UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Mariane Ribeiro

O Número π na Educação

Santo André

2014

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Mariane Ribeiro

O Número π na Educação

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Antonio Cândido Faleiros.

Santo André

2014

RESUMO

No currículo escolar o valor que π assume é de 3,14. Pois, para os cálculos utilizados pelos alunos, este valor é mais que suficiente. Mas o que é π? Como podemos determinar o valor de π? Como foi calculado em tempos antigos? Como pode o valor ser encontrado hoje usando a tecnologia mais moderna? Estas são algumas das questões que vamos explorar partindo de um breve histórico da evolução do π, seguido de uma variedade de métodos para chegar ao seu valor com mais casas decimais precisas e finalizando com duas sugestões de atividades para encontrar um valor aproximado para o π. A primeira, usando o Método de Monte-Carlo com gotas de chuva, que pode ser utilizada a partir do Ensino Fundamental II, e a segunda para o Ensino Médio, temos uma adaptação do Método de Arquimedes com polígonos regulares inscritos no círculo. Ambas são desenvolvidas utilizando o software Microsoft Excel.

Palavras-chave: Pi, Método de Monte-Carlo, Método de Arquimedes.

ABSTRACT

The central idea of this paper is it to present argumentation for the importance of the study of the number π. In the school curriculum π takes the value of 3.14. For a student's purposes this value is more than adequate. However, what is π? How do we determine the value of π? How was it calculated in ancient times? How can the value be found today using the most modern technology? These are some of questions we will explore starting from a brief history of the evolution of π, followed by a variety of methods in order to find its value with precisely decimal places and ending with two suggested activities for finding an approximate value. The first one that uses the Monte-Carlo Method with rain drops can be utilized from Primary School II on and the other, for Secondary School, we have an adaptation of Archimedes' Method using regular polygon inscribed in the circle. Both of them are realised using the Microsoft Excel software.

Keywords: Pi, Monte-Carlo Method, Archimedes' Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando citamos o verdadeiro conhecimento matemático, estamos nos referindo ao conhecimento criado a partir do empírico. Historicamente os pioneiros em conhecimento matemático buscavam suas inspirações em situações problemas que de fato existiam, ou seja, situações reais. Com isso surgia uma real e verdadeira necessidade de se pensar e trabalhar a Matemática. Do mesmo modo, em algum lugar do passado a circunferência foi medida para fins de comparação e percebeu-se que a razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo é constante e definiram o que chamamos hoje de π como um número “um pouco maior que 3”.

Inúmeros povos andaram à procura de uma maior exatidão nesse valor e, ao longo dos anos percebeu-se que esse número é irracional e não seria possível encontrar seu valor exato. As tentativas para encontrar um maior número de casas decimais para o π variaram de palpites altamente inteligentes de matemáticos, à realização de cálculos que mais tarde revelaram-se impossíveis.

Atualmente, os computadores são utilizados para estabelecer uma maior precisão para π, onde os cientistas da computação estão interessados tanto em ampliar o número de casas decimais conhecidas quanto na velocidade e capacidade do programa ou algoritmo usado para gerar essas tentativas de quebra de recorde.

No currículo escolar o valor que π assume é de 3,14, pois, para os cálculos utilizados pelos alunos, este valor é mais que suficiente. Mas o que é π? Como podemos determinar o valor de π? Como foi calculado em tempos antigos? Como pode o valor ser encontrado hoje usando a tecnologia mais moderna? Estas são algumas das questões que vamos explorar neste trabalho.

No capítulo 1, faremos um breve histórico da evolução do π. Esta história remonta cerca de quatro mil anos. Para entender como o velho conceito de π é e compará-lo com o nosso sistema de numeração, vamos lembrar a descoberta da relação de π como uma constante e os muitos esforços para determinar o seu valor. Quando o computador entra na perseguição para encontrar o valor "exato" de π, a história muda de aparência. Agora ele não é mais uma questão de encontrar a solução matemática, mas sim o quão rápido e quão preciso pode ser o computador, dando-nos cada vez mais casas decimais precisas para o valor de π.

Depois de analisarmos a história da evolução do valor de π, o capítulo 2 apresenta uma variedade de métodos para chegar ao seu valor com mais casas decimais precisas. Optamos por uma grande variedade de métodos, alguns precisos, alguns experimentais e alguns apenas bons de adivinhação. Existem outros métodos para gerar o valor de π que estão bem além do escopo deste trabalho.

Como um desdobramento do capítulo 2, no capítulo 3 temos duas sugestões de atividades para encontrar um valor aproximado para o π. A primeira, usando o Método de Monte-Carlo com gotas de chuva, que pode ser utilizada a partir do Ensino Fundamental II, e a segunda para o Ensino Médio, temos uma adaptação do Método de Arquimedes com polígonos regulares inscritos no círculo. Ambas são desenvolvidas utilizando o software Microsoft Excel.

1 PERCURSO HISTÓRICO DO NÚMERO π

A história de π provavelmente vai muito mais para trás no tempo do que podemos documentar através de registros escritos. Em algum lugar no passado, depois que a roda (ou outro objeto verdadeiramente circular) foi inventada, a circunferência provavelmente foi medida para fins de comparação.

Há cerca de 4000 anos já se falava do número π e o interesse que ele desperta parece não acabar. Vamos neste capítulo recuperar alguns trechos de sua longa história.

Antes de tudo, é importante focar que na história do π, um dos passos fundamentais consistiu em adquirir consciência da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria concebido o π. Inúmeros povos andaram à sua procura mesmo antes que chegassem a ter consciência matemática.

No velho testamento (I Reis 7:23) lê-se: "E ele (Salomão) fez também um lago de dez cúbitos, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo, e trinta cúbitos em redor". Este mesmo verso aparece também em II Crônicas 4:2. Esta passagem ocorre em uma lista de especificações para o grande templo de Salomão, construído cerca de 950 a.C. A circunferência era, pois, três vezes o diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir a π o valor 3. Este valor foi muito possivelmente encontrado por medição.

1.1 Os antigos egípcios

Segundo Posamentier e Lehmann (2004), medições frequentes provavelmente mostraram que a parte superior a três vezes o diâmetro parecia ter cerca de um nono do diâmetro. Isto é o que revela o papiro Rhind, um documento egípcio descoberto em 1855, escrito por Ahmes, um escriba egípcio, cerca de 1650 a.C., cujas inscrições indicam a regra um nono: Disse que se construir um quadrado com um lado cujo comprimento é de oito-nonos do diâmetro do círculo, então a área do quadrado será igual à do círculo.

De acordo com as disposições acima, o lado do quadrado, então, seria $\frac{8}{9}d$.

Sabemos a partir do conhecimento de hoje sobre círculos que a área do círculo é $\pi.r^2$, o que para este círculo nos dá

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^2}{4}.$$

A área do quadrado é simplesmente

$$\left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}.$$

Desde que assumiu Ahmes essas áreas iguais, temos a seguinte equação:

$$\pi\frac{d^2}{4} = \frac{64d^2}{81},$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}.$$

Então,

$$\pi = \frac{256}{81} = 3{,}160493827160493827\overline{160493827}.$$

Esta é uma aproximação razoavelmente próxima do valor de π.

Neste ponto não havia motivos para descobrir a razão da circunferência para o diâmetro, em vez disso, o problema consistia em construir um quadrado, utilizando os instrumentos clássicos (uma régua não graduada e um compasso), com a mesma área que a de um círculo dado. Isto se tornou um dos três problemas famosos da antiguidade. Embora saibamos hoje que esta é uma construção impossível, ele, no entanto, fascinou os matemáticos por séculos. Foi o esforço para a construção de um quadrado com uma área igual à de um círculo que produziu as aproximações iniciais de π.

1.2 Babilônios

Vamos agora dar um grande salto no tempo para os babilônios, que se estende desde 2000 a.C. até cerca de 600 a.C.. Em 1936, algumas tabuletas matemáticas foram desenterradas em Susa (próximo à Babilônia). Uma destas compara o perímetro de um hexágono regular com a circunferência do seu círculo circunscrito. A forma como eles fizeram isso se deduz que os babilônios usaram $3+1/8 = 3.125$ como sua aproximação para π.

Um dos maiores desafios para os matemáticos antigos foi ser capaz de medir uma figura circular (até mesmo partes do círculo) em termos de linhas retas. Este era essencialmente o problema a ser resolvido, em "quadratura do círculo", isto é, a construção de um lado de um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado. Arcos circulares e retas não conseguiam encontrar uma medida comum. Havia sempre "algo sobrando" quando se tenta comparar esses dois tipos de medição. Hipócrates de Chios, outro matemático grego que surgiu cerca de 430 a.C., foi o primeiro a ser capaz de mostrar que as zonas de arcos (isto é, zonas delimitadas por arcos circulares) pode ser igual à área de uma figura retilínea, tal como um triângulo.

1.3 Arquimedes de Siracusa

De acordo com Eves (1997), foi com Euclides que se iniciou um período importante da história da matemática, caracterizado pela procura do rigor teórico que, no que diz respeito ao número π, irá culminar em Arquimedes de Siracusa, o maior gênio matemático da antiguidade.

Arquimedes, que nasceu em Siracusa (Sicília), cerca de 287 a.C., filho do astrônomo Fídias, foi um dos maiores contribuintes no início da história da matemática. Por um tempo ele estudou com os sucessores de Euclides em Alexandria, no Egito. Lá, ele também conheceu Conon de Samos, por quem ele tinha grande respeito como um astrônomo e matemático, e Eratóstenes de Cirene, com quem ele se correspondeu durante anos depois de deixar o Egito. Suas contribuições para a matemática e a física são lendárias. Vamos nos concentrar apenas em uma pequena parte de sua obra: a que envolve o número π (pi).

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), não houve até Arquimedes uma ligação rigorosa entre a circunferência de um círculo e a sua área. Esta pode ser encontrada no livro *Medição do Círculo* de Arquimedes. Neste importante livro há três proposições sobre o círculo que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico do valor de π.

1. A área de um círculo é igual à de um triângulo retângulo, onde os catetos do triângulo são respectivamente iguais ao raio e circunferência do círculo.

2. A relação da área de um círculo com a de um quadrado, com o lado igual ao diâmetro do círculo é próximo a 11/14.

3. A circunferência de um círculo possui menos de 3+1/7 vezes o seu diâmetro, porém mais do que 3+10/71 vezes o diâmetro.

Arquimedes construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência e calculou o perímetro destes polígonos. Quanto mais lados ele colocava no polígono, melhor a aproximação. Usando um polígono regular de 96 lados, Arquimedes descobriu que $3,140845 < \pi < 3,142857$. O trabalho de Arquimedes não foi melhorado durante dezoito séculos.

Dentro desse espírito, para Bongiovanni e Watanabe (1991), Arquimedes recorreu a um processo que consistia em inscrever e circunscrever uma circunferência em polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Ele percebeu que, conforme vamos duplicando o número de lados dos polígonos, vamos obtendo um limite superior e um limite inferior cada vez mais próximo de π.

Convém aqui notar que o raciocínio de Arquimedes envolve a noção de limite, assume a existência de duas sucessões, dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos, que têm como limite comum o número procurado. Ainda de acordo com Bongiovanni e Watanabe (1991), à luz dos conceitos atuais, podemos dizer que Arquimedes "peca" por não ter demonstrado de forma rigorosa a existência daquele limite, mas essa era uma preocupação que estava fora da mentalidade da época e que os recursos de então dificilmente resolveriam.

Vida de Arquimedes passou calmamente até sua morte, em 212 a.C.. Ele foi morto defendendo sua cidade natal de Siracusa durante a Segunda Guerra Púnica. Arquimedes havia solicitado que sua lápide fosse decorada com uma esfera contida no cilindro de menor raio possível e inscrita com a proporção do volume da esfera ao do cilindro. Arquimedes tinha considerado a descoberta desta relação o maior de todas as suas realizações.

Segundo Boyer (1974), durante longos anos o método de Arquimedes, conhecido com o método clássico do cálculo de π, foi a melhor determinação de π até que no século III d.C. o matemático chinês Liu Hui, recorrendo a um polígono regular de 96 lados, obteve a aproximação 3,14 que ele próprio melhorou para $\pi = 3{,}14159$, recorrendo a um polígono de 3072 lados.

Mais tarde, no século V, o também chinês Tsu Ch’ung-Chih (430 - 501) chegou a uma aproximação muito mais exata $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. No final desse século, o astrônomo hindu Aryabhata (≈500) encontrou um valor aproximado: $\pi = 3{,}1416$.

No século XII, o matemático hindu Bhaskara (≈1140) provavelmente, recorrendo ao método de Arquimedes com um polígono de 384 lados, deu esse valor como exato, $\pi = \frac{22}{7}$ como um valor impreciso e $\pi = \sqrt{10}$ para trabalhos corriqueiros.

O valor 3,1416 é também indicado pelo famoso matemático árabe Al-Khwarizmi no século XI, mas, tal como os hindus, os árabes continuaram a adotar $\pi = \sqrt{10}$.

Ainda segundo Boyer (1974), na Europa, não se conhecem importantes contribuições para o cálculo de π anteriores ao século XVI (exceto a de Leonardo de Pisa, o famoso Fibonacci, que em 1220 publicou um livro de álgebra onde atribui a π o valor 964/275 = 3,141818).

De fato, a Europa, a partir do fim do primeiro milênio, conquistou um lugar de maior destaque nos domínios político, econômico e militar, mas não no científico. O império romano deu maior importância ao estudo do direito e da arte da guerra, esqueceu as ciências e impediu o estudo e a divulgação do saber anteriormente adquirido por outros povos.

Porém, de acordo com Posamentier e Lehmann (2004), o grande astrônomo, geógrafo e matemático Cláudio Ptolomeu, popularmente conhecido como Ptolomeu, aproximadamente em 150 d.C. escreveu um tratado astronômico Almagesto . Neste tratado ele usou o sistema sexagesimal para obter

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3 + \frac{17}{120} = 3{,}14\overline{16} \approx 3{,}14167.$$

Este é o resultado mais preciso depois de Arquimedes.

1.4 Os séculos XVI e XVII

Ao longo dos séculos muitas tentativas de aproximar o valor de π continuaram, embora, de acordo com Posamentier e Lehmann (2004), a grande mudança no cálculo do π veio em 1579, quando o matemático francês François Viète (1540-1603), utilizando o método desenvolvido pelos gregos, considerando um polígono regular de $6.2^{16} = 393.216$ lados, ele calculou π correto com nove casas decimais. Descobriu também a primeira utilização de um produto infinito, para determinar o valor de π. Viète calculou o valor de π estando entre: 3,1415926535 e 3,1415926537. Mais uma vez, chegou-se a um novo marco na longa história do π.

Segundo Eves (1997), na mesma época em que Viète descobria a sua fórmula, dois homens, entre outros, Adrianus Romanus (1561-1615) com 15 decimais e Ludolph van Ceulen (1540-1610) com 35, calculavam π com um número de decimais exatos nunca antes atingidos.

Posamentier e Lehmann (2004) comentam que o matemático alemão Ludolph van Ceulen (1540-1610), tinha a intenção de encontrar o verdadeiro valor de π, e, encontrou o seu valor exato de vinte casas decimais em 1596. Seu resultado foi calculado a partir dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscrito de $60.2^{33} = 515.396.075.520$ lados.

Para conseguir isso, ele teve que descobrir alguns novos teoremas para realizar os cálculos. O grande passo nessa busca por um valor cada vez mais preciso de π veio em 1610, quando Ludolph van Ceulen encontrou o valor de π para trinta e cinco casas decimais, usando um polígono de 2^{62} lados. Ele estava tão dedicado ao (ou, poderíamos dizer obcecado com) cálculo do valor de π e fez tais grandes avanços nesse esforço que, em sua honra, π é muitas vezes referido como o número Ludolphian.

O nosso conhecimento aumentou em 1668, quando o matemático escocês James Gregory (1638-1675) antecipou o maior matemático do século XVII na Alemanha, Gottfried Wilhelm Leibniz, em cinco anos, quando ele veio com a seguinte fórmula de aproximação para π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Isto é uma aproximação muito grosseira, uma vez que a série converge muito lentamente. Levaria cem mil termos para chegar a uma precisão de cinco casas decimais do π.

1.5 O século XVIII

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), em 1706, o matemático Inglês William Jones (1675-1749), em seu livro, *Synopsis palmariorum matheseos*, usou o símbolo do π pela primeira vez para realmente representar a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. No entanto, a verdadeira popularidade do símbolo π para representar essa relação veio em 1748, quando o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), usou o símbolo do π em seu livro, *Introductio in analysin infinitorum*, para representar a proporção entre a circunferência de um círculo com o seu diâmetro. Um matemático brilhante com uma memória incrível e capacidade de fazer cálculos complexos, Euler desenvolveu vários métodos para o cálculo do π, alguns dos quais se aproximou do verdadeiro valor de π mais rapidamente (ou seja, em menos etapas) do que procedimentos desenvolvidos por seus antecessores. Aqui ele calculou π com precisão de 126 casas decimais. Uma fórmula que ele usou para o cálculo foi o primeiro de um grupo de séries dando valores sucessivos de π. A série a seguir é particularmente interessante, uma vez que é criada por uma série de tomar os quadrados dos termos de uma série harmônica.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots.$$

A questão sobre o tipo de número que é π começou a consumir os matemáticos. A cada tentativa de obter mais casas decimais para o π, sempre havia a esperança de que se um padrão surgisse e que houvesse um período de dígitos repetidos, teria então feito π um número racional. Isso não era para acontecer. Em 1794, o matemático francês Adrien Marie Legendre (1.752-1.833) escreveu um livro intitulado *Élements de Géométrie* em que ele provou que π^2 é irracional. Foi o primeiro uso do símbolo de π em um livro francês. Em 1806, ele também provou que π é irracional. Sabemos que Aristóteles (384-322 a.C.) suspeitava que π era um número irracional, mas sua especulação durou mais de dois milênios antes de ser provada corretamente.

1.6 O século XX

Como a história do π avança, Posamentier e Lehmann (2004) afirmam que devemos tomar nota do trabalho de Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939), um matemático alemão que provou que π era um número irracional, mas, de fato, é um número transcendental. Com esse estabelecimento, Lindemann põe fim ao antigo problema de encontrar o comprimento do lado do quadrado, cuja área é igual à de um círculo dado, quando se provou que era impossível a ser feito.

Em 1914, o gênio matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1882-1920), criou muitas fórmulas para o cálculo do valor de π, mas algumas eram muito complicadas e tinham que esperar o advento do computador para ser utilizado de forma adequada.

Em 1947 DF Ferguson (Inglaterra) encontrou um valor de π correto para 710 casas decimais. Mais tarde, naquele ano, John W. Wrench Jr., um americano, publicou um valor de π para 808 casas decimais, mas logo em seguida Ferguson encontrou um erro na 723ª casa decimal. Em janeiro de 1948, os dois colaboraram para obter um valor correto de π para 808 casas decimais, com a ajuda de uma calculadora de mesa. Ainda usando apenas uma calculadora de mesa, no ano seguinte John W. Wrench Jr. e Levi B. Smith, matemáticos americanos, estenderam essa a 1.120 casas decimais.

Em 1949, com o desenvolvimento do computador eletrônico, a corrida para os valores de mais casas decimais para π assumiu uma vivacidade. Usando 70 horas de tempo de computador, os matemáticos brilhantes John Von Neumann, George Reitwiesner e NC Metropolis calcularam o valor de π com 2.037 casas decimais, utilizando um computador ENIAC.

A corrida por um maior número de casas decimais para π entraram nos bilhões com os irmãos Chudnovsky, David e Gregory.

Usando computadores para estabelecer uma maior precisão para π, chegou-se ao ponto onde os cientistas da computação já não estão apenas interessados em melhorar a precisão para o valor de π, mas sim, para testar seus computadores. Quão rápido, a precisão, e quão longe pode um novo computador ou programa de computador calcular o valor de π? Matemáticos estão sempre à procura de estender os nossos conhecimentos de π. Eles estão interessados tanto em ampliar o número de casas decimais conhecidas e na velocidade e capacidade do programa ou algoritmo usado para gerar essas tentativas de quebra de recorde.

1.7 A Cronologia do Número π.

2.000a.C.	Os Babilônios usavam π = 3,125
1.650 a.C.	Os Egípcios usavam π =3,16
950 a.C.	Na construção do templo de Salomão (I Reis 7:23) os hebreus usavam π = 3.
287 a 212 a.C.	Arquimedes estabeleceu 3,140845 < π < 3,142857.
150	Ptolomeu, no livro Almagesto, obteve a aproximação 3,14167 para o π.
Século III	O Chinês Liu Hui obteve π = 3,14159.
Século V	O Chinês Tsu Ch'ung-Chinh obteve 3,1415926 < π < 3,1415927. E o Hindu Arybhata encontrou π = 3,1416.
Século XII	O Hindu Bhaskara adotou como valor exato $\pi = \frac{22}{7}$ e $\pi = \sqrt{10}$ como valor impreciso.
1220	Leonardo de Pisa (Fibonacci) atribui a π o valor de 3,141818....
1579	O francês François Viète calculou 3,1415926535 < π < 3,1415926537, ou seja, com nove casas decimais corretas. Na mesma época Adrianus Romanus obteve exatidão em 15 casas decimais.

1596	Ludolph van Ceulen encontrou π com exatidão de 20 casas decimais.
1610	Novamente Ludolph van Ceulen encontrou π com exatidão agora de 35 casas decimais
1668	O Escocês James Gregory utiliza a seguinte fórmula $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$.
1706	O Inglês William Jones usa o símbolo π pela primeira vez no livro *Synopsis palmariorum matheseos*.
1748	O Suíço Leonard Euler usou o símbolo π no livro *Introductio um analysin infinitorum*, popularizando-o. E calculou π com 126 casas decimais exatas.
1794	O Francês Adrien Marie Legendre provou que π^2 é irracional no livro *Èlements de Géométrie*.
1806	Adrien Marie Legendre provou que π é irracional.
Século XVIII	O alemão Johann Heinrich Lambert provou rigorosamente que π é irracional.
Século XIX	O alemão Carl Louis Ferdinand Lindemann provou que π é transcendental.
1914	O indiano Srinivasa Ramanujan criou muitas fórmulas para o cálculo de π.
1947	O Inglês DF Ferguson encontrou um valor de π correto com 710 casas decimais.
1948	DF Ferguson junto com o americano John W. Wrench Jr.

	Calcularam um valor correto de πcom 808 casas decimais usando uma calculadora de mesa.
1949	Os americanos John W. Wrench Jr. E Levi B. Smith calcularam π com 1.120 casas decimais exatas. John Von Neumann, George Reitwiesner e NC Metropolis calcularam o valor de π com 2.037 casas decimaisutilizando um computador ENIAC.
1987	Os irmãos Chudnovsky desenvolveram um algoritmo para calcular o valor de π.
1990	Os irmãos Chudnovsky utilizando o algoritmo e um supercomputador encontraram 2 bilhões de casas decimais para π.
2009	Novamente os irmãos Chudnovsky bateram o recorde mundial encontrando 2,7 trilhões de casas decimais para π.
2010	Novamente os irmãos Chudnovsky encontraram 5 trilhões de casas decimais para π.
2011	Novamente os irmãos Chudnovsky encontraram 10 trilhões de casas decimais para π.

Quadro 1 – Cronologia do Número π

2 CALCULANDO O VALOR DE π

Até agora descrevemos π e mencionamos maneiras em que tentativas têm sido feitas para calcular o seu valor. As tentativas variaram de palpites altamente inteligentes de matemáticos, à realização de cálculos que mais tarde revelaram-se impossíveis.

Aqui iremos mostrar uma variedade de métodos para o cálculo do valor de π. Estaremos apresentando as tentativas clássicas, e alguns métodos mais recentes controlados pelo computador. Começamos com um dos mais famosos métodos clássicos, feito por um dos matemáticos mais talentosos da história da matemática, Arquimedes.

2.1 Método de Arquimedes para encontrar o valor de π

Talvez a maneira mais fácil de começar a calcular o valor de π foi desenvolvida por Arquimedes. É um método em que se pode apelar para a intuição. Segundo Posamentier e Lehmann (2004), Arquimedes observou que quando o número de lados de um polígono regular aumenta, mantendo o raio ou a apótema constante, o valor limite do perímetro é a circunferência de um círculo. Ou seja, suponha tomar os primeiros polígonos regulares (um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular, e um hexágono regular) e inscrevê-los no círculo do mesmo tamanho. À medida que o número de lados do polígono aumenta regularmente, o perímetro do polígono fica mais perto à circunferência (isto é, o perímetro) do círculo. Lembre-se que o círculo circunscrito deve conter cada um dos vértices do polígono. Aqui está o que pode parecer.

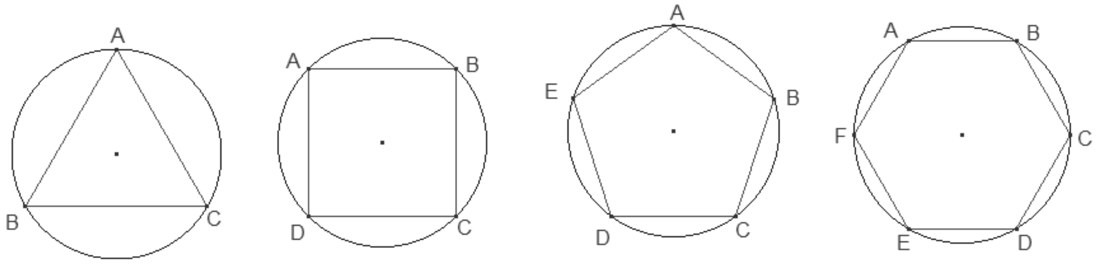


Figura 1 - Polígonos regulares inscritos no círculo.

Isto pode ser mais fácil de ver quando os lados do polígono regular aumentarem ainda mais de modo que torna-se um dodecágono. Na verdade, podemos calcular o aumento dos perímetros e vê-los aproximar-se progressivamente da circunferência do círculo.

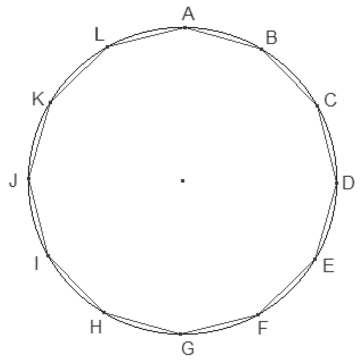


Figura 2 - Dodecágono regular inscrito no círculo.

Vamos dar o hexágono como nosso exemplo de um "polígono geral". A partir disso, será então generalizado para polígonos de muito mais lados. Começamos com um hexágono regular inscrito em um círculo de raio $\frac{1}{2}$. A medida de $\angle BOC$ é um sexto de uma volta completa de 360 ° ou 60 °. Suponha que $\overline{OK} \perp \overline{BC}$ em K e BK = KC = a.

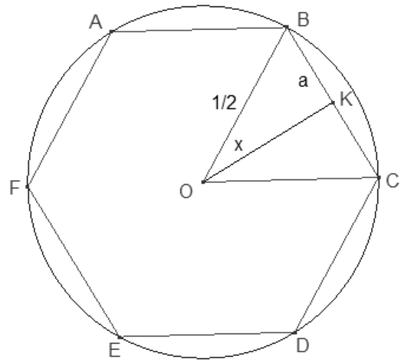


Figura 3 - Hexágono regular inscrito no círculo de raio ½.

Procuramos encontrar o perímetro do hexágono, quando sabemos o comprimento do raio e a medida de

$$\angle BOK = \frac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ.$$

Usando a função trigonométrica seno, obtemos

$$\mathrm{sen}30^\circ = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a.$$

Como $\mathrm{sen}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$, então $2a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{4}$. Assim, o perímetro do hexágono é 12 vezes a, que é igual a 3.

Vamos generalizar isso para qualquer polígono regular de n lados.

$$\angle x = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Portanto, para o polígono regular geral de n lados

$$\mathrm{sen}\frac{180^\circ}{n} = 2a.$$

O perímetro do polígono regular de n lados é então n vezes 2a, o que torna este perímetro igual à

$$n.\mathrm{sen}\frac{180^\circ}{n}$$

Podemos, então, tomar vários valores de n e calcular o perímetro do polígono regular cujo círculo circunscrito tem um raio de $\frac{1}{2}$.

Vamos calcular os primeiros exemplos aqui e, em seguida, fornecer os resultados de outros em uma tabela.

Quando n = 3:

$$3\text{sen}\frac{180^\circ}{3} = 3\text{sen}60^\circ \approx 3(0{,}866) = 2{,}598.$$

Quando n = 4:

$$4\text{sen}\frac{180^\circ}{4} = 4\text{sen}45^\circ \approx 4(0{,}7071) = 2{,}8284.$$

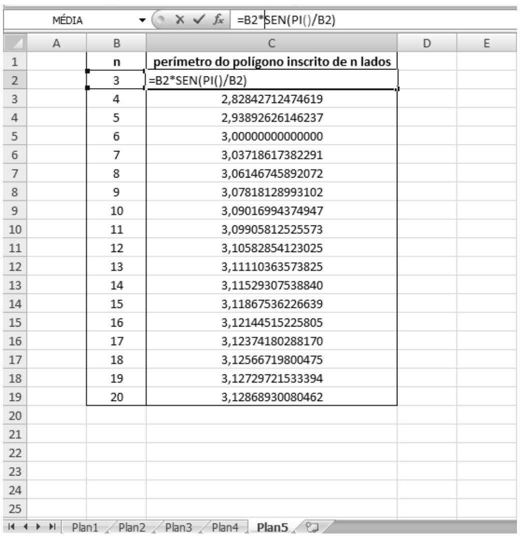
Quando n = 5:

$$5sen\frac{180^\circ}{5} = 5sen36^\circ \approx 5(0{,}5878) = 2{,}939.$$

Quando n = 6:

$$6sen\frac{180^\circ}{6} = 6sen30^\circ = 6(0{,}5) = 3{,}0.$$

Nós apenas calculamos os quatro primeiros valores e utilizando o Excel com a fórmula $\text{n.sen}\frac{\pi}{\text{n}}$ obtemos os restantes.


MÉDIA =B2*SEN(PI()/B2)

	A	B	C	D	E
1		n	perímetro do polígono inscrito de n lados		
2		3	=B2*SEN(PI()/B2)		
3		4	2,82842712474619		
4		5	2,93892626146237		
5		6	3,00000000000000		
6		7	3,03718617382291		
7		8	3,06146745892072		
8		9	3,07818128993102		
9		10	3,09016994374947		
10		11	3,09905812525573		
11		12	3,10582854123025		
12		13	3,11110363573825		
13		14	3,11529307538840		
14		15	3,11867536226639		
15		16	3,12144515225805		
16		17	3,12374180288170		
17		18	3,12566719800475		
18		19	3,12729721533394		
19		20	3,12868930080462		
20					
21					
22					
23					
24					
25					

Plan1 Plan2 Plan3 Plan4 Plan5

Figura 4 - Planilha do Excel para obter o perímetro dos polígonos regulares inscritos no círculo de raio ½.

E, assim, formamos o quadro abaixo:

n	Perímetro do polígono inscrito de n lados
3	2,59807621135332
4	2,82842712474619
10	3,09016994374947
20	3,12868930080462
72	3,14059589030419
90	3,14095470322509
180	3,14143315871103
250	3,14150997083815
500	3,14157198277948
1000	3,14158748587956
5000	3,14159244688129
10000	3,14159260191267

Quadro 2 - Perímetro do polígono inscrito de n lados

Agora compare o valor encontrado para o perímetro do polígono regular de 10.000 lados com o valor de π, que nós já sabemos. Lembre-se de que está inscrito no círculo de raio $\frac{1}{2}$. Este polígono de 10.000 lados é opticamente bastante indistinguível do círculo (obviamente, sem melhorias de ampliação). A circunferência do círculo circunscrito de raio $\frac{1}{2}$ é $2\pi r = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Olhe para o valor conhecido de π com 24 casas decimais para comparação,

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643 \ldots .$$

Até a sétima casa decimal, a aproximação com o perímetro do polígono regular de 10.000 lados é correta. Se fôssemos calcular o perímetro de um polígono regular de 100 mil lados, obteríamos uma aproximação ainda mais estreita. O perímetro de um polígono regular de 100 mil lados é 3,1415926530730219604831480207531..., que se aproxima à π corretamente com nove casas decimais.

Arquimedes (obviamente) não teve o luxo de usar dispositivos de calcular eletrônicos para ajudá-lo em seus cálculos. Ele também não teve a facilidade trazida pelo sistema posicional (como o nosso sistema decimal), nem o uso da trigonometria à sua disposição. No entanto, ele ainda usou um polígono regular de 96 lados. Ele viu o círculo circunscrito no polígono como uma limitação para o círculo inscrito neste polígono. Ao tirar a média dos perímetros de cada polígono regular de n lados (inscrito e circunscrito), ele fez um "sanduíche" com os perímetros da circunferência, o que no caso de um círculo com um raio de $\frac{1}{2}$ é o π.

Vamos agora repetir o procedimento de cima com o polígono circunscrito sobre o círculo, ou seja, quando o círculo de raio $\frac{1}{2}$ é inscrito no polígono. Como antes, vamos considerar polígonos regulares com sucessivamente maior número de lados, cada um com o nosso dado círculo inscrito.

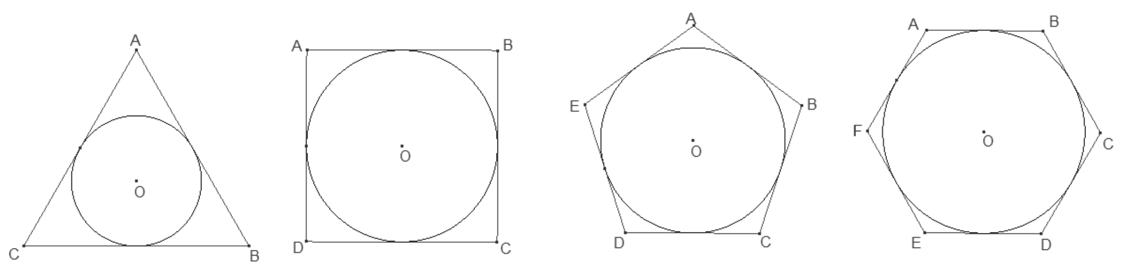


Figura 5 - Polígonos regulares subscritos no círculo.

Note como gradualmente o perímetro do polígono parece cada vez mais perto da circunferência do círculo.

Desta vez, vamos considerar um pentágono regular circunscrito sobre o nosso círculo de raio $\frac{1}{2}$ como nosso primeiro polígono para estudar. Então, vamos generalizar o nosso procedimento e estendê-lo a muitos outros.

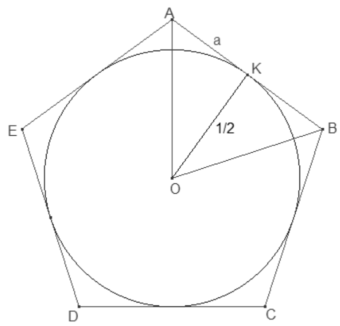


Figura 6 - Pentágono circunscrito no círculo de raio ½.

O nosso objetivo é encontrar o perímetro do pentágono com um lado da 2a. Sabemos que

$$tan\angle AOK = \frac{a}{OK}\ e\ \angle AOB = 72^{\circ}.$$

De modo que

$$\angle AOK = 36^{\circ}, enquanto\ OK = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$a = \frac{1}{2} tan 36^{\circ} \approx \frac{1}{2}(0{,}7265) = 0{,}3632.$$

Assim o perímetro do pentágono é 10 vezes a, ou cerca de 3,632 (isto é encontrado tomando 5 vezes 2a, ou cerca de 3,632), mas não é uma aproximação muito boa para π. O perímetro do círculo é $2\pi r = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

No caso geral de um polígono regular de n lados

$$\angle AOK = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

A partir do exemplo do pentágono, $tan\angle AOK = \frac{a}{OK}$. Daqui resulta que

$$a = OK\ tan\angle AOK = \frac{1}{2} \cdot tan\frac{180^\circ}{n}.$$

O perímetro do polígono é então

$$n \cdot 2a = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot tan\frac{180^\circ}{n} = n \cdot tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Como antes, vamos calcular os perímetros dos vários polígonos, desta vez, porém, circunscrito sobre o nosso círculo de raio $\frac{1}{2}$.

Nós já temos o perímetro calculado para o pentágono, então faremos o cálculo para o hexágono.

Quando n = 6:

$$n \cdot tan\frac{180^\circ}{n} = 6 \cdot tan\frac{180^\circ}{6} = 6 \cdot tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 3{,}4641.$$

E, novamente, utilizando o Excel com a fórmula $n \cdot tan\frac{\pi}{n}$, obtemos o perímetro de outros polígonos:

MÉDIA =C2*TAN(PI()/C2)

n	perímetro do polígono circunscrito de n lados
3	=C2*TAN(PI()/C2)
4	4,00000000000000
5	3,63271264002680
6	3,46410161513775
7	3,37102233165270
8	3,31370849898476
9	3,27573210839582
10	3,24919696232906
11	3,22989142232203
12	3,21539030917347
13	3,20421221941571
14	3,19540864146210
15	3,18834842505033
16	3,18259787807453
17	3,17785075083561
18	3,17388565275237
19	3,17053923805149
20	3,16768880649073

Plan1 Plan2 Plan3 Plan4 Plan5

Figura 7 - Planilha do Excel para obter o perímetro dos polígonos regulares circunscritos no círculo de raio ½.

Deste modo, obtemos o quadro abaixo:

N	Perímetro do polígono circunscrito de n lados
3	5,19615242270663
4	4,00000000000000
10	3,24919696232906
20	3,16768880649073
72	3,14358788941287
90	3,14286925425730
180	3,14191168707917
250	3,14175803084489
500	3,14163399594489
1000	3,14160298905616
5000	3,14159306700688
10000	3,14159275694405

Quadro 3 - Perímetro do polígono circunscrito de n lados

Mais uma vez percebe-se como o polígono que tem mais lados, quanto mais próximo de seu perímetro fica à circunferência do círculo.

Arquimedes, como dissemos antes, viu os polígonos inscritos e circunscritos como um "sanduíche" do círculo, como pode ser visto abaixo pelos dodecágonos inscritos e circunscritos (n = 12).

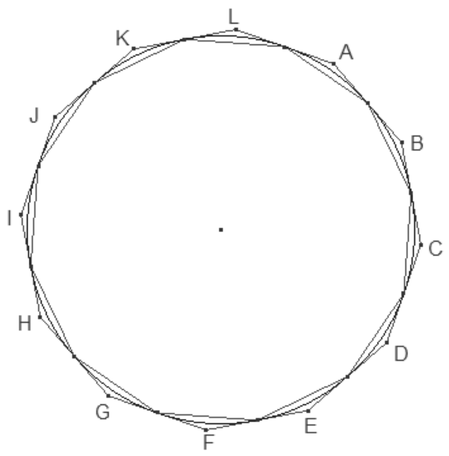


Figura 8 - Dodecágono inscrito e circunscrito no círculo.

Ele sugeriu essencialmente tomar a média dos dois perímetros para cada tipo de polígono para obter uma melhor aproximação de π.

n	**Perímetro do polígono inscrito de n lados**	**Perímetro do polígono circunscrito de n lados**	**Média dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos de n lados**
3	2,59807621135332	5,19615242270663	3,89711431702997
4	2,82842712474619	4,00000000000000	3,41421356237309
10	3,09016994374947	3,24919696232906	3,16968345303927
20	3,12868930080462	3,16768880649073	3,14818905364767
72	3,14059589030419	3,14358788941287	3,14209188985853
90	3,14095470322509	3,14286925425730	3,14191197874119
180	3,14143315871103	3,14191168707917	3,14167242289510
250	3,14150997083815	3,14175803084489	3,14163400084152
500	3,14157198277948	3,14163399594489	3,14160298936218
1000	3,14158748587956	3,14160298905616	3,14159523746786

5000	3,14159244688129	3,14159306700688	3,14159275694408
10000	3,14159260191267	3,14159275694405	3,14159267942836

Quadro 4 - Média dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos de n lados

A média dos dois perímetros (coluna do lado direito) está mais próxima do valor de π para cada tipo de polígono. Quando Arquimedes fez estes cálculos, ele não tomou tantos exemplos como fizemos aqui. De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), ele começou com dois hexágonos regulares, depois duplicando o número de lados, utilizando dois dodecágonos, então utilizando dois 24-gonos, depois a 48-gonos e 96-gonos.

Embora seus cálculos não fossem tão precisos como o nosso, e não temos um registro de como ele fez os cálculos, ele concluiu a partir do 96-gono que a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro, que é π, é superior a $3+\frac{10}{71}$ e inferior a $3+\frac{1}{7}$. Podemos escrever isso simbolicamente como

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}.$$

Por comparação com o que precede, faz

$$3{,}14084507042254\ldots < \pi < 3{,}14285714285714\ldots .$$

Percorremos um longo caminho por este método engenhoso de Arquimedes. No entanto, este método "primitivo" dá uma percepção muito intuitiva de π.

2.2 Método de Cusanus para encontrar o valor de π

Arquimedes usou polígonos regulares inscritos e circunscritos em um determinado círculo, cada vez aumentando o número de lados. O argumento é que, como o número de lados dos polígonos aumentou a circunferência do círculo, "ensanduichado" entre os dois polígonos, foi o valor limite do polígono.

Um método análogo desenvolvido por Nicolau de Cusa (1401-1464) tem-se um "sanduíche" em polígonos regulares com um número crescente de lados por círculos inscrito e circunscrito. Nicolau de Cusa (às vezes referido por seu nome latino, Cusanus) levou o seu nome a partir de sua cidade natal de Cues (hoje Kues) no rio Mosel, na Alemanha. Por avaliações de hoje, ele é considerado um dos pensadores alemães pioneiros na transição da Idade Média até os tempos modernos, mas ele não era muito conhecido como um matemático. Segundo Posamentier e Lehmann (2004), Nicolau era mais conhecido por sua carreira substancial na igreja. Ele tornou-se cardeal em 1488 e foi bispo de Bressanone (norte da Itália) e um governador (ou vigário geral) de Roma. Como matemático, ele fez tentativas mal sucedidas na quadratura do círculo e trissecção do ângulo geral, os quais agora sabem que é impossível. Tal como acontece com muitos matemáticos fascinados com os três "problemas famosos da antiguidade" (Duplicação do cubo, Trissecção do ângulo e Quadratura do círculo), na quadratura do círculo, as tentativas de Cusanus levou-o a uma aproximação de π. Vamos dar uma olhada no que Cusanus alcançou nessas tentativas e demonstraremos isso aqui, mas em termos mais modernos.

Em 1.450 Cusanus considerou um dado polígono regular de perímetro fixo 2 com círculos inscrito e circunscrito. Ele utilizou uma sequência de polígonos regulares de n lados (n = 4, 8, 16, 32, ...).

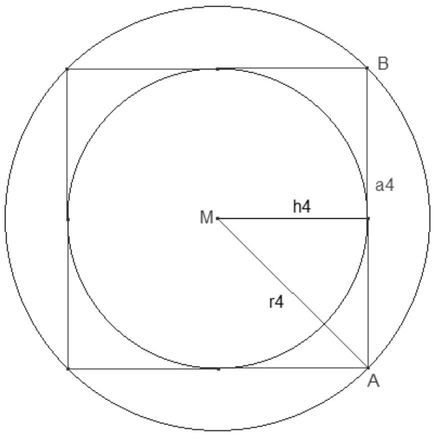


Figura 9 - Quadrado inscrito e circunscrito no círculo.

Comecemos com um quadrado, como Cusanus fez. Vamos chamar o perímetro do quadrado de p_4. Uma vez que cada um dos lados do quadrado é um $a_4 = \frac{1}{2}$, então $p_4 = 4 \cdot a_4 = 2$.

Considere C_{in} o círculo inscrito com a circunferência e C_{circun} o círculo circunscrito com circunferência do quadrado da figura 9. O raio do círculo inscrito é

$$h_4 = \frac{a_4}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

O raio do círculo circunscrito é

$$r_4 = \sqrt{h_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}3535533905.$$

Podemos ver claramente que o perímetro do quadrado está entre as circunferências dos dois círculos, então podemos comparar o perímetro, p_4, e as duas circunferências, C_{in} e C_{circun}, para obter:

$C_{in} < p_4 < C_{circun}$ ou $2\pi h_4 < 2 < 2\pi r_4$.

Dividindo os termos por 2, obtemos

$\pi h_4 < 1 < \pi r_4$.

Agora, dividindo os termos por π, tem-se

$h_4 < \dfrac{1}{\pi} < r_4$.

Tomando os valores inversos de cada um dos termos, a desigualdade inverte, então temos

$\dfrac{1}{r_4} < \pi < \dfrac{1}{h_4}$.

Como $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, segue que $\frac{1}{r_4} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2{,}82842713$ e $\frac{1}{h_4} = 4$. Portanto 2,82842713 < π < 4, que é uma aproximação um pouco grosseira para o valor do π. Porém, à medida que aumentamos o número de lados do polígono regular, as estimativas devem ficar melhores.

A próxima aproximação foi feita dobrando o número de lados do polígono regular, utilizado apenas para obter um octógono regular. Cusanus considerou um círculo inscrito de raio h_8 e circunferência C_{in} e r_8 como o raio do círculo circunscrito à circunferência C_{circun}.

Uma vez que cada um dos lados é $a_8 = \frac{1}{4}$, o perímetro, p_8, do octógono regular é $p_8 = 8 \cdot a_8 = 2$.

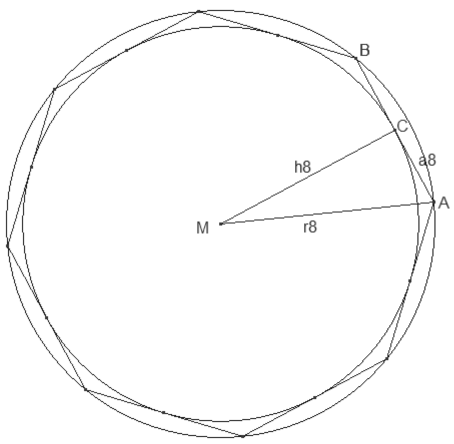


Figura 10 - Octógono inscrito e circunscrito no círculo.

$$\angle AMB = 45°, potanto, \angle AMC = 22{,}5°.$$

$$tan\angle AMC = tan22{,}5° = \sqrt{2} - 1 = \frac{\frac{a_8}{2}}{h_8} = \frac{a_8}{2h_8}.$$

Esta pode então ser transformada na seguinte equação:

$$h_8 = \frac{a_8}{2tan\angle AMC} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{1}{8\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{8} \approx 0{,}3017766952.$$

Com o teorema de Pitágoras, $r_8^2 = h_8^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$, obtemos

$$r_8 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{16}} \approx 0{,}3266407412.$$

Para o perímetro, p_8, e circunferências, C_{in} e C_{circun}, obtemos

$$C_{in} < p_8 < C_{circun} \quad \text{ou} \quad 2\pi h_8 < 2 < 2\pi r_8.$$

Dividindo os termos por 2, segue que

$$\pi h_8 < 1 < \pi r_8.$$

Então, dividindo os termos por π, temos

$$h_8 < \frac{1}{\pi} < r_8.$$

Novamente, tendo o inverso de cada termo também inverte a desigualdade e obtemos:

$$\frac{1}{r_8} < \pi < \frac{1}{h_8}.$$

Isso significa que para os valores inversos

$$\frac{1}{r_8} = \sqrt{32 - 16\sqrt{2}} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3{,}061467458,$$

e

$$\frac{1}{h_8} = 8\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 3{,}313708498.$$

Finalmente temos uma faixa de valor mais preciso para π:

$$3{,}061467458 < \pi < 3{,}313708498.$$

Vamos agora dar um salto gigante para o caso geral, onde iremos tentar imprensar o valor de π.

Para o caso geral, h_n é o raio do círculo inscrito com a circunferência C_{in} e r_n é o raio do círculo circunscrito a circunferência C_{circun} de um n-gono regular (n = 4, 8, 16, 32, ...). Nós estabelecemos acima que

$$\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}.$$

Desta forma, podem-se generalizar intervalos fixos para π e determinar uma repetição dos raios dos círculos inscrito e circunscrito com números crescentes de lados dos n-gonos regulares (com o perímetro 2).

Como Cusanus obteve seu método de repetição? Para explicar isso, olhe novamente para um n-gono regular (n = 4, 8, 16, 32, ...):

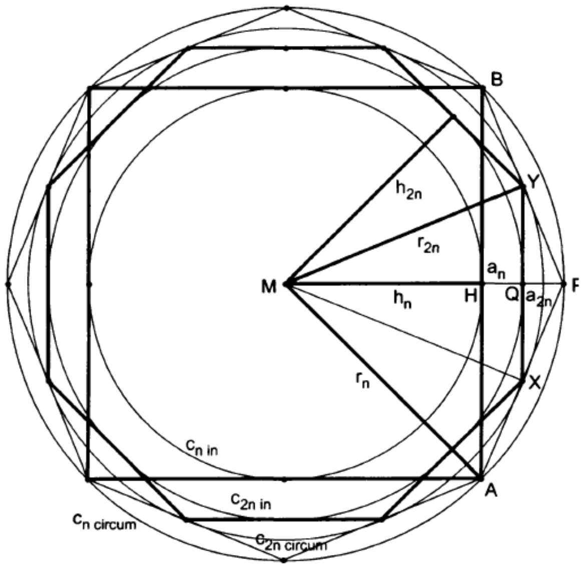


Figura 11 - Polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos no círculo (n = 4, 8, 16).
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.97).

Assumimos $AB = a_n,\ MA = MB = r_n,\ e\ MH = h_n$. Depois de dobrar o número de lados do polígono, temos um 2n-gono regular. Aqui P é o ponto médio do arco $\widehat{AB}$, e X e Y são os pontos médios dos lados do $\overline{AP}\ e\ \overline{BP}$ no triângulo ABP. Portanto, $XY = \frac{AB}{2}$, onde $\overline{XY}$ é o lado do 2n-gono regular com perímetro 2 e de centro M. Daqui resulta que $MP = MA = r_n$, $MX = MY = r_{2n}$ e $MQ = h_{2n}$ (compare os casos em que n = 4 e 2n = 8 na figura 11).

Como Q é o ponto médio do segmento de PH, temos $\mathrm{h}_{2\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{r_n+h_n}}{2}$.

No triângulo retângulo MPX conclui-se que

$$MX^2 = MQ.MP.$$

Isto pode ser escrito como $\mathrm{r}_{2\mathrm{n}}^2 = \mathrm{r_n} \cdot \mathrm{h}_{2\mathrm{n}}$, que leva a $\mathrm{r}_{2\mathrm{n}} = \sqrt{\mathrm{r_n} \cdot \mathrm{h}_{2\mathrm{n}}}$.

Para gerar os valores para o resto do n-gonos (em que n = 16, 32, 64, etc), pode-se utilizar o caso geral. Nós usamos os seguintes termos gerais:

$$\mathrm{h}_4 = \frac{1}{4};\ \mathrm{r}_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{(valores iniciais).}$$

$$\mathrm{h}_{2\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{r}_\mathrm{n}+\mathrm{h}_\mathrm{n}}{2};\ \mathrm{r}_{2\mathrm{n}} = \sqrt{\mathrm{r}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{h}_{2\mathrm{n}}}$$ (termos de iteração).

Estes produzem a tabela de valores seguintes:

n	h_n	r_n	$\frac{1}{\mathrm{r}_\mathrm{n}}$	$\frac{1}{\mathrm{h}_\mathrm{n}}$
4	0,25	0,35355339059	2,828427125	4
16	0,31420871826	0,32036443097	3,121445152	3,1825978781
256	0,31829390706	0,31831787581	3,141513801	3,1417503692
2048	0,31830963651	0,31831001102	3,141591422	3,1415951177
8192	0,31830987058	0,31830989399	3,141592577	3,1415928076
32768	0,31830988521	0,31830988667	3,141592649	3,1415926632
131072	0,31830988612	0,31830988621	3,141592653	3,1415926542
524288	0,31830988618	0,31830988619	3,141592654	3,1415926536
1048576	0,31830988618	0,31830988618	3,141592654	3,1415926536
2097152	0,31830988618	0,31830988618	3,141592654	3,1415926536

Quadro 5 – Polígono de n lados inscrito no círculo de raio r_n e circunscrito no círculo. de raio h_n

Assim, conseguimos oito casas decimais com precisão para o valor de π: 3,14159265.

Enquanto o método de Arquimedes utiliza as funções trigonométricas seno e tangente, o método de Cusanus depende apenas de teoremas elementares, como o teorema de Pitágoras, similaridade, e a definição de base das funções trigonométricas. Além disso, a média aritmética e médias geométricas são utilizadas para a repetição:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2} = \frac{r_n + h_n}{2} = h_{2n},$$

$$G(x,y) = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{r_n \cdot h_n} = r_{2n}.$$

2.3 Cálculo do valor de π por contagem dos quadrados

É sempre um desafio determinar valores aproximados de π com muitas casas decimais exatas. Não há nenhum método aritmeticamente confortável para este cálculo. Por um lado, precisamos apenas de um conhecimento elementar da matemática para os seguintes métodos, mas, por outro lado, essas aproximações do valor de π não são tão exatas como os cálculos feitos por Arquimedes ou Cusanus. Oferecemos aqui alguns métodos relativamente simples para calcular o valor de π.

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), para determinar a área de um círculo, podemos cobri-lo com uma estrutura de quadrados (cada um com lado de comprimento 1), e contar o número de quadrados (a), no interior do círculo. Em seguida, contar o número de quadrados (b), que são atravessados pelo círculo de circunferência.

Vamos assumir que uma metade da área destes quadrados intersectados reside no interior do círculo, e a outra metade da área destes quadrados intersectados encontra-se fora do círculo. Assim, temos $a + \frac{b}{2}$ como um valor aproximado para a área do círculo. Vamos considerar isso com o exemplo a seguir.

Exemplo 1:

Círculo com o raio r = 8

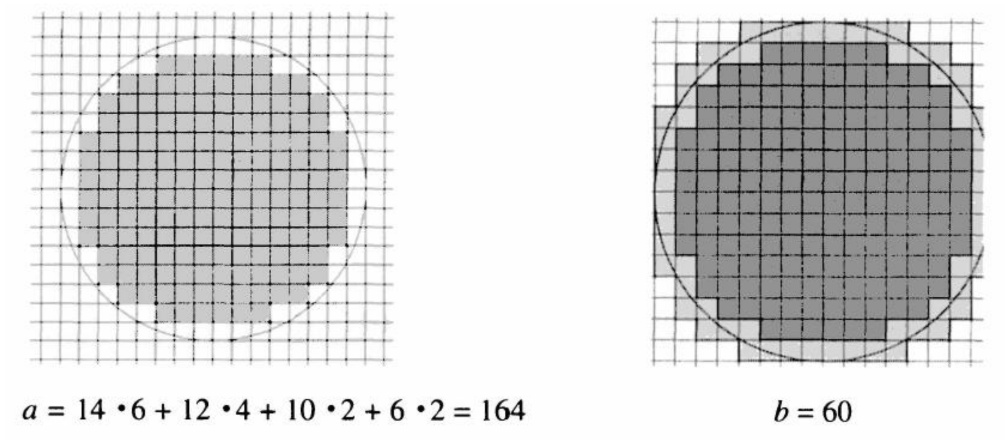


Figura 12 - Contagem de quadrados no círculo de raio r = 8.
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.100).

Usando a fórmula conhecida para a área de um círculo, obtemos

$$Área_{círculo} = \pi \cdot r^2 \approx 3{,}14 \cdot 8^2 = 200{,}96.$$

Agora, usando o método de contagem, temos o seguinte resultado, que compara favoravelmente com o método tradicional acima.

Valor aproximado: $Área_{círculo} \approx a + \frac{b}{2} = 164 + 30 = 194$, relativamente próximo de 201, o valor real obtido pela fórmula.

Esta aproximação conduz a π como se segue: a área aproximada da circunferência é 194. Este deverá ser igual a $8^2 \cdot \pi = 64\pi$, para que $64\pi \approx 194$. Isto dá um valor para $\pi = \frac{194}{64} \approx 3{,}03125$.

A aproximação de π torna-se melhor quando um maior número de quadrados é usado, por exemplo, quando r = 10.

Exemplo 2:

Círculo com o raio r = 10

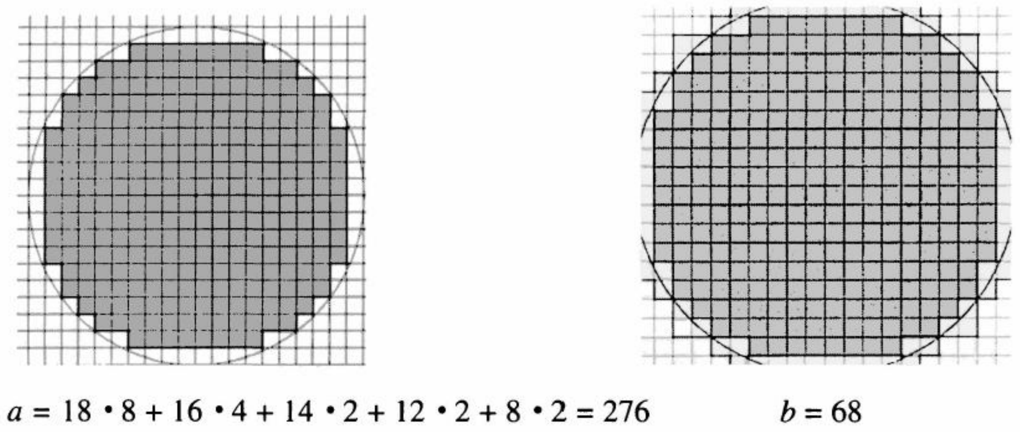


Figura 13 - Contagem de quadrados no círculo de raio r = 10.
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.101).

$$Área_{círculo} = \pi \cdot r^2 \approx 3{,}14 \cdot 10^2 = 314.$$

Valor aproximado: $\text{Área}_{\text{círculo}} \approx \text{a} + \frac{\text{b}}{2} = 276 + 34 = 310$, que é agora mais próximo do valor "efetivo", 314, tal como determinado pela fórmula acima.

Novamente, $\text{Área}_{\text{círculo}} = 310 = 10^2\pi = 100\pi$. Assim, $\pi \approx \frac{310}{100} = 3{,}1$, o que compara favoravelmente com a aproximação anterior.

Em vez de todo o círculo, basta olhar para um quadrante, contar os respectivos quadrados e quadruplica-los.

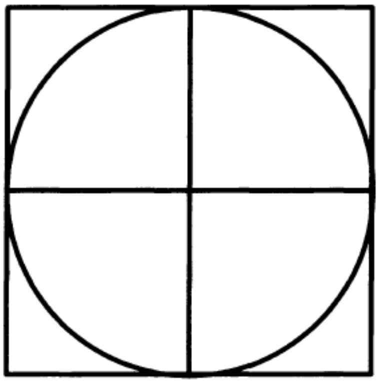
2.4 O Método de Monte-Carlo para determinar o valor de π

O método Monte-Carlo é um procedimento que faz uso de probabilidade, cálculo e estatística para estabelecer os fatos com um grande número de testes para um experimento aleatório.

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), tal procedimento pode ser simulado por meio de gotas de chuva que caem sobre um quadrado pré-definido, ou semelhantemente usando um número aleatório de lances de um dardo. Este algoritmo "alvo", que pode ser usado em um ambiente escolar, deve servir de exemplo aqui.

Para fazer isso, uma chuva ao acaso é simulada e os acertos contados dentro e fora do círculo inscrito (com raio de comprimento 1) em um quadrado com comprimento do lado 2. Usar lances do dardo, em vez de gotas de chuva, pode ser um procedimento melhor. Com as seguintes considerações, atinge então a possibilidade de determinar o valor de π.

A relação entre os acertos no círculo e o número total de arremessos no quadrado produz uma aproximação para π:



Quadrado

Lado: 2r = 2

Área: $A_Q = (2r)^2 = 4$

Círculo

Raio: r = 1

Área: $A_C = \pi \cdot r^2 = \pi$

Figura 14 - Quadrado de lado 2 inscrito no círculo de raio r = 1.
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.106).

$$\frac{A_C}{A_Q} = \frac{\pi \cdot r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\pi}{4} = probabilidade\ (acertos\ no\ círculo).$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{número\ de\ acertos\ no\ círculo}{número\ de\ lançamentos\ no\ quadrado}.$$

O método proporciona uma boa aproximação para π só depois de um grande número de jogadas. A seleção aleatória (o lançador de dardos ou gotas de água) deve produzir um número muito coincidente e não pode ser objeto de quaisquer regularidades, isto é, a pessoa não pode influenciar, onde as gotas de água ou os dardos irão cair.

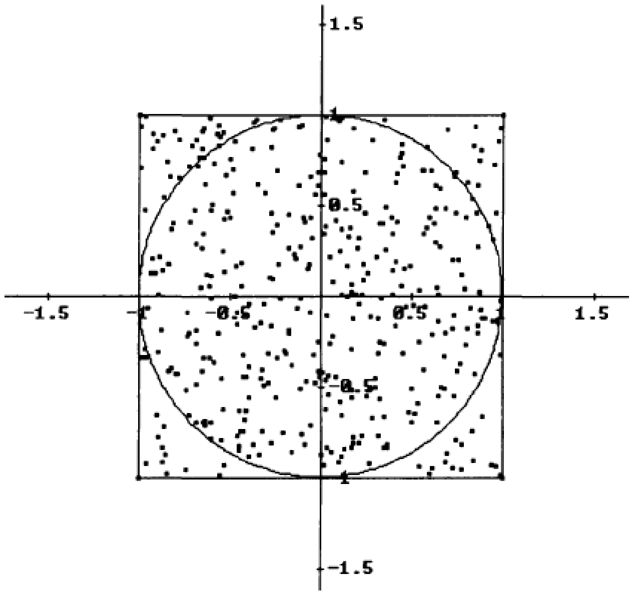


Figura 15 - Representação das gotas de chuva no quadrado de lado 2 no plano cartesiano.
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.107).

Para o primeiro quadrante temos, por exemplo na Figura 16, no caso de dez lançamentos, que o primeiro e o quarto lances não satisfazem a condição de $x^2 + y^2 \leq 1$. Portanto, uma vez que dois pontos estão fora da região de destino, apenas oito pontos são desenhados:

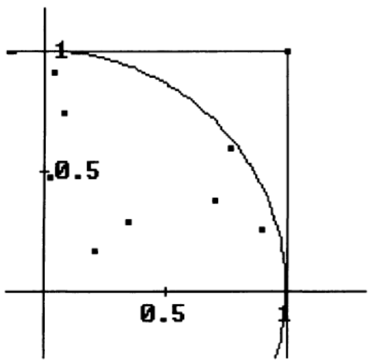


Figura 16 - Representação do primeiro quadrante da Figura 15.
Fonte: (POSAMENTIER E LEHMANN, 2004,p.107).

Para o cálculo das proporções das áreas, uma integração de Monte-Carlo é agora utilizada. Pode-se proceder da seguinte forma:

• Com um gerador de números aleatórios, um x e um y valores entre 0 e 2r são "jogados".

• O teorema de Pitágoras é utilizado para verificar se o ponto jogado P (x, y) está dentro ou fora do círculo.

• Os acertos no círculo são contados.

• O procedimento é repetido – quanto mais repetido mais preciso será o valor esperado de π.

2.5 Calculando π através de uma série

Antigamente a seguinte fórmula era utilizada para o cálculo de π, a qual foi desenvolvida pelo famoso matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que juntamente com Isaac Newton, é creditado com o desenvolvimento do cálculo moderno:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Posamentier e Lehmann (2004), afirmam que Leibniz, que também é considerado um dos grandes filósofos do mundo ocidental, comentou sobre a ligação incomum entre o número π e o padrão de alternadamente somar e subtrair frações de unidade ímpar com as palavras "Numero deus impare gaudet" (Deus é feliz com o número ímpar).

Mencionamos, então, que a série se aproxima do valor de π muito lentamente, uma vez que necessita de cem mil termos para chegar a uma precisão de quatro casas decimais de π e para a precisão cinco casas decimais precisará um milhão de termos.

Vamos dar uma olhada em como esta série "se comporta". Multiplicamos ambos os lados por 4:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots \right) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}.$$

Novamente, utilizando o Excel, calculamos alguns termos da série e obtemos a tabela abaixo:

n	$4 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$	$4 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$
1	4	4
2	-1,333333333	2,666666667
3	0,8	3,466666667
4	-0,571428571	2,895238095
5	0,444444444	3,33968254
6	-0,363636364	2,976046176
7	0,307692308	3,283738484
8	-0,266666667	3,017071817
9	0,235294118	3,252365935
10	-0,210526316	3,041839619

Quadro 6 – Cálculo de alguns valores da série de Leibniz

O valor de aproximação dá "saltos" em torno do valor real de π, uma vez que os termos estão adicionando ou subtraindo alternadamente, é, portanto, alternadamente maior ou menor do que π.

Observando os valores obtidos, notamos que esta série demora a convergir para π. Apenas para 100.000 termos, conseguimos uma aproximação com quatro casas decimais exatas:

$$4 \cdot \sum_{i=1}^{100000} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \approx 3{,}141582653.$$

Em seguida, à medida que o valor de n aumenta, a aproximação de π torna-se cada vez mais precisa.

n = 1.000.000: valor aproximação = 3,141591653;

n = 10.000.000: valor aproximação = 3,141592553;

n = 100.000.000: valor aproximação = 3,141592643.

2.6 Uma série melhor para o cálculo do valor de π

Existem outras séries que convergem ao valor de π mais rápidas do que a série de Leibniz.

Anteriormente, mencionamos a seguinte fórmula para determinar o valor de π, que foi descoberto pelo matemático suíço Leonhard Euler:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots.$$

ou (após a multiplicação por 6 e uma extração de raiz quadrada):

$$\pi = \sqrt{6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)} = \sqrt{6 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}}.$$

Vamos dar uma olhada em algumas somas parciais:

n	$6 \cdot \frac{1}{n^2}$	$6 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$	$\sqrt{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}$
1	6	6	2,449489743
2	1,5	7,5	2,738612788
3	0,666666667	8,166666667	2,857738033
4	0,375	8,541666667	2,922612986
5	0,24	8,781666667	2,963387701
6	0,166666667	8,948333333	2,991376495
7	0,12244898	9,070782313	3,011773948
8	0,09375	9,164532313	3,027297857
9	0,074074074	9,238606387	3,03950759
10	0,06	9,298606387	3,049361636

Quadro 7- Cálculo de alguns valores da série de Euler.

Para n = 100.000.000 obtemos precisão de oito casas: $\pi \approx 3,141592644$.

2.7 Método do Ramanujan para encontrar o valor de π

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), o brilhante matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) fez contribuições para a obtenção do valor de π, mas há pouca evidência de como ele chegou aos seus resultados. Nascido em 1887 na pequena cidade ao sul indiano de Erode, Ramanujan passou sua juventude fascinado com a matemática em detrimento de outros assuntos. Como a Sociedade Matemática Indiana estava sendo fundada, foi proporcionado um fórum para Ramanujan expor seu talento matemático. Por exemplo, em 1911, ele levantou problemas com base em seu trabalho anterior e não encontrou solucionadores entre os leitores. Um dos exemplos foi avaliar

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots}}}}},$$

que parecia inofensiva e simples, mas ainda não foram encontrados solucionadores com sucesso. Segundo Posamentier e Lehmann (2004), o truque foi encontrado em seu caderno de teoremas que ele estabelecia. Aqui, ele simplesmente aplicou o seguinte teorema, que diz que se você puder representar um número como (x + n + a), a expressão acima pode ser representada como

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n + a)^2 + x\sqrt{a(x + n) + (n + a)^2 + (x + n)\sqrt{\cdots}}}.$$

Então, se 3 = x + n + a, onde, por exemplo, x = 2, n = 1 e a = 0, então o valor deste “ninho de radicais” é simplesmente igual a 3. Isto é quase impossível de se fazer sem o conhecimento do teorema de Ramanujan.

Em 1912, Ramanujan foi escolhido para a posição de escriturário e começou a trabalhar. É também nesta altura que lhe é dada uma cópia do livro "Orders of infinity" de G. H. Hardy. A leitura deste livro interessou-o tanto que Ramanujan decide escrever uma carta a Hardy para apresentar o seu trabalho:

> "Não tenho estudos superiores, mas cumpri a escolaridade pré-universitária. Após deixar a escola, uso todo o meu tempo livre para trabalhar em matemática. Não passei pelo caminho usual que é seguido num curso universitário, mas estou a desenhar um novo caminho para mim. Investiguei séries divergentes e os resultados que obtive são classificados pelos matemáticos locais como um "começo"." (MOTA E PEREIRA, 2004)

Hardy, juntamente com Littlewood, estudou a longa lista de teoremas sem demonstração que Ramanujan lhe tinha enviado. E, respondeu:

> "Tive grande interesse na sua carta e nos teoremas que me enviou. Deverá, no entanto, compreender que, antes de poder julgar o valor do seu trabalho, é essencial que analise as demonstrações de alguns dos seus teoremas. Os seus resultados parecem-me ser de três tipos:
> 1- Há uma série de resultados que já são conhecidos ou que são facilmente deduzidos de outros teoremas também conhecidos;
> 2- Há resultados que, pelo que sei, são novos e interessantes, mas interessantes mais pela sua curiosidade e aparente dificuldade do que pela sua importância;
> 3- Há outros resultados que parecem ser novos e importantes." (MOTA E PEREIRA, 2004)

Ramanujan ficou radiante com a resposta de Hardy:

> "Encontrei em si um amigo que compreende o meu trabalho. Neste momento passo fome. Para preservar o meu cérebro preciso de comida e este é o meu principal objetivo. Uma carta de apoio da sua parte seria uma grande ajuda pois permitir-me-ia a conseguir uma bolsa, ou da Universidade ou do governo." (MOTA E PEREIRA, 2004)

A Universidade de Madras deu uma bolsa a Ramanujan por dois anos e, em 1914, Hardy trouxe Ramanujan para o Trinity College de Cambridge onde os dois deram início a uma frutuosa relação de trabalho.

Apesar de um choque de culturas, os dois se deram muito bem e mutuamente assistiram uns aos outros. Este foi o início da popularidade de Ramanujan fora da Índia. Embora o uso de sapatos e de talheres fosse novo para este indiano, ele veio de uma longa herança da cultura matemática. Os indianos estavam usando nosso sistema de numeração (incluindo o zero) por mais de mil anos antes de ter sido introduzido na Europa com a publicação do livro de Fibonacci, Liber ábacos, em 1202.

Em nosso contexto, Ramanujan veio com alguns resultados surpreendentes na determinação do valor de π. Ele teria obtido empiricamente (sua palavra) o valor aproximado de π com a seguinte expressão:

$$\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(81+\frac{361}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2413}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = (97{,}4\overline{09})^{\frac{1}{4}}$$
$$\approx 3{,}14159265258264612520 6\cdots.$$

Ele afirmou ainda que o valor que ele usou para π para fins de cálculo foi

$$\frac{355}{113}\left(1-\frac{0{,}0003}{3533}\right)=3{,}1415926535897943\cdots,$$

que passou a dizer que "é maior do que π por cerca de 10^{-15}" e "é obtido simplesmente tomando o recíproco de

$$1-\left(\frac{113\pi}{355}\right)=11.776.666{,}61854247437446528035543\ldots".$$

Srinivasa Ramanujan nos deu outras aproximações estranhas de π. Ainda hoje estamos perplexos pela forma como ele chegou aos vários resultados. Apesar de estarmos cada vez mais capazes de compreender suas derivações, ainda não podemos apreciar plenamente a complexidade da forma como a sua mente única funcionava. A seguir estão algumas de suas conclusões sobre o valor de π:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9.801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1.103+26.390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

e

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\frac{42n+5}{2^{12n+4}}.$$

A seguir estão algumas aproximações de π que são devidas a Ramanujan:

$\frac{355}{113}\approx 3{,}141592920$ foi descoberto originalmente por Adriaen Metius (1571-1635), e, posteriormente, Ramanujan deu uma construção geométrica para este termo.

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}\approx 3{,}141640786;$$

$$\frac{19\sqrt{7}}{16}\approx 3{,}141829681.$$

Algumas séries descobertas por Ramanujan seguem abaixo. No entanto, o ponto importante a destacar é que o uso de tal série para calcular um grande número de dígitos requer o desenvolvimento de algoritmos específicos.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1.103 + 26.390k)}{99^{4k}}.$$

Vamos analisar alguns termos desta série, para isso, tomamos:

$$f(k) = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1.103 + 26.390k)}{99^{4k}}.$$

Para k = 0, $f(0) = 0{,}3183$.

Para k = 1, $f(1) = 7{,}743 \cdot 10^{-9}$.

Para k = 2, $f(2) = 6{,}479857 \cdot 10^{-17}$.

Para k = 3, $f(3) = 5{,}757 \cdot 10^{-25}$.

Para k = 4, $f(4) = 5{,}308 \cdot 10^{-33}$.

Observando os valores obtidos, percebemos que estes decrescem rapidamente, fazendo com que a série convirja rapidamente também.

$$\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{0}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1.103 + 26.390k)}{99^{4k}}} = 3{,}1415927300133056603.$$

$$\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{1}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1.103 + 26.390k)}{99^{4k}}} = 3{,}1415946535897938 78.$$

$$\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{2}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1.103 + 26.390k)}{99^{4k}}} = 3{,}1415946535897932385.$$

Assim, para k variando de 0 a 2, o valor de π encontrado possui precisão de 10 casas decimais.

Ramanujan morreu de doença, desnutrição e possivelmente infecção hepática em 1920 com 32 anos. Durante sua curta vida, Ramanujan obteve de maneira independente cerca de 3900 resultados (principalmente identidades e equações). O Ramanujan Journal, uma publicação internacional, foi lançado para publicar os trabalhos em todas as áreas da matemática influenciados por sua obra.

Em dezembro de 2011, em reconhecimento à sua contribuição para a matemática, o Governo da Índia declarou que o aniversário de Ramanujan (22 de dezembro) deve ser comemorado todos os anos como o Dia Nacional da Matemática, e também declarou 2012 o Ano Nacional de Matemática.

Aqui estão mais algumas das descobertas maravilhosas realizadas pelo gênio Ramanujan:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots;$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{72}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}} \frac{(23+260k)}{18^{2k}};$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3.528}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}} \frac{(1.123+21.460k)}{882^{2k}}.$$

2.8 O algoritmo Chudnovsky para encontrar o valor de π

Os irmãos Chudnovsky, ambos nascidos em Kiev, David Volfovich em 1947 e Gregory Volfovich em 1952, são os matemáticos americanos conhecidos por seu recorde mundial em cálculos matemáticos, seus supercomputadores construídos em casa e sua estreita relação de trabalho. (http://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_brothers).

Os irmãos Chudnovsky têm mantido registros, em momentos diferentes, para o cálculo de π com cada vez mais casas decimais, incluindo dois bilhões de dígitos no início de 1990 em um supercomputador, que eles construíram (apelidado de "m-zero") em seu apartamento em Manhattan. Em 1987, os irmãos Chudnovsky desenvolveram o algoritmo (agora chamado o algoritmo Chudnovsky) que eles usaram para quebrar vários recordes para calcular π, usando a computação. Hoje, esse algoritmo é usado pelo programa Mathematica para calcular π, e continuou a ser usado por outras pessoas que também alcançaram recordes mundiais no cálculo de π.

O algoritmo Chudnovsky é um método rápido para calcular os dígitos de π. Foi publicado pelos irmãos Chudnovsky em 1989, e usado nos cálculos de recordes mundiais de 2,7 trilhões de dígitos de π em dezembro de 2009, 5 trilhões de dígitos de π em agosto de 2010, e 10 trilhões de dígitos de π em outubro de 2011. (http://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm).

O algoritmo é baseado na seguinte série hipergeométrica generalizada rapidamente convergente:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!\,(k!)^3}\frac{(A+Bk)}{C^{3k+\frac{3}{2}}}.$$

Onde, A = $13.591.409$

B = $545.140.134$

C = 640.320.

Esta identidade é semelhante a algumas das fórmulas de Ramanujan envolvendo π.

Vamos também analisar alguns termos desta série, para isso, tomamos:

$$g(k) = 12.(-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{(A + Bk)}{C^{3k+\frac{3}{2}}}.$$

Para k = 0, $g(0) = 0{,}3183$.

Para k = 1, $g(1) = -5{,}981 \cdot 10^{-15}$.

Para k = 2, $g(2) = 3{,}119 \cdot 10^{-29}$.

Para k = 3, $g(3) = -1{,}743 \cdot 10^{-43}$.

Para k = 4, $g(4) = 1{,}013 \cdot 10^{-57}$.

Novamente, observando os valores obtidos, percebemos que estes decrescem rapidamente, fazendo com que a série convirja rapidamente também.

$$\frac{1}{12\sum_{k=0}^{0}(-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!\,(k!)^3} \frac{(A + Bk)}{C^{3k+\frac{3}{2}}}} = 3{,}1415926535897342077;$$

$$\frac{1}{12\sum_{k=0}^{1}(-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!\,(k!)^3} \frac{(A + Bk)}{C^{3k+\frac{3}{2}}}} = 3{,}1415926535897932385.$$

Assim, para k variando de 0 a 1, o valor de π encontrado possui precisão de 10 casas decimais.

2.9 Frações continuadas e π

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), o matemático alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi o primeiro a provar rigorosamente que π é irracional. E, em 1770, Lambert produziu uma fração continuada para π.

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

Os convergentes desta fração continuada são $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103.993}{33.102}, \frac{104.348}{33.215}, \ldots$, e daí,

$$\frac{3}{1} = 3{,}0;$$

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}1428571;$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3{,}14150943396;$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292;$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{103.993}{33.102} = 3{,}1415946530119;$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}} = \frac{104.348}{33.215} = 3{,}14159265392142l;$$

Se $\frac{n}{d}$ for uma aproximação de π fornecida pela fração continuada, então ela é a melhor aproximação racional de π dentre todas as outras $\frac{p}{q}$, com $q \le d$. Isto é, se p e q forem números inteiros positivos com $q \le d$, então

$$\left|\pi - \frac{n}{d}\right| \le \left|\pi - \frac{p}{q}\right|.$$

Segundo Posamentier e Lehmann (2004), podemos nos lembrar ao ver os primeiros convergentes, que eles são aproximações históricas para π:

- 3 foi a aproximação mencionada na Bíblia (I Reis 07:23 e 2 Crônicas 4:2).
- $\frac{22}{7}$ foi o limite superior dado por Arquimedes, no século III antes de Cristo.
- $\frac{333}{106}$ foi o limite inferior para π encontrado por Adriaen Anthoniszoon.
- $\frac{355}{113}$ foi encontrado por Tsu Ch'ung Chi e outros por volta de 480.

Observando os valores decimais destes convergentes, notamos como eles se aproximam gradualmente de π.

Vimos numerosas maneiras para calcular o valor de π. Alguns métodos eram primitivos, enquanto outros foram muito sofisticados. Mais notavelmente são aqueles que parecem ter evoluído a partir de palpites espetaculares. Métodos atuais envolvem o computador, e como futuros cálculos do valor de π com mais casas decimais exatas serão apenas limitados pela criatividade do homem e da capacidade do computador.

3 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Neste capítulo iremos sugerir duas atividades para encontrar uma aproximação do valor de π para o Ensino Fundamental e Médio, utilizando o Excel.

Para o Ensino Fundamental, sugerimos o Método de Monte-Carlo, com os pingos de chuva, utilizando a função aleatória do Excel e calculando a probabilidade de maneira intuitiva.

Para o Ensino Médio, sugerimos o cálculo através do polígono regular inscrito, ou seja, utilizando uma adaptação do método de Arquimedes.

Para isso, iremos fazer uma breve apresentação do que é o Excel e suas principais funções e, os itens que serão utilizados nas atividades que, percebe-se que os alunos no geral não conhecem.

3.1 Introdução ao Microsoft Excel

De acordo com Costa (2014), o MS Excel é um software aplicativo para Windows contido no pacote Office, que permite a criação de gráficos, a manipulação de bancos de dados e a utilização de planilhas eletrônicas.

Mas, segundo Duarte (2013), Microsoft Excel é uma poderosa planilha eletrônica que pode ser imaginada como uma grande folha de papel dividida em 256 colunas e 16.384 linhas nas quais podemos armazenar textos e números.

Uma planilha é um conjunto de linhas e colunas, e cada junção de uma linha com uma coluna chama-se célula, que é a unidade básica da planilha, onde ficam armazenados os dados. Cada célula possui um endereço próprio, formado pela letra da coluna e pelo número da linha.

O ponteiro de célula nada mais é do que aquele retângulo formado por linhas mais grossas e que está sempre indicando a célula onde estamos trabalhando no momento.

Ainda de acordo com Duarte (2013), o Excel sempre classificará tudo que está sendo digitado dentro de uma célula em quatro categorias:

1. um número;
2. um texto ou um título;
3. uma fórmula;
4. um comando;

Para que os números sejam mostrados com um ponto a cada três dígitos e a vírgula decimal, é preciso formatá-los. Você pode aplicar o formato moeda (R$ 950.340,00), percentual (50,00%) ou o separador de milhares (847.873,88). Para formatar uma célula, clique na célula mais acima e mais à esquerda e arraste até a célula mais abaixo e mais à direita do grupo. Em seguida, clique no botão do formato desejado.

Também utilizaremos a alça de preenchimento, que é aquele pequeno pontinho preto que existe no canto inferior direito da célula selecionada. Ela é bastante útil em muitas tarefas. Dentre elas:

- Copiar: selecione a célula (ou grupo de células) que deseja cópias, clique na alça de preenchimento e arraste na direção desejada indicando o número de cópias.

- Sequências: você pode poupar muito trabalho em criação de sequências de datas, números, meses, etc., fazendo uso da alça. Para isso, digite os dois primeiros valores da sequência (um ao lado do outro ou um sobre o outro).

E, logo abaixo da barra de formatação está a barra de fórmulas que é dividida em três partes: a primeira parte contém a indicação do endereço atual do ponteiro de células; a segunda parte contém os botões de entrada e cancelamento que são reconhecidos respectivamente por um “tique” (√) e por um “xis” (X), que só aparecem no momento da digitação; e a terceira parte está sempre mostrando o conteúdo da célula atual que também é usada para a digitação ou alteração de um valor ou texto para uma célula.

3.1.1 Fórmulas no Excel

De acordo com Duarte (2013), as fórmulas constituem a genuína força motriz de uma planilha. Se definir adequadamente uma fórmula, ela calculará a resposta correta quando for introduzida em uma célula, e daí por diante se manterá sempre atualizada, recalculando os resultados sempre que qualquer um de seus valores for modificado. É como dispor de um batalhão de escravos dóceis, rápidos e, o que é melhor, inteligente. Sempre que for digitar uma fórmula em uma célula, obrigatoriamente ela deve começar com um sinal de igual (=). As fórmulas se constituem de endereços de células, operadores aritméticos e, ocasionalmente, valores. Os operadores aritméticos que podem ser usados em uma fórmula são os seguintes:

+ (Sinal de mais) para adição;

- (Sinal de menos ou hífen) para subtração;

* (Asterisco) para multiplicação;

/ (Barra) para divisão;

^ (Acento circunflexo) para potenciação.

Mas há também fórmulas especiais pré-definidas pelo Excel através das funções. Uma função nada mais é do que uma fórmula pré-definida que efetua um tipo de cálculo específico. Tudo o que precisa para utilizar uma função é fornecer a ela os valores apropriados para efetuar esses cálculos. Tal como as fórmulas criadas pelo usuário, as funções devem começar com um sinal de igual (=) para que o Excel saiba interpretá-las como fórmulas e não como texto. É aconselhável digitar o nome da função e o nome das células em maiúsculo.

= SOMA() : Soma todos os valores do grupo ou células indicadas.

= MÉDIA() : Calcula o valor médio do grupo ou célula indicadas.

= Raiz(): Calcula a raiz quadrada da célula indicada.

Para a primeira atividade iremos utilizar as seguintes funções pré-definidas:

- Função Aleatório( ): Retorna um número maior ou igual a zero e menor do que 1 (modificado quando recalculado), distribuído uniformemente. É uma função sem argumentos e que apresenta resultado volátil. Porém, a cada modificação na planilha, o resultado da função ALEATÓRIO é alterado. É uma função que se encontra no grupo de Funções Matemáticas, ou com a sintaxe: =ALEATÓRIO().

- Função Cont.Se( ): Conta, quantas células dentro de um intervalo satisfazem a um critério ou condição. Ignora as células em branco durante a contagem. É uma função que se encontra no grupo de Funções Estatísticas, ou com a sintaxe: =CONT.SE (intervalo;“critério”).

Já para a segunda atividade usaremos apenas os operadores aritméticos já citados anteriormente.

3.2 Utilizando o Método de Monte-Carlo (Pingos de Chuva)

Como já foi descrito no Capítulo 2, o Método de Monte-Carlo simula por meio de gotas de chuva que caem aleatoriamente sobre um quadrado pré-definido.

Uma chuva ao acaso é simulada e os acertos contados dentro e fora do círculo de raio unitário (cuja área é π) inscrito em um quadrado com comprimento de lado 2 (cuja área é 4). E, com isso, obtemos

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\text{números de acertos do círculo}}{\text{número de gotas de chuva no quadrado}},$$

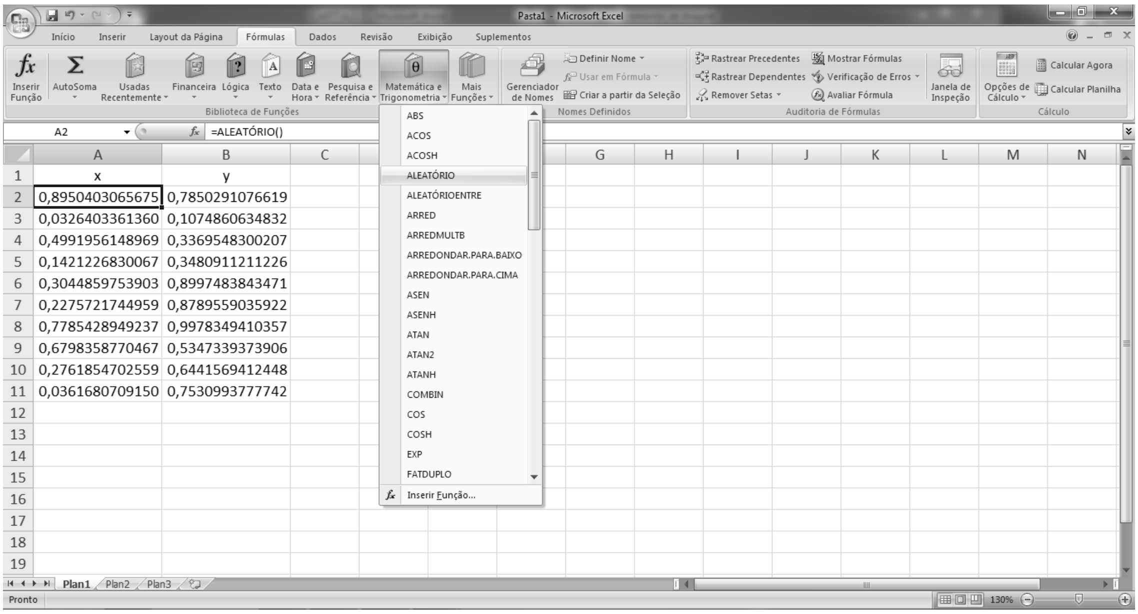
ou seja,

$$\pi = 4 \cdot \frac{\text{números de acertos do círculo}}{\text{número de gotas de chuva no quadrado}}.$$

Para fazer isso, devemos:

- Fixar um sistema de coordenadas no centro do quadrado e utilizar apenas o primeiro quadrante para a contagem, ou seja, as coordenadas x e y só podem assumir valores entre 0 e 1;

- Utilizando a função “ALEATÓRIO” do Excel, gerar 10 valores para x e y, simulando 10 gotas de chuva;

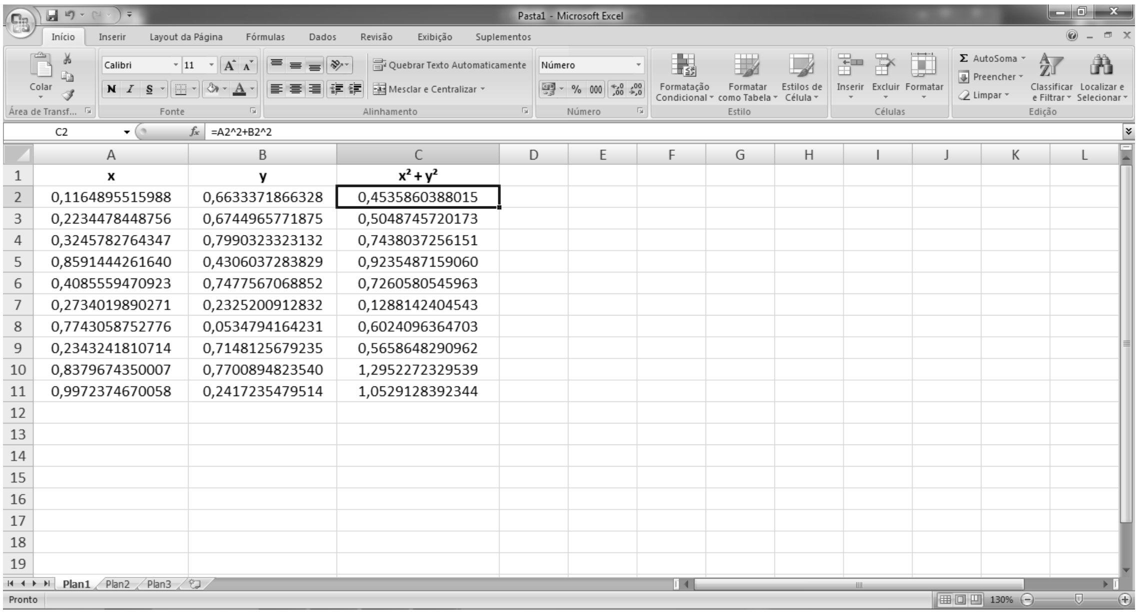


A2 =ALEATÓRIO()

	A	B
1	x	y
2	0,8950403065675	0,7850291076619
3	0,0326403361360	0,1074860634832
4	0,4991956148969	0,3369548300207
5	0,1421226830067	0,3480911211226
6	0,3044859753903	0,8997483843471
7	0,2275721744959	0,8789559035922
8	0,7785428949237	0,9978349410357
9	0,6798358770467	0,5347339373906
10	0,2761854702559	0,6441569412448
11	0,0361680709150	0,7530993777742

Figura 17 - Planilha do Excel utilizando a fórmula Aleatório.

- Através do Teorema de Pitágoras, verificar se o ponto jogado P(x,y) está dentro ou fora do círculo, pois o ponto estará dentro do círculo se $x^2 + y^2 \leq 1$;



C2 =A2^2+B2^2

	A	B	C
1	x	y	x^2+y^2
2	0,1164895515988	0,6633371866328	0,4535860388015
3	0,2234478448756	0,6744965771875	0,5048745720173
4	0,3245782764347	0,7990323323132	0,7438037256151
5	0,8591444261640	0,4306037283829	0,9235487159060
6	0,4085559470923	0,7477567068852	0,7260580545963
7	0,2734019890271	0,2325200912832	0,1288142404543
8	0,7743058752776	0,0534794164231	0,6024096364703
9	0,2343241810714	0,7148125679235	0,5658648290962
10	0,8379674350007	0,7700894823540	1,2952272329539
11	0,9972374670058	0,2417235479514	1,0529128392344

Figura 18 - Planilha do Excel utilizando o Teorema de Pitágoras.

- Contar os acertos no círculo, utilizando a função “CONT.SE” no intervalo C2;C11 com o critério <1;

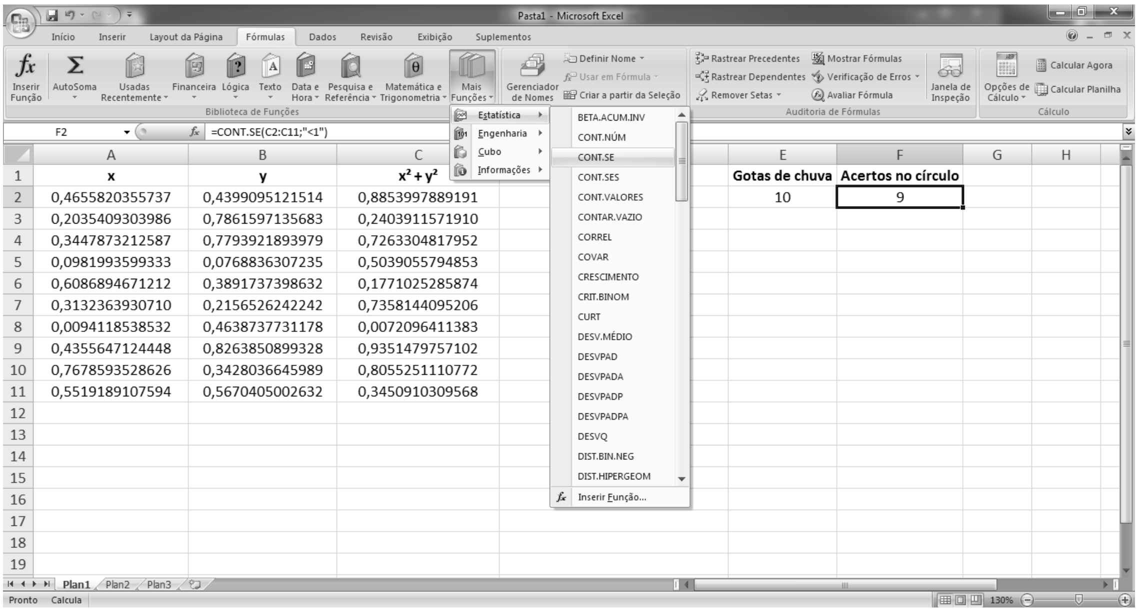


Figura 19 - Planilha do Excel utilizando a fórmula Conta-se.

- Calcular 4 vezes o número de acertos no círculo, dividido pelo número de gotas de chuva;

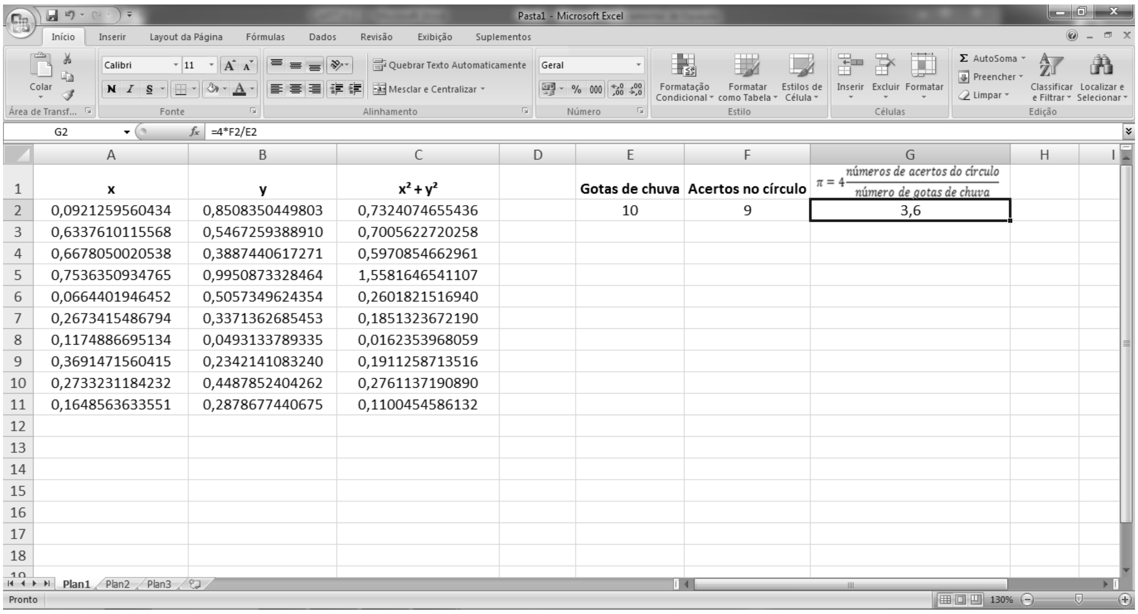
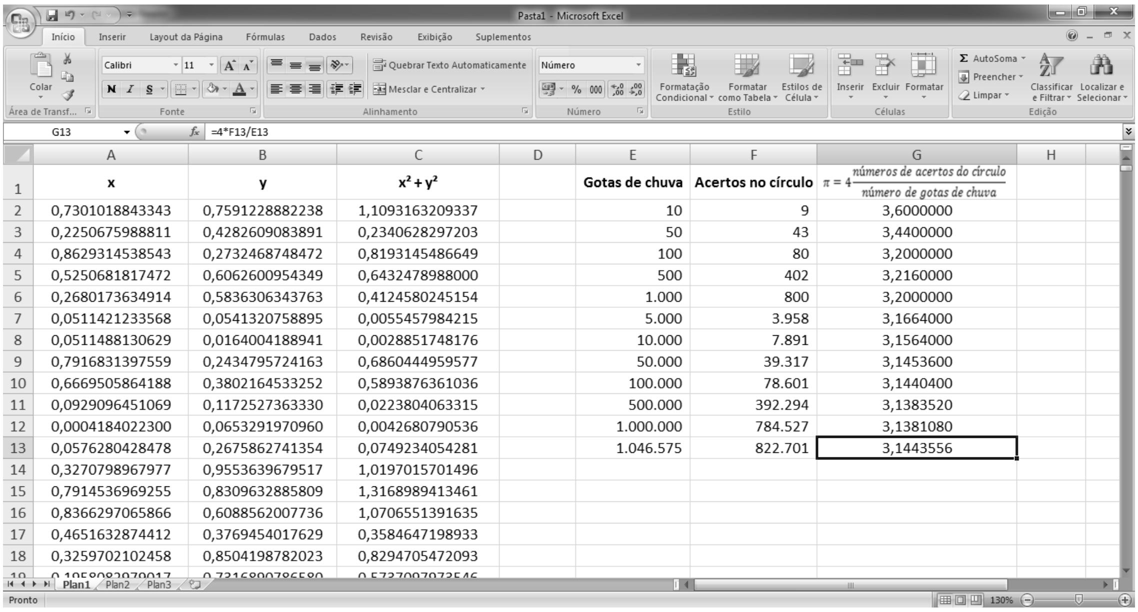


Figura 20 - Planilha do Excel calculando uma aproximação para π através do Método de Monte-Carlo.

Como podemos notar, com apenas 10 gotas de chuva não obtemos uma boa aproximação para o π, porém o método proporciona uma boa aproximação só depois de um grande número de gotas.

Para isso, repetimos o procedimento aumentando gradativamente o número de gotas de chuva, utilizando a alça de preenchimento para copiar as fórmulas para as células seguintes.



G13 =4*F13/E13

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	$x^2 + y^2$		Gotas de chuva	Acertos no círculo	$\pi = 4\frac{\text{números de acertos do círculo}}{\text{número de gotas de chuva}}$
2	0,7301018843343	0,7591228882238	1,1093163209337		10	9	3,6000000
3	0,2250675988811	0,4282609083891	0,2340628297203		50	43	3,4400000
4	0,8629314538543	0,2732468748472	0,8193145486649		100	80	3,2000000
5	0,5250681817472	0,6062600954349	0,6432478988000		500	402	3,2160000
6	0,2680173634914	0,5836306343763	0,4124580245154		1.000	800	3,2000000
7	0,0511421233568	0,0541320758895	0,0055457984215		5.000	3.958	3,1664000
8	0,0511488130629	0,0164004188941	0,0028851748176		10.000	7.891	3,1564000
9	0,7916831397559	0,2434795724163	0,6860444959577		50.000	39.317	3,1453600
10	0,6669505864188	0,3802164533252	0,5893876361036		100.000	78.601	3,1440400
11	0,0929096451069	0,1172527363330	0,0223804063315		500.000	392.294	3,1383520
12	0,0004184022300	0,0653291970960	0,0042680790536		1.000.000	784.527	3,1381080
13	0,0576280428478	0,2675862741354	0,0749234054281		1.046.575	822.701	3,1443556
14	0,3270798967977	0,9553639679517	1,0197015701496				
15	0,7914536969255	0,8309632885809	1,3168989413461				
16	0,8366297065866	0,6088562007736	1,0706551391635				
17	0,4651632874412	0,3769454017629	0,3584647198933				
18	0,3259702102458	0,8504198782023	0,8294705472093				

Figura 21 - Planilha do Excel calculando outras aproximações para π através do Método de Monte-Carlo.

3.3 Utilizando polígonos regulares inscritos

Inspirados no Método de Arquimedes, sugerimos uma atividade tomando um polígono regular inscrito num círculo de raio um, e aumentando o número de lados do polígono regularmente, para o perímetro deste polígono ficar mais próximo à circunferência do círculo. Nesta atividade, o que difere do método citado no Capítulo 2 é que o raio do círculo utilizado será 1 e não $\frac{1}{2}$ e fazemos uma demonstração mais “didática” para tornar mais acessível para alunos do Ensino Médio.

Vamos dar o quadrado como nosso exemplo de um “polígono geral” e, a partir disso, será então generalizado para polígonos de mais lados. Começamos com um quadrado inscrito em um círculo de raio um. A medida de ∠AOB é um quarto de uma volta completa de 360°, ou seja, 90°. Como $\overline{OK} \perp \overline{AB}$ $em\ K, BK = AK = \frac{\ell}{2}$.

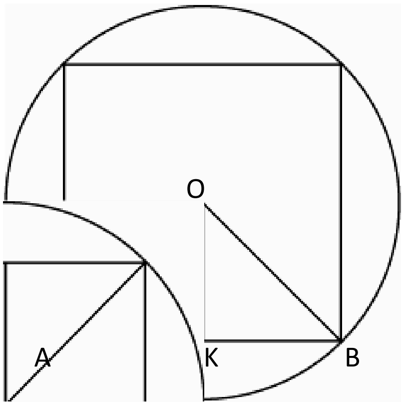


Figura 22 - Quadrado inscrito no círculo de raio r = 1.

Procuramos encontrar o perímetro (C_4) do quadrado, quando sabemos o comprimento do raio e a medida de $\angle AOK = \frac{1}{2}(90°) = 45°$.

Usando a função trigonométrica seno, obtemos

$$sen45° = \frac{\frac{\ell}{2}}{1} = \frac{\ell}{2}.$$

Como $sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, então\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{2}\ e\ \ell = \sqrt{2}$. Assim, o perímetro do quadrado é 4 vezes ℓ, que é igual a $4\sqrt{2}$.

Através deste resultado, vamos generalizar isso para qualquer polígono regular de n lados.

Assim, $\theta = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$

Portanto, para o polígono regular de n lados, temos

$sen\frac{180°}{n} = \frac{\ell}{2}$.

Então,

$$\ell = 2.sen\frac{180°}{n}.$$

O perímetro do polígono regular de n lados (C_n) é então n vezes ℓ, o que torna este perímetro igual a

$$C_n = 2.n.sen\frac{180°}{n}.$$

Para o caso inicial do quadrado, temos

$$C_4 = 8.sen\frac{180°}{4} = 8.sen45° = 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Podemos então, generalizar o perímetro do polígono regular cujo círculo circunscrito é de raio 1. Para isso, iremos utilizar a relação do seno do arco duplo $sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha$ e a relação fundamental $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, e sempre duplicaremos a quantidade de lados do polígono. Deste modo, substituindo n por 2n na relação $C_n = 2.n.sen\frac{180°}{n}$, obtemos

$C_{2n} = 2.2n.sen\frac{180°}{2n} = 4.n.sen\frac{180°}{2n}$.

Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos,

$C_{2n}^2 = 16.n^2.sen^2\frac{180°}{2n}$.

Sabemos que $sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha$, elevando os dois membros ao quadrado, obtemos

$$sen^2 2\alpha = 4.sen^2\alpha.cos^2\alpha\ .$$

Através da relação fundamental, sabemos que $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$, substituindo na relação acima, obtemos

$$sen^2 2\alpha = 4.sen^2\alpha.(1 - sen^2\alpha).$$

Tomando $2\alpha = \frac{180°}{n}$ e $\alpha = \frac{180°}{2n}$, temos

$$sen^2\frac{180°}{n} = 4.sen^2\frac{180°}{2n}.\left(1 - sen^2\frac{180°}{2n}\right).$$

Substituindo em

$$C_n^2 = 4.n^2.sen^2\frac{180°}{n},$$

obtemos

$$C_n^2 = 4.n^2.4.sen^2\frac{180°}{2n}.\left(1 - sen^2\frac{180°}{2n}\right).$$

Portanto,

$$C_n^2 = 16.n^2.sen^2\frac{180°}{2n}.\left(1 - sen^2\frac{180°}{2n}\right).$$

Assim,

$$C_n^2 = C_{2n}^2.\left(1 - sen^2\frac{180°}{2n}\right).$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{C_{2n}^2}{16n^2} = sen^2\frac{180°}{2n}.$$

Substituindo na relação acima, obtemos

$$C_n^2 = C_{2n}^2.\left(1 - \frac{C_{2n}^2}{16n^2}\right).$$

Fazendo a distributiva e organizando, obtemos a equação biquadrada em C_{2n}:

$$C_{2n}^4 - 16n^2C_{2n}^2 + 16n^2C_n^2 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara para resolvê-la, temos

$\Delta = (-16n^2)^2 - 4.1.16n^2 C_n^2$

$\Delta = 256n^4 - 64n^2 C_n^2$

$\Delta = 64n^2(4n^2 - C_n^2).$

Assim,

$$C_{2n}^2 = \frac{-(-16n^2) \pm \sqrt{64n^2(4n^2 - C_n^2)}}{2.1}.$$

Como n é um número natural, tem-se

$$C_{2n}^2 = \frac{16n^2 \pm 8n\sqrt{4n^2 - C_n^2}}{2},$$

ou seja,

$$C_{2n}^2 = 4n\left(2n \pm \sqrt{4n^2 - C_n^2}\right)$$

$$C_{2n}^2 = 4n\left(2n \pm \sqrt{n^2\left(4 - \frac{C_n^2}{n^2}\right)}\right)$$

$$C_{2n}^2 = 4n\left(2n \pm n\sqrt{4 - \frac{C_n^2}{n^2}}\right)$$

$$C_{2n}^2 = 4n^2\left(2 \pm \sqrt{4 - \frac{C_n^2}{n^2}}\right).$$

Chamando de $A = 4 - \frac{C_n^2}{n^2}$, temos

$$C_{2n}^2 = 4n^2(2 \pm \sqrt{A}).$$

Para o caso $C_{2n}^2 = 4n^2(2 - \sqrt{A})$,

$$C_{2n}^2 = 4n^2(2 - \sqrt{A}).\frac{(2 + \sqrt{A})}{(2 + \sqrt{A})}$$

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{(4 - A)}{(2 + \sqrt{A})}.$$

Assim,

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{\left(4-4+\frac{C_n^2}{n^2}\right)}{\left(2+\sqrt{A}\right)}$$

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{C_n^2}{n^2\left(2+\sqrt{A}\right)}$$

$$C_{2n}^2 = 4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}.$$

Logo,

$$C_{2n} = \sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}.$$

Para o caso $C_{2n}^2 = 4n^2\left(2+\sqrt{A}\right)$,

$$C_{2n}^2 = 4n^2\left(2+\sqrt{A}\right).\frac{\left(2-\sqrt{A}\right)}{\left(2-\sqrt{A}\right)},$$

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{(4-A)}{\left(2-\sqrt{A}\right)}.$$

Assim,

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{\left(4-4+\frac{C_n^2}{n^2}\right)}{\left(2-\sqrt{A}\right)},$$

$$C_{2n}^2 = 4n^2.\frac{C_n^2}{n^2\left(2-\sqrt{A}\right)}$$

$$C_{2n}^2 = 4.\frac{C_n^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}.$$

Logo,

$$C_{2n} = \sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}.$$

Porém, este último caso, temos que $2-\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}$ tende a zero quando n tende a infinito, nos levando a um C_{2n} infinito o que não é real.

Por exemplo, quando n = 4, sabemos que $C_n = 4\sqrt{2}$. Assim, 2n = 8 e

$$C_{2n} = \sqrt{4.\frac{(4\sqrt{2})^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{(4\sqrt{2})^2}{4^2}}\right)}} = \sqrt{4.\frac{32}{\left(2-\sqrt{4-\frac{32}{16}}\right)}} = \sqrt{128+64\sqrt{2}} \approx 14{,}782.$$

Agora, tomando n = 8 e $C_n = \sqrt{128+64\sqrt{2}}$, temos 2n = 16 e

$$C_{2n} = \sqrt{4.\frac{\left(\sqrt{128+64\sqrt{2}}\right)^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{\left(\sqrt{128+64\sqrt{2}}\right)^2}{8^2}}\right)}} = \sqrt{4.\frac{128+64\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{4-\frac{128+64\sqrt{2}}{64}}\right)}} \approx 26{,}607.$$

Novamente, tomando n = 16 e C_n = 26,607, temos 2n = 32 e

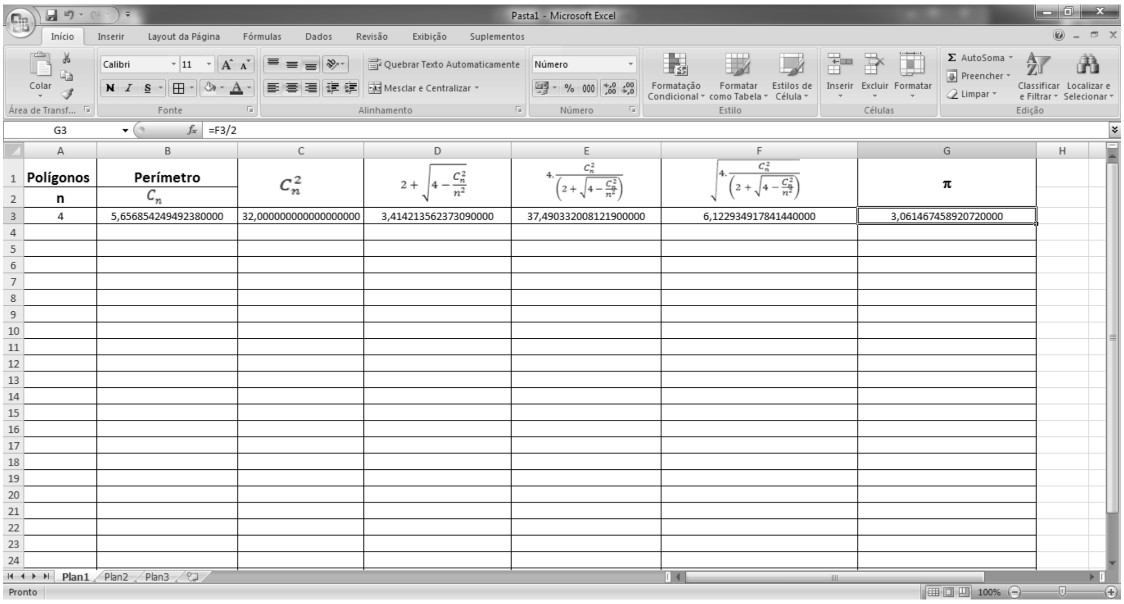
$$C_{2n} = \sqrt{4.\frac{(26{,}607)^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{(26{,}607)^2}{16^2}}\right)}} = \sqrt{4.\frac{707{,}932}{\left(2-\sqrt{4-\frac{707{,}932}{256}}\right)}} \approx 56{,}443.$$

Deste modo, notamos que o valor de C_{2n} cresce à medida que n também cresce.

Para finalizar, sabemos que o comprimento da circunferência é dado por C = 2πr, como o raio é um, temos que C = 2π, então, quando o número de lados do polígono é muito grande, o valor limite de seu perímetro é a circunferência em que está inscrito, ou seja, $C_n \approx 2\pi$, deste modo,

$$\pi \approx \frac{C_n}{2}.$$

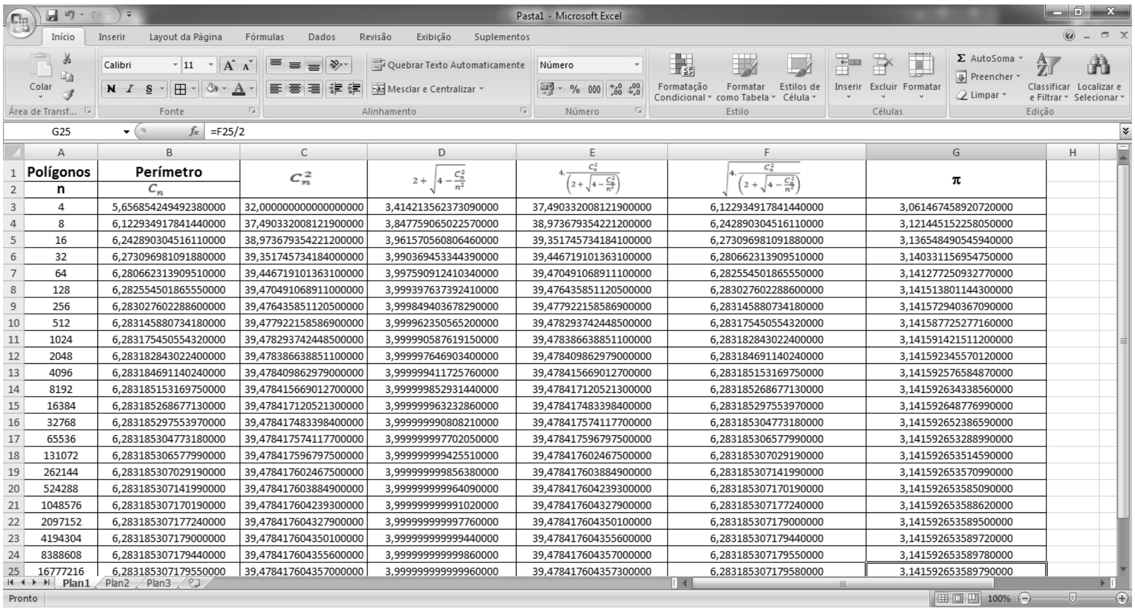
Após fazer todas essas passagens com os alunos, abre-se uma planilha do Excel para realizar os cálculos dos perímetros dos polígonos, iniciando pelo quadrado com os dados já obtidos acima.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Polígonos**	**Perímetro**	C_n^2	$2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}$	$4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}$	$\sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}$	**π**
2	**n**	C_n					
3	4	5,656854249492380000	32,000000000000000000	3,414213562373090000	37,490332008121900000	6,122934917841440000	3,061467458920720000

Figura 23 - Planilha do Excel calculando uma aproximação para π através do quadrado inscrito no círculo de raio r = 1.

Após isso, iremos duplicando a quantidade de lados do polígono, para as colunas $C_n^2, 2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}, 4.\frac{C_n^2}{\left(2-\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}$, $\sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}$ $e\ \pi$, e copiaremos as fórmulas utilizando a alça de preenchimento, apenas para a coluna C_n, utiliza-se o valor da coluna $\sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}$ da linha imediatamente acima.



Polígonos n	Perímetro C_n	C_n^2	$2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}$	$4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}$	$\sqrt{4.\frac{C_n^2}{\left(2+\sqrt{4-\frac{C_n^2}{n^2}}\right)}}$	π
4	5,656854249492380000	32,000000000000000000	3,414213562373090000	37,490332008121900000	6,122934917841440000	3,061467458920720000
8	6,122934917841440000	37,490332008121900000	3,847759065022570000	38,973679354221200000	6,242890304516110000	3,121445152258050000
16	6,242890304516110000	38,973679354221200000	3,961570560806460000	39,351745734184100000	6,273096981091880000	3,136548490545940000
32	6,273096981091880000	39,351745734184000000	3,990369453344390000	39,446719101363100000	6,280662313909510000	3,140331156954750000
64	6,280662313909510000	39,446719101363100000	3,997590912410340000	39,470491068911100000	6,282554501865550000	3,141277250932770000
128	6,282554501865550000	39,470491068911000000	3,999397637392410000	39,476435851120500000	6,283027602288600000	3,141513801144300000
256	6,283027602288600000	39,476435851120500000	3,999849403678290000	39,477922158586900000	6,283145880734180000	3,141572940367090000
512	6,283145880734180000	39,477922158586900000	3,999962350565200000	39,478293742448500000	6,283175450554320000	3,141587725277160000
1024	6,283175450554320000	39,478293742448500000	3,999990587619150000	39,478386638851100000	6,283182843022400000	3,141591421511200000
2048	6,283182843022400000	39,478386638851100000	3,999997646903400000	39,478409862979000000	6,283184691140240000	3,141592345570120000
4096	6,283184691140240000	39,478409862979000000	3,999999411725760000	39,478415669012700000	6,283185153169750000	3,141592576584870000
8192	6,283185153169750000	39,478415669012700000	3,999999852931440000	39,478417120521300000	6,283185268677130000	3,141592634338560000
16384	6,283185268677130000	39,478417120521300000	3,999999963232860000	39,478417483398400000	6,283185297553970000	3,141592648776990000
32768	6,283185297553970000	39,478417483398400000	3,999999990808210000	39,478417574117700000	6,283185304773180000	3,141592652386590000
65536	6,283185304773180000	39,478417574117700000	3,999999997702050000	39,478417596797500000	6,283185306577990000	3,141592653288990000
131072	6,283185306577990000	39,478417596797500000	3,999999999425510000	39,478417602467500000	6,283185307029190000	3,141592653514590000
262144	6,283185307029190000	39,478417602467500000	3,999999999856380000	39,478417603884900000	6,283185307141990000	3,141592653570990000
524288	6,283185307141990000	39,478417603884900000	3,999999999964090000	39,478417604239300000	6,283185307170190000	3,141592653585090000
1048576	6,283185307170190000	39,478417604239300000	3,999999999991020000	39,478417604327900000	6,283185307177240000	3,141592653588620000
2097152	6,283185307177240000	39,478417604327900000	3,999999999997760000	39,478417604350100000	6,283185307179000000	3,141592653589500000
4194304	6,283185307179000000	39,478417604350100000	3,999999999999440000	39,478417604355600000	6,283185307179440000	3,141592653589720000
8388608	6,283185307179440000	39,478417604355600000	3,999999999999860000	39,478417604357000000	6,283185307179550000	3,141592653589780000
16777216	6,283185307179550000	39,478417604357000000	3,999999999999960000	39,478417604357300000	6,283185307179580000	3,141592653589790000

Figura 24 - Planilha do Excel calculando outras aproximações para π através de polígonos regulares inscritos no círculo de raio r = 1.

Através desses cálculos no Excel, conseguimos uma aproximação de 14 casas decimais para o π, no polígono de 16.777.216 lados.

CONCLUSÃO

O número π é o número irracional mais famoso da história, com o qual se representa a razão constante entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

Durante milhares de anos, muitos matemáticos tentaram calcular o valor de π até um número cada vez maior de casas decimais. Arquimedes, por exemplo, situou o valor de π entre $3 + \frac{1}{7}\ e\ 3 + \frac{10}{71}$. Na Bíblia, no Livro dos Reis e nas Crônicas, o valor de π é 3. A aproximação obtida por matemáticos egípcios foi de 3,16 e Ptolomeu, em 150 d.C., estimou aquele valor em 3,1316.

Diversas áreas da Matemática foram usadas para determinar o valor mais próximo possível de π, por exemplo, a probabilidade no método de Monte Carlo, as frações continuadas de Lambert, as séries de Leibniz, Euler e Ramanujan.

Mais recentemente os irmãos Chudnovsky bateram o recorde no cálculo de mais casas decimais precisas utilizando um algoritmo e um supercomputador criado por eles mesmos. Em 2011 chegando a 10 trilhões de casas decimais.

É nossa intenção fazer com que os alunos se conscientizem da variedade de temas que cercam π e que contribuem para tornar a matemática bonita. E, também, para que estes se sintam motivados em buscar alguns aprofundamentos desses aspectos de π, e alguns possam até se juntar aos grupos de estudiosos de π.

REFERÊNCIAS

[1] BONGIOVANNI, Vincenzo; WATANABE, Renate. Pi acaba? **Revista do Professor de Matemática**. Nº 19, p. 1-8. 1º semestre de 1991.

[2] BOYER, C.B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[3] CHUDNOVSKY algorithm. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm>. Acesso em: 17 mar. 2014.

[4] CHUDNOVSKY brothers. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_brothers>. Acesso em: 17 mar. 2014.

[5] COSTA, Renato da. **Conhecendo o Microsoft Excel.** Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/50999835/Excel-2003.>. Acesso em: 05 fev. 2014.

[6] DUARTE, Hélio dos Santos. **Word e Excel passo a passo.** 2013. Disponível em: <http://www.rhportal.com.br/download/apostilas/word_e_excel.pdf.>. Acesso em: 05 fev. 2014.

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H.Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

[8] MOTA, Maria Madalena Teixeira da; PEREIRA, Hélia Susana Martins. **A vida de Ramanujan.** 2004. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/ramanujan/biografia.htm>. Acesso em: 29 mar. 2014.

[9] POSAMENTIER, Alfred S.; LEHMANN, Ingmar. **Pi:** A biography of the world's most mysterious number. New York: Prometheus Books, 2004. 324 p.

[10] SRINIVASA Ramanujan. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan>. Acesso em: 17 mar. 2014.