

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ângelo Sabbatino Silva

*Construções de polígonos regulares em Origami e com régua  
e compasso*

Rio de Janeiro

2013

Ângelo Sabbatino Silva

*Construções de polígonos regulares em Origami e com régua  
e compasso*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-  
MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção  
do grau de MESTRE em Matemática.

**Orientador: Adriano Maurício de Almeida Côrtes**

**Doutor em Engenharia Civil - UFRJ**

Rio de Janeiro

2013

Sabbatino, Ângelo

Construções de polígonos regulares em Origami e com régua e compasso / Ângelo Sabbatino - 2013

67.p

1.Matematica 2.Geometria Euclidiana 3. Origami. I.Título.

CDU 536.21

Ângelo Sabbatino Silva

*Construções de polígonos regulares em Origami e com régua  
e compasso*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-  
MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção  
do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 04 de outubro de 2013

**BANCA EXAMINADORA**

---

Adriano Maurício de Almeida Côrtes

Doutor em Engenharia Civil - UFRJ

---

Leonardo Tadeu Silvaes Martins

Doutor em Matemática - UFF

---

Montauban Moreira de Oliveira Júnior

Mestre em Matemática - UFRJ

*Dedico esta obra a Mariângela Sabbatino Silva,  
minha mãe.*

## Resumo

A construção de polígonos regulares utilizando régua e compasso é motivo de estudo de matemáticos desde Euclides até meados do século XIX.

Neste trabalho de conclusão de curso, utilizamos o origami para resolver o problema da construtibilidade de polígonos. Além disso, também é mostrado que esta arte milenar é capaz de resolver equações cúbicas, as quais nos permitem construir um número maior de polígonos regulares.

## **Abstract**

The construction of regular polygons using ruler and compass has inspired mathematicians since Euclid until the mid-19th century.

In this final project, we solve the problem of constructibility of polygons using origami. In addition, it is also shown that this ancient art is capable of solving cubic equations, which allows us to build a larger number of regular polygons.

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por estar presente em cada passo da minha vida. Minha família querida, em especial minha esposa Gisele, que compreendeu minha ausência nestes dois últimos anos. Meus pais Mariângela e Paulo, pelo amor e carinho de sempre. Minha querida, adorável e carinhosa irmã Bárbara; hoje sou o que sou graças a vocês.

Agradeço a todos os professores do Mestrado por terem me instruído e colaborado para o meu crescimento pessoal e profissional. Especialmente os professores Gladson Octaviano Antunes e Adriano Maurício de Almeida Côrtes por acreditarem em mim. A todos os colegas de curso que me ajudaram em todos os momentos; enriqueci-me muito nas sextas-feiras em que estivemos juntos.

Por fim, agradeço aos amigos Bruno Amaro Freitas e Dr. Márcio Henrique Andrade por terem me ajudado em vários momentos na elaboração deste trabalho e, ao amigo Albino Ribeiro por ter feito minha inscrição no concurso do ProfMat, acreditando na minha capacidade de voltar a estudar.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Origami - a arte da dobradura . . . . .	7
1.2	A geometria das dobraduras . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Axiomas do origami e sua relação com a Geometria Euclidiana</b>	<b>10</b>
2.1	Axiomatização . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Construções de Polígonos Regulares</b>	<b>26</b>
3.1	Tipos de dobraduras . . . . .	26
3.2	Construções do triângulo equilátero . . . . .	26
3.3	Construções do quadrado . . . . .	29
3.4	Construções do pentágono regular . . . . .	32
3.5	Construções do hexágono regular . . . . .	37
3.6	Construções do octógono regular . . . . .	42
3.7	Polígonos construtíveis . . . . .	45
3.8	Construções do heptágono regular . . . . .	47
3.8.1	Construção do heptágono regular por dobraduras . . . . .	48
3.8.2	Demonstrando a construção do heptágono regular . . . . .	57
3.8.3	Entendendo a cúbica originária do heptágono regular . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

# 1 Introdução

Origami é “a arte japonesa de dobrar papel em forma decorativa” (Aurélio, 2011, p.550). No ano de 1989, Humiaki Huzita[2] exibiu no *First Internation Meeting of origami Science and Technology* [3] um conjunto de seis axiomas definindo assim o que seria possível construir com uma única dobradura. Em 2002, Koshiro Hatori[4] descreveu uma nova dobradura que não era possível de se obter a partir das demais, dando origem a um sétimo axioma. A lista de sete axiomas passou a ser conhecida como os axiomas de Huzita-Hatori, os quais passaram a determinar o que é possível construir com uma única dobradura.

Nas próximas seções desse capítulo faremos uma breve introdução histórica do origami como arte, para em seguida passarmos ao origami matemático, isto é, o origami visto como teoria matemática, estabelecendo uma relação matemática com a arte das dobraduras de papel.

No capítulo 2, faremos a relação dos axiomas do origami com as construções com régua e compasso. Para isso, ao descrever os axiomas do origami, tentaremos ao máximo, quando possível, estabelecer um paralelo com os axiomas e construções da geometria euclidiana. Na sequência, ressaltaremos a importância do axioma 6. Observaremos que ele não possui paralelo com os axiomas de Euclides, visto que ele possibilita construções geométricas que não são possíveis usando os instrumentos euclidianos. Mostraremos que o cerne da questão reside no fato que o axioma 6 permite a resolução de equações cúbicas.

No texto de “Os Elementos”, Euclides (330-275 a.c.) faz uma discussão sistemática sobre a geometria e afirma aquilo que alguns matemáticos anteriores a ele já haviam citado, porém ele foi o primeiro a demonstrar que essas proposições poderiam ser reunidas, e juntas formariam um abrangente sistema dedutivo. Na sua obra, ele legou para a humanidade a possibilidade de construção com régua não graduada e compasso de de polígonos regulares com  $n$  lados, para  $n = 3,4,5,6,8,10$  e 15. De sua obra que chegou até nós, ele não faz menção sobre a contrutibilidade dos outros polígonos regulares.

Segundo Eduardo Wagner [1], havia uma especulação sobre a possibilidade

de construção de outros polígonos regulares, como o heptágono e o eneágono, com os instrumentos euclidianos (régua não graduada e compasso). O problema foi resolvido por Gauss que, em 1796, descreveu quais polígonos regulares são construtíveis com régua não-graduada e compasso, conforme veremos na seção **3.7**.

No capítulo 3, mostraremos algumas construções de polígonos regulares com origami e suas equivalentes usando os instrumentos euclidianos. Além disso, vamos estabelecer a relação de quais polígonos regulares são construtíveis em ambas as teorias. Veremos então que a arte do origami nos possibilita a construção de polígonos que não são construtíveis com os instrumentos euclidianos.

Por fim, passaremos às considerações finais do trabalho. Nesse trabalho observaremos a matemática na sua forma mais pura, percebendo porque ela é chamada de mãe de todas as ciências. Veremos a arte se transformando em matemática e ajudando a resolver problemas que os matemáticos demoraram mais de 2000 anos para solucionar.

## 1.1 Origami - a arte da dobradura

Não é possível afirmar com certeza a origem do origami; alguns afirmam que é originado da China, outros afirmam que o primeiro país que trabalhou com esta arte foi o Japão. Sabe-se, com clareza, que o papel foi inventado na China no século II e que logo esta invenção foi expandida para o mundo todo, como descreveu Lang[5] (tradução própria) : *“A arte da fabricação do papel foi desenvolvida na China, e a partir disto viajou o resto do mundo. Monges Budistas levaram o papel para o Japão, no século VI D.C. e os primeiros origamis japoneses encontrados datam deste período”*.

Inicialmente, o origami era utilizado apenas em ocasiões cerimoniais, pois, apesar da difusão do papel em todo território japonês, o mesmo possuía um preço elevado, acarretando em preços elevados também do origami, fazendo assim com que muitas pessoas não pudessem desenvolver a técnica do origami, cabendo esta função apenas para pessoas especialista e que utilizavam técnicas bastante aprimoradas. Cogita-se que os primeiros origamis tenham sido objetos decorativos em cerimônias religiosas, pois a palavra kami possui dois significados distintos: papel e deus, apesar de existir dois ideogramas<sup>1</sup> diferentes.

---

<sup>1</sup>É um símbolo gráfico utilizado para representar palavras da escrita japonesa.

Com o passar do tempo e o fácil acesso ao papel, resultou que a técnica do origami foi expandida para outros países e, sendo assim, foi sendo aperfeiçoada cada vez mais. Atualmente existem origamis (que a partir de agora serão denominados também por modelos) de fácil confecção, com duas a três dobraduras, como também existem modelos que levam horas para serem feitos. Sobre estes feitos, Lang[6] (p. 3) afirma:

*“A maioria dos milhares de modelos possui algo em comum: foram criados nos últimos 50 anos. Com isto podemos dizer que o origami é uma arte nova e velha ao mesmo tempo. Até 5 anos atrás, todos os diferentes tipos de origamis poderiam ser catalogados em uma única folha de papel e nenhum com mais do que 30 etapas de dobraduras. Contudo, hoje em jornais, livros, podemos encontrar modelos com centenas de etapas e com uma grande quantidade de tempo gasto para sua confecção.”*

Muito do charme do origami é pelo fato de ser uma arte simples em sua matéria prima; necessita-se apenas de uma folha de papel, de preferência quadrada, a qual será transformada em um objeto utilizando-se apenas de dobraduras. Vale ressaltar que quando existe a necessidade de se cortar ou incluir algum outro pedaço de papel, para compor o modelo que será formado, a técnica utilizada denomina-se kirigami<sup>2</sup>.

Segundo Mari Kanegae[7], o origami tem uma importância muito grande na cultura japonesa. Como exemplo, temos a lenda milenar do pássaro Tsuru (Grou - figura 1.1 ). Diz-se que ao confeccionar 1000 origamis do Tsuru com um pensamento voltado para aquilo que deseja, ele poderá se realizar. Baseado nisto, milhares de crianças do Japão e do mundo todo, enviam Tsurus para o Parque da Paz de Hiroshima, no dia 06 de agosto, desejando a Paz Mundial.

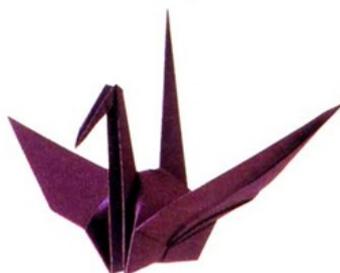


Figura 1.1: Tsuru (Grou) – fonte: [http://www.kamiarte.com.br/simbologia\\_grou.htm](http://www.kamiarte.com.br/simbologia_grou.htm)

---

<sup>2</sup>Kiri significa cortar e gami significa papel.

## 1.2 A geometria das dobraduras

Ao ser feita uma dobradura, podemos observar que a pessoa que a faz utiliza-se do conhecimento, implícito ou não, de vários elementos da geometria. Conseqüentemente, ao fazer uma análise mais profunda perante os modelos conseguimos extrair conceitos básicos relativos aos ângulos, planos, vértices, paralelismo, semelhança de figuras; focando-se apenas na geometria. Contudo também podemos perceber conceitos aritméticos de frações e até conceitos algébricos.

Logo, podemos notar que o trabalho com origami é de uma valia enorme, sendo ele muito enriquecedor e com argumentos suficientes para que possamos introduzir e motivar vários conceitos, e até mesmo teoremas da geometria. Com isto, a dobradura pode ser utilizada como um instrumento para a exploração das propriedades geométricas de figuras planas e também de figuras espaciais. Podemos notar isto nas palavras de Grazielle Rancan[8] (p.18): *“As atividades com dobraduras manuais possuem uma dinâmica que valoriza a descoberta, a conceituação, a construção manipulativa, a visualização e a representação geométrica.”*

Um trabalho em sala de aula, com a utilização de origamis, torna-se mais atrativo para o aluno, por ser algo mais lúdico e no qual o mesmo já está acostumado a trabalhar, principalmente quando constrói um barquinho, um aviãozinho, um chapéu, utilizando dobraduras. Esta técnica pode ser utilizada para que o aluno aprenda e compreenda conteúdos considerados de difíceis entendimentos e abstratos. De fato, Rêgo e Gaudêncio[9] já mencionavam isto: *“O origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio de observação do mundo, de objetos e formas que o cercam.”*

## 2 Axiomas do origami e sua relação com a Geometria Euclidiana

A utilização de origamis na matemática depende da compreensão de seus axiomas relacionados à geometria conceitual grega (uso de régua e compasso). Como afirma Robert Lang [10] (tradução própria): *“Origami matemático é o subconjunto de matemática que descreve as leis básicas de origami. Como parte da matemática, é parte de uma profunda e consistente (ainda que incompleta) estrutura lógica, mas sua aplicabilidade para origami no mundo real tem seus limites. Origami matemático é sempre, no máximo, uma aproximação da dobradura do mundo real. E o que se pode construir, dobrar, ou calcular, usando as operações de origami, depende, de forma crítica, em que se assume como os axiomas subjacentes, regras ou operações (dependendo em sua escolha de terminologia).”*

Conforme já mencionado, em 1989 no *First Internation Meeting of origami Science and Technology*, Huzita [2] descreveu 6 axiomas que determinavam o que era possível ser construído com uma dobradura. Eles forneceram a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com o origami. Mais tarde, no entanto, em 2002, quando Koshiro Hatori [4] apresentou uma dobradura que não era descrita pelos axiomas de Huzita, surgiu formalmente um sétimo axioma. Os sete axiomas então, tornaram-se conhecidos por axiomas de Huzita-Hatori. Porém, o físico e origamista americano Robert Lang, que muito contribui para a teoria do origami, em sua página [10], menciona que nos anais da mesma conferência, em 1989, o matemático francês Jacques Justin [11] já havia enumerado os sete axiomas, e portanto restabelece o crédito das descobertas a Justin, passando a chamá-los de axiomas de Huzita-Justin.

Com efeito, em Lang [10] podemos ler (tradução própria):

*“Um dos conjuntos mais simples de operações que se pode escolher é o conjunto de axiomas de Huzita-Justin (AHJ) - um conjunto de seis (ou sete) operações básicas que são os equivalentes com origami das construções com régua e compasso da geometria elementar. A análise deles nos leva à interessante matemática da teoria dos corpos numéricos com toques na teoria de Galois. Enquanto essa exploração pode parecer um*

*exercício puramente acadêmico, os AHJs fornecem uma ferramenta muito real e prática para o projeto origami: eles são a base da minha ferramenta (o programa de computador ReferenceFinder) para encontrar pontos de referência do origami.”*

A completude da lista de axiomas foi durante algum tempo questionada. Há seis ou sete axiomas? Em 2003, Lang dá a dúvida por terminada. Afirma que não existem mais axiomas e publica, na sua página da internet [10], um estudo que demonstra a sua convicção. É sabido no entanto, que todos os sistemas de axiomas são incompletos (Teoria da Incompletude de Gödel).

Dentro da teoria matemática de construções geométricas com origami, os sete axiomas de Huzita-Justin(-Hatori) definem o que é possível construir com uma única dobradura fazendo incidir combinações de pontos e retas. Nesse sentido, como afirma Lang [10]: *“os AHJs descrevem um estilo extremamente restritivo de dobraduras: apenas uma dobradura de cada vez pode ser executada, e cada deve ser desdobrada antes da próxima ser formada. Quase todos origamis no mundo real encontram-se fora deste domínio matemático. Se expandirmos essa limitação um pouco, permitindo duas dobras simultâneas, ainda mais construções geométricas se tornam possíveis com origami.”*

## 2.1 Axiomatização

A seguir enunciaremos os sete axiomas de Huzita-Hatori fazendo um paralelo, quando possível, com os axiomas e as construções da geometria euclidiana, nos quais Euclides usava somente régua não graduada e compasso, doravante denominados instrumentos euclidianos.

**Axioma 1 (A1):** *Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobradura que passa por ambos (figura 2.1).*

Este axioma faz referência da unicidade da reta. Segundo Elon Lages Lima [12], Euclides para se referir à reta, usou o seu primeiro postulado, onde diz que dados dois pontos distintos do espaço existe uma única reta que os contém.

Temos então, em ambas as geometrias, que por dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , sempre haverá uma reta (única) que passa pelos mesmos.

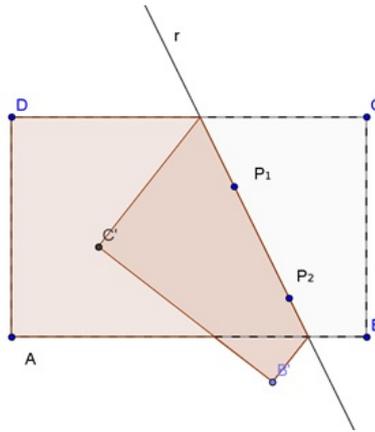


Figura 2.1: Axioma 1 - fonte: figura própria

**Axioma 2 (A2):** *Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobradura que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$  (figura 2.2).*

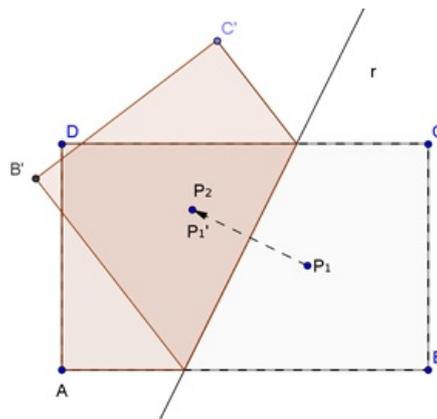


Figura 2.2: Axioma 2 - fonte: figura própria

Este axioma mostra que existe uma dobradura (única) que é capaz de colocar um ponto  $P_1$  sobre outro ponto  $P_2$ , gerando uma reta  $r$  que será equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ . Na geometria euclidiana temos que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  distintos. Consequentemente, o traçado da mediatriz determina o ponto médio do segmento que liga  $P_1$  a  $P_2$ .

Para construção da mediatriz usando os instrumentos euclidianos, façamos o seguinte:

Inicialmente tomemos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  distintos no plano. Traçamos dois círculos. O primeiro que tem centro em  $P_1$  e raio  $\overline{P_1P_2}$  e outro com centro em  $P_2$  e raio  $\overline{P_1P_2}$ , ou seja, círculos de centros em  $P_1$  e  $P_2$  e raios de mesma medida  $\overline{P_1P_2}$ . Observamos

que os círculos se encontram nos pontos  $A$  e  $B$ . Traçamos a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que passa por  $A$  e  $B$ . Tal reta é a mediatriz de  $P_1$  e  $P_2$  (figura 2.3).

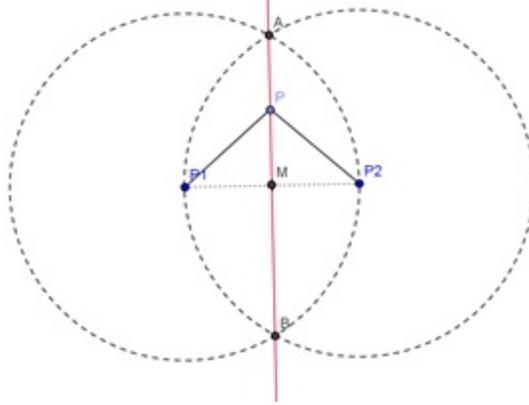


Figura 2.3: Mediatriz - fonte: figura própria

Com efeito, ao traçar a reta que passa por  $A$  e  $B$ , observamos que ela corta o segmento  $\overline{P_1P_2}$  num ponto que chamaremos de  $M$ .  $\overline{AM}$  é a altura do triângulo equilátero  $AP_1P_2$  ( $\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \overline{P_1P_2}$ ) cujo lado é o raio dos círculos de centro em  $P_1$  e em  $P_2$ , logo os triângulos  $AMP_1$  e  $AMP_2$  são retângulos. Pelo teorema de Pitágoras temos que  $\overline{MP_1} = \sqrt{\overline{AP_1}^2 - \overline{AM}^2}$  e  $\overline{MP_2} = \sqrt{\overline{AP_2}^2 - \overline{AM}^2}$ ; como  $\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \overline{P_1P_2}$ , temos que  $\overline{MP_1} = \overline{MP_2}$ , logo  $M$  é médio do segmento  $\overline{P_1P_2}$ .

Em seguida, tomemos um ponto  $P$  (qualquer), pertencente a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e traçemos o triângulo  $PP_1P_2$ . Pelo teorema de Pitágoras temos que  $\overline{PP_1} = \sqrt{\overline{MP_1}^2 + \overline{MP}^2}$  e  $\overline{PP_2} = \sqrt{\overline{MP_2}^2 + \overline{MP}^2}$ . Como vimos anteriormente que,  $\overline{MP_1} = \overline{MP_2}$ , temos que  $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$  para qualquer  $P$  pertencente a  $\overleftrightarrow{AB}$ . Logo a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é mediatriz dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pois qualquer  $P$  pertencente a  $\overleftrightarrow{AB}$  será equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ .

**Axioma 3 (A3):** *Dadas duas retas,  $r_1$  e  $r_2$ , há uma única dobradura que coloca  $r_1$  sobre  $r_2$ . No caso em que  $r_1$  e  $r_2$  são concorrentes temos a figura 2.4, no caso em que são paralelas temos a figura 2.5.*

Temos que na geometria euclidiana, a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas e, por consequência, divide um ângulo em dois congruentes se as retas forem concorrentes.

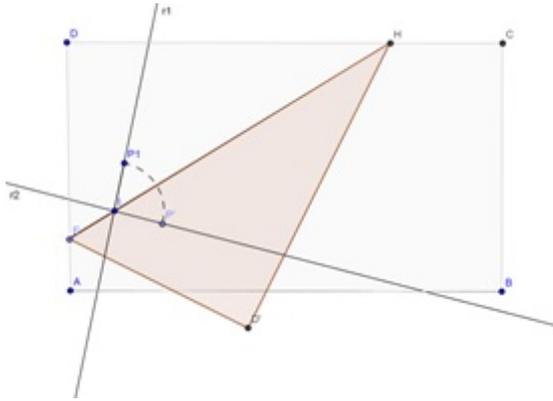


Figura 2.4: Axioma 3 - Concorrentes -  
fonte: figura própria

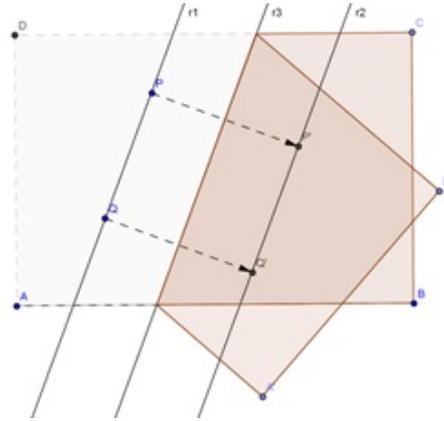


Figura 2.5: Axioma 3 - Paralelas - fonte:  
figura própria

Dividiremos as construções com régua e compasso em dois casos: retas concorrentes e retas paralelas.

### 1º caso: Retas Concorrentes:

Tomemos duas retas concorrentes  $r_1$  e  $r_2$ . Elas se cortam no ponto que chamaremos de  $I$ . Tomemos um ponto  $P$  qualquer, pertencente a reta  $r_1$  e tracemos um círculo com centro em  $I$  e raio  $\overline{IP}$ . O ponto de interseção desse círculo com a reta  $r_2$ , chamaremos de  $P'$ . Tracemos dois círculos. O primeiro com centro em  $P$  e raio  $\overline{PP'}$  e outro com centro em  $P'$  e de mesmo raio. Na verdade, poderíamos pegar quaisquer dois círculos com centro em  $P$  e  $P'$ , mas que tivessem o raio maior que a metade do comprimento de  $\overline{P'P}$ . Marcaremos então os pontos de interseção desses dois círculos e os chamaremos de  $I'$  e  $I''$ . A reta  $\overleftrightarrow{I'I''}$  é a bissetriz de  $r_1$  e  $r_2$ .

Agora argumentaremos porque a reta  $\overleftrightarrow{I'I''}$  é a bissetriz. Ao traçarmos a reta  $\overleftrightarrow{I'I''}$  verificamos que ela passa por  $I$ . Verificamos, por **A1**, que  $\overleftrightarrow{I'I''}$  é a mediatriz entre os pontos  $P$  e  $P'$ , é a mediana do segmento  $\overline{PP'}$  e  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$ . Marcaremos um ponto  $A$  qualquer sobre a reta  $\overleftrightarrow{I'I''}$  e traçaremos as perpendiculares a  $r_1$  e  $r_2$  e as chamaremos de  $r_3$  e  $r_4$ . Chamaremos de  $C$ , o ponto de interseção de  $r_3$  e  $r_1$  e de  $B$ , a interseção de  $r_2$  e  $r_4$ . Traçaremos  $\overline{BC}$  e observamos o triângulo  $IBC$ . Observamos que  $IBC$  é isósceles ( $\overline{IB} = \overline{IC}$ ) e semelhante ao triângulo  $IPP'$ , pelo caso AAA (ângulo - ângulo - ângulo) ( $\hat{B}IC = \hat{P}'IP$ ,  $\hat{I}BC = \hat{I}P'P$  e  $\hat{B}CI = \hat{P}'PI$ ). Marcamos o ponto de interseção de  $\overleftrightarrow{I'I''}$  com  $\overline{BC}$  e chamamos de  $M'$ . Por semelhança entre os triângulos já citados ( $IBC$  e  $IPP'$ ), verificamos que  $M'$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ , então  $\overline{BM'} =$

$\overline{CM'}$ , além de  $\overline{IM'}$  ser a altura do triângulo  $IBC$ . Por consequência  $\overline{AM'}$  é a altura do triângulo  $ABC$ . Calculando a medida do segmento  $\overline{AB}$ , por Pitágoras, temos que  $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AM'}^2 + \overline{M'B}^2}$ . Calculando a medida do segmento  $\overline{AC}$ , por Pitágoras, temos que  $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AM'}^2 + \overline{M'C}^2} = \sqrt{\overline{AM'}^2 + \overline{M'B}^2} = \overline{AB}$ . Logo o triângulo  $ABC$  é isósceles ( $\overline{AB} = \overline{AC}$ ). Isto mostra que para qualquer ponto da reta  $\overleftrightarrow{I'I''}$  as suas distâncias as retas  $r_1$  e  $r_2$  serão iguais, então  $\overleftrightarrow{I'I''}$  é bissetriz interna do ângulo formado entre essas retas (figura 2.6).

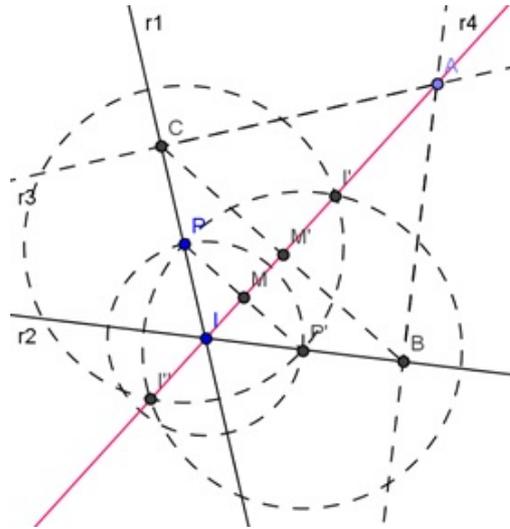


Figura 2.6: Bissetriz interna entre retas concorrentes - fonte: figura própria

### 2º caso: Retas Paralelas:

Tomemos duas retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$ . Marcaremos dois pontos quaisquer  $P$  e  $Q$  sobre a reta  $r_1$ . Traçando a mediatriz de  $\overline{PQ}$  (método usado em **A2**) encontramos a reta  $r_4$  e o ponto médio de  $\overline{PQ}$ , o qual chamaremos de  $D$ . Marcaremos o ponto onde  $r_4$  corta  $r_2$ , o qual chamaremos de  $E$ . Como  $r_4$  é perpendicular a  $r_1$  e  $r_2$ , temos que  $\overline{DE}$  é distância entre as retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$ . Traçaremos dois círculos de raio cujo comprimento seja igual ao segmento  $\overline{DE}$ , um com centro em  $D$  e outro com centro em  $E$ . Marcaremos os seus pontos de interseção desses dois círculos e os chamaremos de  $F$  e  $G$ . Traçamos a reta  $r_3$  passando por  $F$  e  $G$ . Ela vai cortar o segmento  $\overline{DE}$  em  $M$ , médio do segmento  $\overline{DE}$  (**A2**). Concluimos então que  $r_3$  é mediatriz do segmento  $\overline{DE}$ . Como para qualquer ponto  $D$ , pertencente a  $r_1$  e sua projeção ortogonal  $E$ , pertencente a  $r_2$ , teremos o seu ponto médio pertencente a reta  $r_3$ , então  $r_3$  é o conjunto dos pontos equidistantes entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ , logo  $r_3$  é a bissetriz entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  (figura 2.7).

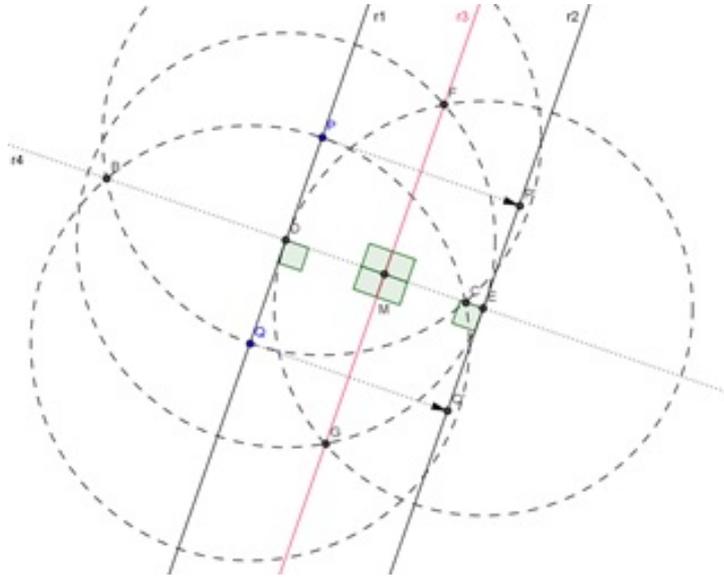


Figura 2.7: Bissetriz interna entre retas paralelas - fonte: figura própria

**Axioma 4 (A4):** Dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , há uma única dobradura perpendicular a  $r$  que passa pelo ponto  $P$  (figuras 2.8 e 2.9 )

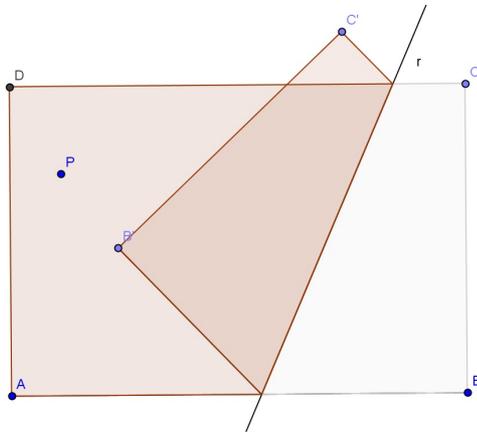


Figura 2.8: Reta  $r$  e Ponto  $P$  - fonte: figura própria

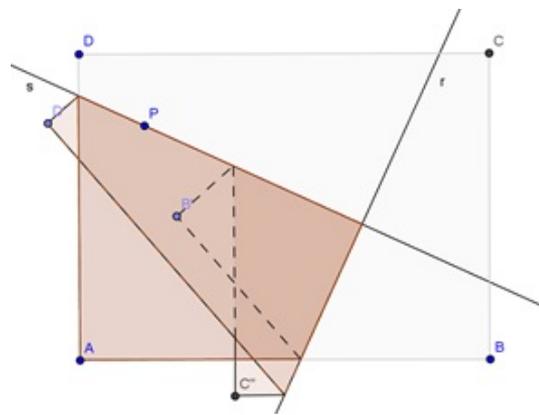


Figura 2.9: Axioma 4 - fonte: figura própria

Este axioma trata da possibilidade única de se obter uma reta perpendicular a reta dada que passa por um ponto exterior a mesma. Isto é equivalente a uma das consequências do quinto postulado de Euclides. Diga-se de passagem, o seu postulado mais contestado [13]. Nele Euclides fala da unicidade da paralela que passa por um ponto exterior a reta dada [14]. Em consequência da unicidade da paralela, temos a unicidade

da perpendicular a reta, que passa por um ponto exterior a ela.

**Axioma 5 (A5):** *Dados dois pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e a reta  $r$ , se  $d(P_1, P_2) \geq d(P_2, r)$ , há uma dobradura que coloca  $P_1$  sobre  $r$  e passa por  $P_2$  (figura 2.10).*

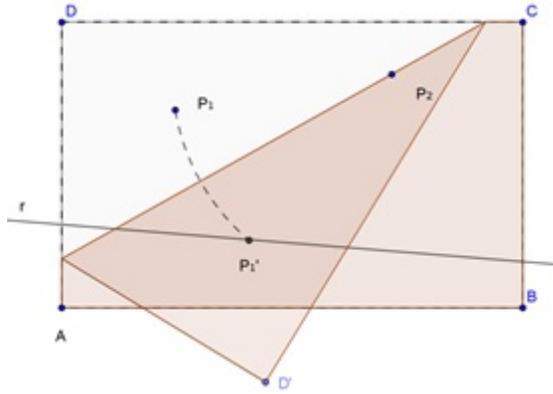


Figura 2.10: Axioma 5 - fonte: figura própria

Este axioma trata do encontro de uma reta com um círculo. Pode haver de zero a dois pontos de interseção (dois para reta secante ao círculo, um para reta tangente ao círculo e nenhum para reta exterior ao círculo). De fato, segundo **A2**, a dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_1'$  constrói a mediatriz entre  $P_1$  e  $P_1'$ . Como, além disso, a dobra passa por  $P_2$ ,  $P_2$  pertence à mediatriz. Concluimos que  $d(P_1, P_2) = d(P_1, P_1')$ , ou equivalentemente  $P_1'$  pertence ao círculo de raio  $d(P_1, P_2)$  e centro  $P_2$ .

Para demonstração pela geometria euclidiana façamos o seguinte:

**1º Caso:** Distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  maior que a distância entre o ponto  $P_2$  e a reta  $r$ .

Tomemos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r$ , de forma que  $P_1$  e  $P_2$  não pertençam a  $r$  e  $d(P_1, P_2) > d(P_2, r)$ . Traçamos um círculo com centro em  $P_2$  e raio  $d(P_1, P_2)$ . Em seguida marcamos os dois pontos de interseção do círculo com  $r$  (pontos  $D$  e  $E$ ). Traçamos a mediatriz do segmento  $\overline{DE}$  (como foi mostrado anteriormente no axioma 2). Certamente  $P_2$  estará sobre a mediatriz. Chamaremos de  $I$ , o ponto de encontro da mediatriz com a reta  $r$ . O ponto  $I$  também será ponto médio do segmento  $\overline{DE}$  e a reta  $\overleftrightarrow{PI}$  é perpendicular a  $r$  (figura 2.11). Observamos o seguinte:  $d(P_1, P_2) = d(P, D) = d(P, E) > d(P, I)$ . Logo constatamos que quando a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  for maior que a distância entre a reta  $r$  e o ponto  $P_2$  haverá duas maneiras de levar  $P_1$  sobre

$r$  passando por  $P_2$ . Nesse caso os pontos  $D$  e  $E$ . Observamos que a reta  $r$  é secante ao círculo de raio  $d(P_1, P_2)$  e centro em  $P_2$ .

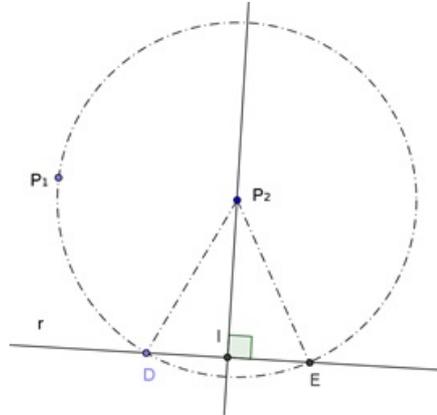


Figura 2.11:  $P_1$  e com duas projeções sobre  $r$  – reta secante ao círculo. fonte: figura própria

**2º Caso:** Distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  igual a distância entre o ponto  $P_2$  e a reta  $r$ .

Tomemos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r$ , de forma que  $P_1$  e  $P_2$  não pertençam a  $r$  e  $d(P_1, P_2) = d(P_2, r)$ . Traçamos um círculo com centro em  $P_2$  e raio  $d(P_1, P_2)$ . Em seguida marcamos o ponto de interseção do círculo com  $r$ , o qual chamaremos de  $I$  (figura 2.12). Observamos o que  $d(P_1, P_2) = d(P, I)$ . Logo constatamos que, quando a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  for igual a distância entre a reta  $r$  e o ponto  $P_2$ , haverá uma maneira de levar  $P_1$  sobre  $r$  passando por  $P_2$ . Nesse caso o ponto  $I$ , que será o ponto de tangência da reta  $r$  com o círculo de raio  $d(P_1, P_2)$  e centro em  $P_2$ .

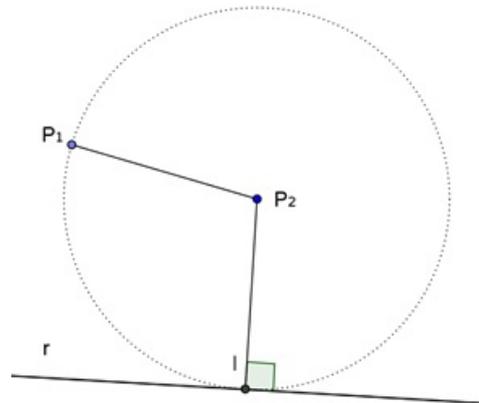


Figura 2.12:  $P_1$  com uma projeção sobre  $r$  – reta tangente ao círculo - fonte: figura própria

**3º Caso:** Distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  menor que a distância entre o ponto  $P_2$  e a reta  $r$ .

Tomemos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r$ , de forma que  $P_1$  e  $P_2$  não pertençam a  $r$  e  $d(P_1, P_2) < d(P_2, r)$ . Traçamos um círculo com centro em  $P_2$  e raio  $d(P_1, P_2)$ . Traçamos a perpendicular a  $r$  que passa por  $P_2$ . Chamaremos de  $I$ , o ponto de encontro desta perpendicular com a reta  $r$  (figura 2.13). Observamos o seguinte:  $d(P_1, P_2) < d(P_2, I)$ . Logo constatamos que quando a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  for menor que a distância entre a reta  $r$  e o ponto  $P_2$  não poderemos levar  $P_1$  sobre  $r$  passando por  $P_2$ . Nesse caso a reta  $r$  será exterior ao círculo de raio  $d(P_1, P_2)$  e centro  $P_2$ .

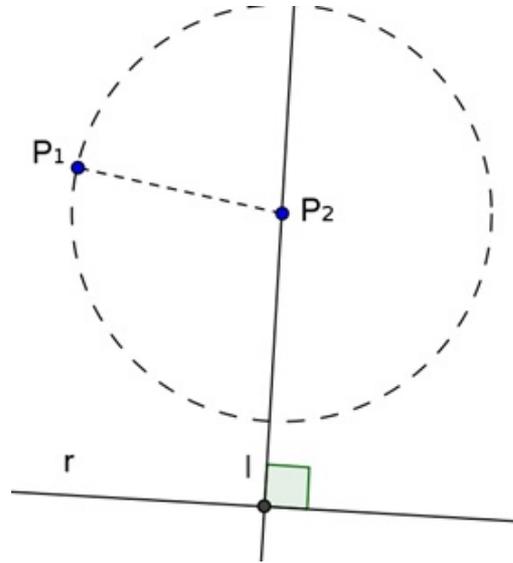


Figura 2.13: Reta  $r$  exterior ao círculo de centro  $P_2$  e raio  $P_2P_1$ . fonte: figura própria

De fato, podemos observar que esta dobradura só pode ser feita quando  $d(P_1, P_2) \geq d(P_2, r)$ .

**Axioma 6 (A6):** *Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , há uma dobradura que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$  (figura 2.14).*

Este axioma trata de uma reta tangente a duas parábolas distintas, uma com centro em  $P_1$  e diretriz  $r_1$ , e outra com centro em  $P_2$  e diretriz  $r_2$ . Esta é uma construção que não pode ser feita com régua e compasso. Isto por que o origami é baseado num processo de “ajustes” ou “tentativa e erro”, o que nas construções geométricas com base nos postulados de Euclides, não é aceito. Em seguida faremos uma demonstração formal desse resultado usando argumentos de Geometria Analítica.

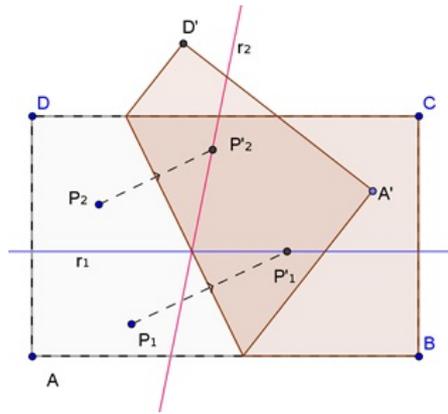


Figura 2.14: Axioma 6 - fonte: figura própria

Tomemos inicialmente o ponto  $P_1$  e a reta  $r_1$  (figura 2.15).

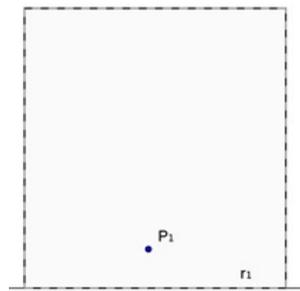


Figura 2.15: Axioma 6 – passo 1 - fonte: figura própria

Observemos que há infinitas dobraduras que podem levar  $P_1$  a ficar sobre  $r_1$ . Se fizermos uma dobradura, vincarmos e a desfizemos poderemos observar a nova reta gerada por esta dobradura (figura 2.16).

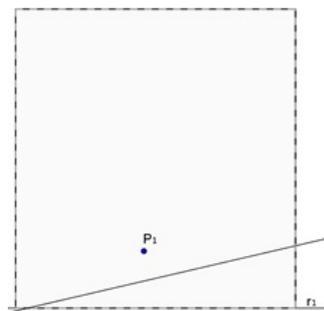


Figura 2.16: Axioma 6 – passo 2 - fonte: figura própria

Se fizermos esse procedimento várias vezes, já que há uma infinidade de dobraduras que podem colocar  $P_1$  sobre  $r_1$ , teremos a figura abaixo (figura 2.17).

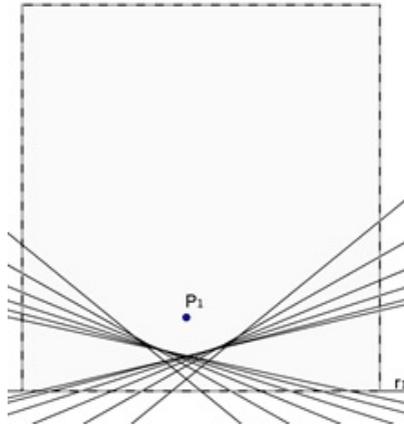


Figura 2.17: Axioma 6 – passo 3 - fonte: figura própria

Ao observarmos a figura 2.17, temos que essas retas formam o contorno de uma parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $r_1$ . Em tempo, lembremos que parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidista de um ponto (foco, no caso  $P_1$ ) e uma reta (diretriz, no caso  $r_1$ ). Então, construiremos a parábola de foco em  $P_1$  e diretriz  $r_1$  e veremos como fica (figura 2.18). Aconselhamos aqui ao leitor pegar uma folha de papel e fazer esse exercício de origami para se convencer deste fato.

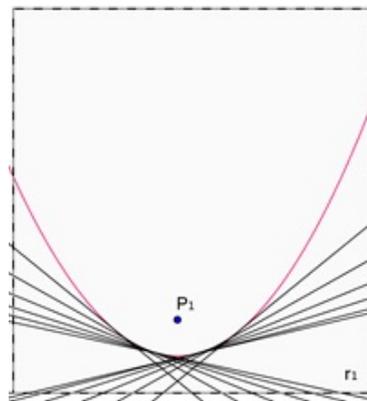


Figura 2.18: Axioma 6 – passo 4 - fonte: figura própria

Vemos então que realmente esse conjunto de retas é tangente a parábola de centro  $P_1$  e diretriz  $r_1$ . Isto porque tomando um ponto  $P$  qualquer desta parábola, temos que  $d(P, r_1) = d(P_1, P)$ .

Agora cabe a colocação de  $P_2$  sobre  $r_2$ . Tomemos então, um ponto  $P_2$  distinto

de  $P_1$  uma reta  $r_2$  concorrente a  $r_1$ . Segundo **A6**, haverá uma reta entre todas as tangentes a parábola de foco  $P_1$ , que também será tangente a parábola de foco em  $P_2$  e diretriz  $r_2$ . Retirando as demais retas e ficando somente com a tangente comum, ficamos com a dobradura desejada (figura 2.19).

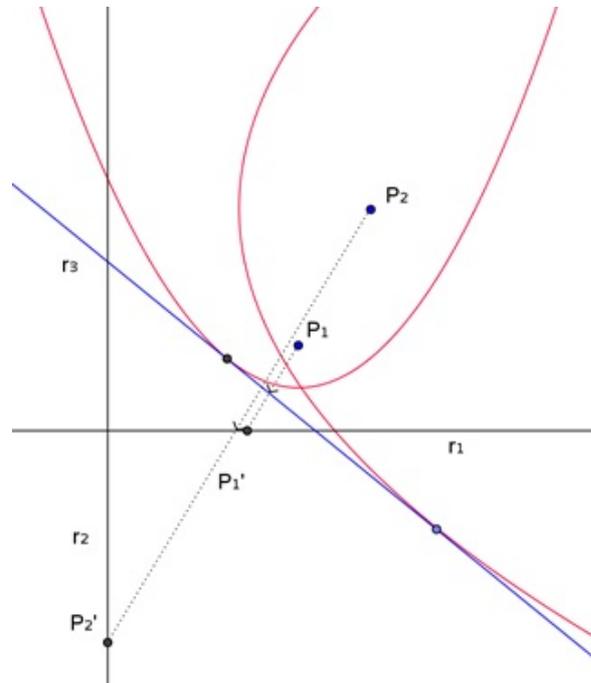


Figura 2.19: Axioma 6 – reta tangente a duas parábolas - fonte: figura própria

Mas em termos algébricos o que realmente este axioma significa? Segundo Jaema L. Krier [15], este axioma nos permite resolver equações cúbicas do tipo  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ . De fato, com a ajuda desse axioma nos é permitido resolver alguns problemas clássicos da geometria euclidiana, tais como: a trissecção do ângulo [16] e a duplicação do cubo [17]. Na seção 3.8 veremos como esse axioma nos permite construir um heptágono regular por meio do origami.

### Resolução de Equações Cúbicas usando o Axioma 6:

Vamos mostrar que podemos resolver todas as equações cúbicas de coeficientes construtivos através do origami. Esta demonstração é uma adaptação da demonstração de Robert Geretschläger[18].

Antes de prosseguirmos recordemos alguns fatos sobre parábolas. Se  $V = (x_v, y_v)$  é o vértice da parábola e  $p$  é a distância do vértice ao foco, então uma parábola com eixo de simetria vertical tem como equação cartesiana a equação  $(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$ .

Caso o eixo de simetria seja horizontal, temos  $(y - y_v)^2 = 4p(x - x_v)$ .

Além disso, segundo Elon Lages Lima [19], se temos uma parábola de equação  $y = ax^2 + bx + c$ , a reta tangente no ponto  $P(x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ , é a reta que passa por este ponto e tem inclinação igual a  $2ax_0 + b$ .

Consideremos a equação geral de terceiro grau  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in R$ , e as parábolas  $p_1$  de foco  $\left(-\frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$  e reta diretriz  $x = -\frac{a}{2} - \frac{c}{2}$ , e  $p_2$  de foco  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  e reta diretriz  $y = -\frac{1}{2}$  associadas. Nesse caso, as parábolas têm como equações cartesianas  $p_1 : \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = 2c \left(x + \frac{a}{2}\right)$  e  $p_2 : y = \frac{1}{2}x^2$ .

Suponhamos agora que exista uma reta tangente  $y = mx + r$  comum a  $p_1$  e a  $p_2$ , passando pelos pontos  $P(x_1, y_1)$  e  $P(x_2, y_2)$ , mostraremos que o coeficiente angular  $m$  satisfaz a equação cúbica em questão. Com efeito, com relação a  $p_2$  observemos que  $m = 2 \cdot \frac{1}{2}x_2 = x_2$  e  $y_2 = \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{m^2}{2}$ . Procedendo analogamente com relação a  $p_1$  teremos  $\frac{1}{m} = 2 \cdot \frac{1}{2c} \cdot y_1 - \frac{b}{2c} \therefore y_1 = \frac{c}{m} + \frac{b}{2}$ , além disso  $P(x_1, y_1)$  satisfaz  $\left(y_1 - \frac{b}{2}\right)^2 = 2c \left(x_1 + \frac{a}{2}\right) \therefore x_1 = \frac{c}{2m^2} - \frac{a}{2}$ . Finalmente observemos que  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , donde obtemos substituindo os valores de  $x_1, x_2, y_1, y_2$ :

$$m = \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{c}{m} - \frac{b}{2}}{m - \frac{c}{2m^2} + \frac{a}{2}}$$

$$m^2 - \frac{c}{2m} + \frac{a}{2}m = \frac{m^2}{2} - \frac{c}{m} - \frac{b}{2}$$

Multiplicando a equação acima por  $2m$  temos então:

$$2m^3 - c + am^2 = m^3 - 2c - bm$$

$$m^3 + am^2 + bm + c = 0$$

Mostramos assim que o coeficiente angular  $m$  da reta tangente comum a  $p_1$  e a  $p_2$  satisfaz a equação cúbica  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ . Verificamos assim que o axioma 6, que nos permite achar (quando possível) uma reta tangente comum a duas parábolas, nos permite achar raízes de equações cúbicas. Como última observação notemos portanto

que se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números construtíveis usando os axiomas do origami, então o axioma 6 garante que também serão construtíveis as raízes reais da equação cúbica que tem  $a$ ,  $b$  e  $c$  como coeficientes.

Conforme dissemos anteriormente, veremos uma aplicação direta desse resultado, que nos permitirá construir um heptágono regular usando origami (Seção 3.8).

**Axioma 7 (A7):** *Dado um ponto  $P$ , e duas retas,  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas, existe uma dobradura que coloca  $P$  sobre  $r_1$  e é perpendicular a  $r_2$ .* Vale lembrar que este axioma foi introduzido por Hatori (figura 2.20).

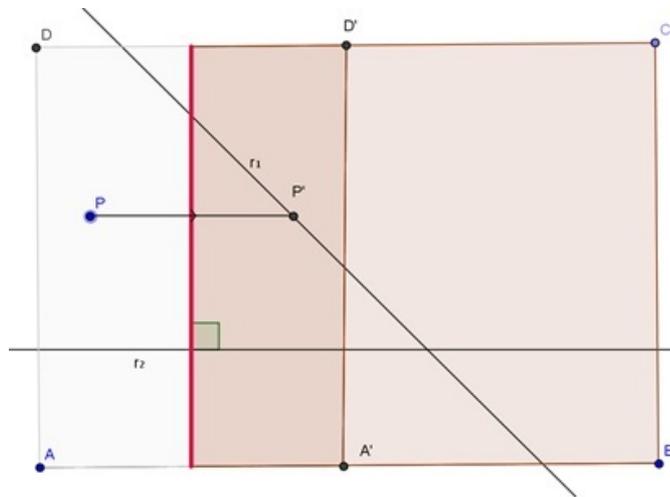


Figura 2.20: Axioma 7 - fonte: figura própria

Este axioma é equivalente a resolver equações do primeiro grau. Ele determinará a equação da reta que é perpendicular a  $r_2$  e passará pelo ponto médio entre os pontos  $P$  e  $P'$ .

Não usando régua e compasso, mas por geometria analítica, mostraremos um exemplo de como esse axioma se transforma na resolução de uma equação do primeiro grau.

Tomemos inicialmente uma reta  $r_2: y = n_2$ , paralela ao eixo  $x$ , uma reta  $r_1: y = m_1x + n_1$  concorrente a  $r_2$  e um ponto  $P(x_p, y_p)$  não pertencente a  $r_1$  ou  $r_2$ . Chamaremos de  $P'(x', y')$  o ponto sobre a reta  $r_1$  obtido a partir de  $P$  pela dobradura,  $r_3$  a reta perpendicular a  $r_2$  formada pela dobradura e de  $M(x_m, y_m)$  o ponto médio de  $P$  e  $P'$  (figura 2.21).

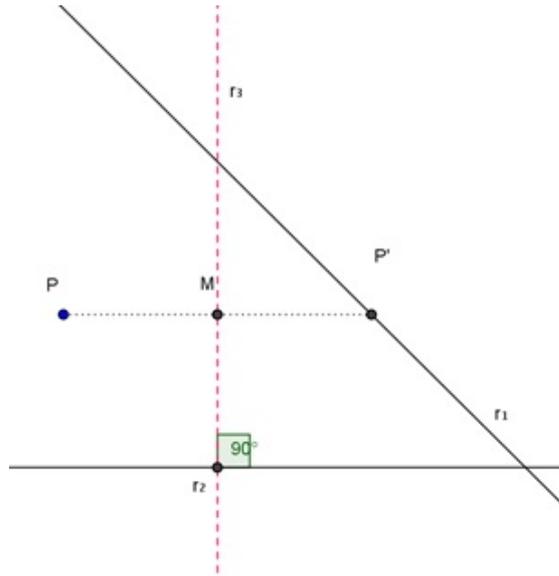


Figura 2.21: Axioma 7 - Exemplo - fonte: figura própria

Como  $r_3$  é perpendicular a  $r_2$ , ela será do tipo  $r_3: x = K$ . Nosso objetivo então é descobrir este  $K$ .

Temos que a reta  $\overleftrightarrow{PP'}$  é paralela a reta  $r_2$ , então  $y' = y_p$ . Como  $P'$  pertence a  $r_1$ , temos que  $x' = \frac{(y' - n_1)}{m_1}$ , logo  $x' = \frac{(y_p - n_1)}{m_1}$  **(1)**.

Como  $M(x_m, y_m)$  é médio de  $\overline{PP'}$ , temos que  $x_m = \frac{(x_p + x')}{2}$ , então de **(1)** ficamos com  $x_m = \frac{x_p + \left(\frac{y_p - n_1}{m_1}\right)}{2}$  **(2)**.

Como  $M$  pertence a  $r_3: x = K$ , então temos de **(2)** que  $r_3: x = x_m$ . Logo:

$$k = \frac{x_p + \left(\frac{y_p - n_1}{m_1}\right)}{2},$$

$$2k = x_p + \left(\frac{y_p - n_1}{m_1}\right),$$

$$2km_1 = m_1x_p + y_p - n_1,$$

Passando todos para o primeiro membro, temos  $2m_1k - m_1x_p - y_p + n_1 = 0$ . Como  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $n_1$  e  $m_1$ , são conhecidos, para saber a equação da reta  $r_3: x = K$ , basta somente resolver a equação  $2m_1k - m_1x_p - y_p + n_1 = 0$ .

## 3 Construções de Polígonos Regulares

Nesta seção faremos a construção de alguns polígonos regulares, em origami e com instrumentos euclidianos. Veremos também, quais os polígonos regulares possíveis de se construir com o uso de cada uma das duas geometrias.

### 3.1 Tipos de dobraduras

Na seção 2.1 falamos dos axiomas do origami. Nela só descrevemos o que acontecia com uma dobradura. Para a construção de polígonos regulares teremos, em alguns casos, acúmulo de dobraduras para trás e para frente. Na construção em origami há algumas diferenças em dobrar para trás e para frente. Para evitar problemas de construção, chamaremos a dobradura para frente de “**dobra valley**” (figura 3.1), pois ao ser desfeita provoca um efeito tipo vale na folha, e chamaremos a dobradura para trás de “**dobra mountain**” (figura 3.2), pois ao ser desfeita provoca um efeito tipo montanha na folha [20].

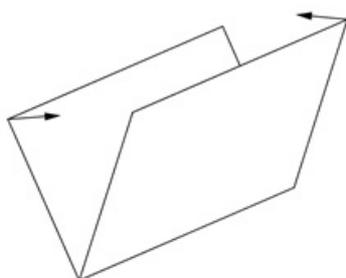


Figura 3.1: Dobra Valley - fonte: figura própria

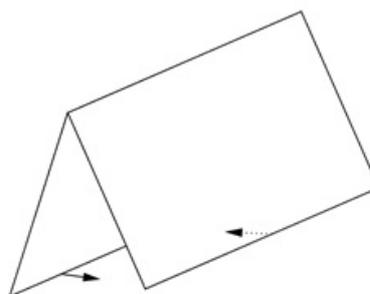


Figura 3.2: Dobra Mountain - fonte: figura própria

### 3.2 Construções do triângulo equilátero

Iniciaremos com a construção do triângulo equilátero usando os métodos euclidianos. Para isso, devemos fazer o seguinte:

Dada uma reta  $r$  e dois pontos  $A$  e  $B$ , devemos traçar dois círculos de raio com medida igual ao segmento  $\overline{AB}$ . Um com centro em  $A$  e outro com centro em  $B$ . Marcaremos então, um dos seus pontos de interseção e chamaremos de  $C$ . Traçamos os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ . O triângulo  $ABC$  é equilátero (figura 3.3).

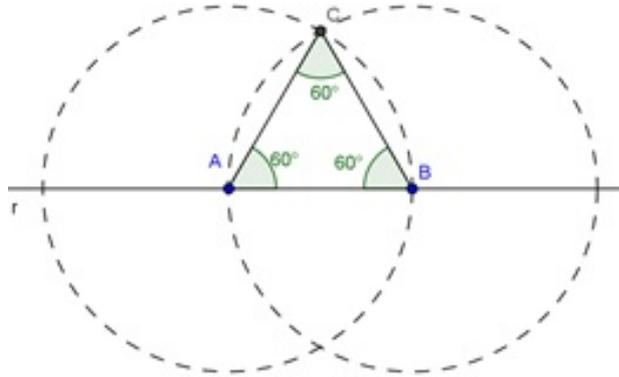


Figura 3.3: Triângulo Equilátero ABC - fonte: figura própria

Agora iremos construir um triângulo equilátero por dobraduras. Fazemos o seguinte:

Tomemos uma folha retangular, chamaremos de base  $\overline{AB}$ , o seu menor lado. Dobraremos a folha retangular ao meio, gerando  $\overline{EF}$  (dobra valley). Em seguida, desfaremos a dobradura (figura 3.4). Notemos que essa dobra determina a mediatriz dos pontos  $A$  e  $B$  (**A2**).

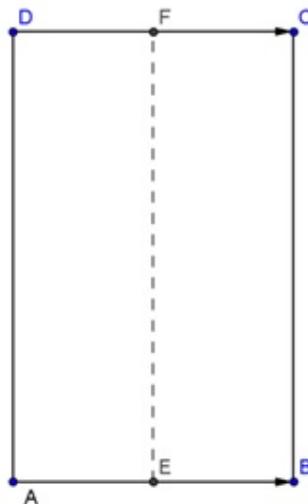


Figura 3.4: Triângulo - Passo 1 - fonte: figura própria

Devemos fazer uma dobradura que leve o ponto  $A$  até o segmento  $\overline{EF}$  (dobra valley). Marcaremos então, o ponto  $P$ . Notemos que aqui estamos usando o (A5). Com efeito, em termos de (A5) temos que  $P_1 = A$ ,  $P_2 = B$  e a reta  $r$  é  $\overline{EF}$ , desse modo o ponto  $P$  obtido pela dobra é a interseção da reta  $r = \overline{EF}$  (mediatriz de  $A$  e  $B$ ) com a circunferência de raio  $d(A, B)$  e centro em  $B$ , isto é,  $d(B, P) = d(A, B)$ . Em seguida faremos mais uma dobradura para trás (dobra mountain) sobre a reta  $\overleftrightarrow{BP}$ . Depois desfaremos ambas as dobraduras (figura 3.5).

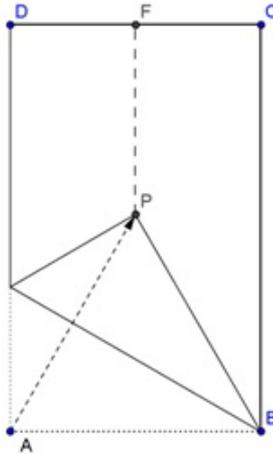


Figura 3.5: Triângulo - Passo 2 - fonte: figura própria

Por fim, devemos fazer outra dobradura que leve o ponto  $B$  até a reta  $\overleftrightarrow{EF}$  (dobra valley) e, em seguida, fazer uma dobradura para trás (dobra mountain) sobre  $\overline{AP}$ . Marcaremos o ponto  $H$  que será o encontro das dobraduras realizadas até agora. (figura 3.6). Em seguida desfaremos as dobraduras.

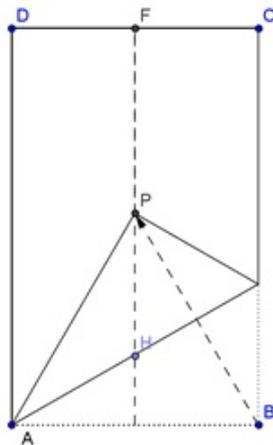


Figura 3.6: Triângulo - Passo 3 - fonte: figura própria

Teremos assim o triângulo equilátero  $ABP$ . Destacamos também o ponto  $H$  que é o baricentro, incentro e ortocentro deste triângulo equilátero (figura 3.7).

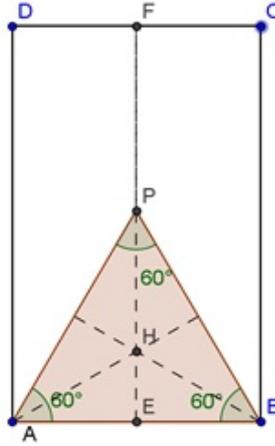


Figura 3.7: Triângulo equilátero por origami - fonte: figura própria

### 3.3 Construções do quadrado

Iniciaremos com a construção do quadrado com lado de mesma medida do segmento  $\overline{AB}$ , usando os métodos euclidianos. Para isso, devemos fazer o seguinte:

Dada uma reta  $r$  e dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a ela, devemos traçar dois círculos de raio com medida igual ao segmento  $\overline{AB}$ . Um com centro em  $A$  (chamaremos de  $c_1$ ) e outro com centro em  $B$  (chamaremos de  $c_2$ ). Marcaremos então, os seus pontos de interseção com a reta  $r$ , os quais chamaremos de  $M$  e  $N$ . Ao fazer isso o ponto  $A$  passa a ser médio do segmento  $\overline{BM}$  e  $B$  passa a ser médio do segmento  $\overline{AN}$  (figura 3.8).

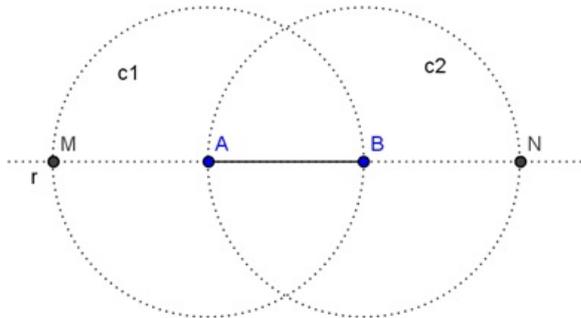


Figura 3.8: Quadrado - Passo 1 - fonte: figura própria

Traçaremos a mediatriz do segmento  $\overline{MB}$  e em seguida a mediatriz do segmento  $\overline{AN}$  (figura 3.9).

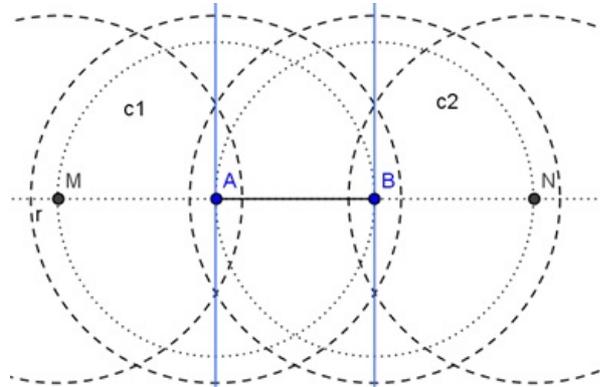


Figura 3.9: Quadrado - Passo 2 - fonte: figura própria

Marcaremos o ponto de interseção da mediatriz que passa por  $B$  com o círculo  $c_2$ , o qual chamaremos de  $C$ . Marcaremos o ponto de interseção da mediatriz que passa por  $B$  com o círculo  $c_1$ , o qual chamaremos de  $D$ . Traçaremos então o quadrado  $ABCD$  (figura 3.10).

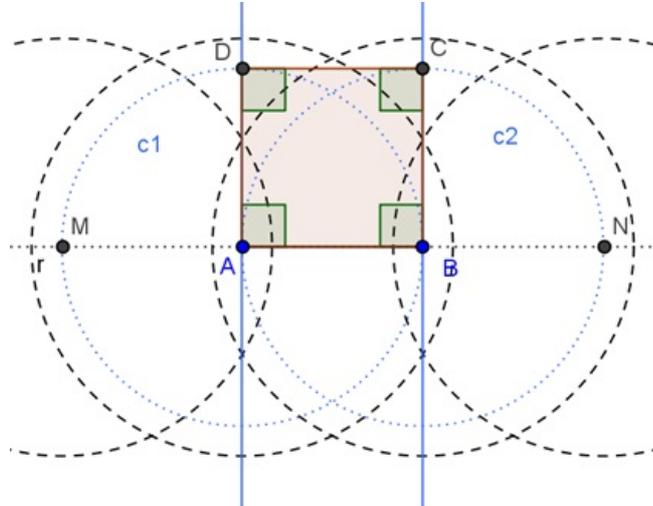


Figura 3.10: Quadrado de lado  $AB$  – passo 3 - fonte: figura própria

Para construir um quadrado em origami, a partir de uma folha retangular devemos fazer o seguinte:

Colocaremos a folha no formato retangular de forma que a base seja menor que a altura. Chamaremos a base de  $\overline{AB}$  e os demais vértices de  $C$  e  $D$ . Faremos uma dobradura (dobra valley) que coloque o ponto  $A$  sobre o segmento  $\overline{BC}$ . Observe

novamente aqui o uso de **A5** para realizarmos a interseção da circunferência de centro em  $B$  e raio  $d(A, B)$  com a reta  $\overline{BC}$ , nesse caso o ponto  $E$ . Logo,  $d(B, E) = d(A, B)$ . Marcaremos os pontos  $E$  e  $F$  (figura 3.11).

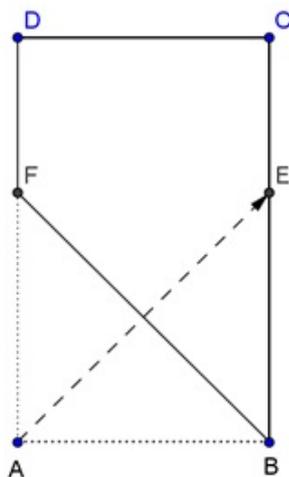


Figura 3.11: Quadrado em origami - Passo 1 - fonte: figura própria

Em seguida, faremos uma dobradura pra trás (dobra mountain) sobre o segmento  $\overline{EF}$ . Ela colocará  $C$  sobre o segmento  $\overline{BE}$ . Em seguida, desfaremos a dobradura que colocou  $A$  sobre  $E$ . Teremos assim o quadrado  $ABEF$  (figura 3.12).

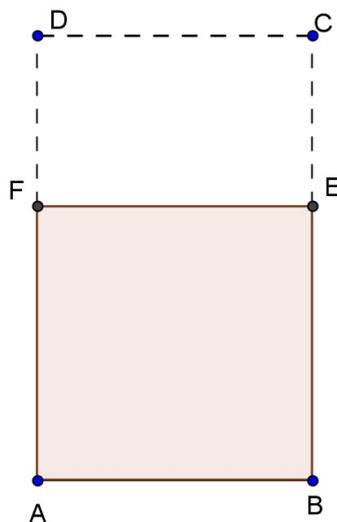


Figura 3.12: Quadrado ABEF - fonte: figura própria

### 3.4 Construções do pentágono regular

Inicialmente iremos construir um pentágono regular usando os instrumentos euclidianos. Usaremos a construção feita na Wikipédia [21]. Para isso devemos fazer o seguinte:

Tomemos um segmento  $\overline{AB}$  e traçaremos a partir dele dois círculos de centros em  $A$  e  $B$  e raio igual a  $\overline{AB}$ . Chamaremos essas circunferências de  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente. Marcaremos os seus pontos de interseção e os chamaremos de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Em seguida traçaremos a reta  $\overleftrightarrow{MN}$ , que será mediatriz de  $\overline{AB}$  (figura 3.13).

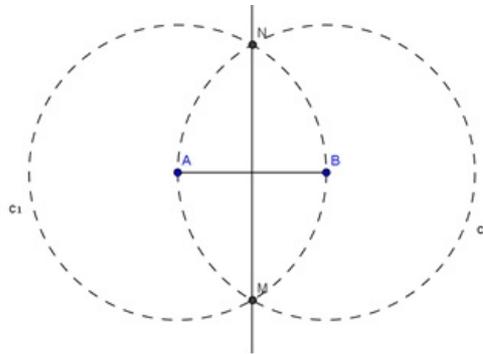


Figura 3.13: Segmento  $\overline{AB}$ , círculos  $c_1$  e  $c_2$  e mediatriz  $\overline{MN}$  - fonte: figura própria

Traçaremos o círculo de centro em  $M$  e raio igual a  $\overline{MC}$ , o qual chamaremos de  $c_3$ . Marcaremos os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Interseções de  $c_3$  com  $c_1$ ,  $\overline{MN}$  e  $c_2$ , respectivamente (figura 3.14).

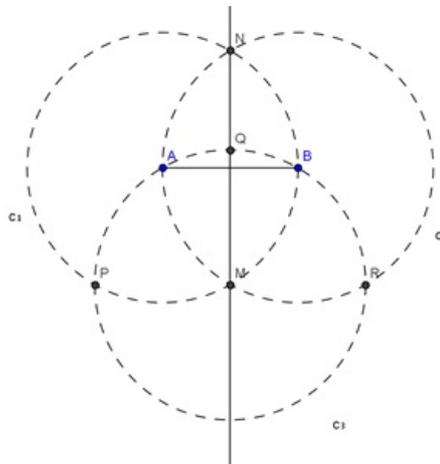


Figura 3.14: Círculos  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  para o pentágono - fonte: figura própria

Traçaremos a reta  $\overleftrightarrow{RQ}$  e marcaremos seu ponto de interseção com  $c_1$ , o qual chamaremos de  $E$ . Traçaremos a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  e marcaremos seu ponto de interseção com  $c_2$ , o qual chamaremos de  $C$  (figura 3.15).

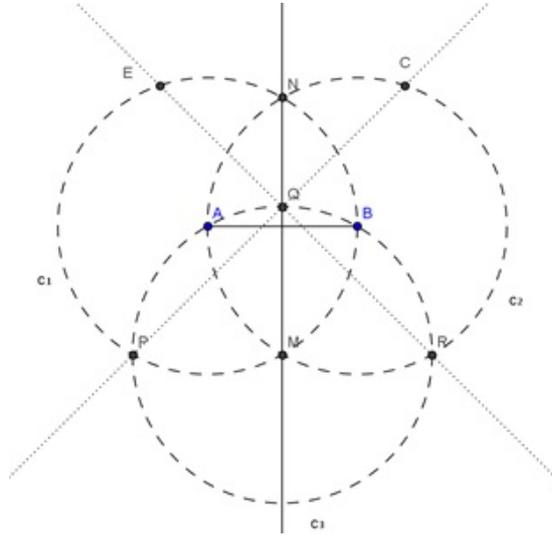


Figura 3.15: Círculos  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  e retas  $RQ$  e  $PQ$  - fonte: figura própria

Traçaremos o círculo de centro em  $C$  e raio igual a  $\overline{BC} = \overline{AB}$ , o qual chamaremos de  $c_4$ . Traçaremos o círculo de centro em  $E$  e raio igual a  $\overline{EA} = \overline{AB}$ , o qual chamaremos de  $c_5$ . Marcaremos o ponto  $D$  que será a interseção de  $c_4$ ,  $c_5$  e a reta  $\overleftrightarrow{MN}$ . Temos o pentágono  $ABCDE$  (figura 3.16).

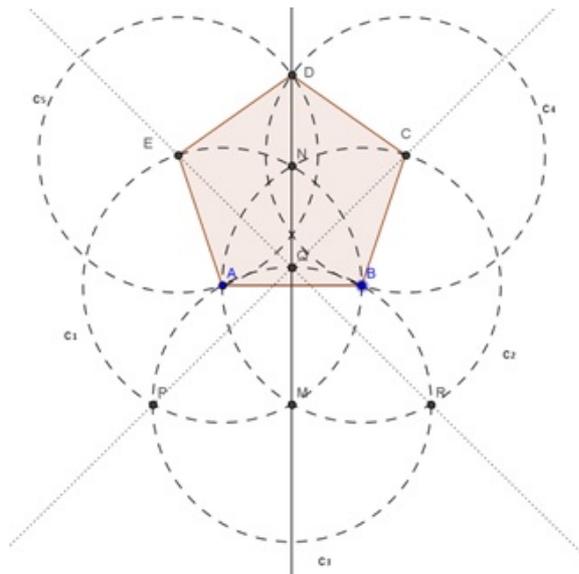


Figura 3.16: Pentágono regular  $ABCDE$  - fonte: figura própria

Agora iremos construir um pentágono regular por dobraduras. Faremos uma adaptação da construção de Sara Adams [22]. Fazemos o seguinte:

Tomemos uma folha quadrada (figura 3.17) e faremos uma dobradura (dobra valley) dividindo-a em duas partes iguais. Isso levará o ponto  $B$  a ficar sobre o ponto  $A$  e o ponto  $C$  a ficar sobre o ponto  $D$  (figura 3.18).

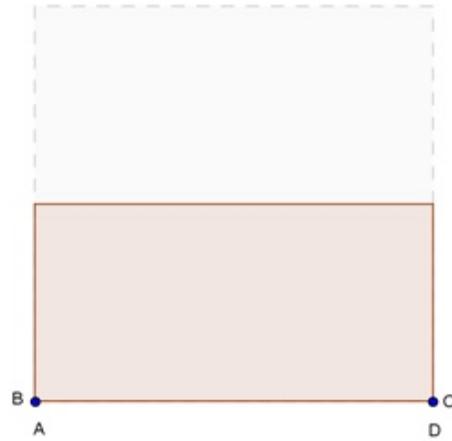
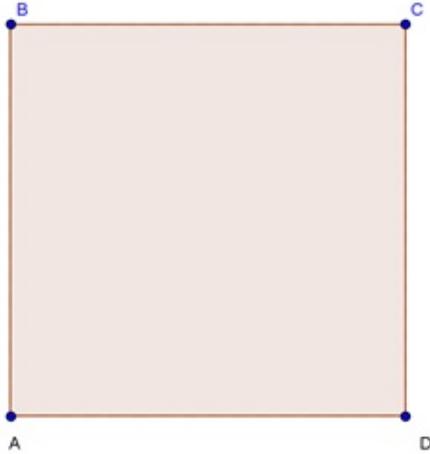


Figura 3.17: Folha quadrada - fonte: figura própria

Figura 3.18: Pentágono regular Passo 1 - fonte: figura própria

Devemos fazer uma dobradura que leve o ponto  $B$  até o segmento  $\overline{EF}$  (dobra valley), fazendo assim  $\overline{EH}$  (figura 3.19).

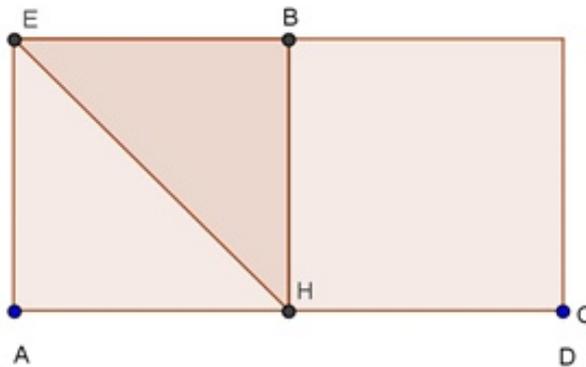


Figura 3.19: Pentágono regular - Passo 2 - fonte: figura própria

Desfaremos a dobradura anterior levando o ponto  $B$  ao ponto  $A$ . Faremos uma dobradura levando  $B$  até  $E$  e  $C$  até  $F$  (dobra valley). Faremos o Vinco  $\overline{IJ}$  e marcaremos o ponto  $K$ , interseção de  $\overline{EH}$  com  $\overline{IJ}$  (figura 3.20).

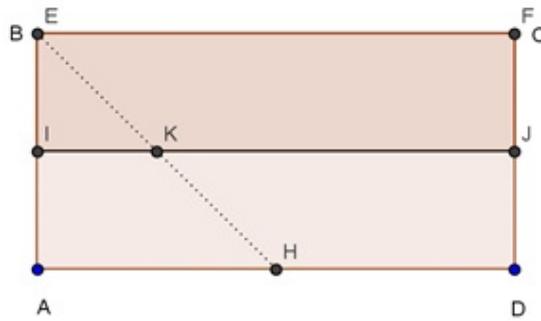


Figura 3.20: Pentágono regular - Passo 3 - fonte: figura própria

Desfaremos a dobradura anterior levando  $B$  ao ponto  $A$  e  $C$  ao ponto  $D$ . Faremos uma dobradura (dobra valley) para levar o ponto  $F$  até o ponto  $K$  (figura 3.21).

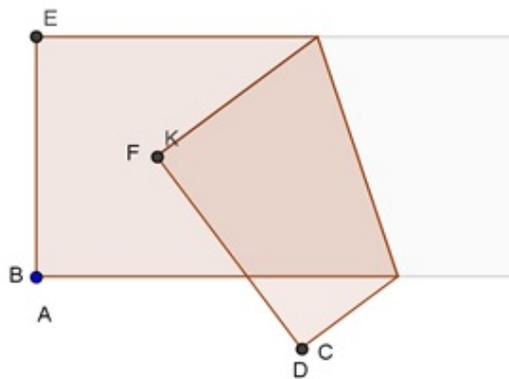


Figura 3.21: Pentágono regular - Passo 4 - fonte: figura própria

Faremos outra dobradura (dobra valley) levando o ponto  $F$  até o segmento  $\overline{LM}$  (figura 3.22).

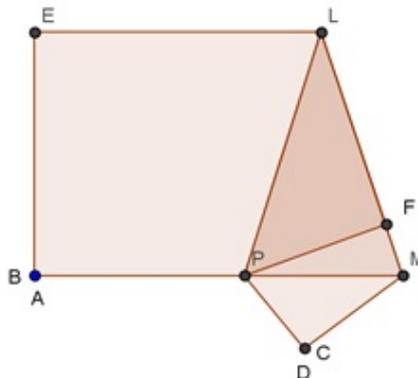


Figura 3.22: Pentágono regular - Passo 5 - fonte: figura própria

Devemos fazer uma dobradura para trás (dobra mountain) no segmento  $\overline{LP}$  (figura 3.23).

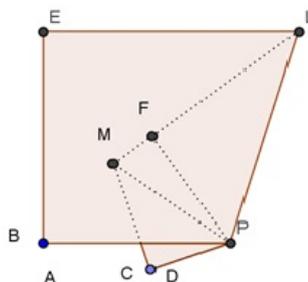


Figura 3.23: Pentágono regular - Passo 6 - fonte: figura própria

Devemos fazer mais uma dobradura de forma que o segmento  $\overline{LE}$  fique sobre o segmento  $\overline{LP}$  (dobra valley) (figura 3.24).

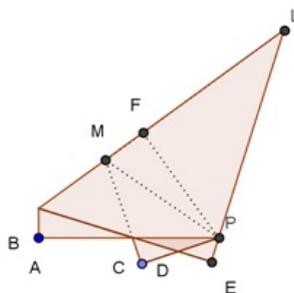


Figura 3.24: Pentágono regular - Passo 7 - fonte: figura própria

Por fim cortaremos com tesoura sobre o segmento  $\overline{FP}$  (figura 3.25). Ao desfazer as dobraduras encontramos o pentágono regular (figura 3.26).

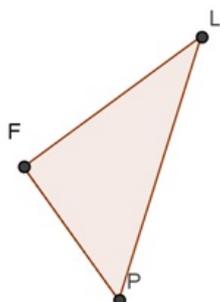


Figura 3.25: Pentágono regular Passo 8 - fonte: figura própria

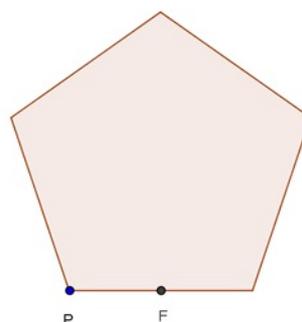


Figura 3.26: Pentágono regular por origami - fonte: figura própria

### 3.5 Construções do hexágono regular

Inicialmente iremos construir um hexágono regular usando os instrumentos euclidianos. Para isso devemos fazer o seguinte:

Tomemos um segmento  $\overline{AB}$  e traçaremos a partir dele dois círculos de centros em  $A$  e  $B$  e raio igual a  $\overline{AB}$ . Chamaremos de  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente. Marcaremos um de seus pontos de interseção e chamaremos de  $O$  (figura 3.27). O ponto  $O$  será o centro do hexágono regular como veremos posteriormente.

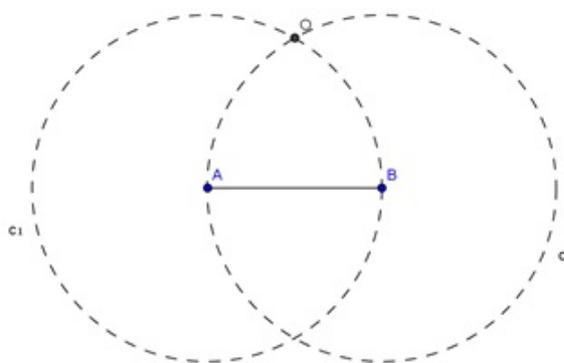


Figura 3.27: Segmento  $\overline{AB}$  e círculos  $c_1$  e  $c_2$  - fonte: figura própria

Traçaremos o círculo de centro em  $O$  e raio igual a  $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{AB}$ , o qual chamaremos de  $c_3$ . Chamaremos o outro ponto da interseção de  $c_1$  e  $c_3$  de  $F$ . Chamaremos o ponto de interseção de  $c_3$  e  $c_2$  de  $C$  (figura 3.28).

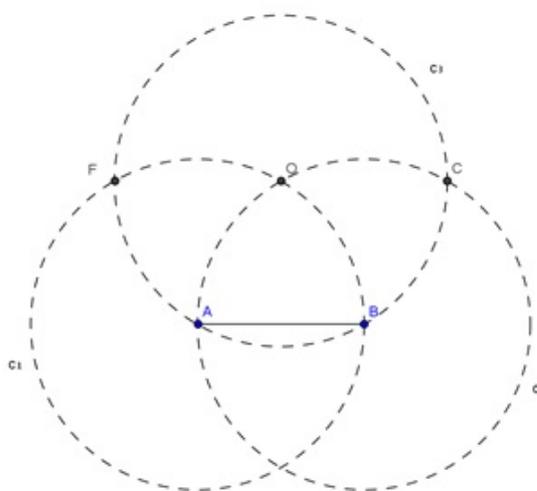


Figura 3.28: Círculos  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  - fonte: figura própria

Traçaremos o círculo de centro em  $C$  e raio igual a  $\overline{CO} = \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{AB}$ , o qual chamaremos de  $c_4$ . Chamaremos o outro ponto de interseção de  $c_4$  e  $c_3$  de  $D$  (figura 3.29).

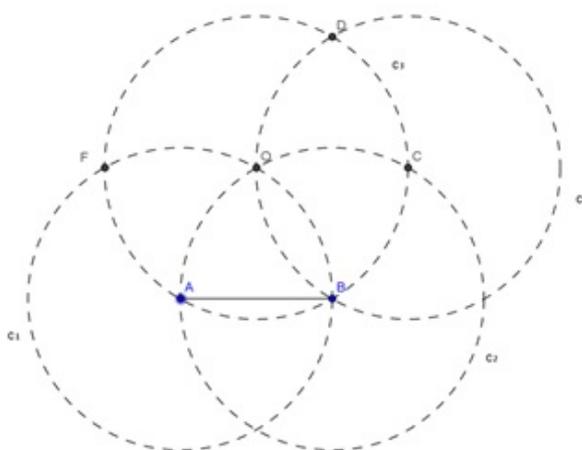


Figura 3.29: Círculos  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  - fonte: figura própria

Em seguida traçaremos o círculo de centro em  $D$  e raio igual a  $\overline{DO} = \overline{CO} = \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{AB}$ , o qual chamaremos de  $c_5$ . Chamaremos o outro ponto da interseção de  $c_5$  e  $c_3$  de  $E$ . Traçamos em seguida o hexágono regular  $ABCDEF$  (figura 3.30).

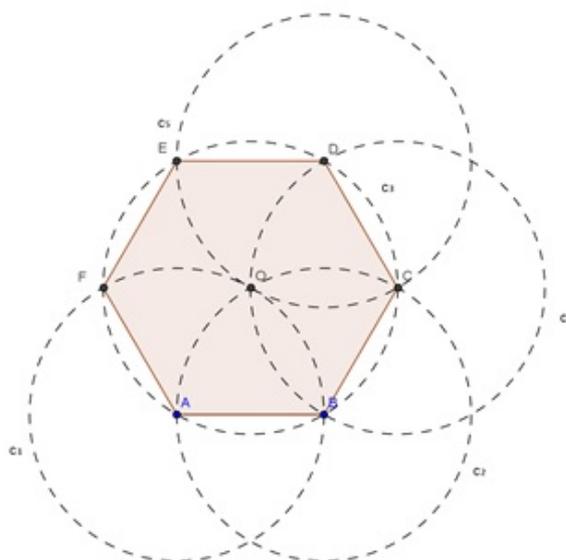


Figura 3.30: Hexágono regular  $ABCDEF$  - fonte: figura própria

Agora iremos construir um hexágono regular por dobraduras. Faremos uma adaptação da construção de origami Make [23]. Façamos o seguinte:

Tomemos uma folha quadrada (figura 3.31) e faremos uma dobradura (dobra valley), dividindo-a em duas partes iguais. Isso levará o ponto  $D$  a ficar sobre o ponto  $C$  e o ponto  $A$  a ficar sobre o ponto  $B$ . Faremos  $\overline{EF}$  (figura 3.32).

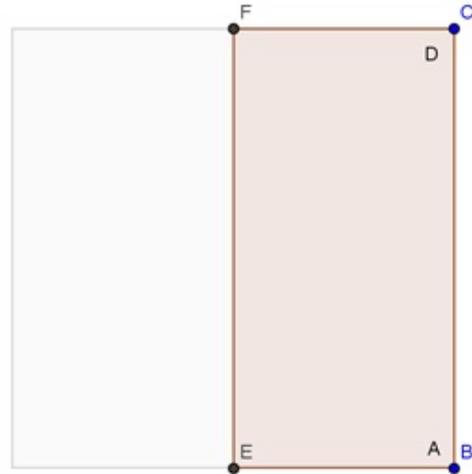
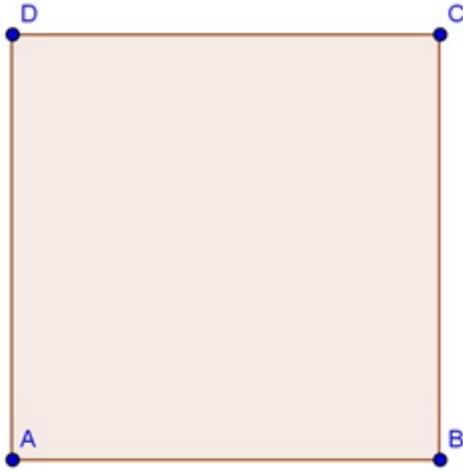


Figura 3.31: Folha quadrada - fonte: figura própria

Figura 3.32: Hexágono regular – passo 1 - fonte: figura própria

Desfaremos a dobradura anterior. Faremos uma outra dobradura levando  $\overline{AD}$  sobre  $\overline{EF}$  (dobra valley) gerando  $\overline{GH}$ . Faremos outra que leve  $\overline{BC}$  sobre  $\overline{EF}$  gerando  $\overline{IJ}$  (figura 3.33).

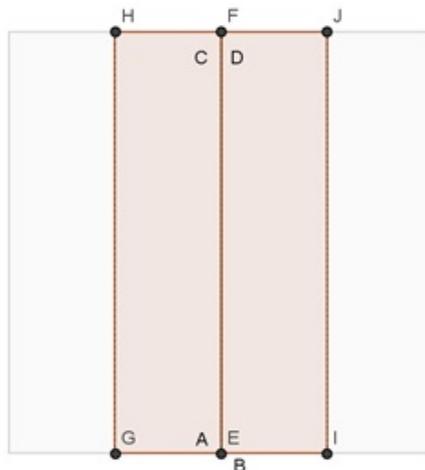


Figura 3.33: Hexágono regular – passo 2 - fonte: figura própria

Desfaremos as duas dobraduras anteriores. Faremos quatro dobraduras (dobras valley) para levar  $A$  sobre  $\overline{GH}$ ,  $D$  sobre  $\overline{GH}$ ,  $B$  sobre  $\overline{IJ}$  e  $C$  sobre  $\overline{IJ}$ . Marcaremos o ponto  $P$  (figura 3.34).

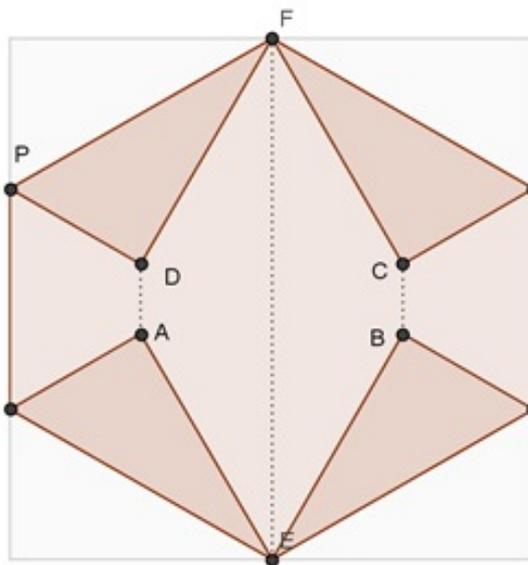


Figura 3.34: Hexágono regular – passo 3 - fonte: figura própria

Desfaremos as dobraduras e faremos uma dobradura (dobra valley) que leve  $\overline{AB}$  até  $\overline{CD}$  gerando  $\overline{RS}$  e os pontos  $T$  e  $O$  (figura 3.35).

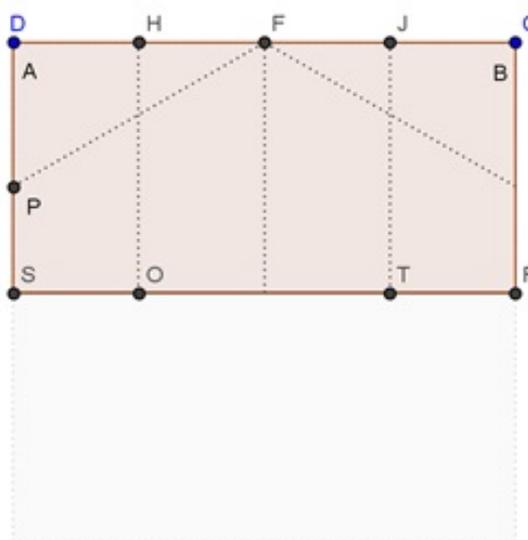


Figura 3.35: Hexágono regular – passo 4 - fonte: figura própria

Faremos uma dobradura (dobra valley) que leve  $R$  até  $\overline{JT}$  e outra dobradura (dobra valley) que leve  $S$  até  $\overline{HO}$  (figura 3.36).

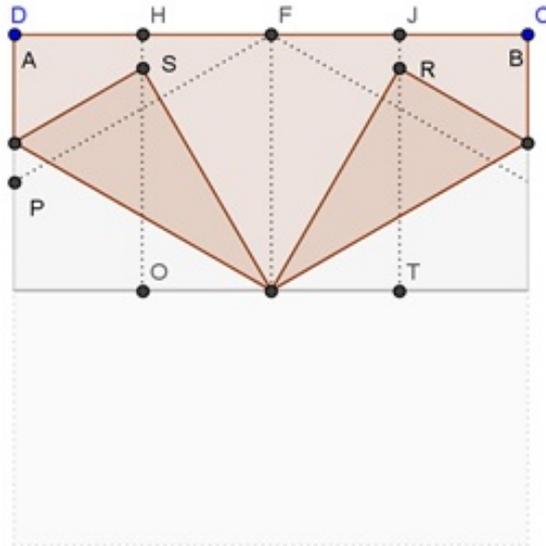


Figura 3.36: Hexágono regular – passo 5 - fonte: figura própria

Faremos uma dobradura (dobra mountain) que leve o ponto  $C$  até o ponto  $D$  (figura 3.37).

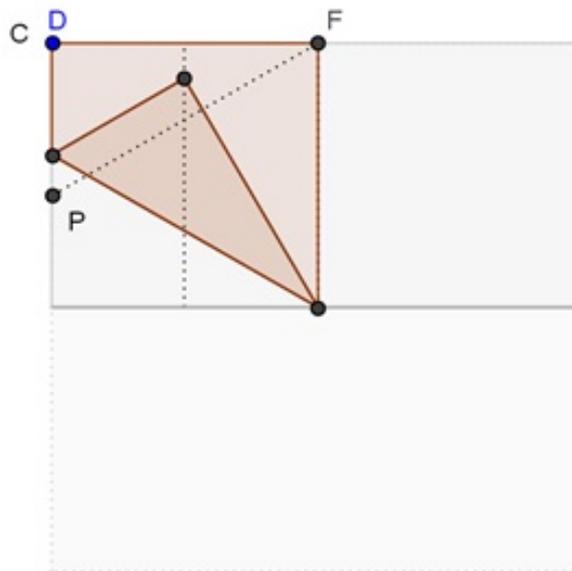


Figura 3.37: Hexágono regular – passo 6 - fonte: figura própria

Agora cortaremos sobre o segmento  $\overline{FP}$  (figura 3.38) e abriremos a folha (figura 3.39).

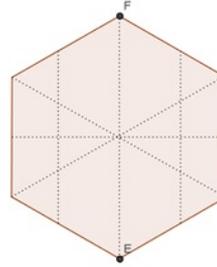
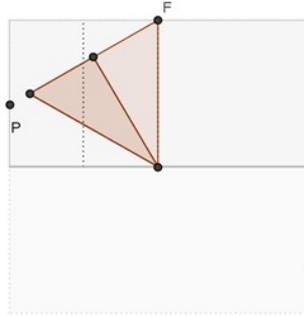


Figura 3.38: Hexágono regular – passo 7  
- fonte: figura própria

Figura 3.39: Hexágono regular por ori-  
gami - fonte: figura própria

### 3.6 Construções do octógono regular

Para construção do octógono regular com instrumentos euclidianos, usaremos a divisão de um arco em 2. Isto é, a partir dos arcos obtidos na construção de um quadrado, iremos dividi-los ao meio. Isso mostra que é possível construir um polígono regular, usando régua e compasso, a partir de outro pré-existente apenas dividindo o arco em 2. Em outras palavras, se um polígono regular de  $n$  lados,  $P_n$  é construtível, então outro com o dobro do número de lados,  $P_{2n}$  também será. Façamos o seguinte:

Partiremos do quadrado  $AGBF$  construído anteriormente neste capítulo. Traçaremos nele as mediatrizes dos segmentos  $\overline{BF}$  e  $\overline{BG}$ , como já foi feito várias vezes nesse trabalho (figura 3.40).

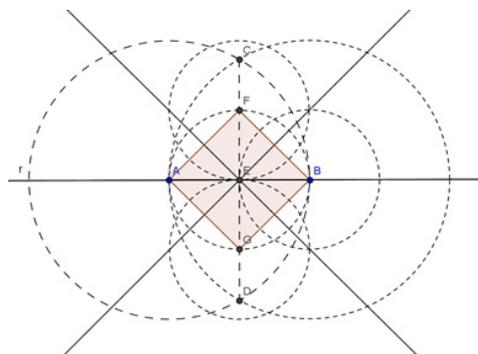


Figura 3.40: Quadrado e mediatrizes de  $\overline{BF}$  e  $\overline{BG}$  - fonte: figura própria

Marcaremos os pontos de interseção das mediatrizes com o círculo no qual estava inscrito o quadrado, os quais chamaremos de  $H, I, J$  e  $K$ . Depois traçamos o octógono  $AKGJBIFH$  (figura 3.41).

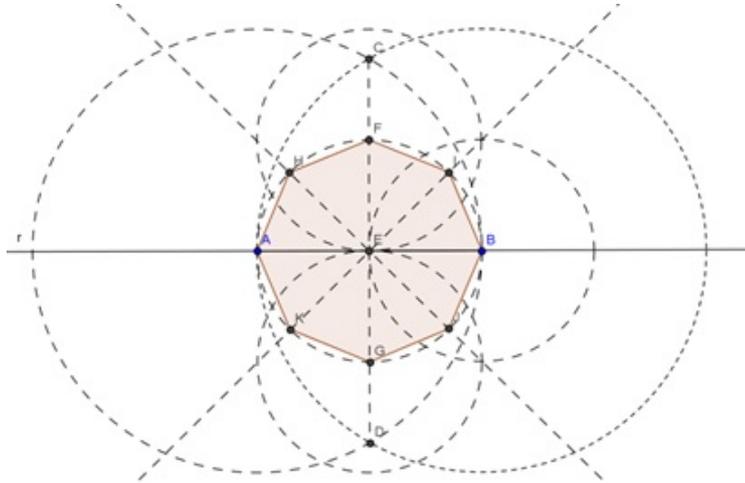


Figura 3.41: Octógono regular - fonte: figura própria

Agora iremos construir um octógono regular por dobraduras. Faremos uma adaptação da construção de Norberto Kawakami[24]. Façamos o seguinte:

Tomemos uma folha quadrada (figura 3.42). A partir dela devemos fazer uma dobradura (dobra valley) que leve o  $\overline{CD}$  sobre  $\overline{AB}$ . Iremos gerar  $\overline{EF}$  (figura 3.43).

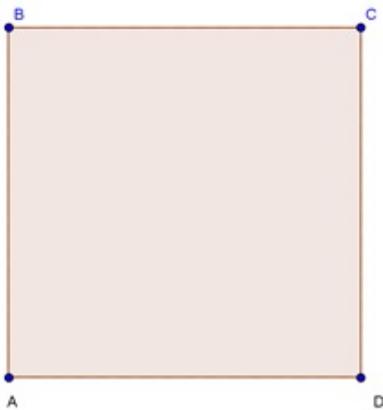


Figura 3.42: Folha quadrada - fonte: figura própria

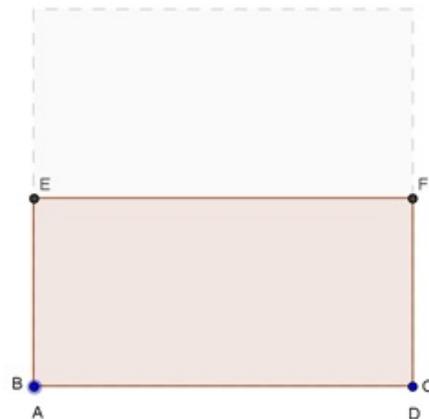


Figura 3.43: Octógono regular – passo 1 - fonte: figura própria

Faremos uma dobradura (dobra valley) para levar  $\overline{CF}$  sobre  $\overline{AE}$ , gerando assim  $\overline{GH}$ . Em seguida desfaremos a dobradura (figuras 3.44 e 3.45).

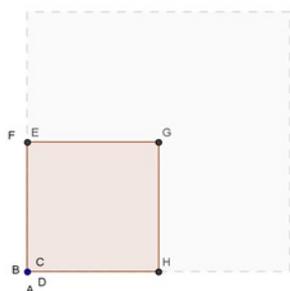


Figura 3.44: Octógono regular – passo 2  
- fonte: figura própria

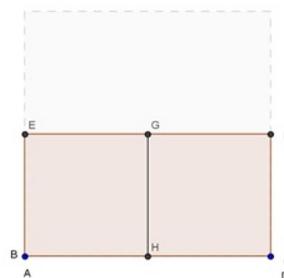


Figura 3.45: Octógono regular – passo 3  
- fonte: figura própria

Faremos uma dobradura (dobra valley) que levará  $E$  até  $H$ , e outra dobradura (dobra mountain) que levará  $F$  até  $H$  (figura 3.46).

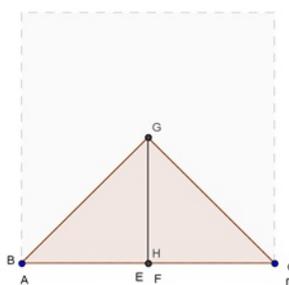


Figura 3.46: Octógono regular – passo 4 - fonte: figura própria

Faremos uma dobradura (dobra mountain) que colocará o segmento  $\overline{BG}$  sobre o segmento  $\overline{GH}$  e outra dobradura (dobra valley) que colocará o segmento  $\overline{CG}$  sobre o segmento  $\overline{GH}$ . Iremos gerar os pontos  $J$  e  $K$  (figura 3.47).

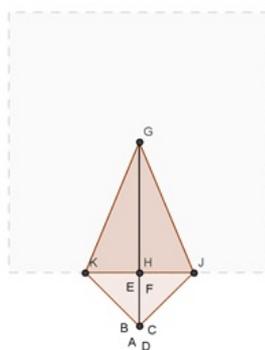


Figura 3.47: Octógono regular – passo 4 - fonte: figura própria

Para finalizar devemos cortar com a tesoura sobre o segmento  $\overline{JK}$ . Ao abrir, observaremos um octógono de centro  $G$  e lado  $\overline{JK}$  (figura 3.48).

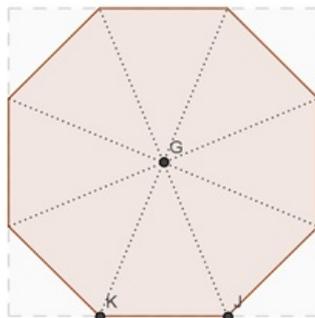


Figura 3.48: Octógono regular por origami - fonte: figura própria

### 3.7 Polígonos construtíveis

Após a construção de alguns polígonos regulares numa sala de aula ou até mesmo numa atividade recreativa, podem surgir as perguntas: Quais polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso? E quais são construtíveis com origami?

Segundo Eduardo Wagner[1], as construções de polígonos regulares com régua e compasso consistem em dividir um círculo em  $n$  partes de mesmo comprimento. Logo o problema consiste em construir o ângulo central  $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ , ou seu cosseno. Os “Elementos” de Euclides (330-275 a.C.) fornecem a construção com régua e compasso, de  $P_n$ , para  $n=3, 4, 5, 6, 8, 10$  e  $15$ . Ficava então a dúvida, outros polígonos omitidos são possíveis de ser construídos? Foi a partir de Gauss<sup>1</sup>, em 1796, que esse problema foi decidido. Inicialmente, observamos que se  $P_n$  for construtível, então  $P_{2n}$  também o será, já que é imediato construir a metade de um arco previamente construído, ou equivalentemente, bissectar um ângulo qualquer. Esse fato foi usado durante a construção do octógono regular a partir do quadrado inscrito num círculo (**seção 3.6**).

Também, segundo Wagner, se um polígono  $P_n$  for construtível e  $n$  tiver um fator  $m \geq 3$ , então  $P_m$  também será construtível pois, sendo  $n = mq$ , é só ligar  $q$  em  $q$  os vértices de  $P_n$  e obteremos  $P_m$ . Sendo assim, é possível construir um pentágono regular

<sup>1</sup>Johann Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica.

a partir de um pentadecágono regular já que o mesmo é construtível. Basta ligar seus vértices de 3 em 3.

Por outro lado, se  $m$  e  $n$  forem primos entre si, e  $P_m$  e  $P_n$  forem construtíveis, então também será construtível  $P_{m \cdot n}$ . Isto pode ser observado na possibilidade de construção do dodecágono regular já que triângulo equilátero e quadrado são construtíveis. Na figura 3.49 observamos que se colocarmos um triângulo equilátero e um quadrado inscritos num círculo, de forma que eles tenham um vértice em comum, teremos dois vértices consecutivos do dodecágono. Isso nos possibilita saber o lado do dodecágono e usando um compasso traçar os demais lados fazendo a interseção com o círculo no qual os dois polígonos estão inscritos.

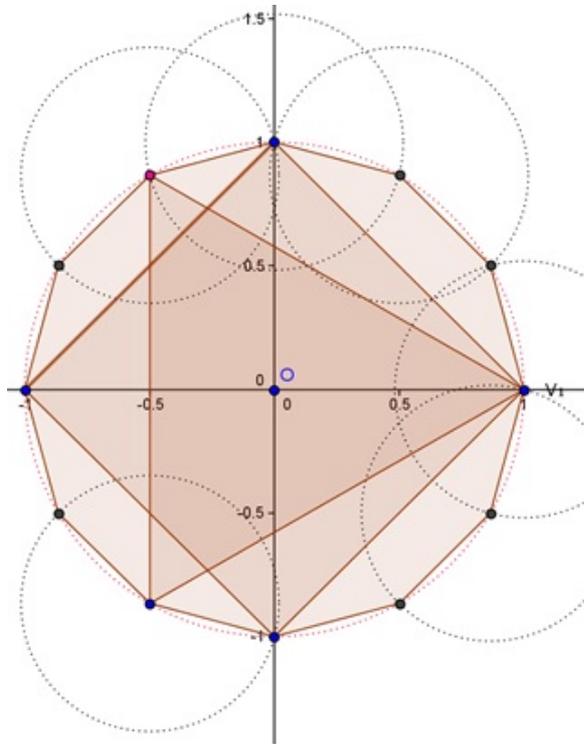


Figura 3.49: Dodecágono regular, quadrado e do triângulo equilátero - fonte: figura própria

Mas isso não é tudo. Se  $p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$  for a decomposição do número  $n$  em fatores primos, então  $P_n$  será construtível se e somente se, para cada  $P_i$ , o polígono regular de  $p_i^{k_i}$  lados o for. Mais ainda, como o fator 2 não causa problema, temos que nos preocupar apenas com os primos ímpares.

Gauss relacionou a construção de polígonos regulares com as soluções de equações

de raízes complexas: “Gauss foi o primeiro a relacionar o problema da construção de  $P_n$  com as chamadas “raízes  $n$ -ésimas da unidade”, isto é, as soluções complexas da equação  $x^n = 1$ . De fato, estas soluções dividem o círculo unitário em  $n$  arcos de mesmo comprimento, a partir da solução 1. Especificamente, as soluções da equação  $x^n = 1$  são:  $1; w; w^2; \dots; w^{n-1}$ , onde  $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , com  $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ . A construtibilidade de  $P_n$ , como vimos, é equivalente, à de  $\cos \theta$ , ou de modo equivalente, à de  $2 \cos \theta = w + \frac{1}{w}$ .” (Wagner, 2007, p. 103 -104)

Gauss chegou a uma generalização dos polígonos que são construtíveis afirmando que se  $n$  for primo, então o polígono regular de  $n$  lados será construtível se  $n$  for da forma  $2^{2^m} + 1$ , os números primos dessa forma são conhecidos como os primos de Fermat.

Usando a teoria desenvolvida por Gauss para esse caso, temos que são construtíveis, com régua e compasso, os polígonos regulares de lados iguais a: 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 17; 20; 24; 30; 32; 35; ..., isto é, todos os polígono regulares cujos número de lados são da forma  $n = 2^u \cdot \phi \geq 3$ , onde  $\phi$  é o produto de distintos primos de Fermat[25], portanto não são construtíveis, com régua e compasso, os que tem número de lados iguais a: 7; 9; 11; 13; 14; 18; 19; 21; 23; 25; 28; 29; 31; ... .

Segundo informações da Wikipedia[3], os cinco primeiros axiomas do origami são suficientes para a construção de todos os polígonos que podem ser construídos com os instrumentos euclidianos. Já a utilização do axioma 6 nos permite construir mais. Permite a construção de todos os polígonos da forma  $2^a 3^b p \geq 3$  lados[6], onde  $p$  é o produto de distintos primos de Pierpont[26]. Como os primos de Pierpont são da forma  $2^a 3^b + 1$ , então os primos de Fermat são um subconjunto dos primos de Pierpoint. Para verificar isso, basta usar  $a = 2^m$  e  $b = 0$ , teremos assim os primos de Fermat. Se tomarmos  $a = 1$  e  $b = 1$ , teremos 7, que é um primo de Pierpont mas não de Fermat.

### 3.8 Construções do heptágono regular

Primeiramente construiremos o heptágono regular por dobraduras. A explicação geométrica dos passos será feita após a sua construção. Limitaremos-nos, inicialmente, a construção propriamente dita, por origami.

### 3.8.1 Construção do heptágono regular por dobraduras

Faremos uma adaptação da construção de Robert Geretschlager[18].

Façamos o seguinte:

**Passo 1:** Tomemos uma folha quadrada e façamos uma dobra valley para levarmos o segmento  $\overline{V_1V_2}$  ao segmento  $\overline{V_3V_4}$ . Depois fazemos outra dobra valley para levar o segmento  $\overline{V_2V_3}$  ao segmento  $\overline{V_1V_4}$ . Em seguida, desfaremos as dobraduras. Seu centro será chamado de  $M$  (figura 3.50).

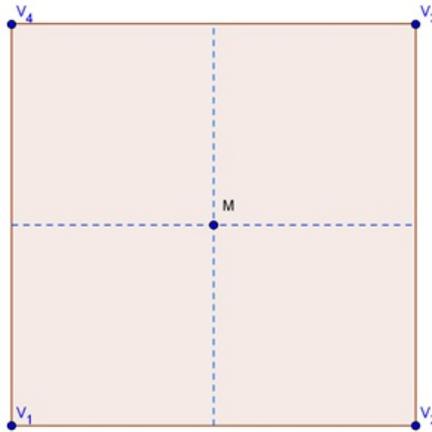


Figura 3.50: Heptágono - construção - passo 1 - fonte: figura própria

**Passo 2:** Fazemos uma dobra mountain que levará  $M$  até o segmento  $\overline{V_3V_4}$ . Depois outra dobra mountain que levará  $M$  até o segmento  $\overline{V_1V_4}$ . Marquemos os pontos  $B$ ,  $P$  e  $Q$  (figura 3.51).

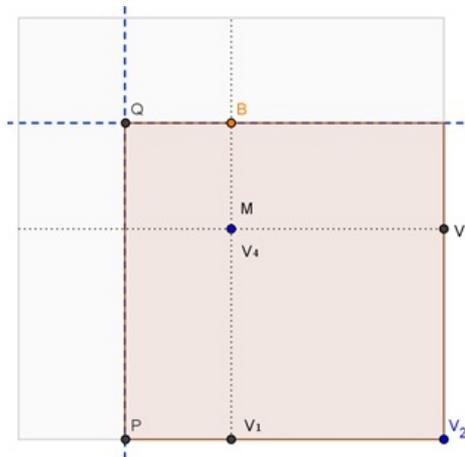


Figura 3.51: Heptágono - construção - passo 2 - fonte: figura própria

**Passo 3:** Levemos o ponto  $P$  ao ponto  $Q$  e marquemos o seu ponto médio, o qual chamaremos de ponto  $A$  (figura 3.52).

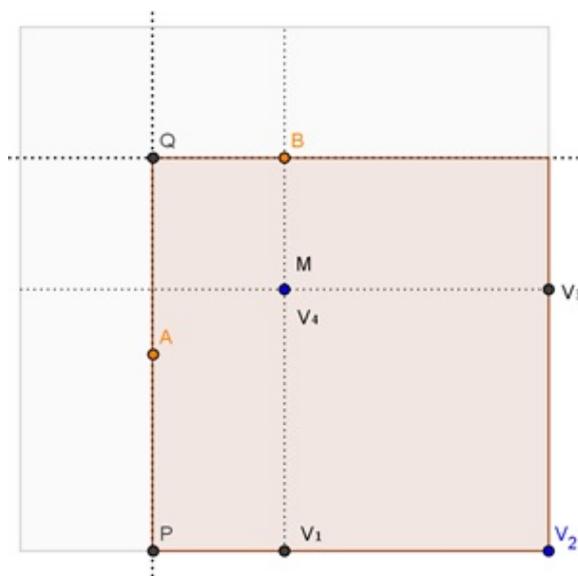


Figura 3.52: Heptágono - construção - passo 3 - fonte: figura própria

**Passo 4:** Fazemos uma dobra valley que levará o ponto  $A$  até o segmento  $\overline{V_1V_4}$  e ao mesmo tempo, o ponto  $B$  ao segmento  $\overline{MV_3}$  (figura 3.53).

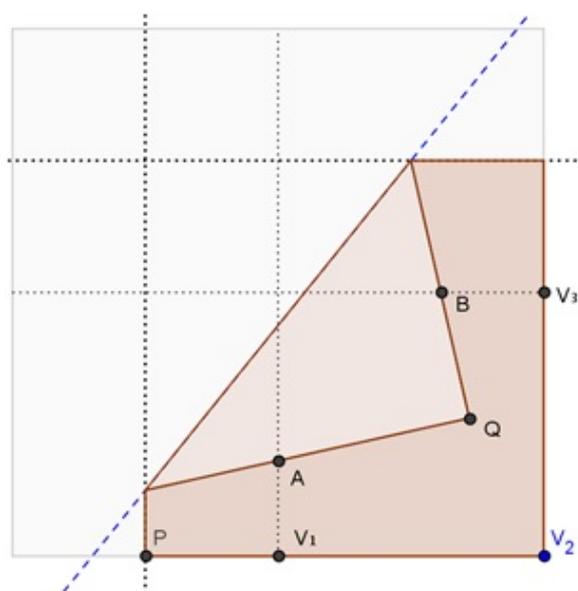


Figura 3.53: Heptágono - construção - passo 4 - fonte: figura própria

**Passo 5:** Desfaremos todas as dobraduras e marquemos os pontos  $C$  e  $D$  (figura 3.54).

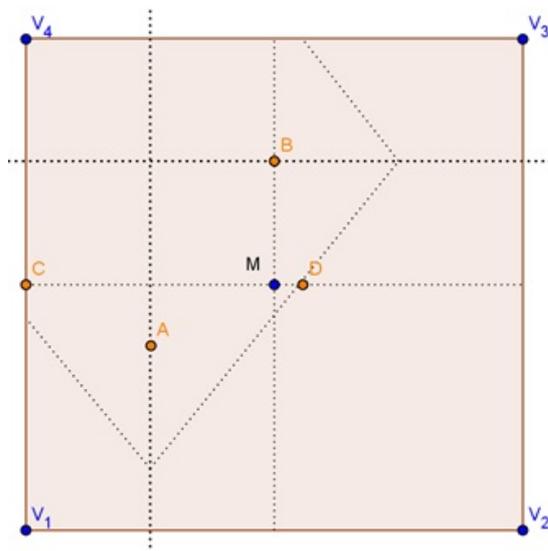


Figura 3.54: Heptágono - construção - passo 5 - fonte: figura própria

**Passo 6:** Fazemos uma dobra valley que leve o ponto  $C$  até o ponto  $D$  pela frente (figura 3.55).

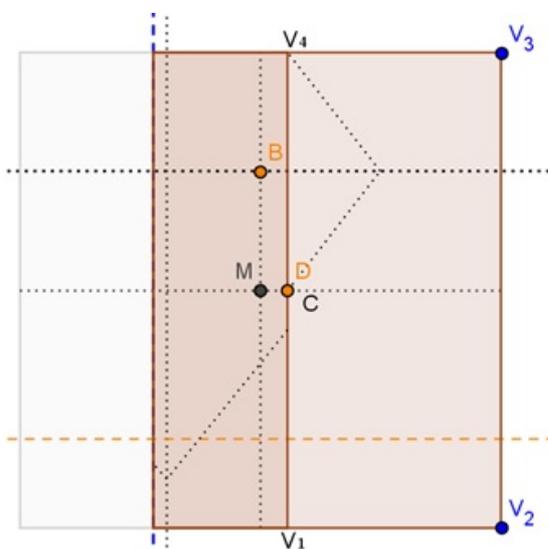


Figura 3.55: Heptágono - construção - passo 6 - fonte: figura própria

**Passo 7:** Fazemos uma dobra mountain vertical sobre a reta na qual está situado o ponto  $A$ . Em seguida outra dobra mountain que leve o ponto  $C$  ao ponto  $D$  por trás (figura 3.56).

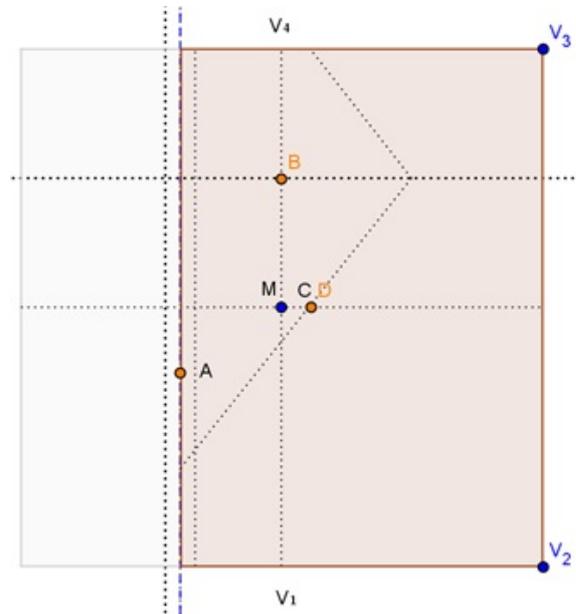


Figura 3.56: Heptágono - construção - passo 7 - fonte: figura própria

**Passo 8:** Desfaremos as dobraduras e marquemos o ponto  $E$  (figura 3.57).

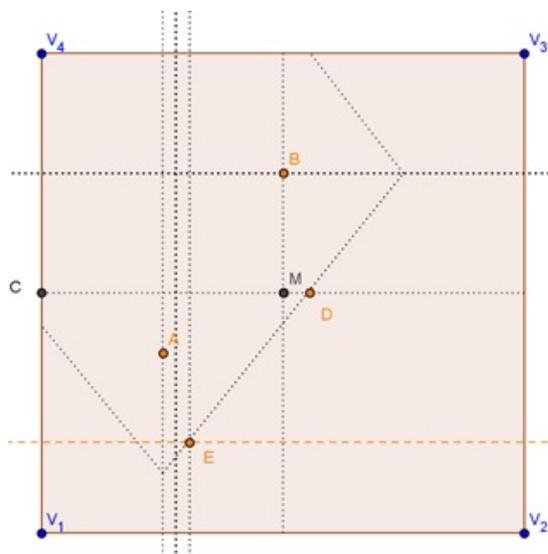


Figura 3.57: Heptágono - construção - passo 8.1 - fonte: figura própria

Em seguida, fazemos uma dobra valley na horizontal que passe por  $E$ . Depois desfaremos esta dobradura e marquemos o ponto  $P_1$  (figura 3.58). Ele será o primeiro vértice do heptágono.

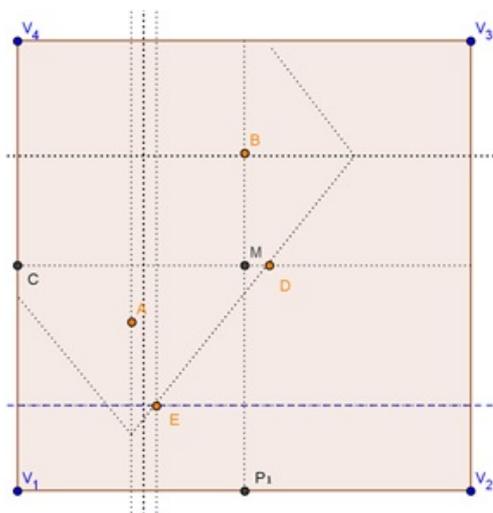


Figura 3.58: Heptágono - construção - passo 8.2 - fonte: figura própria

**Passo 9:** Fazemos uma dobra valley que passe pelo ponto  $M$  e levemos o ponto  $P_1$  até a reta horizontal que passa pelo ponto  $E$ , movendo o vértice  $V_2$ . Marquemos o ponto  $P_7$ . Ele será o sétimo vértice do heptágono (figura 3.59).

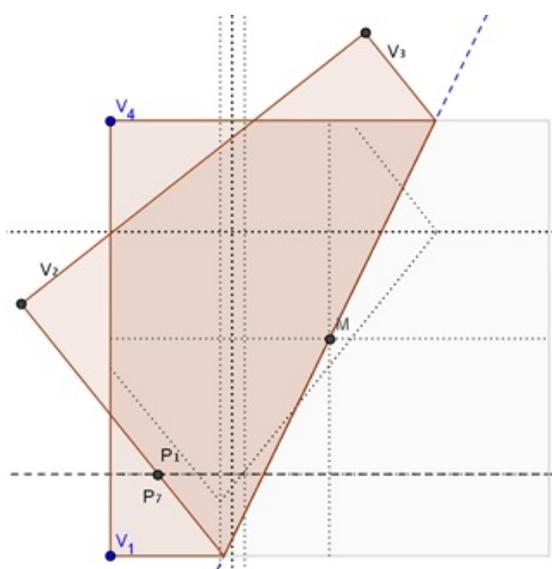


Figura 3.59: Heptágono - construção - passo 9.1 - fonte: figura própria

Em seguida desfaremos a dobradura anterior e fazemos outra dobra valley que passe pelo ponto  $M$  e leve o ponto  $P_1$  até a reta horizontal que passa por  $E$ , movendo o vértice  $V_1$ . Em seguida marquemos o ponto  $P_2$ . Ele será o segundo vértice do heptágono

(figura 3.60).

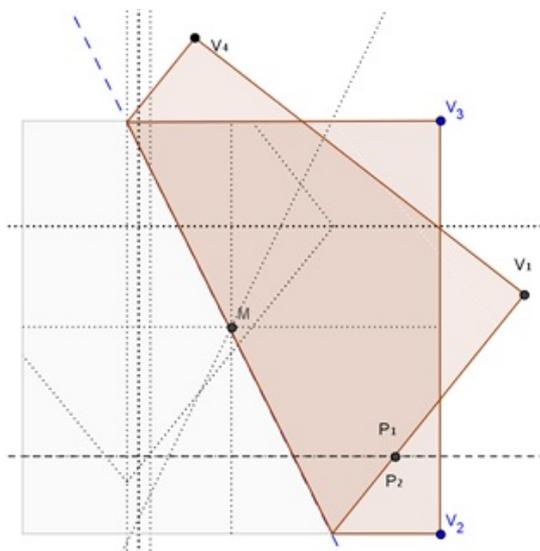


Figura 3.60: Heptágono - construção - passo 9.2 - fonte: figura própria

**Passo 10:** Desfaremos a última dobradura. Fazemos uma dobra mountain sobre a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Em seguida, fazemos outra dobra mountain sobre a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_7$  (figura 3.61).

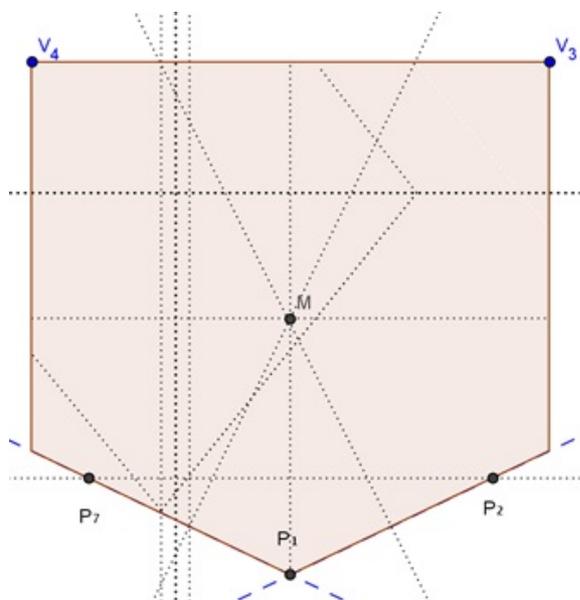


Figura 3.61: Heptágono - construção - passo 10 - fonte: figura própria

**Passo 11:** Fazemos uma dobra valley que passe pelos pontos  $M$  e  $P_2$ . Marcamos os pontos  $P_3$  (projeção de  $P_1$ ) e  $P_4$  (projeção de  $P_7$ ) (figura 3.62).

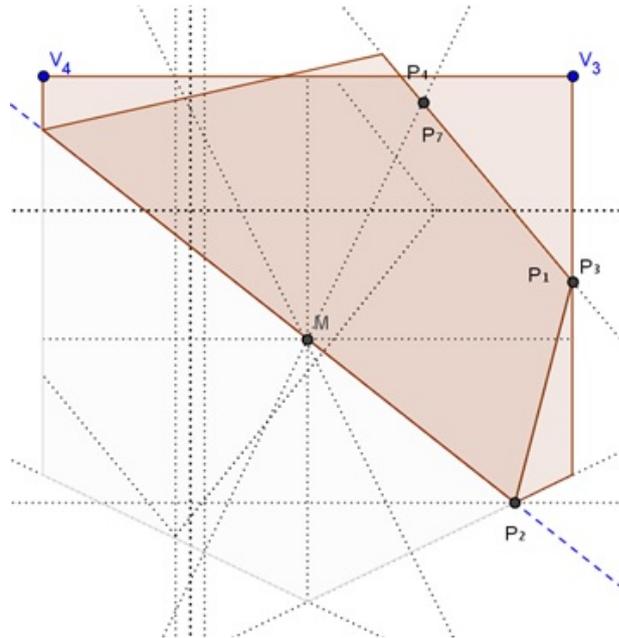


Figura 3.62: Heptágono - construção - passo 11 - fonte: figura própria

**Passo 12:** Fazemos uma dobra mountain que passe pelos pontos  $P_2$  e  $P_3$ . Em seguida, fazemos uma dobra mountain que passe pelos pontos  $P_3$  e  $P_4$  (figura 3.63).

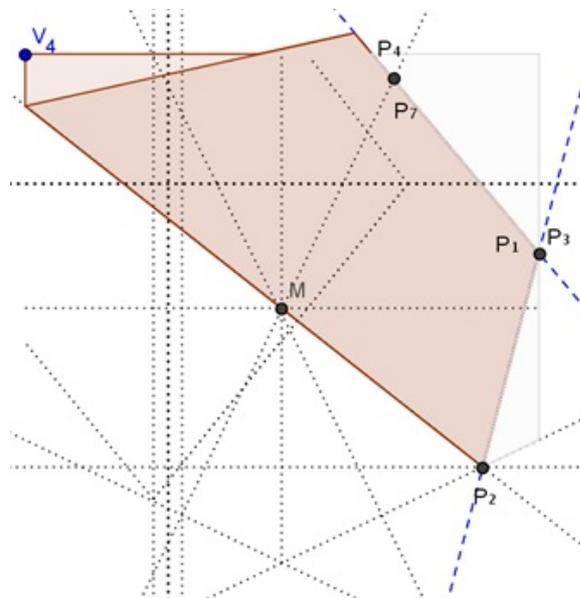


Figura 3.63: Heptágono - construção - passo 12 - fonte: figura própria

**Passo 13:** Desfaremos a dobradura que passa pelos Pontos  $M$  e  $P_2$  (figura 3.64).

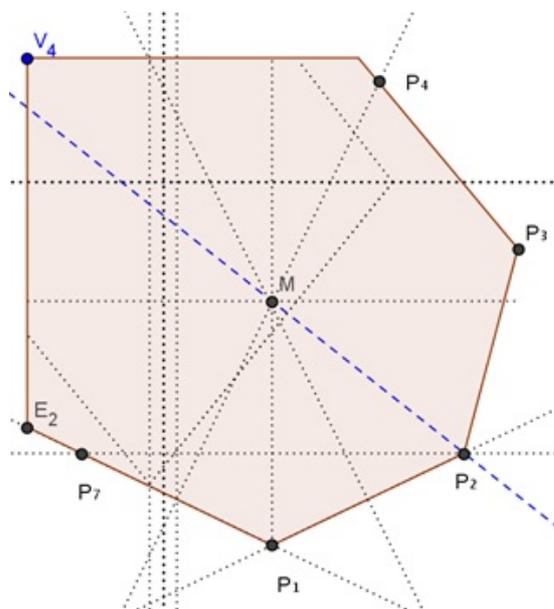


Figura 3.64: Heptágono - construção - passo 13.1 - fonte: figura própria

Em seguida, fazemos uma dobra valley que passe pelos pontos  $M$  e  $P_7$ . Marquemos os pontos  $P_5$  (projeção de  $P_2$ ) e  $P_6$  (projeção de  $P_1$ ) (figura 3.65).

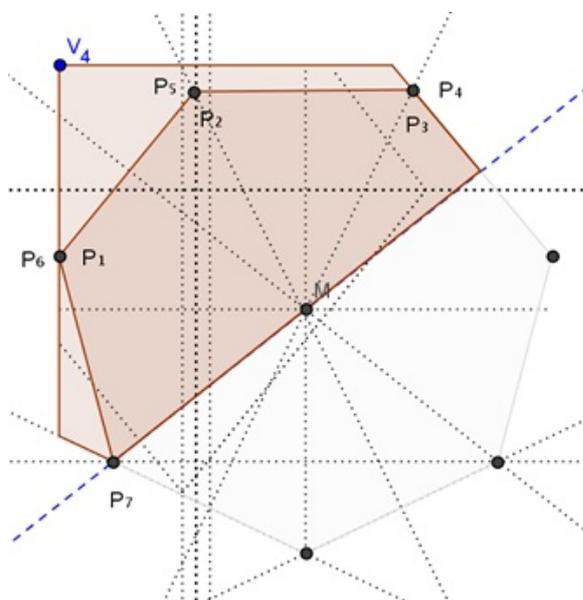


Figura 3.65: Heptágono - construção - passo 13.2 - fonte: figura própria

**Passo 14:** Fazemos uma dobra mountain que passe pelos pontos  $P_5$  e  $P_6$ . Em seguida, fazemos uma dobra mountain que passe pelos pontos  $P_6$  e  $P_7$  (figura 3.66).

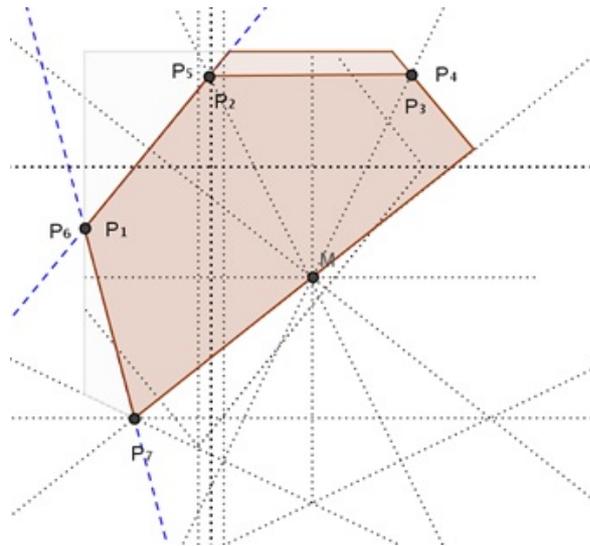


Figura 3.66: Heptágono - construção - passo 14 - fonte: figura própria

**Passo 15:** Desfaremos a dobradura que passa pelos Pontos  $P_7$  e  $M$  (figura 3.67).

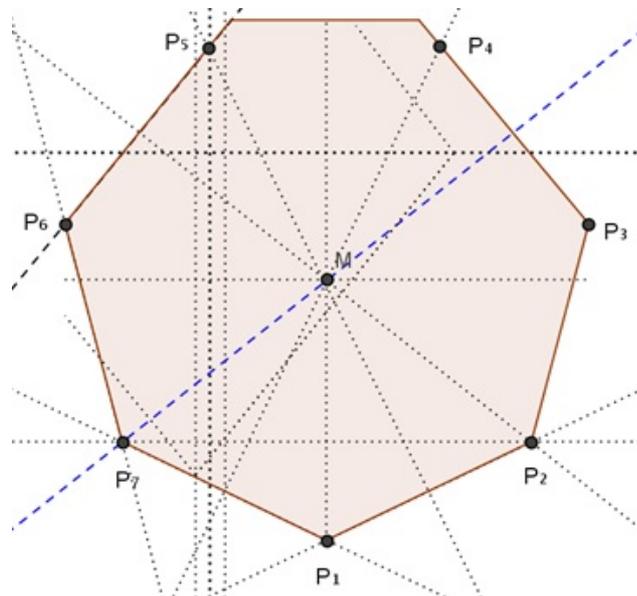


Figura 3.67: Heptágono - construção - passo 15.1 - fonte: figura própria

Em seguida, fazemos uma dobra valley que passe pelos pontos  $P_4$  e  $P_5$  (figura 3.68).

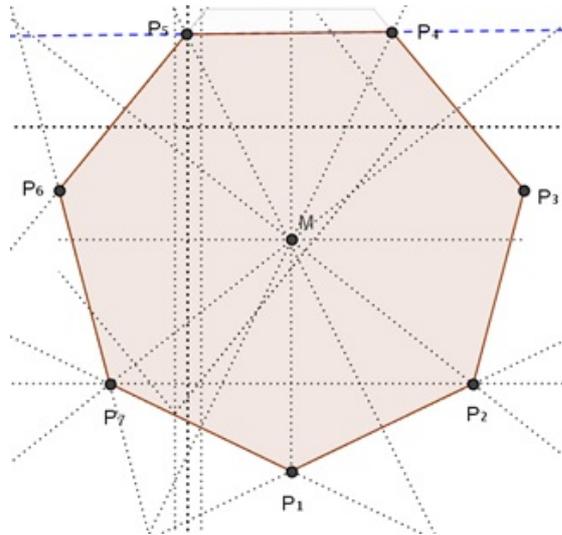


Figura 3.68: Heptágono - construção - passo 15.2 - fonte: figura própria

Teremos assim o heptágono regular  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ , construído por dobraduras (figura 3.69).

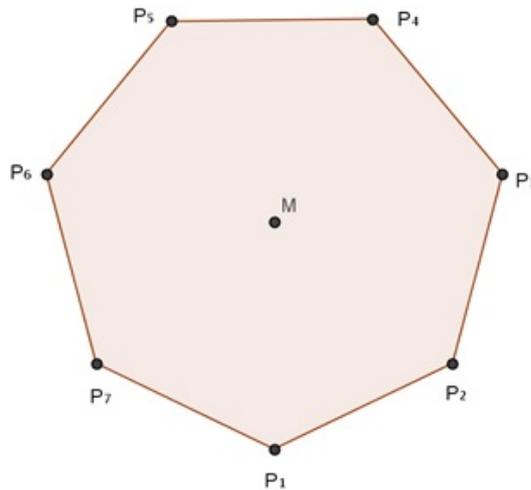


Figura 3.69: Heptágono regular - fonte: figura própria

### 3.8.2 Demonstrando a construção do heptágono regular

Mostraremos uma adaptação da demonstração feita por Robert Geretschläger[18]. Como vimos na **seção 3.7**, construir um heptágono consiste em resolver a equação do tipo  $z^7 - 1 = 0$ , onde  $z$  são os vértices do heptágono inscrito num círculo de raio 1 marcados no plano de Gauss. Se atentarmos que  $z_1 = 1$  é uma das raízes, podemos dividir e

encontrar uma nova equação onde as raízes serão os outros 6 vértices do heptágono.

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Sabemos que se  $z$  é raiz de um polinômio, então  $\bar{z}$  também o será, então o eixo real será o eixo de simetria entre os demais vértices do heptágono (figura 3.70).

Como  $|z_n| = |\bar{z}_n| = 1$ , temos que  $\bar{z}_n = \frac{1}{z_n}$ .

Definiremos  $w = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ . Notamos então que  $w$  é uma variável Real. Observemos também que as 7 raízes de  $z^7 - 1 = 0$ , ou equivalentemente, os 7 vértices do heptágono podem ser escritos como:

$$z_1 = 1 + i \cdot 0, z_2 = \cos \frac{2\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{7}, z_3 = \cos \frac{4\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{4\pi}{7}, z_4 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{6\pi}{7}, z_5 = \bar{z}_4 = \cos \frac{8\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{8\pi}{7}, z_6 = \bar{z}_3 = \cos \frac{10\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{10\pi}{7} \text{ e } z_7 = \bar{z}_2 = \cos \frac{12\pi}{7} + i \cdot \text{sen} \frac{12\pi}{7}$$

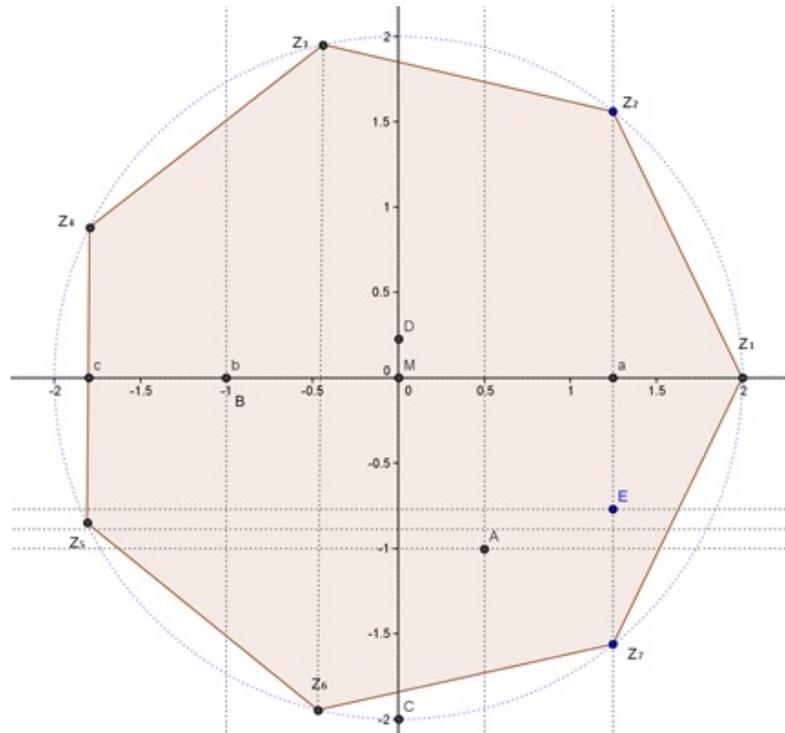


Figura 3.70: Heptágono regular no plano de Gauss - fonte: figura própria

Sejam  $a = \cos \frac{2\pi}{7} = \text{Re}(z_2) = \text{Re}(z_7)$ ,  $b = \cos \frac{4\pi}{7} = \text{Re}(z_3) = \text{Re}(z_6)$  e  $c = \cos \frac{6\pi}{7} = \text{Re}(z_4) = \text{Re}(z_5)$ .

Dividindo a equação polinomial  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  por  $z^3 \neq 0$ , temos  $z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$ .

Como  $w^3 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3} = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3w$ , temos que  $w^3 - 3w = z^3 + \frac{1}{z^3}$ .

Como  $w^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$ , temos que  $w^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$ .

Vamos então, rearmar a equação  $z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$  para  $z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$ . Substituindo as variáveis teremos  $w^3 - 3w + w^2 - 2 + w + 1 = 0$ , que equivale a  $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$ .

Podemos observar que cada raiz da equação  $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$  (já que  $w$  é real) será igual ao dobro da parte real de duas raízes conjugadas da equação  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ . De fato isso possibilitará encontrar as seis raízes da equação  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  no plano de Gauss encontrando as raízes da equação  $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$  pegando a metade de seus valores, traçando retas paralelas ao eixo imaginário e marcando o seu ponto de interseção com o círculo de raio 1 e centro na origem.

Veremos agora o passo a passo desse raciocínio aplicado a construção do heptágono regular.

Tomemos inicialmente uma folha quadrada. Faremos duas dobras (valey para dividir a folha em 4 partes). Marcaremos os vértices desse quadrado no plano cartesiano como sendo  $(-2,-2)$ ,  $(2,-2)$ ,  $(2,2)$ ,  $(-2,2)$ . Desta forma o centro do quadrado será o ponto  $M(0,0)$  (figura 3.71).

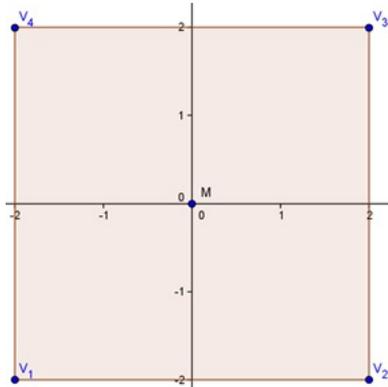


Figura 3.71: Heptágono – demonstração - 1 - fonte: figura própria

Como demonstrado no Axioma 6, as soluções da cúbica  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  são as inclinações das retas tangentes as parábolas  $p_1$  e  $p_2$  com focos  $F_1\left(-\frac{p}{2} + \frac{r}{2}, \frac{q}{2}\right)$  e  $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$  e diretrizes  $r_1 : x = -\frac{p}{2} - \frac{r}{2}$  e  $r_2 : y = -\frac{1}{2}$ , respectivamente.

As soluções de  $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$  nos permitem obter as inclinações das retas tangentes comuns às parábolas de focos  $F_1(-1, -1)$  e  $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$  e diretrizes  $r_1 : x = 0$  e  $r_2 : y = -\frac{1}{2}$ , respectivamente.

Sabemos que a inclinação da reta tangente as duas parábolas é invariante por translações verticais, então por conveniência usaremos  $F_1(-1, -\frac{1}{2})$  e  $F_2(0, 1)$  e  $r_1 : x = 0$  e  $r_2 : y = 0$ .

Isto é exatamente o que é feito nos passos de 2 a 5 da construção anterior.  $F_1$  é o ponto  $A$  e  $F_2$  é o ponto  $B$  (figuras 3.51 a 3.54). A dobradura do passo 4 é a tangente comum as duas parábolas  $p_1$  e  $p_2$ , citadas anteriormente. Em outras palavras, a inclinação da dobradura do passo 4 é  $2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} = 2a > 0$  (única raiz positiva)(figura 3.72). O passo 4 é o único que não pode ser construído com instrumentos euclidianos.

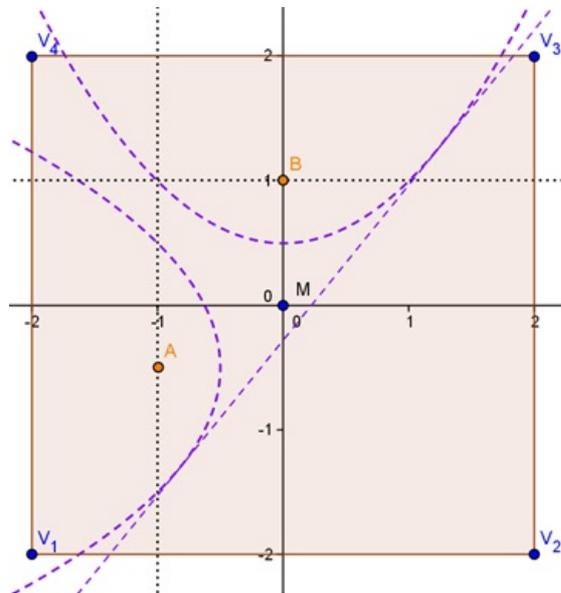


Figura 3.72: Heptágono – demonstração - 2 - fonte: figura própria

Nos passos 6 até 8, ocorre a "transferência da inclinação". No passo 8, o ponto  $E$  tem ordenada  $y = -2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$ . Sabendo que a distância de  $M$  até o ponto  $P_1$  é 2, usaremos o **A5** para encontrar os pontos  $P_2$  e  $P_7$ , sobre a reta que horizontal que passa por  $E$ . Esses pontos  $P_7, P_1$  e  $P_2$  são três consecutivos vértices do heptágono regular.

Assumimos como o ponto  $P_1$  de coordenadas  $(0,-2)$  como o primeiro vértice e continuamos a construção a partir dele.

No passo 10 construímos dois lados do heptágono (figura 3.73).

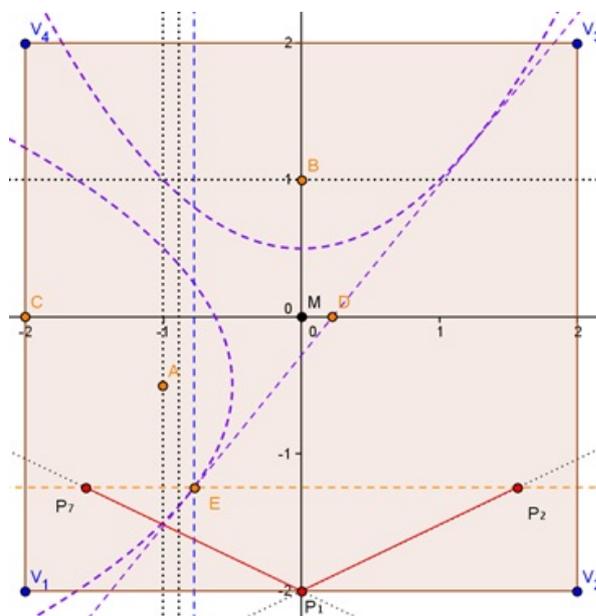


Figura 3.73: Heptágono – demonstração - 3 - fonte: figura própria

Nos passos 11 a 15 da construção, os demais vértices e lados são determinados usando simetria. Até que após o passo 15, o heptágono está construído (figura 3.74).

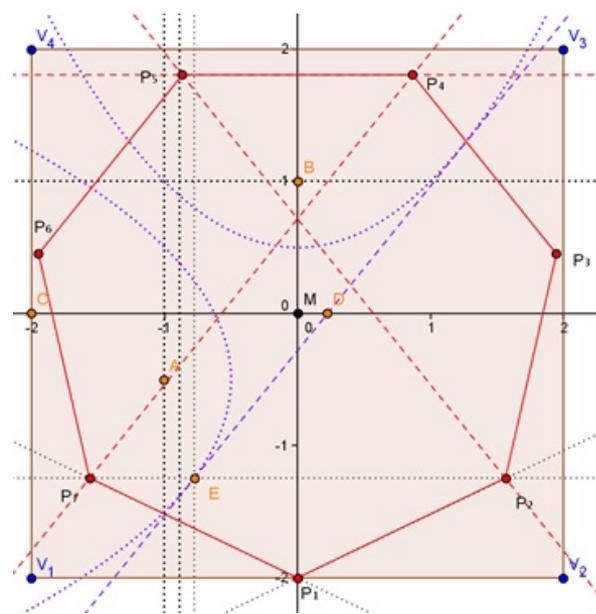


Figura 3.74: Heptágono – demonstração - 4 - fonte: figura própria

### 3.8.3 Entendendo a cúbica originária do heptágono regular

Como vimos anteriormente, a construção do heptágono regular foi possível porque o axioma 6 do origami, nos permite resolver a cúbica  $w^3 + a_1w^2 + b_1w + c_1 = 0$ . Vamos entender como isso foi feito.

Segundo o **A6**, as raízes da equação  $w^3 + a_1w^2 + b_1w + c_1 = 0$  seriam os coeficientes angulares das retas tangentes as parábolas.

$$p_1 : \left(y - \frac{b_1}{2}\right)^2 = 2c \left(x + \frac{a_1}{2}\right) \text{ com foco em } F_1 \left(-\frac{a_1}{2} + \frac{c_1}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ e diretriz } x = -\frac{a}{2} - \frac{c}{2} \text{ e}$$

$$p_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \text{ com foco em } F_2 \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ e diretriz } y = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo os coeficientes  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = -2$  e  $c_1 = -1$  nas equações anteriores temos:

$$p_1: \text{ foco em } F_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}\right) \rightarrow F_1(-1, -1) \text{ e diretriz } x = -\frac{1}{2} - \frac{-1}{2} \rightarrow x = 0 \text{ e } p_2:$$

$$\text{foco em } F_2(0, \frac{1}{2}) \text{ e diretriz } y = -\frac{1}{2}.$$

Transladando  $\frac{1}{2}$  para cima, temos:

$$p_1: \text{ foco em } F_1(-1, -\frac{1}{2}) \text{ e diretriz } x = 0 \text{ e } p_2: \text{ foco em } F_2(0, 1) \text{ e diretriz } y = 0.$$

Sabemos que a reta tangente será do tipo  $y = mx + n \rightarrow x = \frac{1}{m}y + k$ . Com isso teremos o ponto  $C(-2,0)$  e o ponto  $D(k,0)$ , pois queremos marcar a inclinação sobre o eixo  $x$ . Lembremos que  $C$  e  $D$  foram marcados durante a construção (passo 6). A dobradura feita ligando  $C$  a  $D$  será a reta de equação  $x_m = \frac{1}{2}(k - 2)$  e sua distância  $d$  até a mediatriz de  $\overline{CM}$  (gerada no passo 1 da construção) será  $d = x_m - (-1) = x_m + 1$ .

Para encontrar a equação da terceira reta vertical (gerada no passo 7 da construção) devemos observar que ela está a distância  $d$  da mediatriz só que no sentido oposto da anterior. Teremos então  $x = x_m + d = x_m + x_m + 1 = 2x_m + 1$ . Substituindo  $x_m$ , temos  $x = 2 \cdot \frac{1}{2}(k - 2) + 1 \rightarrow x = k - 1$ .

Ficamos com  $\begin{cases} x = \frac{1}{m}y + k \\ x = k - 1 \end{cases}$ . Resolvendo o sistema, temos  $\frac{1}{m}y + k = k - 1$

e ficamos com  $y = -m$ . Está será a reta que foi utilizada para a marcação dos pontos  $P_2$  e  $P_7$ , vértices do heptágono (passo 8 da construção).

## 4 Considerações Finais

Ao realizar este trabalho, pude relacionar a matemática com a arte, aqui representada pelo origami. Estabeleci um vínculo entre os axiomas de Huzita-Hatori e os de Euclides.

Através da minha pesquisa, pude relacionar as construções poligonais feitas por Euclides com os 5 primeiros axiomas do origami. Evidenciei o porquê da impossibilidade de se construir alguns polígonos com régua e compasso e por que o origami nos possibilita a construção de um número maior de polígonos. Compreendi que o axioma 6 do origami nos permite resolver equações cúbicas, através de dobraduras. Isto é uma ferramenta muito eficaz para algumas construções que antes eram impossíveis por métodos euclidianos.

Este trabalho, ao ampliar meus conhecimentos, permitirá que eu possa realizar oficinas com origami de forma a aperfeiçoar minha prática docente, levando a matemática de maneira mais lúdica para a sala de aula.

## Referências Bibliográficas

- [1] WAGNER; Eduardo. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [2] Humiaki HUZITA. *Axiomatic Development of Origami Geometry*. Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1991.
- [3] WIKIPEDIA; Enciclopédia Pública. *Huzita-Hatori axioms*.  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita2013>.
- [4] Koshiro HATORI. *Origami versus Straight-Edge-and-Compass*.  
<http://www.jade.dti.ne.jp/hatori/library/conste.html>, 2002.
- [5] Robert LANG. *The Complet Book of Origami*. New York: Dover Publications, Inc., 1988.
- [6] Robert LANG. *Huzita-Justin Axioms*. <http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>. 2009.
- [7] KANEGAE; Mari. *Simbologia do Tsuru (Grou)*.  
[http://www.kamiarte.com.br/simbologia\\_grou.htm](http://www.kamiarte.com.br/simbologia_grou.htm), 2010.
- [8] Grazielle RANCAN. *Origami e Tecnologia: Investigando possibilidades para ensinar Geometria no Ensino Fundamental*. Porto Alegre - PUC/RS, 2011.
- [9] R. G. do RÊGO; R. M. RÊGO; S. J. GAUDÊNCIO. *A Geometria do Origami*. João Pessoa - PA, 2003.
- [10] Robert LANG. *Origami Mathematics*. <http://www.langorigami.com/science/math/math.php>, 2009.
- [11] Jacques JUSTIN. *Resolution par le pliage de l'equation du troisieme degre et applications geometriques*. Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989.

- [12] Elon Lages LIMA; Paulo César Pinto CARVALHO; Eduardo WAGNER; Augusto César MORGADO. *A matemática do ensino médio – volume 2*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [13] Elsa Patrícia das Neves BORRALHO; Cláudia CANÁRIO; Sandra MARQUES. *O quinto postulado de Euclides*. <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/postuladoeuclides.htm>, 2000.
- [14] WIKIPEDIA; Enciclopédia Pública. *Postulado das Paralelas*. [http://pt.wikipedia.org/wiki/Quinto\\_postulado\\_de\\_Euclides](http://pt.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides), 2013.
- [15] KRIER; Jaema L. *Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite*. <http://math.uttyler.edu/nathan/classes/senior-seminar/JaemaKrier.pdf>, 2007.
- [16] LEROY; Luciana. *Aprendendo geometria com origami*. Belo Horizonte - Brasil, 2010.
- [17] FREITAS; Bruno. *Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o auxílio do origami*. Rio de Janeiro - Brasil, 2013.
- [18] Robert GERETSCHLAGER. *Folding the Regular Heptagon*. <https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page81-88.pdf>, 1995.
- [19] Elon Lages LIMA; Paulo César Pinto CARVALHO; Eduardo WAGNER; Augusto César MORGADO. *A matemática do ensino médio – volume 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [20] ORIGAMI; Instructions. *Origami Valley and Mountain Folds*. <http://www.origami-instructions.com/origami-valley-and-mountain-folds.html>, 2010.
- [21] WIKIPEDIA; Enciclopédia Pública. *Pentágono*. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Pentágono>, 2013.
- [22] ADAMS; Sara. *vÍDEO: Pentagom from a square*. <http://www.youtube.com/watch?v=83nKgFUiu-M>, 2010.
- [23] ORIGAMI; Make. *How to make a regular hexagon out of square paper*. <http://www.origami-make.com/origami-paper-hexagon.php>, 2010.
- [24] KAWAKAMI; Norberto. *ORIGAMI – Transformando papel em arte*. <http://origami.em.blog.br/archives/como-fazer-octagono-quadrado-origami>, 2011.

- 
- [25] WIKIPEDIA; Enciclopédia Pública. *Fermat number*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat\\_prime](http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_prime), 2013.
- [26] WIKIPEDIA; Enciclopédia Pública. *Pierpont prime*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Pierpont\\_prime](http://en.wikipedia.org/wiki/Pierpont_prime), 2013.