raízes são: 2 e 3;

2ºpasso: Vamos encontrar o ponto crítico de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2.x^{2-1} - 1.5x^{1-1} = 2x^1 - 5x^0 = 2x - 5$

Fazendo $P(x) = 0$, temos que: $2x - 5 = 0$ implica que $2x = 5$ implica que $x = \frac{5}{2}$. Assim, $P(\frac{5}{2}) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5.\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \left(\frac{25}{4}\right) - \left(\frac{25}{2}\right) + 6 = -\left(\frac{1}{4}\right)$.

Logo, o ponto de mínimo é $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

$3^{\underline{o}}$passo: Vamos descobrir a concavidade de $P(x)$. Temos que a primeira derivada de $P(x)$ é:

$P'(x) = 2x - 5$, então a segunda derivada será,

$$P"(x) = 1.2x^{1-1} = 2 > 0$$

Portanto, a concavidade é voltada para cima.

$4^{\underline{o}}$passo: Podemos observar que a intersecção da curva com o eixo y é: $(0, 6)$. Agora, só nos resta fazermos o esboço do gráfico (4.4):

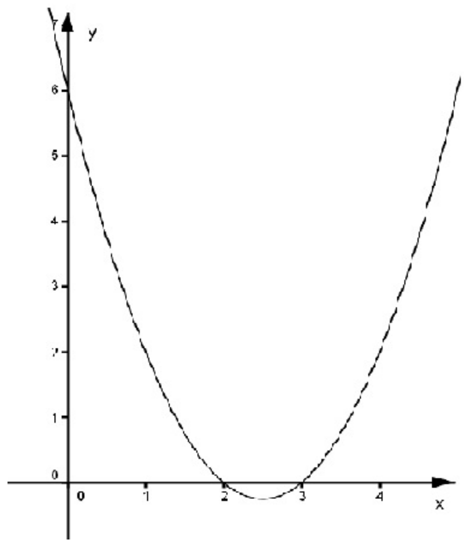

Figura 4.4: Gráfico de função do $2^{\underline{o}}$ grau

Atividade 2 *Um golfista dá uma tacada que faz sua bola descrever uma trajetória na qual a altura é dada pela função:*

$$f(x) = -0,00x^2 + x$$

em que x é a distância horizontal da bola, medida a partir de sua posição antes da tacada.

a) Determine a altura da bola quando ela está a uma distância horizontal de $50m$ *de seu ponto de partida.*

Solução:Temos que $f(x) = -0,008x^2+x$, então: $f(50) = -0,008.50^2+50 = -0,008.2500+50 = -20 + 50 = 30$. Logo, a bola está a $30m$ de altura.

b) Trace a trajetória da bola no plano Cartesiano.

Solução: O gráfico da função dada ilustra a trajetória da bola, então devemos esboçá-lo. Primeiro vamos encontrar as raízes da função. Fazendo $f(x) = 0$, temos: $-0,008x^2 + x = 0$, que implica que $-x(0,008x - 1) = 0$, assim, $x = 0$ ou $0,008x - 1 = 0$, que implica que $x = \dfrac{1}{0,008} = 125$. Calculando a primeira derivada da função acima, temos: $f'(x) = 2.(-0,008).x^{2-1} + 1.x^{1-1} = -0,016x + x^0 = -0,016x + 1$. Fazendo $f'(x) = 0$, temos que: $-0,016x+1 = 0$ que implica que, $-0,016x = -1$ então $x = \dfrac{1}{0,016} = 62,5$. Assim, $f(62,5) = -0,008.(62,5)^2+62,5 = -0,008.3906,25+62,5 = -31,25+62,5 = 31,25$, desse modo o ponto de máximo é $(62,5; 31,25)$. A concavidade é voltada para baixo,pois a bola sobe e depois desce. A interseção com o eixo y é $(0,0)$. Agora podemos esboçar o gráfico.

c) Determine a que distância do ponto de partida a bola cai no chão.

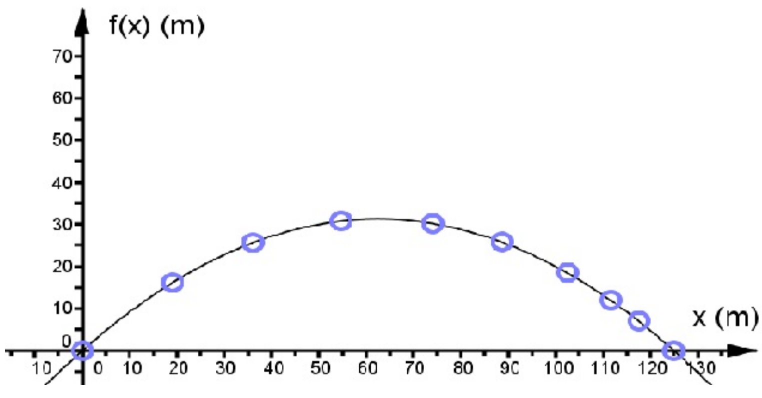

Figura 4.5: Trajetória da bola de golfe.

Solução: De acordo com o gráfico 4.5, ela caí a $125m$ do ponto de partida.

Atividade 3 *Um canhão atira um projétil, descrevendo a função* $s = -9t^2 + 120t$, *sendo* s *em metros e* t *em segundos. Calcule o ponto máximo de altura atingida pelo projétil.*

Solução: A função do movimento do projétil descreve uma parábola com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), o ponto máximo da parábola será a altura máxima atingida pelo projétil. Vamos encontrar o ponto crítico calculando a primeira derivada:

$s' = -2.9t^{2-1} + 1.120t^{1-1} = -18t + 120t^0 = -18t + 120$, fazendo $s' = 0$,implica que, $-18t + 120 = 0$, isto é, $-18t = -120$, ou seja, $t = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$. A imagem do ponto crítico será a altura procurada, vejamos: $s\left(\frac{20}{3}\right) = -9.\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 120.\left(\frac{20}{3}\right) = -9.\frac{400}{9} + 800 = -400 + 800 = 400$.

Logo, a altura máxima atingida pelo projétil é de 400 metros.

Atividade 4 *Esboce o gráfico do polinômio* $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

*Solução:*1$^{\underline{o}}$passo: Vamos encontrar os pontos críticos p_1 e p_2 de $p(x)$;

A primeira derivada de $p(x)$ é dada por: $p'(x) = 3x^2 - 4x$. Fazendo $p'(x) = 0$, temos que: $3x^2 - 4x = 0$ implica que $x.(3x - 4) = 0$ implica que $x = 0$ ou $3x - 4 = 0$ implica que $x = \frac{4}{3}$. Portanto, $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{4}{3}$

2$^{\underline{o}}$passo: Vamos verificar se a função possui ou não raízes reais; Calculando $f(p_1)$ e $f(p_2)$, temos:

$$f(0) = 0^3 - 2.0^2 + 1 = 1$$

e

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2.\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \left(\frac{64}{27}\right) + \left(\frac{32}{9}\right) + 1 = -\frac{5}{27}.$$

Observe que : $f(0).f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27} < 0$, então $p(x)$ possui raiz real entre $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{4}{3}$, que é 1;

3$^{\underline{o}}$passo: Vamos determinar a concavidade do gráfico de $p(x)$. A primeira derivada de $p(x)$ é $p'(x) = 3x^2 - 4x$, então a segunda derivada de $p(x)$ é:

$$p"(x) = 6x - 4 > 0$$

para $x > \frac{2}{3}$, portanto a concavidade é voltada para cima no intervalo $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ e voltada para baixo no intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$;

4$^{\underline{o}}$passo: Para determinarmos o ponto de inflexão, basta calcularmos $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{27}$. Logo, o ponto de inflexão é $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$;

5$^{\underline{o}}$passo: Vamos esboçar o gráfico de $p(x)$ (figura4.6):

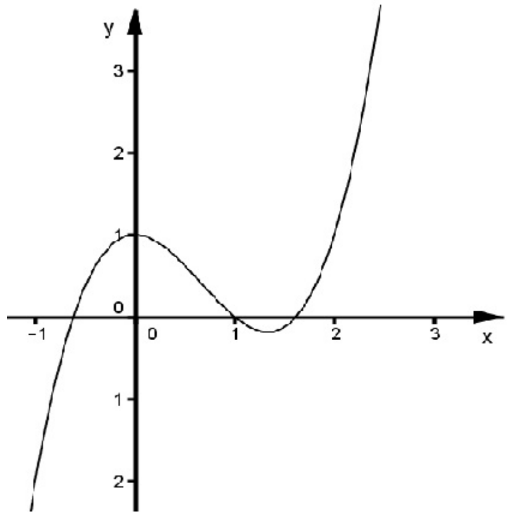

Figura 4.6: Gráfico de polinômio de 3º grau

Atividade 5 *Esboce o gráfico do polinômio* $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Solução: 1ºpasso: Vamos encontrar os pontos críticos p_1 e p_2 de $p(x)$;
A primeira derivada de $p(x)$ é dada por: $p'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, divindo por 3, temos que: $p'(x) = x^2 - 2x + 1$. Fazendo $p'(x) = 0$, temos que:
$x^2 - 2x + 1 = 0$ implica que $\Delta = 4 - 4 = 0$ implica que $x = 1$.
Portanto, $p_1 = p_2 = 1$
2ºpasso: Fazendo $x = 0$, temos que $y = -1$, então o ponto de interseção com o eixo y é $(0, -1)$, agora vamos verificar se a função possui ou não raízes reais; Calculando $f(p_1)$ e $f(p_2)$, temos:

$$f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 1 = 0.$$

Observe que : $f(1).f(1) = 0$, então $p(x)$ possui raiz real entre p_1 e p_2, e igual a 1;
3ºpasso: Vamos determinar a concavidade do gráfico de $p(x)$. A primeira derivada de $p(x)$ é $p'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, então a segunda derivada de $p(x)$ é:

$$p"(x) = 6x - 6 > 0.$$

para $x > 1$, portanto a concavidade é voltada para cima no intervalo $(1, \infty)$ e voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$;
4ºpasso: Para determinarmos o ponto de inflexão, basta calcularmos $f(1) = 1s - 3.1^2 + 3.1 - 1 = 0$. Logo, o ponto de inflexão é $(1, 0)$;

5$^{\underline{o}}$passo: Vamos esboçar o gráfico de $p(x)$ (4.7):

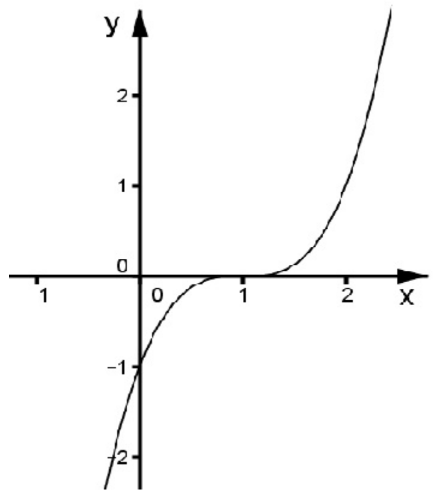

Figura 4.7: Gráfico de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Considerações finais

Observamos que o Cálculo já esteve inserido no currículo do ensino médio em um passado não muito distante, porém este foi abolido entre os anos 1960 e 1970 e após esse período, apesar de alguns livros didáticos trazerem algumas seções destinadas ao cálculo, o mesmo não é trabalhado em sala de aula no nível médio.

Como os professores não tem obrigação de ensinar esses conteúdos, estes acabam se acomodando e não buscam fazer esse trabalho com os alunos. Vimos que ensinar conceitos básicos de cálculo no ensino médio é muito importante e não é algo tão complexo que não possa ser ensinado nesse nível de ensino.

Neste trabalho priorizamos a ideia de trabalhar os conceitos de derivadas de maneira integrada com os conceitos de funções polinomiais e/ou polinômios e seus respectivos gráficos, pois atualmente no ensino médio os alunos aprendem a esboçar gráfico de polinômios de 2º grau sem o uso de derivadas e não aprendem como fazer o esboço de gráfico de polinômios de 3º grau.

Existem várias vantagens em ensinar derivadas no ensino médio, pois elas não são úteis apenas para o esboço de gráficos, mas para compreender melhor os conceitos de crescimento, decrescimento, ponto de máximo e mínimo de funções quadráticas e de 3º grau, ponto de inflexão e concavidade de curvas. Além disso, pode se trabalhar de forma interdisciplinar com a Física, nos cálculos de velocidade e aceleração escalar.

Desse modo, os alunos terão uma aprendizagem mais significativa com relação a esses conteúdos e consequentemente, terão mais sucesso nas disciplinas que envolvem cálculo, ao ingressar no ensino superior.

Portanto, deixamos a sugestão para os professores desse nível de ensino: de como ensinar os alunos a esboçar gráficos de polinômios de 2º e 3º graus usando derivadas. Sabemos que isto é só o primeiro de vários passos que deve ser dado para que possamos resgatar o cálculo para o currículo do ensino médio, desse modo fica claro a importância de novos trabalhos ressaltando essa importância em trabalhar os conceitos básicos de cálculo no ensino médio.

Referências Bibliográficas

ABRAMO, Hefez, L.M. Figueiredo e M. O. M. da Silva. Notas de Cálculo para o Profmat. SBM, 2012.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2.°grau. Revista do Professor de Matemática, n.°18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

ÁVILA, Geraldo. Limites e derivadas no ensino médio? Revista do Professor de Matemática, n.°60. Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

BOYER, Carl B.. História da Matemática. 2.ed. Editora Edgard Blucher. São Paulo, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1999.

CARVALHO, J. B. P. de. O cálculo na escola secundária: algumas considerações históricas. Caderno Cedes. Campinas: Papirus, n. 40, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações.1.ed.v.3.São Paulo: Ática, 2010.

GIOVANNI, J. R.; **BONJORNO**, J. R. Matemática Uma nova abordagem Vol. 1, 1ª Ed. São Paulo: FTD, 2000.

IEZZI, Gelson. Geometria Analítica.. 5.ed. Editora Atual. São Paulo, 2005.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. V.1-2. Ed. Editora Harbra. São Paulo: 1986.

SMOLE, Káttia Cristina Stocco **DINIZ**, Maria Ignez. Matemática: ensino médio, v.3-6.ed-São Paulo: Saraiva, 2010.

THOMAS, George B.et al. O Cálculo-vol.1. São Paulo: Pearson, Addison Wesley, 2002.