UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

Edson Ferreira da Silva

Belém - Pará
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

por

Edson Ferreira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma

Belém – Pará

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ferreira, Edson Ferreira da Silva, 1974-
Logaritmo e aplicações / Edson Ferreira da Silva Ferreira. - 2014.

Orientador: João Claudio Brandemberg Quaresma Brandemberg;
Coorientador: Sebastião Siqueira Martins Cordeiro Siqueira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Matemática-Ensino médio. 2. Logaritmos. 3. Cálculo diferencial. 4. Cálculo integral. 5. Matemática financeira. I. Título.
CDD 22. ed. 510.7

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

por

Edson Ferreira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma
Orientador

Prof. Dr.ª Rubia Gonçalves Nascimento

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
(Externo)

Agosto – 2014

Dedico à minha esposa Rosilda Silva, a meus pais Miguel Mendes e Raimunda Ferreira. A meus filhos e a toda minha família, que tanto amo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre iluminou minha vida.

Ao professor João Claudio Brandemberg Quaresma, pelas contribuições, como amigo, durante a graduação e agora, como orientador.

A meus pais: Miguel Mendes da Silva e Raimunda Ferreira da Silva, a quem agradeço por sempre ter me apoiado.

À minha esposa, Rosilda Silva, pelo apoio incondicional.

Aos meus filhos: Bruna Sena, Fellipe Sena, Eder Ferreira, Elise Silva e Eloise Silva pela confiança, pelo respeito e pela amizade.

Aos meus amigos do Mestrado, pelo companheirismo durante todo o curso.

Toda educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base.

(Augusto Conte)

RESUMO

A matemática, do ponto de vista de grande maioria dos discentes, é considerada uma disciplina extremamente difícil, que trabalha com conceitos abstratos e, em alguns casos, de difícil compreensão e, portanto, de fácil antipatia. Assim, criar e aplicar estratégias capazes de provocar mudanças de paradigmas na forma como esses discentes veem a matemática e seu ensino é de fundamental importância: é um desafio para os docentes. Dessa maneira, estudar e entender os logaritmos tornou-se uma tarefa necessária para a compreensão de inúmeros fenômenos naturais e financeiros, tais como: o decaimento radioativo, o resfriamento de um corpo, o cálculo e aplicações financeiras entre outras.Este trabalho foi elaborado visando às turmas de 1° ano do ensino médio e seguindo orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.Também conta com um complemento sobre logarítmico e cálculo diferencial integral que servirá de apoio e motivação para professores e alunos. É composto por contexto histórico, principais conceitos e propriedades, seguidas de suas respectivas demonstrações e algumas aplicações. Esperamos contribuir de forma positiva para o aprimoramento de professores no assunto descrito e, principalmente, para a motivação dos alunos em estudar e compreender melhor a importância dos logaritmos no desenvolvimento das Ciências.

Palavra chave: Ensino,Parâmetros Curriculares Nacionais, logaritmo.

ABSTRACT

Mathematics, from the viewpoint of most students is considered an extremely difficult discipline that works with abstract in some cases difficult to understand concepts and therefore easy to dislike, and create and implement strategies capable of causing paradigm shifts in how these students see mathematics and its teaching is of paramount importance and a challenge for teachers. Study and understand the logarithms has become a necessary task for understanding many natural and financial phenomena, such as radioactive decay, cooling of a body, the calculation and financial investments among others. This work was targeted classes of 1st year of high school and following guidelines established in the National Curriculum Guidelines. It also has a complement of logarithmic differential and integral calculus that will support and motivation for teachers and students. The same consists of the historical context, key concepts and properties followed by their respective statements and some applications. We hope to contribute positively to a better improvement of teachers on the subject described and especially we can motivate students to study mathematics.

Keyword: Teaching, National Curriculum Guidelines, logarithm.

LISTA DE SÍMBOLOS

N .... Conjunto dos números naturais

N^* .... Conjunto dos números naturais diferentes de zero

Z .... Conjunto dos números inteiros

Z^* .... Conjunto dos números inteiros diferentes de zero

Q .... Conjunto dos números racionais

R .... Conjunto dos números reais

R^+ .... Conjunto dos números reais não negativos

R_+^* .... Conjunto dos números reais positivos

R/Q .... Conjunto dos números irracionais

C .... Conjunto dos números complexos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos que conhecemos hoje podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo logaritmo, tais como: o decaimento radioativo, o resfriamento de um corpo, o cálculo de aplicações financeiras,entre outras,daí a grande importância desse tema para a compreensão do mundo em que vivemos. Mostrar esses conceitos e suas aplicações para nossos alunos é, de certa forma, mostrar o quanto a matemática é importante para a vida do homem. Apartir desse estudo, das fundamentações e formas de aplicações objetivamos contribuir não apenas no aprofundamento desse tema, mas, principalmente, na aprendizagem significativa dos alunos.

O ensino de matemática sofreu uma distorção ao longo do tempo. Hoje se valorizam mais aspectos instrumentais do que a compreensão relacional. Isso impede que o aluno desenvolva habilidades e competências necessárias ao seu desenvolvimento reflexivo. Para que o ensino da matemática proporcione ao aluno habilidades e conhecimentos, é necessário o professor utilizar uma metodologia que parta do concreto para o abstrato (Mendes, 2006) e elaborar uma proposta didático-pedagógica que promova situações investigativas em sala de aula, tornando o aluno um ser ativo e crítico e com capacidade de generalizar o conhecimento matemático nas diversas situações do seu cotidiano.Assim, esse trabalho tem como objetivos contribuir para o aprofundamento conceitual de logaritmo pelos professores que atuam no 1º ano do Ensino Médio e sugerir uma abordagem com aplicações e contexto histórico,que possam motivar os alunos a compreender de forma eficaz e ativa os conceitos, as propriedades e as aplicações de logaritmos.

A ideia de elaborar essa investigação surgiu devido à minha experiência como professor de matemática em turmas de 1º ano do Ensino Médio da rede Pública de Ensino do Estado da Pará. Ao trabalhar com algumas coleções de livros didáticos utilizados em escolas públicas brasileiras, percebemos que o tema logaritmos é tratado de forma mecânica, pois leva os alunos a aprenderem suas principais propriedades, sem mostrar a real importância de seu ensino para o entendimento de diversas ciências.

Este trabalho, primeiramente, mostra um pouco do contexto histórico concernente ao desenvolvimento do conceito de logaritmo. Posteriormente, fala sobre definições e principais propriedades do termo e exibe aplicações. Finalmente,demonstra algumas aplicações de logaritmos, mostrando sua importância para o desenvolvimento de ciências.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso fora obtido com a invenção das frações decimais, embora não suficientemente difundida. Praticamente no fim do século XVI,apareciam identidades trigonométricas de vários tipos em todas as partes da Europa. Entre essas identidades trigonométricas, havia um grupo de fórmulas conhecidas como regra de prostaférese, que transformava um produto de funções em soma ou diferença(nome originado do grego*prosthaphaeresis*, que significa adição e subtração).

Naquela época, por exemplo, a identidade

$$\cos a.\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{2}$$

transformava o produto de dois números entre 0 e 1 em soma (com o auxílio de uma tábua de funções trigonométrica, muito comum no período).

Uma das desvantagens do método da prostaférese é a dificuldade em aplicá-lo para problemas de mais de três fatores e a sua inutilidade para cálculos de potência e raiz. Achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes, nos anos próximos a 1600 era um problema fundamental. Tal problema motivou inúmeros matemáticos do século XVI e a solução foi descoberta por Jost Bürgi[1] e John Napier[2], cada um deles desconhecendo inteiramente o trabalho do outro.

O termo logaritmo foi criado por Napier: de *logos* e *arithmos*, que significava, respectivamente, ”razão” e “número”. Em 1614 apresentou sua descoberta, cujo título é*Mirifice logarithmorum canonis descriptio*(Uma descrição maravilhosa da regra dos logaritmos).Nela, Napier explica a natureza dos logaritmos segundo sua concepção.

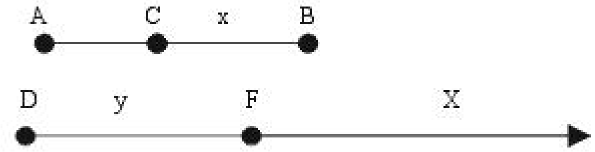
Napier propôs sua primeira análise a respeito do logaritmo partindo de uma experiência prática. Ele concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira:

---

[1] Jost Bürgi (Lichtensteig – Suíça, 1522, 31 de janeiro de 1632 em Kassel, agora Alemanha) foi o homem mais hábil e o mais famoso que trabalhou com relógios na sua época. Também fez instrumentos científicos importantes. Bürgi se interessou por matemática, parece ter sido Kepler que persuadiu Bürgi a escrever o seu trabalho original e interessante em logaritmos. (FUNÇÕES, 2013)

[2]John Napier (Edimburgo, 1550,4 de abril de 1617) foi um matemático, físico, astrônomo e teólogo escocês. Originário de uma família rica, ingressou aos 13 anos na Universidade de St Andews e interessou-se por teologia e aritmética. Foi como matemático, porém, que Napier mais se destacou. Sua mais notável realização foia descoberta dos logaritmos. (FUNÇÕES,2013)

Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semirreta DX (como mostra a figura a seguir):

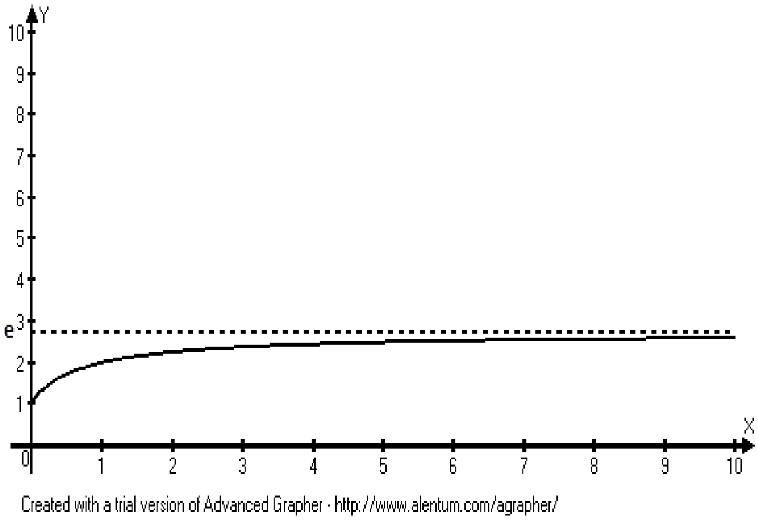


Partindo-se ao mesmo tempo do ponto A e do ponto D, com a mesma velocidade inicial, admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante. Nessas condições, Napier definiu como logaritmo de $x = CB$ o número $y = DF$. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a ideia de base. Esse conceito de logaritmo apresentado por Napier o fez se interessar cada vez mais pelo estudo significativo desse instrumento de cálculo. A análise dessa prática não nos convém ser demonstrada, pois ela funciona como suporte teórico para representar o significado do logaritmo. Essa análise construtiva o levou adiante na primeira ideia do que fosse o logaritmo neperiano e, no século XVIII, fosse demonstrada por Leonard Euler[3] a seguinte relação:

$$\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^n = e.$$

Mais recentemente, os logaritmos de base dois desempenharam importante papel em ciência computacional, uma vez que surgem naturalmente em sistema numérico binário. Porém, os logaritmos mais largamente usados nas aplicações são logaritmos naturais, os quais tem uma base natural denotada pela letra *e* em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler, que primeiro sugeriu. Observa-se que surge como assíntota horizontal ao gráfico da função: $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

[3]Leonard Euler (Basileia-Suíça, 1707 - São Petersburgo-1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha.
Euler fez importantes descobertas, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática. Além disso, tornou-se célebre por seus trabalhos em mecânica, óptica, e astronomia. (FUNÇÕES, 2013)



x	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
1	2
10	2,593742
100	2,704814
1000	2,716924
10000	2,718146
100000	2,718268
1000000	2,718280

Os logaritmos propostos por Napier foram desvendados numa associação entre progressões aritméticas e geométricas, que eram conhecidas como relação de Stifel[4].

Vejamos:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 \text{ (Progressão Geométrica)}$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ (Progressão Aritmética)}$$

Por exemplo:

Para multiplicarmos dois termos da progressão geométrica, supomos 16×64, bastaria somarmos os seus correspondentes na progressão aritmética, no caso $4+6=10$ e ver qual é o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma, neste caso 1024.

A sua primeira observação apontou que o produto de dois termos da primeira progressão está associado com a soma dos dois termos correspondente da segunda progressão. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos, de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos, deve-se escolher um número próximo de 1. Esse número fixado por Napier caracterizou os logaritmos Neperianos, conforme vimos anteriormente. Reescrevendo essa ideia temos:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9 \text{ (Progressão Geométrica)}$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ (Progressão Aritmética)}$$

[4] Michael Stifel, (Esslingen, 1487 - Jena, 19 de Abril de 1567) foi um matemático alemão. Descobriu o logaritmo e inventou uma breve tabela logarítmica décadas antes de John Napier. Seu trabalho mais famoso é “Aritmética na íntegra”. Também criou uma regra para o binômio de Newton. Essa regra ficou conhecida como Relação de Stifel. (FUNÇÕES, 2013)

Observando essa ideia, deparamo-nos com o conceito de logaritmos proposto por Napier através de seu dispositivo prático, isto é: os elementos postos sobre a progressão geométrica são os que saem com velocidade variada, enquanto os da progressão aritmética são os que partem com velocidade constante. Em outras palavras, os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica.

Observe:

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
.
.
.
$$2^9 = 512$$

O valor 2 é uma constante que eleva os valores $1, 2, 3, 4, ...9$. Essa constante 2 denominaremos de base do logaritmo. O valor do resultado de cada potenciação $2, 4, 8, 16, ...512$ denominaremos de logaritmando. Desta forma, os logaritmos são os respectivos valores que acompanham os termos de uma progressão aritmética.

Por exemplo:

$$\log_2 64 = 6 \Rightarrow 2^6 = 64$$

Reescrevendo de forma geral, temos:

$$b, b^2, b^3 ....b^m ......b^n \quad \text{(Progressão Geométrica)}$$

$$1, 2, 3..............m.....n \text{(Progressão aritmética)}$$

Dizemos $b^m = a$ e, reescrevendo na forma de logaritmo, teremos $\log_a b = m$. Assim, m é o logaritmo de b na base a, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$ para quaisquer que sejam a, b e m reais.

A progressão aritmética e geométrica é um dos meios mais importantes para compreender os logaritmos. Observa-se que na ideia fundamentada por Napier ainda faltava certa clareza para explicar o logaritmo de 1 em qualquer base.

Em 1615, Henry Briggs[5] visitou Napier em sua casa na Escócia e lá, eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de dez, e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava.

Napier já propusera uma tabela usando $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$(para evitar frações). Os dois finalmente concordaram que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um.

Mas Napier já não tinha energia suficiente para pôr em prática essas ideias. Ele morreu em 1617.

O segundo de seus clássicos tratados sobre logaritmos, o *Mirificilogarithmorum canonis constructio*, em que fazia uma exposição completa dos métodos que usava para construir suas tabelas, apareceu postumamente em 1619. Por isso, recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou Briggsianos.

Em vez de tomar as *potências* de um número próximo de um, como fizera Napier, Briggs começou com $\log 10 = 1$e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas.

---

[5] Henry Briggs(Yorkshire- Inglaterra-1561, Oxford 26 de Janeiro de 1630) graduou-se em medicina em 1581. Tornou-se palestrante de matemática em 1592. Por volta de 1615 engajou-se completamente no estudo, cálculo e ensino dos logaritmos. Encontrou-se com Napier e propôs melhorias para o sistema logarítmico desenvolvido por ele. Briggs ajudou a publicar algumas obras de Napier e em 1617 escreveu *Logarithmorum chilias prima. Arithmetica logarithmica*, escrito em 1624, foi sua principal obra. (FUNÇÕES, 2013)

3 A CONSTRUÇÃO DA PRIMEIRA TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS POR BRIGGS

Vamos lembrar que a tabela que Briggs construiu apresentava os logaritmos dos números inteiros de 1 a 1000, com precisão até a 14ª casa decimal. Porém, a grande maioria desses logaritmos foi obtida recorrendo-se a outros anteriores calculados. Mas isso não tira o mérito de suas construções.

Vejamos como calcular o $\log 7$ utilizando as mesmas ideias que Briggs utilizou para calcular o $\log 3$:

Seja $\log_{10} 7 = x$ .Assim, temos que $10^x = 7$

Vamos inicialmente situar o número 7 entre duas potências de 10, a_1 e a_2 com expoentes inteiros e sucessivos tomamos $a_1 = 1$ e $a_2 = 10$ de modo que:

$$1 < 7 < 10 \Rightarrow 10^0 < 10^x < 10^1 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \log_{10} 7 < 1.$$

Esquematicamente teremos uma primeira aproximação para o $\log_{10} 7$ pois:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \log_{10} 7 < 1.$$

Sendo a_3 a media geométrica entre a_1 e a_2 temos:

$$a_3 = \sqrt{a_1.a_2} = \sqrt{10^0.10^1} = 10^{0,5} = 3{,}1622$$

Assim, conseguimos uma melhor aproximação para $\log_{10}^{7}$, pois:

$$0{,}5 < x < 1 \Rightarrow 0{,}5 < \log_{10} 7 < 1.$$

$a_1 = 1$ $a_3 = 3{,}1622$ 7 $a_2 = 10$

Observa-se que a escolha por Briggs de utilizar media geométrica entre a_1 e a_2 e não a media aritmética. Se esta utilizasse, encontraria $a_3 = 5{,}5$ e não conseguiria transformar em potência de 10, o que prejudicaria o processo de solução.

Continuamos, portanto, o processo. Tomando agora a média geométrica entre a_2 e a_3, temos:

$$a_4 = \sqrt{a_2.a_3} = \sqrt{10^1.10^{0,5}} = 10^{0,75} = 5,6234$$

Analogamente, podemos prosseguir as aproximações e encontramos:

$$a_5 = \sqrt{a_2.a_4} = \sqrt{10^1.10^{0,75}} = 10^{0,875} = 7,4984$$
$$a_6 = \sqrt{a_4.a_5} = \sqrt{10^{0,75}.10^{0,875}} = 10^{0,8125} = 6,4938$$
$$a_7 = \sqrt{a_5.a_6} = \sqrt{10^{0,875}.10^{0,8125}} = 10^{0,8437} = 6,9775$$
$$a_8 = \sqrt{a_5.a_7} = \sqrt{10^{0,875}.10^{0,8437}} = 10^{0,8593} = 7,2326$$
$$a_9 = \sqrt{a_7.a_8} = \sqrt{10^{0,8437}.10^{0,8593}} = 10^{0,8515} = 7,1039$$
$$a_{10} = \sqrt{a_7.a_9} = \sqrt{10^{0,8437}.10^{0,8515}} = 10^{0,8476} = 7,0404$$
$$a_{11} = \sqrt{a_7.a_{10}} = \sqrt{10^{0,8437}.10^{0,8476}} = 10^{0,8456} = 7,0080$$
$$a_{12} = \sqrt{a_7.a_{11}} = \sqrt{10^{0,8437}.10^{0,8456}} = 10^{0,8446} = 6,991$$
$$a_{13} = \sqrt{a_{11}.a_{12}} = \sqrt{10^{0,8456}.10^{0,8446}} = 10^{0,8451} = 7,0003.$$

Veja que conseguimos uma satisfatória precisão de quatro casas decimais para o $\log 7$. Dessa forma, temos:

$$\log_{10} 7 = 0,8451$$

Lembramos novamente que podemos construir uma tabela de logaritmos seguindo as ideias de Briggs, recorrendo a outros logaritmos anteriores calculados.

Considerando que $\log 2 = 0,30103$, vejamos como calcular o $\log 4$ utilizando as mesmas ideias que Briggs utilizou.

Assim vem:

$$4 = 2^2 \Rightarrow (10^{0,30103})^2.$$

Então, temos:

$$4 = 10^{0,60203} \Rightarrow \log 4 = 0,60203.$$

4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Vamos definir o logaritmo de um número real x de dois modos:

As definições tradicionais vistas na maioria dos livros didáticos utilizados no ensino médio abordam o logaritmo do seguinte modo:

Definição 1:

Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$.

Escreve-se:

$$y = \log_a x$$

lê-se y é o logaritmo de x na base a.

Podemos escrever então:

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x.$$

A definição vista no livro coleção do professor de matemática trata o logaritmo da seguinte maneira:

Definição 2:

Uma função real $L : \mathrm{R}^+ \to R$,cujo domínio é o conjunto R^+ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou sistema de logaritmo quando tem as seguintes propriedades:

a) L é uma função crescente ,isto é , $x < y \Rightarrow L(x) < L(\mathrm{y})$
b) $L(x.y) = \mathrm{L}(x) + L(y)$ para qualquer $x, y \in R^+$

Para todo $x \in R^+$, o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x.

Faremos agora uma lista de propriedades das funções logarítmicas, isto é, propriedades que são consequências da definição:

1ªPropriedade:

Sendo $a;b$ números reais positivos $a \neq 1$, temos:

$$\log_a a^b = b$$

Este resultado pode ser visto facilmente utilizando a definição.

Supomos que $\log_a a^b = x$ isto é $a^x = a^b$ pela injetividade da função exponencial segue que $x = b$ o que mostra o resultado.

2ªPropriedade:

Sendo $a;b$ e c números reais positivos, $a \neq 1$, temos:

$$\log_a (b,c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Sejam

$x = \log_a b \Rightarrow b = a^x$

$y = \log_a c \Rightarrow c = a^y$

Fazendo $b \times c$,temos:

$$b.c = a^x.a^y \Rightarrow b.c = a^{x+y} \text{ (propriedade de potência),}$$

aplicando o logaritmo na base a em ambos os membros da equação, temos:

$$\log_a (\mathrm{b.c}) = \log_a a^{(\mathrm{x+y})} \Rightarrow \log_a (\mathrm{b.c}) = x + y \text{ (propriedade1).}$$

Como $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, implica:

$$\log_a (\mathrm{b.c}) = \log_a b + \log_a c$$

3ª Propriedade:

Sendo $a;b$ e c números reais positivos, $a \neq 1$, vemos:

$$\log_a (\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \,.$$

Demonstração:

Sejam

$x = \log_a b \Rightarrow b = a^x$

$y = \log_a c \Rightarrow c = a^y$

Fazendo $\frac{b}{c}$ temos:

$$\frac{b}{c}=\frac{a^x}{a^y}\Rightarrow\frac{b}{c}=a^{x-y}\text{ (propriedade de potência),}$$

aplicando o logaritmo na base a em ambos os membros da equação, temos:

$$\log_a(\frac{b}{c})=\log_a a^{(x-y)}\Rightarrow\log_a(\frac{b}{c})=x-y\quad\text{(propriedade1).}$$

Como $x=\log_a b$ e $y=\log_a c$ implica:

$$\log_a(\frac{b}{c})=\log_a b-\log_a c$$

<u>4ª Propriedade</u>:

Sendo $a;b$ e c números reais positivos, $b\neq 1$ e $c\neq 1$, vemos:

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}\ .$$

Demonstração:

Sejam

$x=\log_b a\Rightarrow a=b^x$

$y=\log_c a\Rightarrow a=c^y$

$z=\log_c b\Rightarrow b=c^z$

Vemos que $a=b^x$ e $a=c^y$ implica que $b^x=c^y$ como $b=c^z\Rightarrow b^x=c^{z.x}\Rightarrow c^y=c^{z.x}$ pela injetividade da função exponencial segue que $y=z.x$ .Como $y=\log_c a$, $z=\log_c b$ e $x=\log_b a$. Temos:

$$\log_c a=\log_c b.\log_b a\Rightarrow\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

<u>5ª Propriedade</u>:

Sendo $a;b$ números reais positivos, $a\neq 1$, temos:

$$a^{\log_a b}=b$$

Demonstração:

Seja $\log_a b = x \Rightarrow b = a^x$ .Agora façamos, $a^{\log_a b} = a^{\log_a (a^x)} = a^x$ (propriedade 1),isto implica que:

$$a^{\log_a b} = b$$

<u>6ª Propriedade</u>:

Sendo b e c números reais positivos, com $c \neq 1$ e m um número natural, temos:

$$\log_c b^m = m.\log_c b$$

Observação: Esta propriedade supõe m um número natural, mas nossa demonstração considera m um número racional e é dividida em três partes:

<u>1ª Parte</u>:

Temos que a propriedade $\log_a (\mathrm{b}.\mathrm{c}) = \log_a b + \log_a c$ se estende para o produto de mais números, isto é:

$$\log_c b^m = \log_c bbb........b = \log_c b + \log_c b + \log_c b + ...\log_c b \Rightarrow \log_c b^m = m.\log_c b$$

Portanto, a propriedade vale para m natural.

Se não consideramos 0 um número natural, a propriedade 6 também se verifica, pois: se $m = 0$, temos $b^0 = 1$,logo:

$$\log_c b^0 = \log_c 1 = 0 = 0.\log_c b$$

<u>2ª Parte</u>:

Consideremos agora o caso em que $m = -n$, com n pertencente ao conjunto dos números naturais, isto é, m sendo um inteiro negativo. Então, para todo $b > 0$, temos:

$$b^n.b^{-n} = 1.$$

Como,

$$\log_c 1 = 0 \Rightarrow \log_c(\mathrm{b}^n.\mathrm{b}^{-n}) = \log_c \mathrm{b}^n + \log_c b^{-n} = 0 \Rightarrow \log_c \mathrm{b}^{-n} = -\log_c b^n = -n.\log_c b$$

Assim vem:

$$\log_c b^{-n} = -n.\log_c b$$

<u>3ª Parte</u>:

O caso geral em que $m = \dfrac{p}{q}$ onde p é um número inteiro e q um número natural.

Façamos:

$$(b^m)^q = (b^{\frac{p}{q}})^q = b^p \Rightarrow \log_c(\mathrm{b}^m)^q = \log_c(\mathrm{b}^p) \Rightarrow q.\log_c(\mathrm{b}^m) = \log_c(\mathrm{b}^p) \Rightarrow$$

$$q.\log_c(\mathrm{b}^m) = p.\log_c b \Rightarrow \log_c(\mathrm{b}^m) = \frac{p}{q}.\log_c b.$$

Como $m = \dfrac{p}{q}$ resulta que:

$$\log_c b^m = m.\log_c b$$

Não consideramos m um número irracional, pelo fato de sabermos apenas definir potência com expoente racional.

5 O LOGARITMO EXPRESSO COMO ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

O padre jesuíta belga Gregory Saint Vincent[6], em 1647, e o cientista Isaac Newton, em l660, reconheceram uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e o logaritmo – embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com os logaritmos naturais,nem tenham reconhecido o número *e*. Foi Alphonse Antônio de Sarasa que primeiramente conectou essa proposta em 1649,mostrando que a área da hipérbole equilátera média eram os logaritmos dos números que formavam as abcissas. Tomando a iniciativa da verdade estabelecida por Sarasa, concluímos que as abcissas cresciam em progressão geométrica e suas respectivas áreas, em progressão aritmética.

Para fazermos a identificação da área da faixa da hipérbole e o logaritmo natural,entendamos o que é uma faixa de hipérbole.

Uma faixa hipérbole H é obtida quando fixamos dois números reais positivos a,b com $a<b$, e tomamos a região do plano limitado pelas duas retas verticais $x=a$ e $x=b$ pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H .

Identificamos essa região pelo símbolo: H_a^b.

Se H_a^b éo ramo positivo do gráfico da função $y=\frac{1}{x}$, então H_a^b é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x,\frac{1}{x})$ onde $x>0$. Em símbolos:

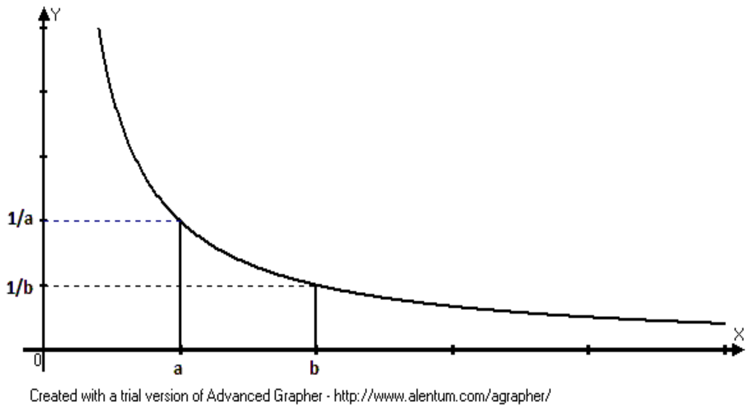
$$H_a^b=\{(x,y);x>0,y=\frac{1}{x}\}$$

Geometricamente, H_a^b é o ramo da hipérbole $y=\frac{1}{x}$ que está contido no primeiro quadrante.

Vejamos, a representação gráfica da faixa de hipérbole $y=\frac{1}{x}$ compreendida pelas retas $x=a$ e $x=b$:

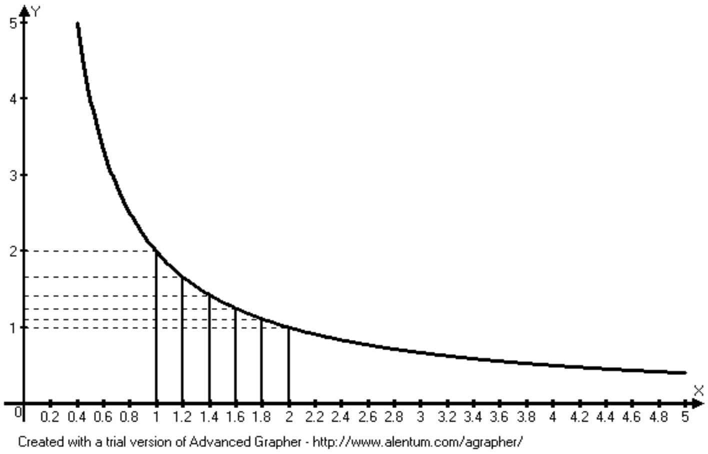
---

[6]Grégoire de Saint-Vincent (Bruges, 1584 -Gante ,5 de Junho de 1667) foi um jesuíta flamengo e matemático. Descobriu que a área sob uma hipérbole no intervalo $[a,b]$ é a mesma que um intervalo $[c,d]$ desde que a/b seja igual a c/d . (FUNÇÕES, 2013)



Para calcular a área desta faixa, poderíamos, numa primeira tentativa, aproximá-la pela soma das áreas de retângulos nela inscritos, como mostra o seguinte exemplo:

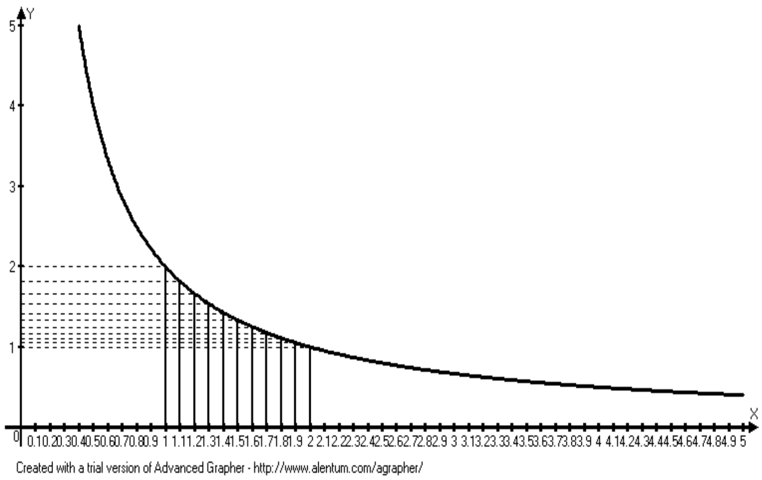
Decomponha o intervalo $[1, 2]$ em cinco partes iguais e calcule uma aproximação inferior para a área da faixa de hipérbole $y = \frac{2}{x}$:



x	$\frac{2}{x}$	Área
1,0	2,00	0,40
1,2	1,66	0,33
1,4	1,42	0,28
1,6	1,25	0,25
1,8	1,11	0,22
2,0	1,00	0,20

A soma das áreas dos retângulos é igual a 1,68

Observe como esta aproximação melhora quando aumentamos o número e retângulos de cinco para dez:



x	$\frac{2}{x}$	Área
1,00	2,00	0,200
1,10	1,81	0,181
1,20	1,66	0,166
1,30	1,53	0,153
1,40	1,42	0,142
1,50	1,33	0,133
1,60	1,25	0,125
1,70	1,17	0,117
1,80	1,11	0,111
1,90	1,05	0,105
2,00	1,00	0,100

A soma das áreas dos retângulos é igual a: 1,533

Como podemos observar pelo gráfico e a tabela acima, a soma destas dez áreas é uma aproximação melhor para a área da faixa de hipérbole que se deseja calcular.Continuando com o processo de considerar mais e mais retângulos inscritos na faixa hiperbólica, subdividindo-a cada vez mais, obtemos aproximações cada vez melhores para a área que queremos calcular. De modo geral, suponhamos que $f(x)=\frac{1}{x}$ seja continua e positiva em um intervalo $[a,b]$. Dividimos este intervalo em n sub-intervalos de comprimentos iguais, ou seja, de comprimento $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, de modo que $a=a_0<a_1<a_2<....a_n=b$. Seja x_j um ponto qualquer no sub-intervalo $[a_{k-1,}a_k], \mathrm{k}=1,2,.....\mathrm{n}$ .Construímos em cada um desses sub-intervalos retângulos com base Δx e altura $f(x_j)$ .A soma das áreas dos n retângulos construídos é dada pelo somatório das áreas de cada um deles,

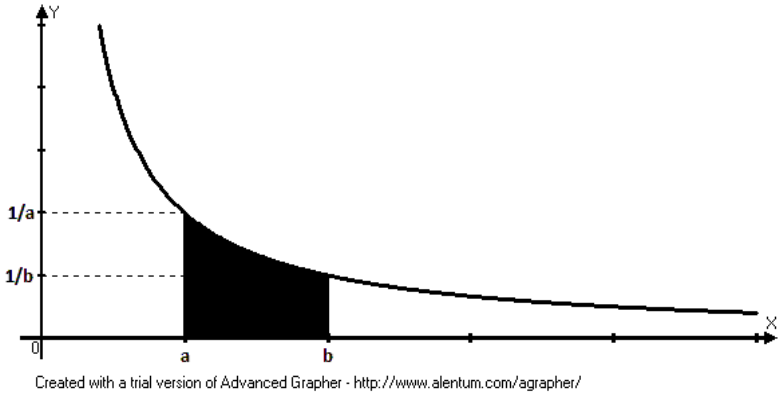
$$A_{\mathrm{Retang}ulos}=[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)]\Delta x.$$

Intuitivamente é possível admitir que à medida que n cresce, Δx diminui, e consequentemente o somatório anterior converge para a área A da região limitada pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Portanto, a área desta região é dada por:

$$A = \lim_{n\to\infty} [\sum_{j=1}^{n} f(x_j)]\Delta x$$

Mas este limite é exatamente igual à definição de integral definida[7] e com isso observamos que a área da região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é a interpretação geometricamente de integral definida em $[a,b]$ de uma função positiva.

Logo :



$$\boxed{Área(H_a^b) = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx}$$

[7]**Integral definida:** seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$.Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e seja x_j um número pertencente ao j-ésimo intervalo, para $j = 1,2,3,......n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a,b]$,denotada por $\int_a^b f(x)$, é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} [\sum_{j=1}^{n} f(x_j)]\Delta x.$$

6 LOGARITMOS NATURAIS

Seja x um número real positivo. Definimos o logaritmo natural de x como a área da faixa H_1^x .Assim, por definição, quando $x > 0$, escrevemos $\ln x$ para indicar o logaritmo natural de x ,temos :

$$\ln x = Área(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Lembramos que a conversão de tomarmos $Área(H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$ será sempre adotada. Em particular, quando $x = 1$, H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Podemos então escrever.

$\ln 1 = 0;$

$\ln x > 0$ se $x > 1;$

$$\ln x < 0 \text{ se } 0 < x < 1.$$

Não está definido $\ln x$ quando $x < 0.$

Para demonstrar as propriedades de logaritmos utilizando a integral precisamos do seguinte teorema:

Teorema1: Seja qual for o numero real, $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} tem a mesma área.

Demonstração:

Observe primeiramente o seguinte fato. Dado um retângulo inscrito em H, cujo base é o segmento $[\mathrm{c,d}]$ do eixo das abcissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[\mathrm{ck,dk}]$ tem mesma área que o anterior .Com efeito , a área do primeiro é igual a

$$(d-c)\times\frac{1}{d} = 1-\frac{c}{d},$$

enquanto a área do segundo é

$$(dk-ck)\times\frac{1}{dk} = 1-\frac{c}{d}.$$

Consideremos agora um polígono P, inscrito em H_a^b. Se multiplicarmos por K cada um das abcissas dos pontos de subdivisão de $[a,b]$,determinados por P, obtemos uma subdivisão do intervalo $[ak,bk]$ e portanto um polígono retângulo P ’, inscrito na faixa H_{ka}^{kb} .

Cada um dos retângulos que compõem P ’tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P ’ é igual à de P.

Concluímos assim que para cada polígono retângulo inscrito H_a^b, existe um inscrito em H_{ka}^{kb} com a mesma área. Analogamente (dividindo abcissas por K) veríamos que, para cada polígono retângulo Q' inscrito em H_{ka}^{kb}, existe outro Q, de mesma área, inscrito em H_a^b.Isto significa que as áreas dessas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores , e portanto são iguais.

Uma consequência deste teorema é que podemos restringir nossas considerações ás áreas das faixas da forma H_1^c, pois

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_1^{b/a}) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_1^c), \mathrm{c} = b/a.$$

Quando $a < b < c$, o temos que

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) + \acute{A}rea(\mathrm{H}_b^c) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_a^c).$$

A fim de manter a validez da igualdade acima para qualquer a,b,c reais, convencionaremos que

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^a) = 0 \quad \text{e} \quad \acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) = -\acute{A}rea(\mathrm{H}_b^a).$$

Esta última convenção implica em consideramos áreas negativas. Isso contraria a tradição mas, em compensação, a igualdade

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) + \acute{A}rea(\mathrm{H}_b^c) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_a^c)$$

torna-se valida sem restrição.

Por exemplo, se $c < a < b$, temos

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_c^b) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_c^a) + \acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b).$$

Dai segue:

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) - \acute{A}rea(\mathrm{H}_c^b) = -\acute{A}rea(\mathrm{H}_c^a).$$

Ou seja,

$$\acute{A}rea(\mathrm{H}_a^b) + \acute{A}rea(\mathrm{H}_b^c) = \acute{A}rea(\mathrm{H}_a^c).$$

Com a definição de logaritmo natural e usando o Teorema 1 acima, podemos provar as seguintes propriedades :

1ª Propriedade:

$$\ln(x.y) = \ln x + \ln y.$$

Demonstração:

Sejam x e y números reais positivo. Assim, por definição, escrevemos

$$\ln x.y = Área(H_1^{xy}) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt\ .$$

Desta forma temos

$$\ln x.y = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt,$$

como

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{y} \frac{1}{t}\,dt \ \text{(Teorema 1)}\ .$$

Temos:

$$\ln x.y = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{y} \frac{1}{t}\,dt = \ln x + \ln y.$$

2ª Propriedade:

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Demonstração:

Sejam x um número real positivo. Assim, por definição, escrevemos

$$\ln\frac{1}{x} = Área(H_1^{\frac{1}{x}}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt\ .$$

Desta forma temos

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt = \int_x^{x.\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt = \int_x^{1} \frac{1}{t}\,dt \ \text{(Teorema 1)},$$

como

$$Área(\mathrm{H}_1^x) = -Área(\mathrm{H}_x^1) \Rightarrow \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^{1} \frac{1}{t}\,dt\ .$$

Temos:

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt = -\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow \ln\frac{1}{x} = -\ln x\,.$$

<u>3ª Propriedade</u>:

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

Demonstração:

A demonstração desta propriedade será feita com base nas propriedades anteriores. Pela propriedade1temos

$$\ln(x.\mathrm{z}) = \ln x + \ln\mathrm{z}.$$

Fazendo $z = \frac{1}{y}$ obtemos:

$$\ln(x.\frac{1}{y}) = \ln x + \ln\frac{1}{y}.$$

Como

$$\ln(\frac{1}{y}) = -\ln\mathrm{y} \text{ (propriedade 2).}$$

Temos

$$\ln(x.\frac{1}{y}) = \ln x - \ln\mathrm{y} \Rightarrow \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln\mathrm{y}.$$

.

<u>4ª Propriedade</u>:

$$\ln x^m = m \ln x$$

Demonstração:

A demonstração desta propriedade será feita com base nas propriedades anteriores e utilizando o princípio da indução finita.

Primeiramente, considere $m \in N$. A propriedade se verifica para $m = 2$, pois:

$$\ln x^2 = \ln x.x = \ln x + \ln x = 2.\ln x\,.$$

Agora supomos por hipóteses que a propriedade se verifica para todo $m \in N$,isto é:

$$\ln x^m = m.\ln x\,.$$

Provaremos que a propriedade também se verifica para $m+1$. Logo temos:

$$\ln x^{m+1} = \ln x^m.x = \ln x^m + \ln x = m.\ln x + \ln x = (m+1).\mathrm{lnx}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade se verifica para todo $m \in N$. Notamos que a propriedade também se verifica se $m < 0$, pois:

$$\ln x^m = \ln x^{-(-m)} = \ln x^{-1.(-m)} = -1.\ln x^{-m} = -1.(-\mathrm{m}).\ln x = m.\ln x\,.$$

Agora, provaremos que a propriedade também se verifica para todo m racional:

$$m = \frac{p}{q} \text{ com } q \neq 0\,.$$

Inicialmente, observe:

$$\ln x = \ln x^{q.\frac{1}{q}} = q.\ln x^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \ln x = q.\ln x^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \frac{1}{q}\ln x = \ln x^{\frac{1}{q}}.$$

Obtemos:

$$\ln x^{\frac{p}{q}} = \ln x^{p.\frac{1}{q}} = p.\ln x^{\frac{1}{q}} = \frac{p}{q}\ln x\,.$$

Considere, ainda, que exista uma sequência de racionais (m_n) tal que:

$$\lim_{n\to\infty}(m_n) = m$$

Por outro lado vemos que:

$$\ln x^m = \ln x^{\lim\limits_{n\to\infty}(m_n)} = \ln \lim_{n\to\infty} x^{m_n} = \lim_{n\to\infty} \ln x^{m_n} \Rightarrow \ln x^m = \lim_{n\to\infty} \ln x^{m_n} = \lim_{n\to\infty} m_n.\ln x = m.\ln x$$

Concluímos que a propriedade vale para todo m real.

De modo geral, podemos relacionar os logaritmos decimais e os logaritmos naturais. De posse de um uma tábua de logaritmos decimais, podemos obter uma tábua de logaritmos naturais através da relação:

$$\ln x = \log_{10} x.\ln 10 .$$

Esta relação é facilmente verificada através de uma mudança de base.

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} \Rightarrow \ln x = \ln 10.\log_{10} x \ .$$

Se não tivermos o logaritmo natural de 10($\ln 10 = 2,3025$), basta lembrarmos que:

$$\ln 10 = \frac{1}{\log e} .$$

Verificamos, também, que $\log e = \log 2,7182$ pode ser identificado pelo uso de uma tábua de logaritmos decimais.

Vejamos como calcular o $\ln 2$ utilizando a relação acima.Temos:

$$\ln x = \log x.\ln 10 \Rightarrow \ln 2 = \log 2.\ln 10 \Rightarrow \ln 2 = 0,3010.2,3025 = 0,6930$$

7 O NÚMERO *e*

No século XVIII, o matemático suíço Jacques Bernoulli[8] propôs a seguinte questão:

Como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem as mesmas taxas de juros?

Esta situação poderia ser compreendida mais facilmente da seguinte forma:

Imagine que um banco pague juros de 100% ao ano. Após um ano, teríamos o montante de R$ 2,00 para cada R$ 1,00 aplicado.

Se juros fossem creditados semestralmente, após um ano, teríamos o montante de R$ 2,25 para cada R$ 1,00 aplicado.

Se fosse crédito trimestral, após um ano, teríamos o montante de R$ 2,44141 para cada R$ 1,00 aplicado.

O modelo matemático para esse cálculo é o seguinte:

$$M = (1 + \frac{1}{n})^n .$$

Vejamos alguns resultados para diversos valores de n na tabela abaixo.

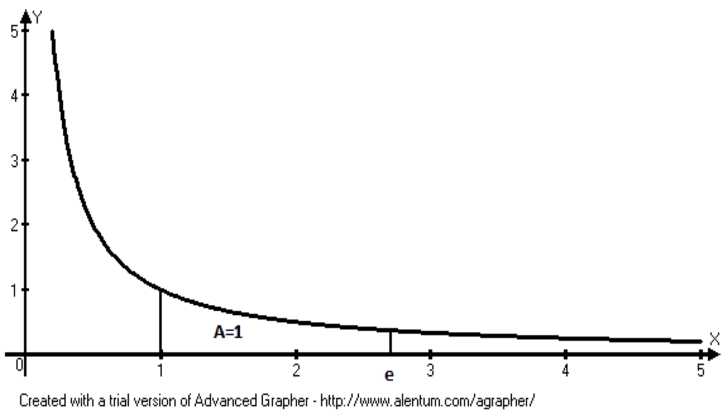
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815

[8]JacquesBernoulli (Basileia 1654 - Basileia, 16 de Agosto de1705) foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal. Publicou a primeira integração de uma equação diferencial.É considerado o pai do cálculo exponencial. (FUNÇÕES, 2013)

Com base na tabela acima podemos de forma intuitiva observamos que a função $M = (1+\frac{1}{n})^n$ é crescente. Poderíamos, assim, pensar que temos um capital tão grande quanto queiramos, mas isso não é verdade: para calcular quanto seria o resultado para o crédito instantâneo, ou seja, com n tendendo ao infinito deveríamos calcular o limite da função, isto é: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.Esse número *e* é a base dos logaritmos naturais.

Uma outra maneira de ver o numero e foi proposto em 1.667 pelo matemático escocês, James Gregory[9], que mostrou como calcular logaritmos achando áreas de paralelogramos entre uma hipérbole e suas assíntotas, levando assim à expressão logaritmos hiperbólicos.

Com esta nova definição de logaritmos através de área, o número *e* pode ser definido como sendo o valor da abscissa x_0 tal que a área da região limitada pelo eixo OX, a reta $x = 1$, a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e a reta $x = x_0$ seja igual a 1.



Utilizando a ideia da área de uma faixa de hipérbole, podemos verificar, intuitivamente, que o número *e* é irracional, pois sabemos que toda função logarítmica é

[9]James Gregory (Drumoak, 1638 – Edimburgo, outubro de 1675)foi um matemático e astrônomo escocês. Em 1660, publicou a *Optica Promota,* na qual descreveu o telescópio de reflexão, conhecido como *telescópio gregoriano*. Em matemática, é conhecido pela primeira demonstração do teorema fundamental do cálculo e pela descoberta das séries de Taylor (anos antes de Taylor). (FUNÇÕES,2013)

subjetiva,isto é,dado qualquer número real c (supomos $c=1$), existe sempre um único número real x tal que $\ln x = c$, ou seja, $\ln x = 1$ se e somente se $x = e$.

Do ponto de vista geométrico,vemos que a faixa da hipérbole H_1^2 tem área menor que 1, enquanto a faixa H_1^3 tem área maior que 1. Isso significa que:

$$\ln 2 < 1 < \ln 3 \Rightarrow \ln 2 < \ln e < \ln 3 \Rightarrow 2 < e < 3,$$

ou seja: que o número e está entre 2 e 3 e, portanto, e é irracional; fato este que também pode ser verificado utilizando o binômio de Newton:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + n.\frac{(n-1)}{2!}.(\frac{1}{n})^2 + \frac{(n-1).(n-2)}{3!}.(\frac{1}{n})^3 + ...\frac{n!}{\mathrm{n}!}.(\frac{1}{n})^n$$

Observando o lado direito da expressão, já podemos notar que e é maior que 1, pois as duas primeiras parcelas são iguais a 1 e as demais são todas positivas. Se rearranjarmos de uma maneira bastante especial, veremos também que $e < 3$ pois:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}.\frac{n}{n}.(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}.\frac{n}{n}.(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n}) + ...\frac{1}{\mathrm{n}!}.\frac{n}{n}.(1-\frac{n-1}{n}).(1-\frac{n-2}{n})...(1-\frac{1}{n}) \Rightarrow$$
$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...\frac{1}{\mathrm{n}!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Nesta última soma, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\frac{1}{2^{n-1}}$,os termos a partir do segundo formam uma progressão geométrica com razão $1/2$. O somatório desta progressão é:

$$\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2.(1-\frac{1}{2^n}) < 2.$$

8 APLICAÇÕES DE LOGARITMOS

Esta unidade tem como principal objetivo motivar os alunos e mostrar a fundamental importância do estudo do logaritmo não apenas como elemento de cálculo, mas como elemento de fundamental importância para a compreensão e desenvolvimentos das diversas áreas das ciências. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (2001):

> É importante que se estimule o aluno a buscar explicações e finalidade para as coisas, discutindo questões relativas à unidade da matemática, como ela foi construída, como pode construir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados á investigação científica.Desse modo, o aluno pode identificar os conhecimentos matemáticos com meio que o auxiliam a compreender e atuar no mundo.

8.1 Juros compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e,portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia.Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. O montante é igual ao capital mais os juros gerados no período. Assim, supomos que um capital C seja aplicado a uma taxa i após certo tempo t e após t meses de capitalização, temos:

Para o 0º mês:

$$M = C$$

Para o 1º mês :

$$M = C + C.i \Rightarrow \mathrm{M} = C.(1+i)$$

Para o 2º mês:

$$M = C.(1+i) + \mathrm{i}\,.\mathrm{C}.(1+i) \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{C}.(1+i)^2$$

Para o 3º mês:

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}.(1+i)^2 + i.\mathrm{C}.(1+i)^2 \Rightarrow M = \mathrm{C}.(1+i)^3$$

Se continuarmos este processo por um período de t meses teremos a seguinte sequência:

$$(C, C.(1+i), C.(1+i)^2, C.(1+i)^3 ...) = C(1, (1+i), (1+i)^2, (1+i)^3 ...)$$

Chegamos a uma progressão geométrica de razão $(1+i)$ e tem $(t+1)$, pois para $t = 0$, temos o capital inicial C.

Assim, o termo de ordem $(t+1)$ será expresso pela forma do termo geral de uma progressão geométrica, logo:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1.(1+i)^{t+1-1} \Rightarrow a_n = (1+i)^t$$

Como

$$M = C.a_n \Rightarrow M = C.(1+i)^t$$

Questão 1 (UERJ-2003) Jorge quer vender seu carro por R$ 40.000,00. Pedro, para comprá-lo, dispõe de R$ 5.000,00, e aplica esse valor em um investimento que rende juros composto a uma taxa de 28% a cada dois anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada dois anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior.Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, **log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48**.

Solução:

Devemos calcular o montante utilizando a valorização do dinheiro aplicado e a desvalorização do carro. Devemos descobrir quanto tempo levará para que os montantes sejam iguais; para isso, façamos então o cálculo de cada montante.

Dinheiro aplicado

$$M_d = 5000.(1+0,28)^{\frac{t}{2}}$$

Desvalorização do carro

$$M_c = 40000.(1-0,19)^{\frac{t}{2}}.$$

Note que na expressão do montante referente à desvalorização do carro o sinal é negativo, pois o carro irá desvalorizar 19% a cada dois anos.Como queremos encontrar o tempo em que os montantes serão iguais, devemos igualar os montantes. Com isso, teremos:

$$M_d = M_c$$
$$5000.(1,28)^{\frac{t}{2}} = 40000.(0,81)^{\frac{t}{2}}$$
$$\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^{\frac{t}{2}} = \frac{40000}{5000}$$
$$\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^{\frac{t}{2}} = 8.$$

Aplicaremos logaritmos dos dois lados da igualdade:

$$\log\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 8.$$

Lembrando a relação que o enunciado apresentou, teremos como informação apenas o log2 e o log3. Portanto, devemos organizar os logaritmos para que sejam escritos como potências dos números 2 e 3. Logo:

$$\frac{1,28}{0,81} = \frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4} \quad \text{e} \qquad 8 = 2^3.$$

Sendo assim, voltemos à expressão a ser calculada.

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3$$

Aplicando as propriedades de logaritmo.

$$\log a^h = h.\log a$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Temos que:

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3 \Rightarrow \frac{t}{2}(\log 2^7 - \log 3^4) = 3\log 2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{6.\log 2}{7.\log 2 - 4.\log 3}$$

$$t = \frac{6.0,3}{7.0,3 - 4.0,48} = \frac{18}{1.8} = 10.$$

Concluímos que apenas depois de 10 anos Pedro teria dinheiro para comprar o carro de Jorge.

8.2 Decaimento radioativo

O homem, na tentativa de melhor compreender os mistérios da vida, sempre lançou mão de seus conhecimentos científicos e/ou religiosos.

A datação por carbono 14 é um belo exemplo da preocupação do homem em atribuir idade aos objetos e datar os acontecimentos.

Em 1946, a Química forneceu as bases científicas para a datação de artefatos arqueológicos, usando o ^{14}C. Esse isótopo é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica sobre o nitrogênio, sendo posteriormente transformado em dióxido de carbono. Os vegetais absorvem o dióxido de carbono e, através da cadeia alimentar, a proporção de ^{14}C nos organismos vivos mantém-se constante. Quando o organismo morre, a proporção de ^{14}C nele presente diminui, já que, em função do tempo, se transforma novamente em nitrogênio.

Questão2(Lima,1991) Na caverna Lascaux, na França, famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do C ^{14}era0,144 vezes a radioatividade normal num pedaço de carvão feito hoje. Assim, podemos afirmar que a idade do carvão encontrada na caverna e a estimativa para a época em que as pinturas foram feitas são:

Solução:

Considere que a massa radioativa de carvão feito hoje seja M, então a massa radioativa de carvão encontrado na caverna será de $0{,}144M$.

Sabendo que a cada período de 5730 anos a quantidade de ^{14}C reduz-se à metade, considere $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$.

Usaremos a fórmula de juros composto para determinar a idade da amostra de carvão encontrada.

Assim para a meia vida do carbono 14 vamos determinar a constante $(1-i) = k$. Observe que o sinal negativo provém do fato que essa massa radioativa está diminuindo do decorrer do tempo. Logo temos:

$$M = C.(1-\mathrm{i})^t$$
$$\frac{C}{2} = C.k^t$$
$$\frac{1}{2} = 1.k^{5730}$$
$$k = \frac{1}{2}^{\frac{1}{5730}}.$$

Para a amostra de carvão encontrado na caverna,temos:

$$M = C.(1-\mathrm{i})^t$$
$$\frac{C}{2} = C.k^t$$
$$0{,}144.C = C.[(\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730}}]^t$$
$$0{,}144. = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}}.$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros, temos:

$$\log 0{,}144 = \log(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow$$
$$\log 0{,}144 = \frac{t}{5730}.\log\frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$t = \frac{5730.\log 0{,}144}{\log\frac{1}{2}} = \frac{5730.(-0{,}8418)}{(-0{,}3010)} \Rightarrow$$
$$t = 16024{,}9 anos.$$

Pois:

$$\log 0{,}144 = \log\frac{144}{1000} = \log 144 - \log 1000 = \log 2^4.3^2 - \log 10^3 \Rightarrow$$
$$\log 0{,}144 = 4.\log 2 + 2.\log 3 - 3.\log 10 = 4.(0{,}3010) + 2.(0{,}4771) - 3.1 = -0{,}8418$$

e

$$\log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - 0{,}3010 = -0{,}3010.$$

8.3 Lei de resfriamento de Newton

Além das contribuições para a Física, Newton também deixou algumas contribuições para a Matemática.Uma delas refere-se à condução de calor entre corpos,um modelo simples, mas real, que trata da troca de calor de um corpo com o meio ambiente, com as seguintes hipóteses:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende apenas do tempo t é a mesma em todos os pontos do corpo
2. A temperatura do meio T_m é constante.
3. A lei de resfriamento de Newton: a taxa de variação temporal da temperatura $T = T(t)$ de um corpo é proporcional à diferença entre T e a temperatura T_m (constante) do ambiente em volta. Isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k.(\mathrm{T} - T_m)$$

Temos:

Se $T > T_m$, então $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é decrescente. Logo, se a temperatura do corpo é maior que a do ambiente o corpo está se resfriando.

Se $T < T_m$, então $\frac{dT}{dt} > 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é crescente. Logo, se a temperatura do corpo é menor que a do ambiente o corpo está esquentando.

Se $T = T_m$, então $\frac{dT}{dt} = 0$, de modo que a temperatura T é constante, e K é uma constante que depende do material em que o corpo foi construído.

Como a equação diferencial acima é separável, pode ser transformada em:

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k.dt$$

Integrando ambos os membros em relação a variável tempo,temos:

$$\ln(\mathrm{T} - \mathrm{T}_m) = -\mathrm{k}.\mathrm{t} + \mathrm{k}_0.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros e tomando as constantes embutidas em uma só, obtemos:

$$\ln(\mathrm{T} - \mathrm{T}_m) = -\mathrm{k}.\mathrm{t} + \mathrm{k}_0 \Rightarrow \mathrm{T(t)} - T_m = e^{(-\mathrm{k.t} + \mathrm{k}_0)} \Rightarrow \mathrm{T(t)} - T_m = e^{\mathrm{k}_0}.e^{-\mathrm{k.t}} \Rightarrow T(\mathrm{t}) = T_m + C.e^{-\mathrm{k.t}}$$

Questão3O corpo de uma vítima de acidente foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23h30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8º. Uma hora mais tarde, ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1º.A temperatura do quarto era mantida constante a 20º.Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5º. Determine a hora em que se deu a morte.

Solução:

Para um melhor entendimento do problema, vamos colocar os dados em uma tabela. Assim temos:

Tempo	Hora	Temperatura Do corpo	Temperatura Do quarto	Diferença de Temperatura
T	Morte	36,5°	20°	16,5°
0	23:30	34,8°	20°	14,8°
1	24:30	34,1°	20°	14,1°

Agora, vamos utilizar a lei de resfriamento de Newton.

Para t = 0:

$$\begin{aligned} &T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}} \\ &T(0) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.0} \\ &C = T(0) - \mathrm{T}_m \\ &C = 14,8. \end{aligned}$$

Para t = 1:

$$\begin{aligned} &T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}} \\ &T(1) = \mathrm{T}_m + 14,8.e^{-k.1} \\ &T(1) - \mathrm{T}_m = 14,8.e^{-k.} \\ &14,1 = 14,8.e^{-k.} \\ &\frac{14,1}{14,8} = e^{-k.}. \end{aligned}$$

Para a hora da morte:

$$T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}}$$
$$T(\mathrm{t}) - \mathrm{T}_m = 14,8.(\frac{14,1}{14,8})^t$$
$$\frac{16,5}{14,8} = (\frac{14,1}{14,8})^t.$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros, temos:

$$\log\frac{16,5}{14,8} = \log(\frac{14,1}{14,8})^t \Rightarrow t = \frac{\log 165 - \log 148}{\log 141 - \log 148}$$

Agora, com o auxílio de uma tábua de logaritmos, temos:

$$t = \frac{2,21 - 2,17}{2,14 - 2,17} \Rightarrow t = -\frac{0,04}{0,03} = -\frac{4}{3} \Rightarrow -1h20\min$$

Portanto, a pessoa morreu as 21 h e 40min.

Uma boa aplicação da lei de resfriamento de Newton pode ser vista no exame de qualificação 2012-1. PROFMAT.

Questão4(PROFMAT-2012-1) Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo em minutos, seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t, com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$$

no intervalo de tempo $[\mathrm{t}, \mathrm{t}+\mathrm{h}]$ depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°. A água, que fervia a 100° numa panela,cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60°. Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

Esta questão encontra-se resolvida da seguinte forma no site:

Solução:

Pela Lei do Resfriamento de Newton, a função $D(t)$, em $t = 0$ que é o momento em que o fogo foi apagado, cumpre as hipóteses do Teorema de Caracterização das funções de tipo exponencial. Logo, existe uma constante a, com $0 < a < 1$, tal que:

$$D(t) = \mathrm{D}_0 .a^t,$$

onde

$$D^0 = D(0) \ .$$

Temos:

$$D(0) = 100 - 30 = 70 .$$

Logo

$$D(t) = \mathrm{D}_0 .a^t \Rightarrow D(t) = 70.a^t \ .$$

O problema nos diz que:

$$D(5) = 60 - 30 = 30 .$$

Portanto

$$D(t) = \mathrm{D}_0 .a^t$$

$$70.a^5 = 30$$

e daí vem

$$a^5 = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Segue-se que

$$a^{15} = (a^5)^3 = (\frac{3}{7})^3$$

e que

$$D(t) = D_0.a^t$$

$$D(15) = 70.a^{15} = 70.(\frac{3}{7})^3 = 5,5.$$

Portanto, 15 minutos após o fogo ser apagado, a temperatura da água é de aproximadamente; $30 + 5,5 = 35,5°$.

Agora, vamos utilizar a lei de resfriamento de Newton para resolver está questão.

Solução:

Para $t=0$:

$$T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}}$$
$$T(0) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.0}$$
$$100 = 30 + C.1$$
$$C = 70.$$

Para $t=5$:

$$T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}}$$
$$T(5) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.5}$$
$$60 - 30 = 70.e^{-5k}$$
$$e^{-5k} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Para $t=15$:

$$T(\mathrm{t}) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.\mathrm{t}}$$
$$T(15) = \mathrm{T}_m + C.e^{-k.15}$$
$$T(15) = 30 + 70.(e^{-k.5})^3$$
$$T(15) = 30 + 70.(\frac{3}{7})^3$$
$$T(15) = 30 + 70.(\frac{27}{343})$$
$$T(15) = 30 + 5,5 = 35,5.$$

Portanto, 15 minutos após o fogo ser apagado, a temperatura da água é de aproximadamente; $35,5°$.

8.4 A escala de magnitude de momento

A escala de Richter não permite avaliar a intensidade sísmica de um sismo num local determinado e em particular em zonas urbanas. Para tal, utilizam-se escalas de intensidade tais como MMS.

A escala de magnitude de momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas C. Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.

Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. Embora as fórmulas sejam diferentes, a nova escala manteve os valores de magnitude definidos pela antiga.

Para calcular a magnitude do momento sísmico, utiliza-se a equação construída por Hiroo Kanamori no Laboratório de Sismologia do Califórnia Institute of Technology, em Pasadena. O símbolo da escala de magnitude do momento é M_w onde w significa trabalho mecânico realizado.

M_w é um número adimensional definido por

$$M_w = \frac{2}{3}.(\log_{10}\frac{M_0}{N.m} - 9{,}1)$$

Onde :

M_0 é o momento sísmico em dina centímetro $(1N.m = 10^7\,dyn.cm)$ .Desta forma como M_0 está escrito Newton metro $(N.m)$ precisamos estabelecer a seguinte relação.

$$M_w = \frac{2}{3}.(\log_{10}\frac{M_0}{N.m} - 9{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}(\log_{10}\frac{M_0}{10^7\, dyn.cm} - 9{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}(\log_{10}\frac{\mathrm{M}_0}{dyn.cm}.10^{-7} - 9{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}(\log_{10}\frac{\mathrm{M}_0}{dyn.cm} + \log_{10}10^{-7} - 9{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}(\log_{10}\frac{\mathrm{M}_0}{dyn.cm} - 7 - 9{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}(\log_{10}\frac{\mathrm{M}_0}{dyn.cm} - 16{,}1)$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}.\log_{10}\mathrm{M}_0 - \frac{2}{3}.16{,}1$$
$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}.\log_{10}\mathrm{M}_0 - 10{,}7$$

Questão 5O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

__U.S. GEOLOGICAL SURVEY__. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.

De acordo com a informação acima, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?

Solução:

Sabendo-se que o momento sísmico é uma quantidade usada pelos sismólogos para medir a magnitude de um terremoto e no terremoto de Kobe a magnitude M_w foi de7,3, podemos determinar M_0 através da equação de Hiroo Kanamori . Logo temos:

$$\mathrm{M}_w = \frac{2}{3}\log\mathrm{M}_0 - 10{,}7$$
$$\frac{2}{3}.\log M_0 - 10{,}7 = 7{,}3$$
$$\frac{2}{3}.\log M_0 = 18$$
$$\log M_0 = 27$$
$$M_0 = 10^{27}.$$

8.5 A escala Richter

Em 1935, para comparar os tamanhos relativos dos sismos, Charles F. Richter, sismólogo americano, formulou uma escala de magnitude baseada na amplitude dos registros das estações sismográficas.

O princípio básico da escala é que as magnitudes sejam expressas na escala logarítmica, de maneira que cada ponto na escala corresponda a um fator de 10 vezes na amplitude das vibrações. Por isso é usado o logaritmo de base 10, em que ele classifica cada grau da escala em $1, 2, 3, ...$ em vez de falar $10, 100, 1000, ...$ o que dificultaria mais o processo para o cálculo. No entanto, o modo de classificá-lo através da escala usada é bem fácil de trabalhar, compreendendo assim que, se houver um abalo de magnitude 4, ele será dez vezes maior que o de magnitude 3, cem vezes maior que a 2,mil vezes maior que a 1.

É importante relatar que cada ponto na escala de magnitude corresponde a uma diferença da ordem de 30 vezes na energia liberada. Assim, um abalo de magnitude 4 libera 30 vezes mais energia que o de magnitude 3.

A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto.

A fórmula utilizada é a seguinte:

$$M = \log A - \log A_0.$$

Onde:

M : magnitude,

A: amplitude máxima,

A_0 : amplitude de referência.

Podemos utilizar a fórmula para comparar as magnitudes de dois terremotos. Para calcular a energia liberada por um terremoto, usamos a seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3}.\log \frac{E}{E_0}$$

Onde:

I : varia de 0 a 9,

E: energia liberada em $K\,w/h$

E_0: 7 x 10^{-3} $K\,w/h$.

Vejamos a seguinte notícia:

Hoje foi no Haiti7ºna escala Richter.Virão outros?

Terremotos de 7° causa grande destruição no Haiti.Epicentro do terremoto foi em Carrefour, próximo à capital,Brasil tem cerca de 1.300 soldados no país.

Um terremoto de grandes proporções atingiu o Haiti nesta terça-feira, 12. O tremor de sete graus na escala Richter foi detectado às 19h53 (hora de Brasília). Minutos depois, duas réplicas de 5,9 e 5,5 graus atingiram o Montana – onde mora o general brasileiro que comanda o braço militar da missão – e o Cristopher, utilizado como sede da Missão das Nações Unidas para Estabilização no Haiti (Minustah) estão destruídos.

Questão 6: De acordo com o texto acima,podemos afirmar que o terremoto que atingiu o Haiti liberou quantas vezes mais energia que suas réplicas.

Solução:

Para calcularmos o terremoto que atingiu o Haiti devemos utilizar a expressão:

$$I = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow 7 = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow \log\frac{E}{E_0} = 10,5 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{10,5} \Rightarrow E = E_0.10^{10,5}.$$

Agora,para calcularmos as réplicas, devemos utilizar a mesma expressão.

I-Para I= 5,9. Temos:

$$I = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow 5,9 = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow \log\frac{E}{E_0} = 8,85 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{8,85} \Rightarrow E = E_0.10^{8,85}.$$

II- Para I = 5,5 Temos:

$$I = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow 5,5 = \frac{2}{3}.\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow \log\frac{E}{E_0} = 8,25 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{8,25} \Rightarrow E = E_0.10^{8,25}.$$

Agora, devemos comparar o terremoto que atingiu o Haiti com as suas réplicas. Assim,temos:

Para a réplica I:

$$R_I = \frac{E_0.10^{10,5}}{E_0.10^{8,85}} \Rightarrow R_I = 10^{1,65} \Rightarrow R_I = 44,6.$$

De maneira geral, podemos dizer que o terremoto que atingiu o Haiti em relação a réplica I foi 44,6 vezes mais forte.

Agora, comparando o terremoto que atingiu o Haiti com a réplica II. Temos:

$$R_{II} = \frac{E_0.10^{10,5}}{E_0.10^{8,25}} \Rightarrow R_{II} = 10^{2,25} \Rightarrow R_{II} = 177,82.$$

De maneira geral, podemos dizer que o terremoto que atingiu o Haiti em relação a replica II foi 177,82 vezes mais forte.

8.6 O modelo populacional

Em 1798, o economista inglês Thomas Malthus, no trabalho *"An Essayon the Principle of Population"* formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo.

Considerou $N = N(t)$ o número de indivíduos de uma população, sendo N_0 esta população no instante $t = 0$.

Considerou a hipótese que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e que a variação da população era conhecida entre dois períodos, num lapso de tempo Δt.

Se ΔP é a variação da população, temos:

$$\Delta P = a.P(t).\Delta \mathrm{t} - b.P(t).\Delta \mathrm{t}$$

onde :

i) $a.P(t).\Delta \mathrm{t}$ é o número de nascimentos

ii) $\mathrm{b}.P(t).\Delta \mathrm{t}$ é o número de mortes no período.

Dessa forma. Temos:

$$\Delta P = a.P(t).\Delta \mathrm{t} - b.P(t).\Delta \mathrm{t} \Rightarrow \Delta P = (a-b).P(t).\Delta \mathrm{t}$$

Fazendo, $r = a - b$ vem:

$$\Delta P = r.P(t).\Delta \mathrm{t} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta \mathrm{t}} = r.P(t)$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos:

$$\frac{dP}{dt} = r.P\ ,$$

Que é a EDO para o modelo populacional do ponto de vista de Malthus.

Para resolver esta EDO, devemos usar o método das variáveis separáveis. Logo temos:

$$\frac{dP}{dt}=r.P\Rightarrow\frac{dP}{P}=r.\mathrm{dt}\Rightarrow\int\frac{dp}{P}=\int r.\mathrm{dt}\Rightarrow\ln P=r.t+c\Rightarrow P=e^{rt+c}\Rightarrow P=C.e^{rt}.$$

Agora, considerando $t=0$, temos que C será a população inicial P_0. Desta forma, o modelo populacional do ponto de vista de Malthus será expresso por:

$$P(t)=P_0.e^{rt}.$$

Este modelo estudado supõe que o meio ambiente tenha pouca ou nenhuma influência sobre a população. Logo, ele funciona melhor como um indicador do potencial de sobrevivência e de crescimento de certa espécie de população do que como um modelo para mostrar o que realmente ocorre.

Questão 7(EsPCEx-2009) Um biólogo, que estudava uma cultura de bactérias, observou que 8 h após o início do experimento a população era de 8000 indivíduos e que 2 h depois dessa observação, a populaçao era de 16000 indivíduos.Podemos afirmar que a população inicial de bactérias era de:

Solução:

Considerando modelo populacional de Thomas Malthus, visto acima. Temos:

1- Para $t=8$

$$P(t)=P_0.e^{rt}\Rightarrow P(8)=P_0.e^{r8}\Rightarrow P_0.e^{r8}=8000.$$

2- Para $t=10$

$$P(t)=P_0.e^{rt}\Rightarrow P(10)=P_0.e^{r10}\Rightarrow P_0.e^{r10}=16000.$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos:

$$\frac{e^{10r}}{e^{8r}}=\frac{16000}{8000}=2\Rightarrow e^{2r}=2\Rightarrow e^{r}=\sqrt{2}.$$

Substituindo na primeira equação, obtemos:

$$P_0.e^{r8}=8000\Rightarrow P_{0.}(\sqrt{2})^8=8000\Rightarrow 16.P_0=8000\Rightarrow P_0=\frac{8000}{16}\Rightarrow P_0=500.$$

Portanto, a população inicial era de 500 bactérias

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se compararmos as provas de matemática dos vestibulares atuais com as de décadas passadas, verificaremos uma grande diferença no modelo das questões. As da década passada priorizavam a resolução de equações sem levar em consideração o contexto que motivava tais equações.

Hoje temos outro contexto. A sociedade atual exige conhecimento sólido de matemática para que os indivíduos consigam tomar decisões de forma rápida, precisa e inteligente. Diante desse cenário, devemos buscar metodologias que possam levar os alunos a compreender os conceitos matemáticos, necessários para uma formação sólida e efetiva. O logaritmo é, sem dúvida, um tema que contribui para esta formação, pois está presente em diversos ramos das ciências. Compreender suas definições e propriedades é fundamental para um raciocínio lógico e preciso.

Muitos docentes sentem dificuldades em ensinar logaritmo no 1° ano do Ensino Médio. Os motivos são vários, dentre eles destacamos o fato da maioria dos livros didáticos mais utilizados no nosso país ainda se basearem na década passada, priorizando apenas as resolução de equações com pouco ou nenhum contexto deixando alunos e professores desmotivados sem se quer saber a finalidade de ensinar e aprender logaritmo.

A matemática constitui um desafio para todos os educadores. Muito precisa ser feito no sentido de transformar a matemática da escola em uma matemática da vida. É uma disciplina que provoca sensações contrárias, tanto por parte dos educandos quanto por parte dos educadores.Ao mesmo tempo em que é considerada uma disciplina importante, existe a insatisfação frente a resultados negativos obtidos com frequência na realidade escolar: o aluno cria aversão à disciplina, não vê utilidade no que é ensinado e não desenvolve de maneira coesa sua capacidade de resolver cálculos matemáticos. Dessa maneira, cada professor é responsável pelo procedimento de suas aulas e pelo desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Nós, enquanto educadores, exercemos a função de mediadores do processo de ensino-aprendizagem, desenvolvendo o senso crítico dos alunos. Para isso, necessitamos, além de criar situações apropriadas para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, estar preparados cientificamente, isto é, precisamos conhecer o que ensinamos, dominando o conteúdo a ser trabalhado, para que, assim, possamos conquistar o reconhecimento dos alunos.

Nessa perspectiva, cabe ao professor proporcionar situações reais de ensino, nas quais os alunos possam interagir com o objetivo de estudo e, acima de tudo, agir sobre as coisas, a fim de que eles possam elaborar as abstrações requeridas pela matemática. Essas experiências pedagógicas serão facilitadas se o professor e os alunos tiverem atitudes positivas com relação à disciplina, pois, somente os professores com tais atitudes é que encorajam os seus alunos à independência, gerando a autonomia na construção de um saber crítico e reflexivo, favorecendo as transformações produtivas no ensino-aprendizagem da matemática.

Diante disso, procuramos elaborar de maneira didática uma abordagem sobre o tema, conceituando logaritmos, destacando o seu desenvolvimento histórico e suas aplicações a problemas do cotidiano e fenômenos naturais. Esperamos que este trabalho possa ser aplicado em turmas de 1° ano do Ensino Médio e que sirva de motivação para professores em busca de uma melhor maneira de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, esperamos que esse trabalho seja apenas o começo de um estudo sólido e contínuo, sendo útil para outros docentes que pretendem oferecer um ensino público de qualidade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática.Brasília: MEC/SEF, 2001.

COSTA, Evanildo Soares. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**.Natal, 2011, 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. [Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes]Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/1/7477>. Acesso em: 20 jul. 2014.

COSTA,Francisca Vandilma.Seção áurea na arquitetura renascentista: uma discussão histórica e matemática nos quatro livros de arquitetura de Andrea Palladio (1570). **Anais Ebrapem**. v. 1, n. 1, 2011.Disponível em: <www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/resumo.php?idtrabalho=333>. Acesso em: 10 jul. 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:**volume único. São Paulo: Ática, 2005.

FUNÇÕES. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/logaritimos>. Acesso em: 20 dez. 2013.

FUNÇÕES. Disponível em <http://www.infoescola.com/matematica/org/logaritimos>. Acesso em: 10 jan.2014.

FUNÇÕES. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/logaritimos>. Acesso em: 15 abr. 2014.

LIMA, Elon Lages.Conceitos e controvérsias: zero é um número natural?**Revista do Professor de Matemática.** v. 01. n. 76. 2011. p. 8-11.

______. Logaritmos. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. (Coleção do Professor de Matemática)

______.Curso de Análise. 11. ed. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.(Projeto Euclides)

PEREIRA, Josiel da Silva.**Logaritmos e Aplicações.**Campina Grande, 2013, 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática).Universidade Federal de Campina Grande. 2013. [Orientador:Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva]. Disponível em: <www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Josiel.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2014.

PROFMAT – Exame de Qualificação 2012-1