2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT
Universidade Federal de Roraima - UFRR
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

A Função Exponencial do Ponto de Vista das Matrizes

Eduardo Lepletier da Silva[1]
Lindeval Fernandes de Lima[2]

Resumo: Exponencial de matrizes é o conceito central da teoria de equações lineares (CLAUS; LOPES, 2007). O trabalho aborda aspectos importantes da função exponencial, o interessante número e, além de explorar aspectos fundamentais das matrizes passando por autovalores e autovetores de forma objetiva. O principal intuito é tornar a leitura simples e agradável, de tal forma que um estudante do ensino médio consiga ler e entender os principais conceitos aqui apresentados da exponencial de matrizes.

Palavras-chaves: Função exponencial. Matrizes. Exponencial matricial.

1 INTRODUÇÃO

Calcular funções de matrizes é um dos problemas centrais da teoria de equações lineares. A fim de tratar este tema, veremos as preliminares que iniciam com a função exponencial e suas propriedades. Logo após, veremos o número e para entendermos melhor a função exponencial nessa base, pouco trabalhada no Ensino Médio. Finalizaremos essa parte com a caracterização da função exponencial. Ainda nas preliminares, passaremos pelas matrizes, dando um breve enfoque a alguns tipos, em especial a Matriz Inversa. Tendo em vista uma maior consistência ao estudo das exponenciais de matrizes, veremos, logo em seguida, os autovalores e os autovetores de uma matriz e, finalmente, passaremos à parte principal do nosso estudo que são as exponenciais matriciais.
A exponencial, do ponto de vista das matrizes, é uma função (CLAUS; LOPES, 2007) matricial definida no conjunto das matrizes quadradas e possui propriedades semelhantes a da função exponencial definida nos números reais (ou complexos), além de permitir um tratamento unificado dos sistemas de equações diferenciais lineares, sem cair em inúmeros casos.
Este trabalho tem como finalidade fazer uma abordagem da função exponencial, das matrizes e das exponenciais matriciais, com suas respectivas propriedades, visando uma construção qualitativa.
Uma das técnicas matemáticas eficientes na resolução de uma equação diferencial, veja (SOTOMAYOR, 1979), consiste no cálculo da matriz e^{At} onde A é uma matriz de ordem n.

[1] Aluno do Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012.
[2] Orientador - Professor do Departamento de Matemática – UFRR.

2 PRELIMINARES

2.1 A Função Exponencial

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função exponencial de base a, definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, onde $f(x) = a^x$, tem as seguintes propriedades:

i) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

ii) $a^1 = a$, para todo a real;

iii) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ para $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ para $0 < a < 1$.
Vamos observar o caso i
$f(x + y) = f(x).f(y), f$ não pode assumir o valor zero, a menos que seja identicamente nula, pois, se existir algum x_0 real tal que $f(x_0) = 0$, então para todo x real teremos $f(x) = f(x_0+(x-x_0)) = f(x_0).f(x-x_0) = 0.f(x-x_0) = 0$, logo f será identicamente nula.

Note que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade i) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo x real, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Desta forma, tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$. A diferença é que se tomarmos o contradomínio $\mathbb{R}^+$, a função será sobrejetiva. De fato, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ possui as propriedades i) e ii), então para todo número natural n tem-se que:

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \quad parcelas}) = f(1).f(1)\ldots f(1) = a.a\ldots a = a^n.$$

Seja $r = \frac{m}{n}, \quad$ com $\quad n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.
Assim $f(r) = a^r$, é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(r + s) = f(r).f(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$.
Pela propriedade iii), temos que a função exponencial será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $0 < a < 1$.
Com isso resultará que existe uma única forma de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional.Sendo assim, a^x tem a seguinte propriedade:
Vamos supor $a > 1$.
Se $r < x < s \quad$ com $\quad m, n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$, ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são $a^r, \quad$ com $\quad r < x, \quad r \in \mathbb{Q}$ e cujas aproximações por excesso são $a^s, \quad$ com $\quad x < s, \quad s \in \mathbb{Q}$.
Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências de a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências de a^s, com s racional maior do que x.

iv) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente. Se $a > 1$, então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ e tende a valores muito grandes ($+\infty$); e quando $0 < a < 1, \quad a^x$ também cresce sem limites quando x tende a menos infinito ($-\infty$).

v) A função exponencial é contínua. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto desejarmos, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0, ou seja,

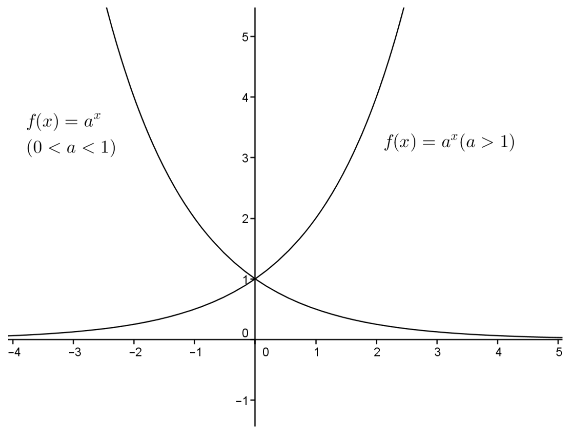
$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Façamos $x = x_0 + h$, logo $h = x - x_0$, daí podemos escrever $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$, e tomando h suficientemente próximo de zero, temos que $a^h = 1$, $|a^h - 1| = 0$, logo $|a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

vi) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x, \quad a \neq 1$ é sobrejetiva.
Todo número real positivo é uma potência de a, ou seja, para todo número real positivo $b \quad (b > 0)$, existe algum x real tal que $a^x = b$.

Figura 1 – Gráfico da função Exponencial



Fonte: Elon et al (2006)

2.2 A Função Exponencial na Base e

O Número e

Atribui-se a John Napier a descoberta[3] do número e. É um número irracional e surge como limite, para valores muito grandes de n, da sequência $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$

Representa-se e por $2,71828182845904523536028 74...$, isto é, um número irracional transcendente, assim como π. A fórmula de Euler, equação (1), relaciona de forma elegante estes dois números irracionais tão famosos.

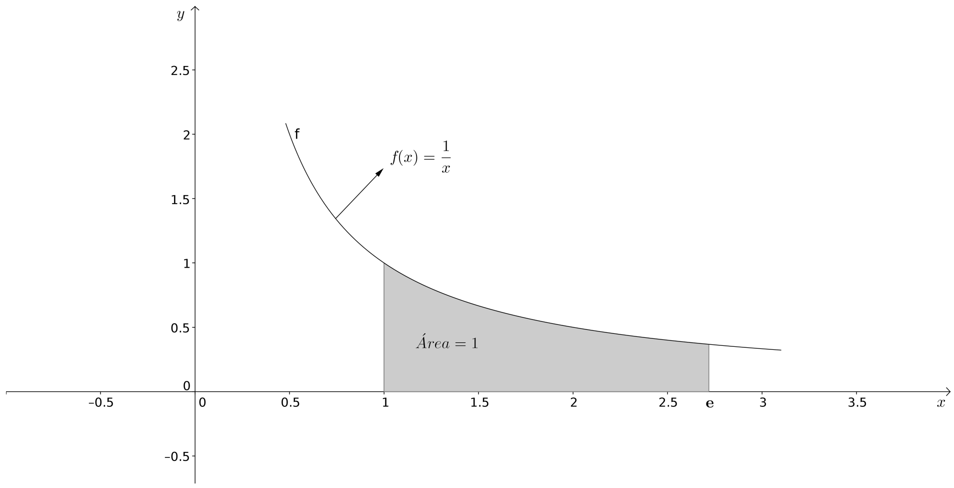
$$e^{ix} = cosx + isenx, \quad \text{fazendo} \quad x = \pi, \quad \text{temos} \quad e^{i\pi} = -1. \tag{1}$$

O símbolo e foi usado por Euler em 1739. No século XVII Leibniz representava-o por b.
A designação deste número e por Euler conserva-se como homenagem a este matemático[4].
O número π (pi) apareceu no cálculo da área e do perímetro do círculo. O número e aparece na

[3] Veja em www.http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/numeroe.htm
[4] Veja em www.http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/numeroe.htm

resolução de equações em que as incógnitas aparecem em expoente. O número e é importante em quase todas as áreas do conhecimento: economia, engenharia, biologia, sociologia, entre várias outras. O e é o único número positivo superior a 1 cuja região indicada, Figura 2, corresponde a uma unidade de área.

Figura 2 – Área sob o gráfico da curva 1/x, de 1 até e.



Fonte: Elon et al (2006)

Teorema 1 *O limite* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *existe e está compreendido entre 2 e 3.*

Demonstração: O teorema decompõe-se em duas partes:

I. O limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ existe.

Provaremos que a sequência $U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é de termos positivos e crescentes. De fato, qualquer que seja n inteiro e positivo, U_n é uma potência de base positiva, portanto, também positiva. Vamos demonstrar que U_n é crescente, desenvolvendo o termo geral segundo a fórmula do binômio de Newton:

$$\begin{aligned} U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots n}.\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}.\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}.\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}.\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n!}.\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{n^n}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}.\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ + \frac{1}{n!}.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Note que:

$U_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-2}{n}\right).$

Observe que o segundo membro da desigualdade é U_{n-1}. Dessa forma, concluímos que $U_{n-1} < U_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, logo a sequência é crescente.

Demonstraremos agora que a sequência é limitada superiormente.
Da igualdade (2), temos que $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$, para todo $n > 1$. Por outro lado, temos:

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Como $n! > 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, então:

$$U_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

ou ainda, podemos perceber que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ é a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, logo:

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Portanto,

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + S_n < 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$

Então, a sequência $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada superiormete; logo, tem limite finito.

II. O limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ está compreendido entre 2 e 3.

De fato, sabemos que $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + \frac{1}{1!} = 2$, portanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

Tem-se então:

$$2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3,$$

como queríamos demonstrar. ■

A função exponencial $x \to e^x$, de base e pode ser definida como

$$f(x) = e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

conforme (LIMA et al., 2006).

2.3 Caracterização da Função Exponencial

Teorema 2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = f(x)^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$;
3. $f(x+y) = f(x).f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.
Para mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, observamos inicialmente que a hipótese (1) nos diz que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com m e $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, tem-se $f(rx) = f(x)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. De fato, sendo $r = \frac{m}{n} \Rightarrow m = nr$, podemos escrever:
$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Fazendo $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $(1) \Rightarrow (2)$, suponhamos que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que $f(x) < a^x$, então existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$, concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que$(1) \Rightarrow (2)$.
Se x é irracional, tem-se:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n = r_n,\ r_n \in \mathbb{Q},$$

logo pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Agora veremos que $(2) \Rightarrow (3)$, de fato, $f(x) = a^x$, então $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$
Para finalizar, vamos provar que $(3) \Rightarrow (1)$, realmente, observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, daí temos que $f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x)\ldots f(x) = [f(x)]^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ ■

2.4 Matrizes

Uma ideia geral de matriz do tipo $m \times n$ é de uma tabela com $m.n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas. Vamos adotar a seguinte definição (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012):

Definição 2.1 *Dados m e n em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos uma matriz real de ordem m por n, ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.*

Tipos especiais de matrizes:

• Matriz Quadrada
Diz-se que uma matriz é quadrada quando tem o mesmo número de linhas e colunas $(m = n)$. No caso das matrizes quadradas $A_{m\times m}$, costumamos dizer que A é uma matriz de ordem m

• Matriz Nula
É aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

• Matriz Diagonal
É uma matriz quadrada de ordem m, onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

• Matriz Identidade
Matriz identidade de ordem n é a matriz diagonal que tem todos os elementos de entrada da diagonal principal iguais a 1, isto é:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

• Matriz Simétrica
É aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$. Em uma matriz simétrica, a parte superior é uma reflexão da parte inferior, em relação a diagonal principal.

Definição 2.2 (A matriz transposta) *Dada uma matriz $A_{m\times n}$, define-se a transposta da matriz A, denotado por $A^t_{n\times m}$, como sendo a matriz cujas linhas são as colunas de A e cujas colunas são as linhas de A.*

Definição 2.3 (Matriz Conjugada) *A matriz conjugada da matriz A, obtém-se substituindo cada elemento de A pelo respectivo complexo conjugado.*

Definição 2.4 ***(Adição)*** *A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, cujos elementos são soma de elementos correspondentes de A e B. Isto é,*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}\,.$$

Definição 2.5 (Multiplicação por Escalar) *Para multiplicarmos um número real k por uma matriz A, fazemos o produto de todos os elementos da matriz, a_{ij}, por k.*
$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um escalar, então

$$k.A = [ka_{ij}]_{m\times n}\,.$$

Definição 2.6 (Multiplicação de Matrizes) *Considere as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. Define-se (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012) o produto de A por B, $AB = [c_{uv}]_{m\times p}$, onde:*

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \ldots + a_{un}b_{nv}.$$

Observações:

i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{l\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando esses produtos.

Definição 2.7 (A matriz inversa) *Uma matriz quadrada A é dita não-singular ou invertível se existe outra matriz B tal que $A.B = I$ e $B.A = I$, onde I é a matriz identidade. Se existe tal matriz B, pode-se mostrar que ela é única, e é chamada de inversa multiplicativa, ou simplesmente, inversa de A, denotada por $B = A^{-1}$. Então,*

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I.$$

Matrizes que não têm inversa são chamadas de singulares ou não invertíveis (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Existem várias maneiras de se calcular A^{-1} a partir de A, quando A é invertível. Uma envolve o uso de determinantes. A cada elemento a_{ij} da matriz A associa-se o menor M_{ij}, que é o determinante da matriz obtida excluindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz original, isto é, a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij}. Além disso, associa-se a cada elemento a_{ij}, o cofator C_{ij}, definido pela equação

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}.$$

Se $B = A^{-1}$, pode-se mostrar que o elemento b_{ij} é dado por

$$b_{ij} = \frac{C_{ij}}{detA}. \tag{4}$$

(BOYCE; DIPRIMA, 2010) Embora a equação (4) não seja um modo eficiente [5] de calcular A^{-1}, ela nos dá uma condição para que A tenha inversa. De fato, a condição é necessária e suficiente: A é invertível se, e somente se, $detA \neq 0$.

Uma outra maneira, geralmente melhor, de calcular A^{-1} é através de operações elementares sobre as linhas. Existem três dessas operações:

1. Permutar duas linhas;
2. Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero;
3. Somar qualquer múltiplo de uma linha a uma outra linha.

A transformação de uma matriz por uma sequência de operações elementares é chamada de redução de linhas ou método de eliminação de Gauss[6].

Qualquer matriz invertível A, pode ser transformada na identidade I, através de uma sequência sistemática de operações. É possível mostrar que, se a mesma sequência de operações for aplicada em I, então I é transformada em A^{-1}. É bastante eficiente fazer a sequência de operações em ambas as matrizes, simultaneamente, formando a matriz aumentada $A|I$.

2.5 Autovalores e Autovetores

A equação $Ax = y$ pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor x em um novo vetor y. Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmos são importantes em muitas aplicações[7]. Para encontrar tais vetores, fazemos $y = \lambda x$,

[5] Para valores grandes de n, o número de multiplicações para se calcular A^{-1} pela eq. (4) é proporcional a $n!$, com a utilização de métodos mais eficientes como a redução por linhas descrito mais adiante, o número de multiplicações fica proporcional a n^3 apenas.

[6] Este método é muito eficiente na resolução de sistemas de equações lineares. Para se ter ideia, resolver um sistema 20x20 usando a conhecida regra de CRAMER usando um computador moderno, levaria centenas de anos, ao passo que usando eliminação Gaussiana leva apenas segundos.

[7] Por exemplo, este problema é encontrado ao se procurar os eixos principais de tensão de um corpo elástico e ao se procurar os modos de vibração livre em um sistema conservativo com um número finito de graus de liberdade

onde λ é um fator escalar de proporcionalidade, e procuramos a solução da equação:

$$Ax = \lambda x, \tag{5}$$

ou ainda,

$$(A - \lambda I)\,x = 0. \tag{6}$$

A última equação tem soluções não nulas se, e somente se, λ for escolhido de forma que

$$det\,(A - \lambda I) = 0. \tag{7}$$

Os valores de λ que satisfazem a equação (8) são chamados de autovalores da matriz A e as soluções não nulas correspondentes das equações (5) e (6), obtidas usando-se um tal valor de λ, são chamadas de autovetores correspondentes, ou associados àquele autovalor(BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Se A é uma matriz 2x2, então da equação (6), temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e da equação (8), obtemos:

$$(a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0.$$

O exemplo a seguir ilustra como encontrar autovalores e autovetores:

Exemplo 2.1 *Encontre os autovalores e os autovetores da matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Os autovalores λ *e os autovetores* x *satisfazem a equação* $(A - \lambda I)\,x = 0$*, ou*

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

que resolvendo encontramos $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 2$.
Para encontrar os autovetores, substituímos os valores de λ *para cada um dos casos. Para* $\lambda = 2$*, temos:*

$$\begin{pmatrix} 3 - 2 & -1 \\ 4 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, cada linha dessa equação leva a $x_1 - x_2 = 0$*, daí temos que* $x_1 = x_2$*, então um autovetor será* $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Agora para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & -1 \\ 4 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos então $4x_1 - x_2 = 0$, ou seja $x_2 = 4x_1$. Logo, outro autovetor será $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3 A EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ

Definição 3.1 *Vamos definir a matriz exponencial de uma matriz $A \in M(n)$, onde $M(n)$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem n por*

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}. \tag{8}$$

Também escrevemos $exp(A) = expA = e^A$.
O conceito está bem definido, pois a série que define a exponencial é absolutamente convergente. Note que no caso $n = 1$, temos $e^a = (e^a)$ e a série de Taylor da exponencial escalar converge. No caso geral, tomando a norma $\|\cdot\|$ de operador $M(n)$, onde $M(n)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\frac{1}{j!}A^j\| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\|A\|^j = e^{\|A\|}, \tag{9}$$

onde usamos a propriedade(CLAUS; LOPES, 2007)

$$\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|. \tag{10}$$

Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ e a, b, números reais ou complexos, arbitrários. Denotamos por I a matriz identidade $n \times n$ e por $\mathbf{0}$ a matriz quadrada nula de mesma ordem. A^* indica a matriz transposta conjugada de A e A^T, que denota a matriz transposta de A.

São válidas as seguintes propriedades da exponencial matricial, cujas demonstrações são encontradas em (CLAUS; LOPES, 2007),(SOTOMAYOR, 1979) ou ainda (FIGUEIREDO; NEVES, 1997).

1. $e^{\mathbf{0}} = I$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz quadrada com todos os elementos iguais a zero.
   Demonstração:
   Pela definição de multiplicação de matrizes, $\mathbf{0}^n = \mathbf{0}$, para $n \geq 1$, logo

$$e^{\mathbf{0}} = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{0}^n}{n!} = I + \mathbf{0} = I \tag{11}$$

■

2. $e^{(a+b)A} = e^{aA}e^{bA}$;
   Demonstração:
   Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, temos pela lei do binômio:

$$\frac{1}{j!}(a+b)^j = \frac{1}{j!}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}a^l b^{j-l} = \sum_{l=0}^{j}\frac{t^l}{l!}\frac{u^{j-l}}{(j-l)!} = \sum_{r+s=j}\frac{a^r}{r!}\frac{b^s}{s!},$$

portanto,

$$\frac{1}{j!}(aA+bA)^j = \frac{1}{j!}(a+b)^j A^j = \left[\frac{a^r}{r!}\frac{b^s}{s!}\right] A^j = \frac{a^r}{r!}A^j\frac{b^s}{s!}A^s.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}(aA+bA)^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{r+s=j}\frac{1}{r!}a^rA^r\frac{1}{s!}b^sA^s = \left(\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}(aA)^r\right)\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}(bA)^s\right).$$

Passando o limite com $n \to \infty$, resulta $e^{aA+bA} = e^{aA}.e^{bA}$ ■

3. Se $AB = BA$, então $e^Ae^B = e^{A+B}$;
Demonstração: Como A e B comutam,

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 = \sum_{n=0}^{2}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k. \tag{12}$$

De acordo com a equação (8), temos, para quaisquer A e B:

$$e^A.e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^{n-k}B^k}{(n-k)!k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{A^{n-k}B^k}{(n-k)!k!}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A^{n-k}B^k}{n!}, \tag{13}$$

por outro lado,

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!}, \tag{14}$$

podemos igualar (17) com (13), pois por hipótese (12) é válida, ou seja, A e B comutam. ■

4. $e^Ae^{-A} = I$;
Demonstração:
Como A e $-A$ comutam, pela propriedade anterior, temos que $e^A.e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{\mathbf{0}} = I$. ■

5. Se B é uma matriz invertível, então $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$;
Demonstração:
Isso decorre do fato que $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$, logo $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$; ■

6. $Det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$, onde $det(e^A)$ é o determinante de e^A e tr(A) é o traço da matriz A;
Demonstração:
$e^A = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$, então, $det(e^A) = e^{\lambda_1}.e^{\lambda_2}.e_3^{\lambda_1}\ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots\lambda_n} = e^{trA}$. ■

7. $e^{(A^T)} = (e^A)^T$. Disso segue que se A é uma matriz simétrica, e^A também é simétrica;
Demonstração:
Seja $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$, por outro lado temos que $A^T = A$, ou seja, A é simétrica, desta forma $e^{(A^T)} = e^A = (e^A)^T$. ■

Exemplo 3.1 *É imediato, a partir da definição de exponencial, que* $e^{\mathbf{0}} = I$*, a matriz identidade de* $M(n)$*, onde* $M(n)$ *é o conjunto das matrizes quadradas de ordem* n*. Mais geralmente podemos calcular a exponencial de uma matriz diagonal*

$$D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

pois podemos constatar que

$$D^j = diag\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots \lambda_n^j\right),$$

vale para cada $j \in \mathbb{N}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} diag\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots \lambda_n^j\right) \\ &= diag\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_2^j, \dots \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_n^j\right) \\ &= diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}\right). \end{aligned}$$

Em particular, temos $e^0 = I$ *e* $e^I = diag\,(e, e, \dots e) = eI$*.*

Exemplo 3.2 *Para obter a exponencial da matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$*, observe que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e que portanto, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^j = 0 \in M(2)$*, para cada* $j \geq 2$*, de modo que*

$$exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais geralmente, podemos calcular a exponencial de qualquer matriz desse tipo "subdiagonal"como, por exemplo,

Exemplo 3.3

$$G_c(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \end{pmatrix} \in M(l),$$

já que essas matrizes são nilpotentes, ou seja, vale $G_c(l)^l = 0$ *como por exemplo, observe que*

$$G_c(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_c(4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_c(4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_c(4)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos calcular imediatamente pela definição,

$$\begin{aligned} e^{G_c(4)} &= I + G_c(4) + \frac{1}{2}G_c(4)^2 + \frac{1}{3!}G_c(4)^3 + \frac{1}{4!}G_c(4)^4 + \dots \\ &= I + G_c(4) + \frac{1}{2}G_c(4)^2 + \frac{1}{3!}G_c(4)^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & \frac{c}{1!} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Em geral, obtemos

$$e^{G_c(l)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!} & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!} & \dots & c & 1 \end{pmatrix} \in M(l),$$

como podemos verificar.

Exemplo 3.4 *Para obter a exponencial da matriz* $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, *observe que*

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{pmatrix},$$

donde podemos concluir (por indução) que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j} = (-1)^j \begin{pmatrix} b^{2j} & 0 \\ 0 & b^{2j} \end{pmatrix}$$

para potências pares e

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & b^{2j+1} \\ -b^{2j+1} & 0 \end{pmatrix}$$

para potências ímpares. Lembrando das séries de Taylor

$$\begin{aligned} cos b =& 1 + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}b^{2j} \\ sen b =& b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}b^{2j+1}, \end{aligned}$$

resulta
$$exp\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$$
como podemos verificar.

Teorema 3 *Se $A, B, Q \in M(n)$ são tais que $AQ = QB$, então $e^AQ = Qe^B$. Em particular, se as matrizes AeB de $M(n)$ são conjugadas, então também as matrizes e^Aee^B são conjugadas e, além disso, podemos usar a mesma matriz de conjugação; ou seja, se $Q \in M(n)$ é invertível e $A = QBQ^{-1}$, então*
$$e^A = e^{QBQ^{-1}} = Qe^BQ^{-1}. \tag{15}$$

Demonstração: Como $AQ = BQ$, segue $A^2Q = AAQ = AQB = QBB = QB^2$ e por indução, $A^jQ = QB^j$, para $j \in \mathbb{N}$. Assim,
$$e^AQ = \left(\lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}A^j\right)Q = \lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}A^jQ$$
$$= \lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}QB^j = Q\left(\lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}B^j\right) = Qe^B,$$
provando assim o teorema. ■

Teorema 4 *Se x é um escalar, então:*
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
E partindo deste raciocínio definiremos a exponencial de uma matriz por:
$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} \qquad com \quad A^{\mathbf{0}} = I.$$

Se A é diagonalizável, então $A = S.D.S^{-1}$, sendo D a matriz diagonal formada pelos autovalores de A e S a matriz dos autovetores. Neste caso,
$$e^A = e^{S.D.S^{-1}} = S.e^D.S^{-1}.$$

Demonstração:
$$\left(S.D.S^{-1}\right)^k = \overbrace{\left(S.D.S^{-1}\right)\times\ldots\times\left(S.D.S^{-1}\right)}^{k-vezes}$$
logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, as somas parciais
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(S.D.S^{-1}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{S.D^k.S^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\left(S\frac{D^k}{k!}.S^{-1}\right) = S.\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k}{k!}\right).S^{-1},$$
portanto
$$e^{S.D.S^{-1}} = \lim_{n\to\infty}S_n = \left(S.\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k}{k!}.S^{-1}\right) = S.\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k}{k!}\right).S^{-1} = S.e^D.S^{-1}.$$
■

Exemplo 3.5 *Se A é uma matriz diagonalizável de ordem 2, com autovalores λ_1, λ_2 e autovetores associados x_1, x_2, teremos:*

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

$$e^A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Exemplo 3.6 *Vamos calcular uma exponencial matricial.*

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Vamos calcular e^A

Calculando os autovalores de A, temos:

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(-\lambda) = 0$

Logo, $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 = 2$

A matriz D fica:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovetores v_1 e v_2 através da equação $Av = \lambda v$ temos $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (1, 0)$

Daí temos as matrizes S, formada pelos autovetores v_1 e v_2 e a inversa de S, S^{-1}:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Como, $e^A = S.e^D.S^{-1}$, *então,*

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Efetuando os produtos,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & \frac{e^2-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 APLICAÇÃO DA EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ

Uma das técnicas matemáticas eficientes na resolução de equação diferencial consiste no cálculo da matriz e^{At} onde A é uma matriz de ordem n. Apresentaremos aqui o método de Silvestre de se calcular a matriz e^{At}.

Exemplo 4.1 *Seja A a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcule a matriz e^{At}.
Nós vamos calcular as matrizes $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade de ordem 3 e λ é real ou complexo. Depois vamos procurar todos os valores de λ que resolvem a equação $det\,(A - \lambda I) = 0$. Encontraremos três valores reais: λ_1 , λ_2 e λ_3, que são aqui denominados de autovalores de A. Estes autovalores determinam em $\mathbb{R}^3$, v_{λ_1}, v_{λ_2} e v_{λ_3}, que aqui vamos denominá-los autovetores. Finalmente calcularemos Z_k para $k = 1,\ 2,\ e\ 3$.

$$Z_k = \prod_{j=1}^{3} (\lambda_k - \lambda_j)^{-1} (A - \lambda_j I)\,,\ onde\ \ j \neq k. \tag{16}$$

É importante assinalar que o método de Sivestre somente pode ser aplicado quando os autovalores de A forem dois a dois distintos que nos dará a desejada matriz e^{At} dada por

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{3} Z_k e^{\lambda_k}. \tag{17}$$

Cálculo dos autovalores de A

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Vemos que o determinante da matriz (18) é dado por

$$det\,(A - \lambda I) = (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(3-\lambda)\,.$$

As raízes do polinômio $det\,(A - \lambda I)$, ou seja, as soluções de $det\,(A - \lambda I = 0)$ são dadas por $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2\ e\ \lambda_3 = 3$.

Cálculo dos autovetores de A

Agora devemos encontrar vetores ou elementos $v_i = (a_i,\ b_i,\ c_i)$ de $\mathbb{R}^3$ não nulos, tais que $(A - \lambda I)\,(v_i) = 0$ para $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

(i) Vamos calcular v_1. Seja $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ um vetor não nulo qualquer de $\mathbb{R}^3$, tal que $(A - \lambda I)\,(\overrightarrow{u}) = 0$. Em notação matricial teremos

$$(A - \lambda I)\,(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Veja que em (19) ao substituir o valor de λ_1 por 1, que é o autovalor dele, teremos um Sistema Linear Homogêneo $D\overrightarrow{u} = 0$ cujo determinante da matriz D é nulo. Como este Sistema Linear Homogêneo tem solução (é possível), há duas e somente duas alternativas a serem consideradas.

(a) O sistema linear (19) tem uma única solução (a solução nula);

(b) O sistema linear (19) tem mais que uma solução.

Substituindo λ_1 em (19) teremos

$$(A - \lambda I)\,(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Resolvemos o sistema linear (20) e encontramos o conjunto solução

$S_1 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$*, tais que* $z = 0$ *e* $x = -y\}$ *ou* $S_1 = \{x\,(1, -1, 0)\ tais\,que\,x \in \mathbb{R}\}$.

Veja que na segunda apresentação do conjunto S acima, fica determinado um vetor que denotaremos por v_1, que é dado por $v_1 = (1, -1, 0)$. Esse é o autovetor de A que está associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Em seguida, vamos repetir este procedimento e determinar os Autovetores v_2 e v_3 que estão associados aos autovalores $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$, respectivamente. Por este motivo, alguns passos serão omitidos.

(ii) Substituindo o autovalor $\lambda_2 = 2$ em (19) teremos

$$(A - \lambda 2I)\,(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Resolvendo o sistema linear (21), encontramos o conjunto solução que é dado por

$S_2 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$*, tais que* $x = -2y$ *e* $z = 2y\}$ *ou* $S_2 = \{x\,(-2, 1, 2)\ tais\,que\,x \in \mathbb{R}\}$.

Na segunda apresentação do conjunto S_2 acima, fica determinado o Autovetor de A que está associado ao Autovalor $\lambda_2 = 2$ e que $v_2 = (-2, 1, 2)$.

(iii) Substituindo o autovalor $\lambda_2 = 2$ em (19) teremos

$$(A - \lambda 3I)\,(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Resolvendo o sistema linear (22) e encontramos o conjunto solução que é dado por

$S_3 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$*, tais que*$x = -y$ *e* $z = 2y\}$ *ou* $S_2 = \{y\,(-1, 1, 2)\ tais\,que\,y \in \mathbb{R}\}$.

Na segunda apresentação do conjunto S_3 acima, fica determinado o Autovetor de A que está associado ao Autovalor $\lambda_3 = 3$ e que $v_3 = (-1, 1, 2)$.

Cálculo de $Z_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$

As matrizes $(A - \lambda_1 I)\,, (A - \lambda_2 I)\,, (A - \lambda_3 I)$ estão dadas em (20), (21) e (22) respectivamente.

(a) *Veja que* $Z_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(A - \lambda_2 I)(\lambda_1 - \lambda_3)^{-1}(A - \lambda_3 I)$*. Os valores* $(\lambda_1 - \lambda_2) = -1$ *e* $(\lambda_1 - \lambda_3) = -2$*. Então,*

$$Z_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(A - \lambda_2 I)(\lambda_1 - \lambda_3)^{-1}(A - \lambda_3 I),$$

Ou seja,

$$Z_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *Veja que* $Z_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(A - \lambda_1 I)(\lambda_2 - \lambda_3)^{-1}(A - \lambda_3 I)$*. Os valores* $(\lambda_2 - \lambda_1) = 1$ *e* $(\lambda_2 - \lambda_3) = -1$*. Então,*

$$Z_2 = (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) *Veja que* $Z_3 = (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1}(A - \lambda_1 I)(\lambda_3 - \lambda_2)^{-1}(A - \lambda_2 I)$*. Os valores* $(\lambda_3 - \lambda_1) = 2$ *e* $(\lambda_3 - \lambda_2) = 1$*. Então,*

$$Z_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Agora podemos usar (17) *para calcular a matriz* e^{At}*, que é dada por*

$$e^{At} = e^t Z_1 + e^{2t} Z_2 + e^{3t} Z_3 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^t + 2e^{2t} - e3t & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & e^t - e^{2t} + e^{3t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -2e^{2t} + 2e^{3t} & -2e^{2t} + 2e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

5 APLICAÇÃO DA EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ NA FÍSICA

5.1 O problema do oscilador harmônico amortecido forçado

Vamos tratar aqui de um exemplo conhecido da Mecânica Clássica. Trata-se do problema do oscilador harmônico amortecido forçado [8]. Este sistema é descrito pela equação diferencial linear de segunda ordem

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma\dot{x}(t) + f(t) \tag{23}$$

que é a segunda lei de Newton para uma partícula de massa m ligada a uma mola com constante de elasticidade k e se movendo em um meio (viscoso) que exerce sobre a partícula uma força do tipo $-\gamma v(t)$, onde $v(t)$ é a velocidade da partícula no tempo t. Além disso, age sobre a partícula uma força externa $f(t)$ que depende apenas do tempo.
Nos dados acima, temos que $m > 0, k \geq 0$ e $\gamma \geq 0$.
Dividindo a equação (23) por m, podemos escrevê-la como

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 - \rho\dot{x}(t) + g(t), \tag{24}$$

[8] Não é pretensão deduzirmos a equação deste sistema.

em que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \rho = \frac{\gamma}{m} \quad e \quad g(t) = \frac{f(t)}{m}.$$

A equação (24) pode ser transformada em um sistema de duas equações de primeira ordem. Fazendo $v(t) = \dot{x}(t)$, temos:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega_0^2 - \rho v(t) + g(t) \end{cases}$$

Na forma matricial temos o seguinte:

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t), \tag{25}$$

em que

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\rho \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz A tem coeficientes constantes. Sabemos que a solução desta equação, com uma condição inicial que fixa a posição e a velocidade da partícula em $t = 0$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}.F(s)ds. \tag{26}$$

Precisamos calcular e^{At} para a matriz A da equação (26).
Calculando os autovalores de A, encontramos:

$$\lambda_1 = \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2},$$

e os autovetores associados são

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2} \neq 0$, ou seja, $\rho \neq 2\omega_0$, a matriz A tem autovalores distintos e é, portanto, diagonalizável. Porém, se $\rho = 2\omega_0$, tem-se $v_1 = v_2$ e a matriz A não é diagonalizável.
Vamos tratar os dois casos separadamente.

Caso $\rho \neq 2\omega_0$
A é diagonalizável, ou seja,

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \end{pmatrix},$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} & \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando a inversa, temos:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} & \frac{-\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} \\ \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} & \frac{\rho+\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}} \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$e^{At} = P.e^{Dt}.P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-4\omega_0^2}}\begin{pmatrix} -\lambda_2 e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t} \\ \omega_0^2\left(-e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t}\right) & \lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Suponha que $\rho < 2\omega_0$ e defina $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{4}}$. Assim, a solução do problema é dada pela equação (26), substituindo e^{At} pela matriz encontrada acima. Desta forma, $x(t)$ será

$$x(t) = e^{\frac{-\rho t}{2}}\left(x_0 cos(\omega_1 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_1} sen(\omega_1 t)\right) + \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t e^{\rho\left(\frac{t-s}{2}\right)} sen\left[\omega_1(t-s)\right] f(s)ds.$$

Agora suponha $\rho > 2\omega_0$ e defina $\omega_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}$. Assim, a solução do problema é dada pela equação (26), substituindo e^{At}, como fizemos anteriormente. Desta maneira, obtém-se:

$$x(t) = e^{\frac{-\rho t}{2}}\left(x_0 cosh(\omega_2 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_2} senh(\omega_2 t)\right) + \frac{1}{m\omega_2}\int_0^t e^{\rho\left(\frac{t-s}{2}\right)} senh\left[\omega_2(t-s)\right] f(s)ds.$$

De maneira análoga, podemos encontrar uma expressão para $v(t) = \dot{x}(t)$.

Caso $\rho = 2\omega_0 > 0$
Neste caso, a matriz fica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\rho^2}{4} & -\rho \end{pmatrix},$$

e como dissemos anteriormente, A possui um autovalor de multiplicidade 2, $\lambda = -\frac{\rho}{2}$. Decompondo A na sua forma de Jordan, $J = P^{-1}AP$, temos:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\rho}{2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2} & 1 \\ -\frac{\rho}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\rho^2} \\ 1 & \frac{2}{\rho} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Fazendo $J = D + N$, onde

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{2} \end{pmatrix} \quad e \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

note que D e N comutam e ainda $N^2 = 0$. Assim,

$$e^{At} = Pe^{(D+N)t}P^{-1} = Pe^{Dt}e^{Nt}P^{-1},$$

sendo que

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{\rho t}{2}\right)e^{-\frac{\rho t}{2}} & te^{-\frac{\rho t}{2}} \\ -\frac{\rho^2 t}{4}e^{-\frac{\rho t}{2}} & \left(1-\frac{\rho t}{2}\right)e^{-\frac{\rho t}{2}} \end{pmatrix}.$$

Substituindo e^{At} da equação (26) pela matriz acima, obtém-se:

$$e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(\left(1+\frac{\rho t}{2}\right)x_0 + tv_0\right) + \frac{1}{m}\int_0^t (t-s)e^{-\frac{\rho(t-s)}{2}} f(s)ds.$$

Da mesma forma, pode-se obter $v(t)$.

Caso $\rho = 0$

Vamos analisar agora o caso em que não há termo de amortecimento $-\gamma v(t)$ na equação de movimento da partícula, ou seja, $\rho = 0$. Nesse caso,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que os autovalores de A são $\lambda_1 = \omega_0 i$ e $\lambda_2 = -\omega_0 i$, logo, A é diagonalizável e

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \omega_0 i & 0 \\ 0 & -\omega_0 i \end{pmatrix},$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 i \\ -1 & \omega_0 i \end{pmatrix}.$$

Calculando P^{-1}, temos:

$$P^{-1} = \frac{1}{2\omega_0 i}\begin{pmatrix} \omega_0 i & 1 \\ -\omega_0 i & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0}sen(\omega_0 t) \\ -\omega_0 sen(\omega_0 t) & cos(\omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Agora, como nos outros casos, usando a equação (26), obtém-se

$$x(t) = \left(x_0 cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} sen(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{m}\int_0^t sen\left[\omega_0(t-s)\right] f(s)ds$$

e

$$v(t) = -\left(x_0 sen(\omega_0 t) + v_0 cos(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{m}\int_0^t cos\left[\omega_0(t-s)\right] f(s)ds.$$

Caso $k = 0$ e $\gamma = 0$

Agora vamos analisar o caso em que a partícula é submetida apenas à força externa dependente do tempo.

Usando a notação anterior,

$$\ddot{x}(t) = g(t),$$

ou seja,

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz A é nilpotente com $A^2 = 0$. Logo,

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix}.$$

Assim, obtém-se

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t (t-s) f(s) ds.$$

e

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(s) ds$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação deste trabalho se deve à oportunidade de trabalhar a função exponencial com expoentes matriciais, fato pouco visto durante a vida acadêmica e de aspectos fundamentais para a resolução das equações diferenciais, que por sua vez modelam vários fenômenos da física, da economia, da estatística, entre outros. Outro fator motivador se deve ao fato de que o estudo das exponenciais matriciais faz com que abordemos vários assuntos da matemática importantíssimos como: funções, matrizes, as potências de expoentes reais além do interessante número e que está presente em vários fenômenos da natureza. Outro aspecto que despertou o meu interesse foi o fato dessa parte da matemática ser muito rica em conceitos e em variedades de aplicações, além da forte presença da álgebra linear e suas propriedades e aplicações.
Como tínhamos a finalidade de aproximar o máximo possível esta matéria dos conteúdos do ensino médio, alguns conceitos foram omitidos, ficando, assim, aberto para trabalhos futuros, visando, especificamente, ao ensino superior.
Esperamos que este trabalho sirva de motivação para professores do ensino médio, ou graduandos que se interessem e que queiram se aprofundar mais no assunto.

7 AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a DEUS, pois sem Ele nada disso seria possível.
À minha esposa Cleide, que nos momentos mais difíceis sempre esteve ao meu lado.
Aos meus filhos, William e Wallace, que são minha fonte de inspiração.
Aos meus pais Edson e Maria (in memorian), pois, se estou aqui hoje, é graças a eles.
Aos meus irmãos, Edson Lepletier e Elizabeth Lepletier que sempre acreditaram em mim.
Ao amigo João Lopes que foi o primeiro a me incentivar na carreira de professor
Aos meus amigos Luiz Carlos, Andréia, Marcelo Ribeiro e Ely Ribeiro pelas palavras de força sempre ditas na hora certa.
Aos meus companheiros de mestrado, que me ajudaram a superar as dificuldades.
Aos professores da UFRR, pelos conhecimentos transmitidos, em especial, ao professor Joselito, que sempre esteve ao nosso lado e ao professor Lindeval, pela sua paciência na orientação do TCC.
À Universidade Federal de Roraima(UFRR) e à Sociedade Brasileira de Matemática(SBM) pela

oportunidade. E por fim, à CAPES, que com o auxílio da bolsa viabilizou uma estabilidade financeira para que fosse possível dedicar um maior tempo aos estudos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010.

CLAUS, I. D.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - SBM, 2007.

FIGUEIREDO, D. G. D.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - SBM, 1997.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. de S. *Introdução à Álgebra Linear*. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - SBM, 2012.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio - volume 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - SBM, 2006.

SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. 1. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1979.