UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ESDRAS HENRIQUE REGATTI MOTINAGA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA CONSTRUINDO PIPAS

São Carlos

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

ESDRAS HENRIQUE REGATTI MOTINAGA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA CONSTRUINDO PIPAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao programa de mestrado profissional – PROFMAT – da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre na área de Ensino de Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Tomas Edson Barros.

São Carlos

2013

RESUMO

Neste trabalho propomos um processo de ensino usando como base um referencial teórico denominado *Engenharia Didática*. Nossa proposta consiste em desenvolver conteúdos da geometria plana a partir de um problema relacionado às pipas.
Usando como referencial teórico a Engenharia Didática foi possível explicitar algumas variáveis didáticas que nos permite ter certo controle sobre o processo de ensino-aprendizagem.
A referida proposta é destinada a alunos de sexto ano do Ensino Fundamental. Mas uma análise sobre as potencialidades de trabalho com as pipas para desenvolver conteúdos da geometria nos mostra que é possível fazer adaptações para se trabalhar com alunos de outros níveis da Educação Básica.

Palavras-chave: engenharia didática, geometria plana, ensino fundamental, construção de pipas.

ABSTRACT

In this paper we propose a learning process using as a theoretical base called Didactic Engineering. Our proposal is to develop content from the flat geometry of a problem related to kites.
Using as a theoretical framework Didactic Engineering Could explain some didactic variables allows us to have some control over the process of teaching and learning.
The proposal is aimed at students from sixth grade of elementary school, but an analysis of the potential of working with the kites to develop content of geometry shows that it is possible to make adjustments to work with students from all levels of basic education.

Keywords: didactic engineering, plane geometry, elementary school, building kites.

LISTA DE DESENHOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi realizado para obter o título de Mestre em Matemática do programa de mestrado profissional – PROFMAT – da Universidade Federal de São Carlos. O referido programa de mestrado profissional representa um esforço conjunto da comunidade acadêmica dos matemáticos e do Governo Federal para melhorar a qualidade do ensino de matemática na Educação Básica, em especial, nas escolas públicas. Para tanto, o PROFMAT destina uma parcela maior das vagas para os professores que lecionam em escolas públicas e oferece bolsa para todos aqueles que ingressam no programa mediante comprovação de que é professor de Educação Básica em alguma rede pública de ensino e a aceitação de um termo de compromisso de continuar atuando na rede pública de ensino pelo menos durante cinco anos após a conclusão do mestrado.

Desta forma, o nosso TCC deveria contribuir para a melhoria do ensino de matemática nas escolas de Educação Básica. Ou seja, precisávamos de uma proposta para desenvolver um processo de ensino-aprendizagem com conteúdos próprios da área da matemática em nível escolar e de um referencial teórico que desse subsídio para colocar em prática o processo de ensino-aprendizagem. O referencial teórico também deveria nos fornecer subsídios para registrar fatos relevantes que pudessem ocorrer durante o processo educativo, assim como meios para analisar as observações e os registros. Também é desejável que o referencial teórico possibilite um debate reflexivo e avaliativo.

A dificuldade estava em encontrar um referencial teórico que atendesse todas essas necessidades. Foi quando o coordenador do PROFMAT referente ao polo da Universidade Federal de São Carlos marcou um encontro para apresentar um referencial teórico denominado Engenharia Didática. Foi neste contexto que tomamos conhecimento desse referencial teórico.

Coube a nós buscar mais informações sobre este referencial teórico para enfim iniciar a produção do TCC em conjunto com a aplicação de uma proposta de ensino com nossos alunos. Quando nos convencemos que a Engenharia Didática era um referencial teórico adequado às nossas necessidades, tivemos que pensar em um tema-problema para estruturar a nossa proposta de ensino.

Analisando a literatura acadêmica sobre o ensino da matemática nas escolas de Educação Básica e, em particular, o ensino da matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, percebemos que a geometria sempre era citada como um problema. Assim, decidimos nosso tema: geometria plana. Faltava conceber um problema que nos permitisse desenvolver os respectivos conteúdos geométricos. O problema não poderia estar distante do cotidiano dos alunos e deveria possibilitar o desenvolvimento de atividades com materiais concretos para gradualmente trabalhar com atividades que estimulam o pensamento abstrato e as ideias de generalização. Aliás, esses conteúdos são típicos no estudo da geometria plana.

Levando tais fatores em consideração, tivemos a ideia de construir pipas para estudar os conteúdos da geometria que constam nos currículos referentes ao 6º ano do Ensino Fundamental. De fato, o conhecimento necessário à construção de pipas é bastante relevante para desenvolver os conteúdos próprios da geometria plana. É nesse contexto que desenvolvemos nosso TCC.

1.1 Metodologia e organização do trabalho

A metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática surgiu no início da década de 1980 como alternativa aos métodos já existentes que muitas vezes não eram capazes ou eficientes para estudar o processo de ensino-aprendizagem que ocorre nas escolas.

Assim, uma Engenharia Didática se apoia nos conhecimentos científicos ou acadêmicos, mas não se limita a eles, sendo que a complexidade da prática do professor não é considerada um impedimento, mas ao contrário, é essa complexidade que estará em jogo no trabalho.

Pode-se distinguir quatro fases em uma Engenharia Didática:

a) análise prévia;

b) análise *a priori;*

c) aplicação;

d) análise *a posteriori*.

Em geral, a primeira fase – análise prévia – consiste:

a) no estudo dos conteúdos que serão objetos de ensino para explorar as reais possibilidades de trabalho;

b) na análise do ensino habitual e suas consequências;

c) e no estudo das dificuldades e obstáculos que se interpõem à aprendizagem dos alunos.

A segunda fase, a análise *a priori*, refere-se à concepção da proposta didática, ou seja, da concepção das sessões de ensino e da definição das variáveis didáticas. É também nesta fase que se define as hipóteses que deverão ser validadas ou refutadas na quarta fase.

Em relação às variáveis didáticas, distinguem-se as variáveis macrodidáticas das variáveis microdidáticas. As variáveis macrodidáticas dizem respeito às variáveis didáticas de ordem geral, enquanto as variáveis microdidáticas se referem às variáveis de caráter mais específico e dependem dos conteúdos de ensino abordado nas sessões de ensino.

A terceira fase é a aplicação da proposta de ensino-aprendizagem. Portanto, é nessa fase que se coloca em prática o planejamento pedagógico e se registra o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

A quarta e última fase da pesquisa, denominada análise *a posteriori*, diz respeito à validação das hipóteses. Assim, as hipóteses feitas na análise *a priori* serão confrontadas com as observações registradas na terceira fase, implicando a validação ou a refutação das mesmas.

Ressalta-se que esta metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, concebe um método de validação interno, diferente das metodologias que lidam com dados estatísticos ou comparativos. Aliás, essa é uma característica fundamental para distinguir a Engenharia Didática de outras metodologias de pesquisas usadas para estudar o processo de ensino-aprendizagem nas escolas. Assim, deve ficar claro que a validação das hipóteses não deve se apoiar em dados estatísticos ou em métodos comparativos.

Neste primeiro capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática para desenvolver nosso estudo e introduzimos os conceitos relacionados a tal metodologia.

No capítulo seguinte, desenvolveremos a primeira fase da Engenharia Didática, ou seja, será realizado um estudo prévio sobre o ensino habitual (relacionado à didática), sobre os obstáculos e as dificuldades de aprendizagens dos alunos (relacionado aos aspectos cognitivos) e sobre as reais possibilidades de trabalho (com relação ao conhecimento do assunto) com a proposta de ensino-aprendizagem que será apresentada no terceiro capítulo.

Ainda no segundo capítulo apresentaremos os problemas que justificam o trabalho e definiremos os objetivos do mesmo.

O terceiro capítulo tratará da análise *a priori*, ou seja, da segunda fase da Engenharia Didática. Portanto, o terceiro capítulo apresentará a descrição das variáveis macro e microdidáticas, assim como as hipóteses de trabalho.

No quarto capítulo deste trabalho encontram-se os registros da aplicação da proposta de ensino-aprendizagem, correspondente à terceira fase da Engenharia Didática.

No quinto capítulo, vamos confrontar as hipóteses definidas na *análise a priori* com os registros feitos durante a aplicação das sessões de ensino, ou seja, o quinto capítulo tratará da análise *a posteriori*, correspondente à quarta fase da Engenharia Didática.

No sexto e último capítulo trataremos das considerações finais. Assim, faremos uma discussão sobre as limitações e os problemas encontrados na execução das diversas fases deste trabalho a fim de contribuir para novas pesquisas e evitar que nossas falhas se repitam.

2 ANÁLISE PRÉVIA

Neste capítulo iniciamos o desenvolvimento da Engenharia Didática. Nesta primeira fase da metodologia de trabalho, buscaremos algumas informações que possam ser relevantes para a fase seguinte. Analisamos, portanto, o que encontramos de mais relevante na literatura acadêmica sobre o ensino da geometria nas escolas de Educação Básica.

Também devemos fazer uma análise relacionada ao conhecimento geométrico que pode ser usado na construção de uma pipa conforme nosso tema para desenvolver a Engenharia Didática que será apresentado oportunamente no capítulo referente à *análise a priori*.

Na sequência, apresentaremos o problema que motivou o trabalho e os objetivos do mesmo.

2.1 Sobre o ensino da geometria na Educação Básica

Mello (1999), ao analisar a proposta curricular do Estado de São Paulo, constata a existência de dois grandes temas geradores para o estudo da matemática no Ensino Fundamental: números e geometria.

A proposta curricular do Estado de São Paulo para os 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental propõe iniciar o ensino da geometria a partir de objetos concretos, observando formas regulares. Segundo Mello (1999), ainda é exposto na proposta curricular que o objetivo é explorar as propriedades das formas para assim classificá-las.

Como a autora observa, no 7º ano do Ensino Fundamental a proposta curricular do Estado de São Paulo sugere que se trabalhe um primeiro contato com a demonstração matemática. A demonstração proposta é a do teorema sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Essa demonstração é precedida de uma verificação experimental.

No 8º ano a autora identifica no currículo do Estado de São Paulo demonstrações do Teorema de Pitágoras, o uso de casos de congruências de triângulos para demonstrar certas propriedades de triângulos e quadriláteros, e uma demonstração de que a mediana de um triângulo o divide em dois outros de áreas iguais.

Após a análise do currículo do Estado de São Paulo, a autora analisa os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – para os 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental identificando os objetivos relacionados ao ensino da geometria.

Como mostra Mello (1999), as orientações dos PCN indicam a importância da geometria para desenvolver o pensamento lógico-dedutivo. Para isso, é proposto um trabalho gradativo iniciando o ensino da geometria com verificações empíricas. Em sequência, deve-se motivar a formulação de conjecturas, o desenvolvimento de argumentos para justificar as afirmações e por fim espera-se ter criado as condições necessárias para possibilitar as demonstrações formais.

Os livros didáticos também são objetos de análise da autora. Ao todo, Mello (1999) analisa dez livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental onde, segundo os currículos oficiais, deve-se iniciar os primeiros contatos com as demonstrações.

Segundo esta autora (MELLO, 1999, p. 43), os livros analisados:

- não apresentam o estatuto de definição e de teorema;
- não tratam da *demonstração* e não apresentam exercícios que exijam provas ou demonstrações;
- nem mesmo, fornecem os primeiros passos para o aprendizado da *demonstração*.

Mello (1999, p. 44) verifica que “a demonstração é pouco utilizada na apresentação dos resultados (na maioria deles)” e os exercícios não apresentam vínculo com as habilidades necessárias ao construir uma demonstração.

Arbach (2002), buscando referências que pudessem subsidiar a realização de sua pesquisa sobre o ensino da geometria no Brasil, encontra nas produções acadêmicas da UNESP – Rio Claro e PUC/SP, universidades que segundo ele eram as únicas em manter programas de pós-graduação na área específica de Educação Matemática, dezessete dissertações de mestrado e uma tese de doutorado no período de 1997 a 2000.

Ao analisar estes trabalhos, o autor constata que os pesquisadores tinham como objetivo investigar as causas de abandono do ensino da geometria. Para Arbach (2002), de um modo geral, os trabalhos apresentam como causa desse abandono questões de ordem políticas e ideológicas, problemas na formação de professores, abordagens de livros didáticos inadequadas e o Movimento da Matemática Moderna que fez com que o ensino da geometria fosse colocado em segundo plano.

Em geral, as propostas de ensino encontradas em livros didáticos não trabalham a geometria de maneira a propiciar a formação de sujeitos capazes de conjecturar, fazer deduções lógicas, analisar, argumentar e refutar (ARBACH, 2002). Ao contrário, o que se encontra nos livros didáticos se reduz a exercícios que pouco contribuem para a formação ora referida e que consta também nos currículos oficiais.

Arbach (2002) considera que o conhecimento da geometria tem grande relevância para o desenvolvimento do pensamento lógico, que por sua vez é essencial à apropriação das competências e habilidades necessárias à aprendizagem e ao entendimento da matemática.

Entretanto, na maior parte dos casos, a geometria aparece nos livros didáticos nos capítulos finais, e como consequência poucas vezes é abordada em sala de aula por falta de tempo. Este fato é constatado (ARBACH, 2002), inclusive, nos livros didáticos citados nos PCN do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, 1998.

Nesses livros também se encontra uma predominância da aritmética e da álgebra. Mesmo nas seções que tratam da geometria, as atividades se reduzem a cálculos e medidas de elementos de figuras. A única exceção apontada pelo autor (ARBACH, 2002) é o livro cujo o título é “Matemática hoje é feita assim” (LOPES, 2000), aonde consta atividades que fomentam discussões sobre a necessidade de validar o conhecimento e apresenta os significados e o papel dos axiomas e teoremas na matemática.

Em um artigo de Pais (2006) encontramos uma descrição de uma análise de 12 coleções de livros didáticos de matemática destinados aos anos finais do Ensino Fundamental, publicados entre 1985 e 2002, onde o autor identifica características comuns em relação às estratégias de ensino apresentadas nos livros.

A análise dos livros em questão permitiu ao autor (PAIS, 2006, p. 8) identificar um conjunto de conteúdos comuns a quase todos os livros:

> ponto, reta e plano, semirreta, segmento de reta, poligonais e polígonos, ângulos, retas perpendiculares e paralelas, triângulos, congruência, pontos notáveis de um triângulo, quadriláteros, circunferência e círculo, semelhança, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, relações métricas e trigonométricas, perímetros, áreas e volumes, polígonos regulares, comprimento da circunferência.

A diferença, segundo o autor, se mostra na abordagem pedagógica encontrada nos livros didáticos. Quanto a localização dos conteúdos referentes à geometria, o autor reconheceu quatro padrões.

Nos livros publicados de 1985 a 1995 a geometria se localiza nos últimos capítulos. A partir de então há certas mudanças: o segundo padrão identificado pelo autor são os livros que trazem a geometria logo no início, nos primeiros capítulos. Outra parte dos livros apresentam a geometria concentrada mais nos capítulos intermediários. Já o outro padrão encontrado são os livros em que a geometria é diluída por todos os capítulos.

Para o autor (PAIS, 2006), sua análise sinaliza uma tendência de mudar o paradigma de deixar a geometria em segundo plano, mas observa que isso não significa que os livros estejam apresentando a geometria com estratégias de ensino-aprendizagem adequadas.

Quanto as estratégias de ensino encontradas nos livros, o autor classifica as abordagens em três tipos. Nos livros publicados no período de 1985 a 1995 a abordagem é feita a partir de uma representação gráfica que auxilia o entendimento da proposição que se quer enunciar e com base nos axiomas necessários deduz a proposição com implicações lógicas e, em seguida, propõe-se exercícios.

A segunda estratégia encontrada nos livros publicados depois do ano de 1995 é descrita pelo autor (PAIS, 2006, p. 12) por iniciar o estudo propondo um “procedimento de natureza experimental” e segue com o enunciado da proposição acompanhada de uma demonstração.

Por último, o autor descreve uma estratégia que consiste em apresentar um problema que deve motivar e propiciar aos alunos a aprendizagem do conteúdo que se pretende ensinar.

Outros pesquisadores, como Borges (2009), estão de acordo que o ensino da geometria nas escolas foi abandonado e também apontam como causa as abordagens inadequadas encontrados em livros didáticos e problemas relativos a formação de professores, entre outros motivos.

Entre os fatores que comprometem o processo ensino-aprendizagem da geometria, estão:

a) o próprio sistema educacional por não determinar de maneira mais precisa o programa a ser seguido pelas escolas com relação aos métodos e conteúdos a serem desenvolvidos em sala de aula;

b) a formação dos professores é sempre apontada como um dos problemas do ensino da geometria. Essa formação precária decorre dos cursos de formação inicial onde não encontram oportunidades de reflexão no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem da geometria na escola da Educação Básica;

c) o terceiro fator comum às pesquisas sobre o ensino da geometria nas escolas da Educação Básica indicam os livros didáticos como sendo a causa de vários problemas. Após a análise de vários livros didáticos feita pelos autores já citados, podemos concluir que as abordagens dos livros não valorizam a exploração de propriedades com a visualização de figuras, priorizam resoluções algébricas e, em geral, as atividades não exigem pensamento dedutivo e não estimulam a capacidade de argumentação. “Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos” (ALMOULOUD, 2004, p. 99).

2.2 A geometria necessária à construção das pipas

Nesta seção vamos explorar uma parte da geometria necessária para construir as pipas. Como referência para os resultados matemáticos usados no decorrer desta seção estamos usando o livro de Rezende e Queiroz (2008).

Os princípios fundamentais para fazer uma pipa e dicas importantes podem ser encontradas no livro de Voce (1994).

Como ficará implícito, os cálculos e os resultados matemáticos necessários à construção de cada uma das pipas dependem das informações iniciais. Portanto, é possível variar as informações iniciais e desenvolver outros conteúdos geométricos para resolver o problema de construir as pipas. Ou seja, a depender do nível de ensino e dos objetivos, é possível fazer adaptações na proposta de ensino que será exposta no próximo capítulo.

Vamos convencionar a linguagem usada neste trabalho para nos referir aos entes geométricos logo em seguida. As definições de tais entes geométricos podem ser encontradas na referência já citada.

Dados dois pontos A e B, a união dos pontos A, B e o conjunto dos pontos entre A e B é o que se define por *segmento AB*. O comprimento ou a medida de um *segmento AB* será denotado por$m(AB)$. Na verdade, quando dizemos a união dos pontos A e B, subentende-se a união de$\{A\}$e$\{B\}$.

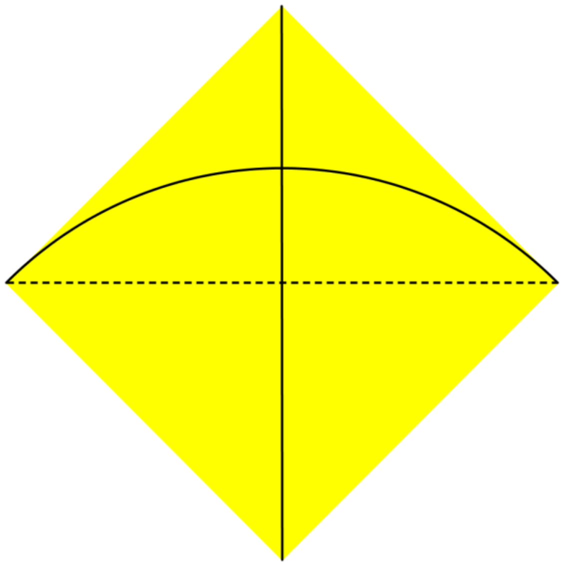
Entendemos por ângulo a união dos conjuntos dos pontos de duas semirretas de mesma origem. Assim, vamos nos referir por *semirreta CA* o conjunto dos pontos da semirreta de origem C e que contém o ponto A. Dada uma outra *semirreta CB*, a união das *semirretas CA* e *CB* é o que chamamos de ângulo e denotamos por$\widehat{ACB}$ou$\widehat{BCA}$. Ou ainda podemos simplesmente dizer *ângulo ACB* ou *ângulo BCA*. A medida de um *ângulo ACB* será indicada por$m(\widehat{ACB})$.

Sejam A e B dois pontos (distintos) pertencentes a uma dada circunferência de centro O. Então A e B dividem a circunferência em dois conjuntos. Por *arco AB* nos referimos ao arco menor da circunferência de centro O. Por *medida do arco AB* entendemos a *medida do ângulo AOB*. E o *comprimento do arco AB* é o comprimento da parte da circunferência correspondente ao *arco AB*.

2.2.1 A pipa Arraia

Estamos denominando por pipa Arraia uma pipa com forma de um quadrado.

O desenho a seguir representa a pipa Arraia. As linhas contínuas representam as varetas de bambu, enquanto o tracejado representa a linha amarrada nos extremos de uma das varetas para envergá-la.

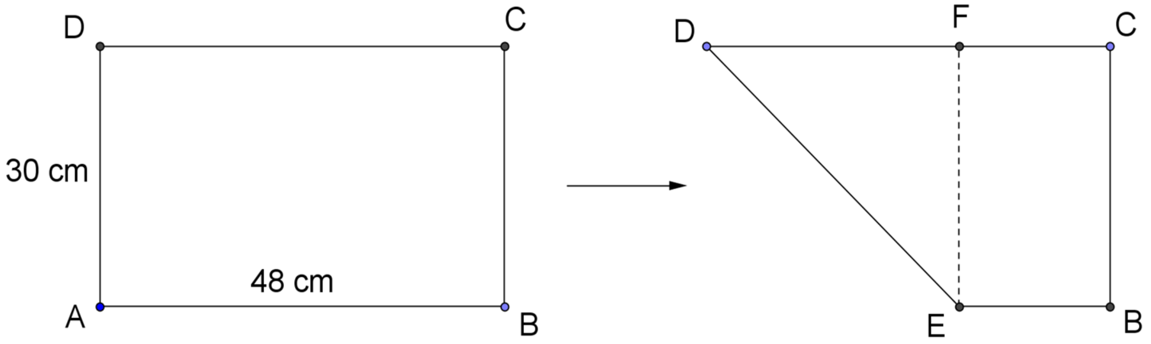


Desenho 1: Representação da pipa Arraia

Como podemos ver no desenho anterior, para fazer uma pipa Arraia vamos precisar de duas varetas de bambu, uma folha de papel de seda, tesoura, linha e cola branca. A primeira coisa a fazer é obter um quadrado com o papel de seda.

Em geral, as folhas de papel de seda são padronizadas no formato de um retângulo de dimensões de 48 por 60 centímetros. Na prática podemos obter um quadrado fazendo algumas dobras e alguns cortes na folha de papel de seda. A partir da folha em seu tamanho padrão vamos dividi-la ao meio para obter dois pedaços retangulares de dimensões 48 por 30 centímetros. Uma das partes deve ser guardada e pode ser usada para fazer a cauda, enquanto a outra será usada para obter um pedaço em forma de quadrado.

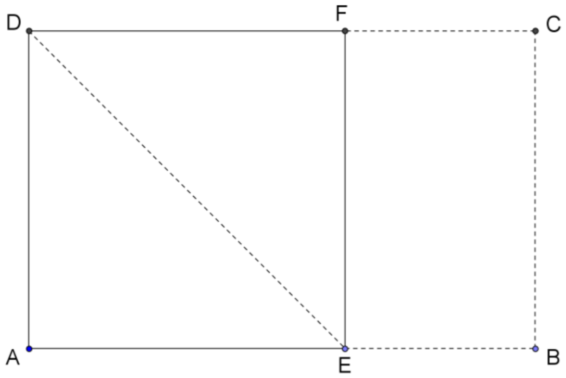
O desenho a seguir ilustra o esquema para obter um pedaço de papel de seda no formato de um quadrado a partir de um pedaço de folha retangular com dimensões 48 por 30 centímetros (metade da folha de papel de seda).



Desenho 2: Procedimento para fazer a pipa Arraia

A folha é dobrada fazendo o lado representado pelo *segmento DA* sobrepor-se ao lado representado pelo *segmento DC*. Desta maneira definimos os pontos *E* e *F*. A linha tracejada indica onde devemos fazer o corte. A parte da folha representada pelo *retângulo BCFE* pode ser usada para fazer as barbatanas da pipa.

Desdobrando a outra parte obtemos um pedaço de folha na forma de um *quadrado AEFD*, como representado a seguir.



Desenho 3: Representação de parte da folha de papel de seda em forma de quadrado

Vamos justificar o procedimento feito para obter o quadrado.

O que foi feito na prática é equivalente a uma construção com régua e compasso. De fato, o ponto *F* pode ser definido pela interseção da *circunferência de centro em D e raio* $m(AD)$com o *segmento DC*. Isso implica$m(AD) = m(DF)$. O *segmento EF* representa o corte feito com a tesoura e, como o *ângulo DAE* é reto, o *segmento EF* é perpendicular ao *segmento DF*.

Precisamos mostrar ainda que o *ângulo FEA* é reto e$m(FE) = m(EA) = m(AD)$. Como$m(AD) = m(DF)$, o *triângulo ADF* é isósceles e portanto os *ângulos DAF* e *DFA* têm medidas iguais. Sabemos que existe o seguinte Teorema: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180. Então

$$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{DFA}) = \frac{180-90}{2} = 45 graus.$$

Como supomos que ABCD é um retângulo, temos que$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{DAB}) = 90 graus$. E lembrando que o *segmento DF* é perpendicular ao *segmento FE*, obtemos

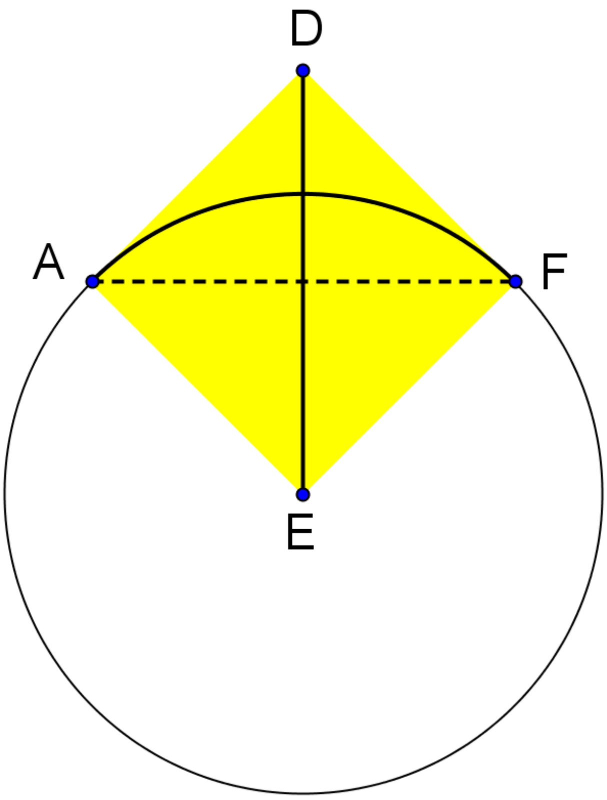
$$m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{EFA}) = 90 - 45 = 45 graus.$$

Observando ainda que o *segmento AF* é um lado comum aos *triângulos ADF* e *AEF*, pelo caso de congruência de triângulos A.L.A., temos que os *triângulos ADF* e *AEF* são congruentes. Logo,

$$m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{FDA}) = 90 graus, m(AE) = m(AD) = m(DF) = m(EF).$$

Isso mostra que o *polígono AEFD* é regular, ou seja, AEFD é um quadrado.

O próximo passo para construir a pipa Arraia é colar as duas varetas de bambu no pedaço de folha de seda que tem a forma de um quadrado. Uma das varetas deve ter o comprimento do *segmento DE*, enquanto a outra tem o comprimento de um arco de circunferência, conforme o desenho a seguir.



Desenho 4: Representação da vareta envergada

Então, vamos calcular o comprimento que as varetas devem ter. As varetas estão representadas pelo *segmento DE* e o *arco AF* da circunferência de centro *E* e raio igual a *medida do segmento EF*. O *segmento DE* é uma diagonal do quadrado e podemos calcular sua medida aplicando o Teorema de Pitágoras no *triângulo DAE*.

$$m(DE)^2 = m(EA)^2 + m(AD)^2 \Rightarrow$$
$$m(DE)^2 = 30^2 + 30^2 \Rightarrow$$
$$m(DE) = 30\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$m(DE) \approx 42{,}5cm$$

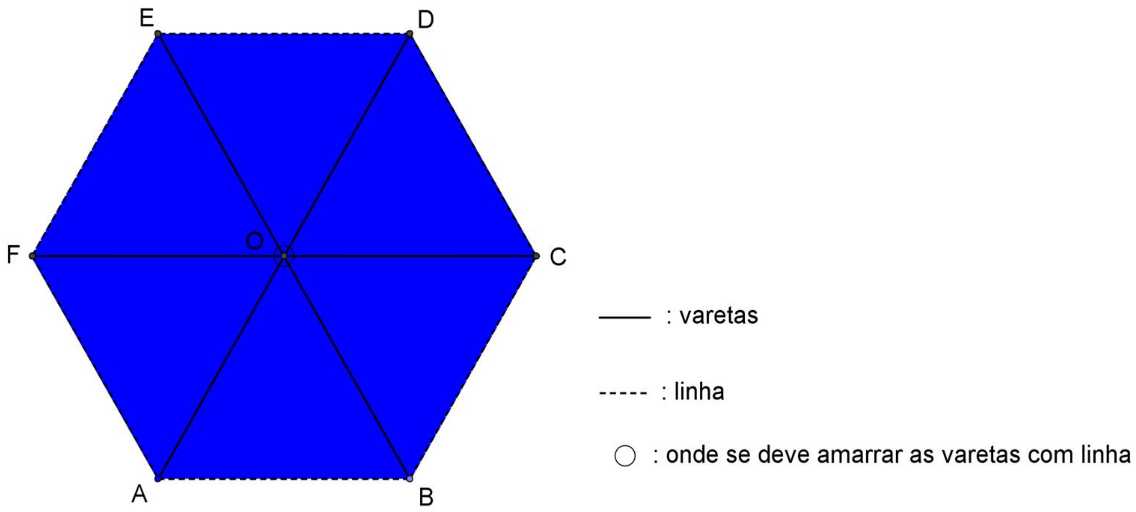
Antes de colar a outra vareta devemos envergá-la amarrando uma linha em suas extremidades. No desenho anterior, essa linha está representada pelo tracejado AF. O comprimento dessa vareta é determinado pelo comprimento do *arco AF*. Observando que a *medida do arco AF* é igual a medida de um ângulo reto, temos que o comprimento do *arco AF* é ¼ do comprimento da circunferência. Seja x o comprimento da parte da circunferência correspondente ao *arco AF*. É possível mostrar que o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$, onde r denota o raio da circunferência. Assim, temos:

$$x = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r \Rightarrow$$
$$x = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 30 \Rightarrow$$
$$x \approx 47cm.$$

Para fazer a cauda e o estirante da pipa ver Voce (1994).

2.2.2 A pipa Hexagonal

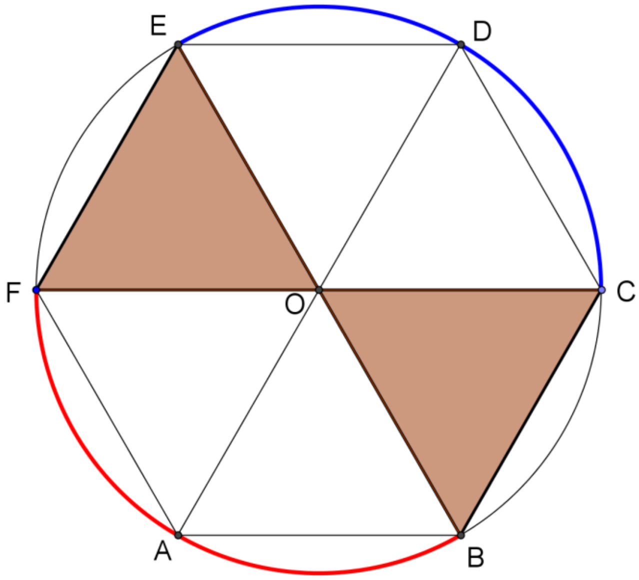
A partir de três varetas de bambu, cada uma com comprimento igual a 50 centímetros, queremos construir uma pipa que tem a forma de um hexágono regular. O desenho a seguir representa a pipa Hexagonal.



Desenho 5: Representação da pipa Hexagonal

Para construir a pipa precisamos saber quais são as medidas dos ângulos definidos pelos segmentos que representam as varetas de bambu no desenho acima e a quê distância da ponta de cada uma das varetas devemos amarrar uma nas outras. Para isso, vamos mostrar que os *triângulos ABO*, *BCO*, *CDO*, *DEO*, *EFO* e *FAO* são dois a dois congruentes, onde *O* é um ponto comum aos *segmentos AD*, *BE* e *CF*. Vamos mostrar também que *O* é o ponto médio dos *segmentos AD*, *BE* e *CF*.

Sabemos que o hexágono regular pode ser inscrito numa circunferência. Vamos mostrar que os *triângulos BCO* e *FEO* são congruentes. Observe o desenho a seguir.



Desenho 6: Representação de triângulos e arcos de circunferência

De fato,$\widehat{EBC}$e$\widehat{CFE}$são ângulos inscritos e correspondem ao$arco CE$da circunferência tal que o hexágono regular é inscrito, enquanto $\widehat{BEF}$ e $\widehat{FCB}$ são ângulos inscritos correspondentes ao$arco BF$da mesma circunferência. Um Teorema nos garante que: a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente. Decorre desse Teorema que:

$$m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CFE}) \text{e} m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FCB}).$$

Assim, temos:

a) $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CFE}) = m(\widehat{EFO})$;

b) $m(BC) = m(EF)$, pois são lados do hexágono regular;

c) $m(\widehat{BCO}) = m(\widehat{FCB}) = m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{OEF})$.

Logo, pelo caso de congruências de triângulos A.L.A. temos que os *triângulos BCO e FEO* são congruentes. Então$m(CO) = m(EO)$e$m(BO) = m(FO)$.

Vamos mostrar que os *triângulos BAF* e *CDE* são congruentes. Decorre diretamente do hexágono ser regular que:

a) $m(AB) = m(CD)$;

b) $m(\widehat{FAB}) = m(\widehat{CDE})$;

c) $m(FA) = m(DE)$.

Portanto, pelo caso L.A.L. os *triângulos BAF* e *CDE* são congruentes. Logo$m(BF) = m(CE)$.

Um outro Teorema nos diz que em uma mesma circunferência, duas cordas têm comprimentos iguais se, e somente se, os arcos menores correspondentes têm medidas iguais. Então$m(BF) = m(CE)$implica a medida dos *arcos BF* e *CE* são iguais. Logo

$$m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{BCO}) = m(\widehat{FEO}) = m(\widehat{EFO}).$$

Daí segue que o *triângulo BCO* é isósceles de base BC e o *triângulo EFO* é isósceles de base EF. Portanto$m(BO) = m(CO) = m(EO) = m(FO)$. Isso implica *O* é o ponto médio dos *segmentos BE* e *CF*, isto é, *O* é o centro da circunferência tal que o hexágono regular é inscrito. Além disso, como *O* pertence a *corda AD*, temos que o *segmento AD* é um diâmetro da circunferência e *O* também é ponto médio do *segmento AD*.

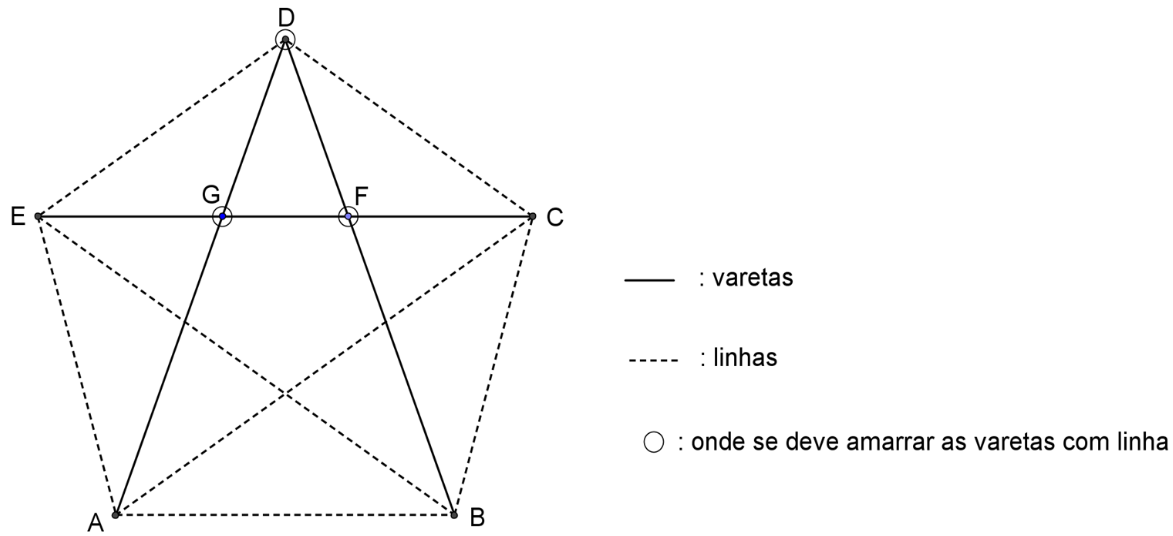
O Teorema anterior também nos garante que as medidas dos *ângulos AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* e *FOA* são iguais e o valor de cada um deles é$\frac{360}{6} = 60 graus$.

Mostramos que o ponto *O* é o centro da circunferência tal que o hexágono regular está inscrito. Então os *triângulos ABO*, *BCO*, *CDO*, *DEO*, *EFO* e *FAO* são isósceles, isto é, a medida dos ângulos da base (lado oposto ao vértice *O*) são iguais. Logo, cada um dos referidos triângulos tem três ângulos de medidas iguais a *60 graus*, ou seja, os referidos triângulos são equiláteros.

Com isso conhecemos todas as relações necessárias para fazer a armação da pipa.

2.2.3 A pipa Estrela

Dado três varetas de bambu, cada uma com 51 centímetros de comprimento, queremos conhecer quais são os pontos onde devemos amarrar a linha para fazer a armação da pipa, conforme a representação a seguir.



Desenho 7: Representação da armação da pipa

Sabendo que *ABCDE* é um *pentágono regular*, queremos conhecer as medidas dos *segmentos DG*, *DF*, *FG*, *EG* e *CF*.

Como o pentágono é regular, seus ângulos internos são iguais e podem ser determinados da seguinte maneira:

$$\text{â}ngulointernodopent\text{á}gonoregular = \frac{(5\cdot 180-360)}{5} = 108graus.$$

Observando que os *segmentos BC*, *CD*, *AE* e *ED* são lados do pentágono regular, temos que os *triângulos BDC* e *ADE são isósceles*. Ciente que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é igual a *180 graus*, temos que

$$m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{CBD}) = \frac{(180-108)}{2} = 36graus\text{e}$$

$$m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{EAD}) = \frac{(180-108)}{2} = 36graus.$$

O mesmo acontece com o *triângulo CED*, isto é,

$$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{DEC}) = \frac{(180-108)}{2} = 36graus.$$

Assim:

a) $m(\widehat{FCD}) = m(\widehat{DCE}) = 36graus = m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{GED})$;

b) $m(CD) = m(DE)$;

c) $m(\widehat{FDC}) = m(\widehat{CDB}) = 36graus = m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{GDE})$.

Pelo caso A.L.A. os *triângulos CDF* e *EDG* são congruentes. Logo $m(DG) = m(DF)$ e $m(CF) = m(EG)$. Além disso, os *triângulos CDF* e *DEG* são isósceles, pois têm dois ângulos de medidas iguais a *36 graus*. Portanto, $m(DG) = m(EG) = m(CF) = m(DF)$.

Assim, temos que:

$$m(\widehat{CFD}) = 180 - m(\widehat{FDC}) - m(\widehat{FCD}) = 180 - 36 - 36 = 108graus.$$

Definindo $x = m(DF) = m(CF)$ e seja l_5 o comprimento do lado do pentágono regular, vamos aplicar a Lei dos Cossenos ao *triângulo CDF*:

$$l_5{}^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot cos108 \Rightarrow$$

$$l_5{}^2 = 2\mathrm{x}^2 \cdot (1 - cos108) \Rightarrow$$

$$(\mathrm{I})\, x = \frac{l_5}{\sqrt{2 \cdot (1 - cos108)}}.$$

Então, precisamos do valor de l_5. No *triângulo ADB* temos:

$$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CDE}) - m(\widehat{CDB}) - m(\widehat{EDA}) = 108 - 36 - 36 = 36graus.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos ao *triângulo ADB*:

$$l_5{}^2 = m(AD)^2 + m(BD)^2 - 2 \cdot m(AD) \cdot m(BD) \cdot cos36 \Rightarrow$$

$$l_5{}^2 = 51^2 + 51^2 - 2 \cdot 51 \cdot 51 \cdot cos36 \Rightarrow$$

$$l_5 = 51 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - cos36)} \Rightarrow$$

$$l_5 \approx 31{,}5cm.$$

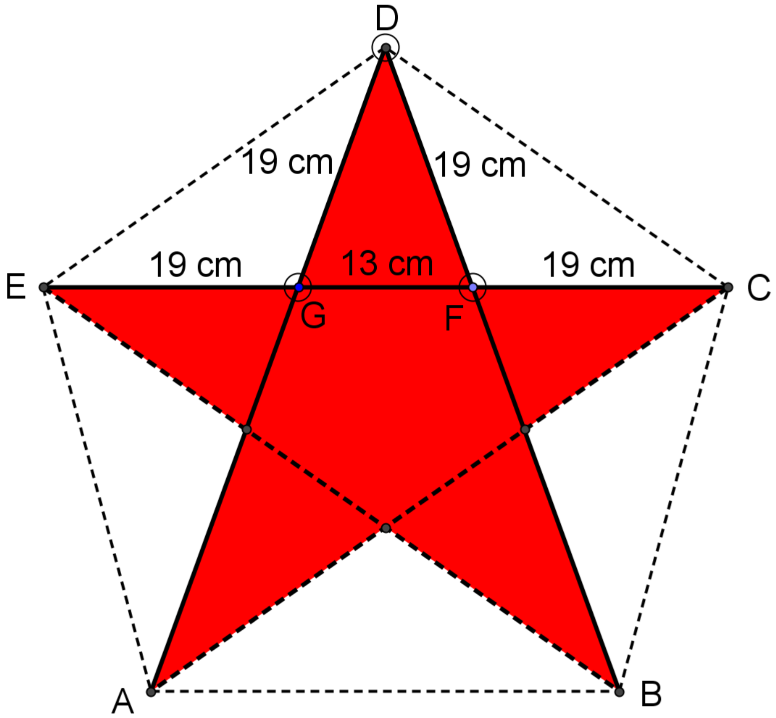
Desta forma podemos terminar o cálculo da equação (I):

$$x = \frac{l_5}{\sqrt{2 \cdot (1 - cos108)}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{31{,}5}{\sqrt{2 \cdot (1 - cos108)}} \Rightarrow$$

$$x \approx 19cm.$$

Conforme representado no desenho a seguir, agora conhecemos as medidas necessárias para fazer a armação da pipa:



Desenho 8: Indicação das medidas

Para fazer a cauda, o estirante e envergar a vareta corretamente, consultar Voce (1994).

2.2.4 As áreas das superfícies das pipas

Vamos calcular as áreas das superfícies das pipas para fazer uma previsão sobre a possibilidade do voo da pipa. Em outras palavras, com a massa da pipa e a área de sua superfície, podemos ter uma boa noção sobre as chances de ter sucesso no que se refere a colocar a pipa no ar.

Começaremos com a pipa Arraia.

Como vimos, a pipa Arraia tem forma de um quadrado e a medida de seu lado é igual a 30 centímetros. Podemos mostrar que a área de um quadrado de lado l é dada por:

$$\text{área do quadrado} = l^2 \text{(LIMA, 2009, p. 14)}$$

Então:

$$\text{área da superfície da pipa Arraia} = 0{,}3^2 = 0{,}09m^2.$$

Para calcular a área da superfície da pipa Hexagonal usaremos a definição geral de área encontrada em Lima (2009, p. 20) e a fórmula para se calcular a área de uma região triangular qualquer:

$\text{área de uma região triangular} = \frac{b \cdot h}{2}$, onde b é uma base do triângulo e h é a altura relativa a tal base.

O hexágono regular que representa a pipa pode ser decomposto em seis regiões triangulares, sendo que os seis respectivos triângulos são todos congruentes entre si. Mais ainda, cada um dos seis triângulos é equilátero e a medida de seu lado é 25 centímetros. É possível mostrar que a fórmula para calcular a área da região de um triângulo equilátero que tem a medida do lado igual a l é dada por:

$$\text{área da região delimitada por um triângulo equilátero} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

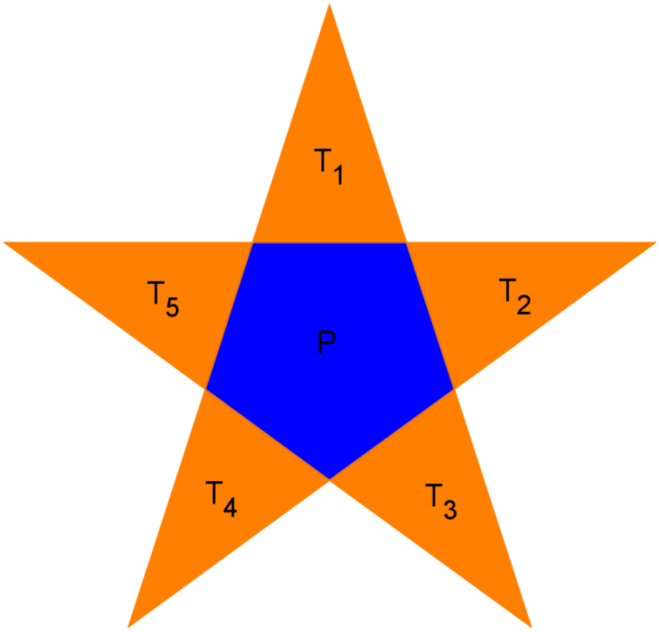
Seja T a região delimitada por um dos triângulos equiláteros obtidos na decomposição do hexágono regular cujo o comprimento do lado é igual a 0,25 metros. Então

$$\text{área de } T = \frac{0{,}25^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 0{,}027m^2.$$

Logo,

$$\acute{a}readaregi\tilde{a}odelimitadapelohex\acute{a}gonoregular = 6 \cdot 0{,}027 = 0{,}162m^2.$$

Falta apenas calcular a área da superfície da pipa Estrela. Vamos denotar a região da estrela que representa a superfície da pipa por$E$. Essa região pode ser decomposta em cinco regiões triangulares e uma região pentagonal. Vamos representar cada uma das regiões triangulares porT_1,T_2,T_3,T_4,T_5e a região pentagonal por$P$, conforme representado no desenho a seguir.



Desenho 9: Decomposição da região delimitada pela estrela

Como os cinco triângulos referentes às regiões T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 são congruentes entre si pelo caso L.L.L., suas áreas são iguais, isto é, tais regiões são equivalentes. Então temos que $\acute{a}rea de E = (\acute{a}rea de P) + 5 \cdot (\acute{a}rea de T_1)$.

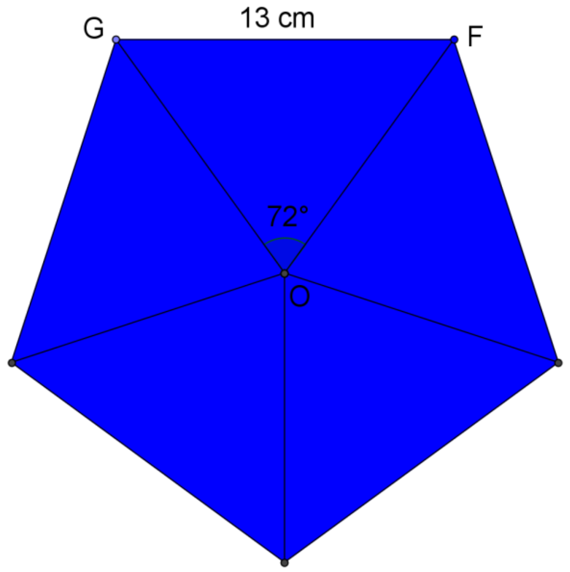
Vamos calcular a área de T_1 em metros quadrados. Como o *triângulo DFG* é isósceles de base FG, a mediana relativa ao *lado FG* é perpendicular ao mesmo. Logo, a altura h do triângulo é determinada aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 0{,}19^2 - \left(\frac{0{,}13}{2}\right)^2 \Rightarrow h \approx 0{,}178m.$$

Assim,

$$\acute{a}rea de T_1 = \frac{0{,}13 \cdot 0{,}178}{2} = 0{,}0116m^2$$

Agora vamos calcular a área da região pentagonal. Para isso, vamos dividir o pentágono regular em cinco regiões triangulares de áreas iguais, conforme representado no desenho a seguir.



Desenho 10: Cálculo da área da região delimitada por um pentágono regular

Seja o ponto *O* o centro da circunferência tal que o pentágono é inscrito. Então os cinco triângulos são congruentes entre si e cada um deles é isósceles.

Portanto,$m(\widehat{FOG}) = \frac{360}{5} = 72graus.$

Como o *triângulo FOG* é isósceles de base FG, a mediatriz, a mediana e a bissetriz relativa ao *lado FG* coincidem. Logo, a alturah'relativa ao *lado FG* do *triângulo FOG* é dada por:

$$h' = \frac{6,5}{tg36} \approx 8,946cm.$$

Então,

$$áreadeP = 5 \cdot \left(\frac{0,13 \cdot 0,0895}{2}\right) \approx 0,0291 m^2.$$

Logo,

$$áreadeE = (áreadeP) + 5 \cdot (áreadeT_1) = 0,0291 + 5 \cdot 0,0116 \approx 0,087 m^2.$$

2.2.5 *A razão massa/área*

Resumindo, temos que:

a) a área da superfície da pipa Arraia é igual a $0,09 m^2$;

b) a área da superfície da pipa Hexagonal é aproximadamente igual a $0,162 m^2$;

c) a área da superfície da pipa Estrela é aproximadamente igual a $0,087 m^2$.

De acordo com Voce (1994, p. 14), a seguinte relação é válida para prever a intensidade do vento necessário para a pipa voar:

Quadro 1: Relação entre a razão massa/área e o vento

Razão massa/área (kg/m^2)	Até 0,2	0,2 a 0,35	0,35 a 1
vento	suave	moderado	forte

Considerando que a massa da pipa Arraia é aproximadamente igual a 10 gramas, enquanto cada uma das pipas Hexagonal e Estrela tem uma massa aproximadamente igual a 15 gramas, vamos calcular a razão massa/área em quilogramas por metro quadrado referente a cada uma das pipas.

Sejam r_1 , r_2 e r_3 as razões referentes às pipas Arraia, Hexagonal e Estrela, respectivamente. Então:

a) $r_1 = \frac{0,01}{0,09} \approx 0,11\, kg/m^2$;

b) $r_2 = \frac{0,015}{0,162} \approx 0,09\, kg/m^2$;

c) $r_3 = \frac{0,015}{0,087} \approx 0,17\, kg/m^2$.

Desta forma, concluímos que todas as pipas terão boas condições de voo, sendo que a pipa Hexagonal deverá voar com muita facilidade, enquanto a pipa Estrela dependerá de um vento mais forte e constante.

2.3 *O Problema e os objetivos da pesquisa*

No estudo prévio, identificamos três problemas no ensino da geometria nas escolas. Um deles relacionado ao próprio sistema educacional, outro relacionado à formação de professores e o terceiro relacionado à influência dos livros didáticos na prática docente e as más abordagens encontradas na quase totalidade dos livros didáticos em circulação.

Levando estes problemas em consideração, o objetivo desta pesquisa é conceber uma proposta de ensino motivadora e com potencial para proporcionar um processo de ensino-aprendizagem eficiente e no final avaliar este potencial, identificando as limitações e indicando possíveis falhas do trabalho.

Ao analisar o desenvolvimento do trabalho, esperamos também apontar algumas sugestões que possam melhorar o potencial da nossa proposta de ensino da geometria, assim como contribuir para novos trabalho sobre o ensino de geometria nas escolas de Educação Básica.

Como já vimos, a metologia de pesquisa chamada Engenharia Didática se demonstra bastante adequada para trabalhar os objetivos enunciados acima.

3 ANÁLISE *A PRIORI*

Aqui desenvolveremos a segunda fase da Engenharia Didática. Nesta fase, definiremos as variáveis macro e microdidáticas, as sessões de ensino, as hipóteses de trabalho e apresentaremos o nosso tema para desenvolver a Engenharia Didática, a saber, a construção de pipas para aprender geometria.

3.1 Variáveis macrodidáticas

Entende-se por variáveis macrodidáticas os fatores de ordem geral que influenciam o processo de ensino-aprendizagem e que podemos exercer certo controle sobre as mesmas.

3.1.1 A sequência didática

A sequência didática será composta por oito elementos dos quais alguns deles se repetirão no processo de desenvolvimento da sequência. São eles: aplicação de um questionário individual, apresentação do problema, fontes de informação, realização de tarefas, generalização das conclusões e legitimação do conhecimento, exercícios, exame individual e avaliação.

O questionário terá por objetivo levantar informações sobre os diversos fatores que influem no processo de ensino-aprendizagem, tais como: as condições materiais e sociais dos alunos, suas experiências escolares passadas e seus conhecimentos ou supostos conhecimentos a respeito dos respectivos conteúdos de ensino.

Depois da aplicação do questionário, o segundo elemento da sequência didática refere-se a apresentação de um problema relacionado aos conteúdos de ensino através de uma exposição oral e se necessário com auxílio de materiais concretos.

O momento também será oportuno para abrir um diálogo onde os alunos poderão expor suas dúvidas, questionamentos, considerações e, de forma geral, expressar seus conhecimentos prévios e suas experiências que de alguma forma se relacionam com o problema apresentado. O professor terá o papel de fomentar o diálogo através de perguntas que instiguem os alunos a demonstrar seus conhecimentos prévios para auxiliar na construção de novos conhecimentos.

O terceiro elemento trata das fontes de informação disponibilizadas para os alunos. Levando em consideração as propriedades do tipo de conhecimento que será desenvolvido no processo de ensino-aprendizagem, no caso, a geometria, serão propostas atividades de medidas, experimentação e de observação. Para as atividades de observação, podemos utilizar recursos computacionais, em particular, *softwares* de geometria dinâmica.

Além das fontes de informação propostas pelo próprio professor, supomos que o contexto criado para desenvolver o processo de ensino-aprendizagem é de uma riqueza e valiosidade imensurável, pois propicia aos alunos tomar decisões e ter atitudes com autonomia.

Todas as realizações de medidas, experimentações e observações, tem papel funcional, ou seja, devem estar, de fato, articuladas com os objetos de conhecimentos, o que possibilita a aprendizagem significativa.

> Para ser ensinado/aprendido, o conhecimento precisa ser interessante; e ser interessante é necessariamente ser articulado, estar sintonizado com o outro, fazer eco nos projetos de vida e nas motivações do outro. Ser simplesmente exato não dá a garantia de um conhecimento interessante. Além de exato, como pretendem ser as verdades científicas, o conhecimento pode ser igualmente enfadonho, redundante e, portanto, estéril, porque mal-articulado (MELO, 2010, p. 102)

O quarto elemento da sequência didática propõe a realização de tarefas relacionadas às observações, medidas e experimentações realizadas. As tarefas exigirão leitura e interpretação, elaboração de conjecturas, deduções, reprodução de procedimentos ou a capacidade de produzi-los através de sua descrição e algumas conclusões.

Após a realização das tarefas o professor abrirá um debate com os alunos para que eles exponham suas dúvidas, observações, resoluções etc. Neste momento, o professor fará as correções necessárias de forma expositiva e estabelecerá as definições, os teoremas, os algoritmos, os procedimentos e as técnicas utilizadas pelos alunos na realização das tarefas.

Para o sexto elemento da sequência didática serão propostos exercícios que contemplam os conhecimentos trabalhados através da realização das tarefas, nas discussões em sala de aula e o que foi formalizado pela autoridade do professor.

É sabido que para haver aprendizagem é necessário que exista um conflito cognitivo e intensa atividade mental. Sobre isso, Zabala (1998, p. 74) diz o seguinte[1]:

> Apesar do fato de que a sequência se articula segundo o esquema da pesquisa, o que quer dizer que seu desenvolvimento implica um profundo processo intelectual, seguidamente os aspectos que chamam mais a atenção das fases de investigação – por exemplo, visitas, observações, ensaios de laboratório, entrevistas, elaboração de simulações ou produtos – podem fazer com que o aluno demonstre muita atividade, mas que na realidade, se limite a seguir estritamente as ordens e instruções, sem que estas ações cheguem a se transformar no meio intencional para favorecer a realização do processo mental exigido pela aprendizagem. Tanto é assim que, com a passagem do tempo, muitas vezes os alunos se limitam a recordar os aspectos mais episódicos do trabalho realizado. Agora, esta consideração não tem cabimento nesta unidade, já que houve um verdadeiro trabalho nas fases 1, 2, 3 e 4. No entanto, seria um comentário acertado naquelas unidades cujas atividades de pesquisa são feitas sem que o aluno participe da definição de razões que justifica a saída, a experimentação ou a observação, de forma que se convertam em atividades sem nenhum outro sentido além da decisão mais ou menos arbitrária do professor. Fazem-se coisas bastantes interessantes, mas não se sabe o porquê. O que deveria ser um meio para promover a atividade mental, dado que para favorecê-la é preciso contribuir com manipulações – sobretudo em determinadas idades –, se convertem numa finalidade em si mesma.

A crítica pode ser destinada à nossa proposta de ensino, pelo menos parcialmente, já que em princípio, é o professor que decide quais são as fontes de informação sem a participação dos alunos.

No entanto, observamos que a decisão do professor, apesar de arbitrária, não é indiscriminada, uma vez que ele conhece as características do conhecimento que é objeto de ensino-aprendizagem. Além disso, sabemos – a própria epistemologia nos indica e confirma (DUTRA, 2010) – que os métodos ou estratégias para atacar problemas de um determinado campo do saber, se diferenciam, sendo uns mais adequados que outros em função da natureza do conhecimento.

Para o ensino escolar, não é diferente, pois é o professor, e não os alunos, que possui uma melhor noção de quais meios são apropriados para a realização de determinado estudo,

---

[1]O autor dá quatro exemplos de sequências didáticas e analisa cada uma delas sob uma perspectiva construtivista da aprendizagem. Na citação que fizemos, o autor está analisando o seu quarto exemplo, composto dos seguintes elementos: (1) apresentação de uma situação-problema, (2) problemas ou questões, (3) respostas intuitivas ou suposições, (4) fontes de informação, (5) busca da informação, (6) elaboração de conclusões, (7) generalização, (8) exercícios de memorização, (9) prova ou exame e (10) avaliação.

mesmo porque, no geral, estes meios são inerentes à área de conhecimento do professor.

Logo, ao invés das tais decisões do professor prejudicar o processo de ensino-aprendizagem, estas contribuem para a formação de atitudes próprias e necessárias para a autonomia intelectual no campo do saber específico, neste caso, a geometria.

O penúltimo elemento de nossa sequência didática refere-se à aplicação de um exame individual, ou seja, os alunos serão submetidos a uma prova escrita, onde deverão resolver exercícios, responder perguntas e solucionar problemas.

Finalmente, o último elemento consiste na avaliação. Levando em consideração as observações feitas em todo o decorrer do processo de ensino-aprendizagem e com base na prova escrita, o professor faz as avaliações das aprendizagens e comunica aos alunos.

3.1.2 Princípios de atuação

Na primeira variável – a sequência didática – definimos os elementos da mesma e, de certa forma, mostramos como estes elementos permitem articular os conteúdos de aprendizagem. Agora, vamos estabelecer os princípios para a ação do professor durante a aplicação das sessões de ensino.

Tais princípios devem levar em consideração o planejamento das atividades e permitir que sejam feitas as adaptações necessárias para atingir os objetivos do processo educativo.

Um dos princípios necessários à nossa proposta é a flexibilidade do planejamento. Ou seja, o planejamento deve permitir que o professor faça mudanças e adaptações em função das necessidades dos alunos. Dependendo das aprendizagens que se desenvolvem no processo educativo e das dificuldades identificadas pelo professor, é necessário que haja flexibilidade para retirar conteúdos, acrescentar outros, mudar a ordem dos tópicos, focar em determinados pontos, aumentar ou diminuir o tempo de trabalho destinado a uma sessão etc.

Para que isso seja possível, precisamos tomar como outro princípio a contribuição dos alunos no decorrer da aplicação das sessões de ensino. Para tanto, reservamos um tempo em vários momentos da aplicação onde a participação dos alunos não apenas é permitida como requerida e necessária.

O terceiro princípio, fortemente atrelado aos dois primeiros, é ajudar os alunos a encontrar sentido na realização das tarefas e no trabalho como um todo. Assim, o professor deve contribuir para que o aluno compreenda no quê a realização das tarefas propostas os ajudarão, qual o sentido delas, como elas estão associadas ao objetivo final ou ao problema inicial. Além disso, criar meios propícios para que os alunos se conscientizem de suas aprendizagens pode ser uma excelente forma de ajudá-los a ver sentido naquilo que estão fazendo.

O quarto princípio que adotaremos se refere aos objetivos de aprendizagens. Deve-se sempre estabelecer objetivos alcançáveis aos alunos. Porém, isso só é possível se tivermos consciência dos conhecimentos prévios dos mesmos. Este princípio nos leva a outro que ajudará a não transgredir o quarto princípio, a saber, que o professor proporcionará aos alunos “ajudas contingentes” (ZABALA, 1998, p. 97).

Desta forma, o professor procurará realizar atendimento individualizado para criar a “zona de desenvolvimento proximal”, permitindo que o aluno avance em direção aos objetivos.

O diálogo será outro princípio. Com isso, não só pretendemos criar um ambiente que nos permita avaliar as aprendizagens dos alunos como também valorizar a contribuição dos mesmos criando condições para que eles percebam seu próprio progresso e façam sua autoavaliação. Além disso, o diálogo poderá contribuir para aumentar a autoestima e a autoconfiança dos alunos ao sentirem que suas contribuições são importantes no processo educativo.

O professor terá ainda como princípio propor atividades e criar situações que contribuam para a autonomia do aluno.

3.1.3 A organização social da aula

Para trabalhar conteúdos conceituais a organização dos alunos pode ser a de grande grupo, como ocorre tradicionalmente. Assim, o professor poderá desenvolver os conteúdos conceituais através de uma aula expositiva.

Para os conteúdos procedimentais, a organização da sala de aula em grande grupo também é adequada, pois, é suficiente expor oralmente com o auxílio do quadro-negro o procedimento, a técnica ou o método para que os alunos entendam e com a prática de exercícios aprendam.

Entretanto, considerando a singularidade de cada aluno, o trabalho em grupos compostos de até cinco alunos, por tempo determinado, poderá ser proposto a fim de proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem, estimular ajudas mútuas e a autonomia para aprender.

Já o trabalho individual será sempre indicado para aprender conteúdos conceituais, fazer exercícios para fixar conceitos e interiorizar procedimentos, técnicas e métodos. Assim, sempre que os conteúdos conceituais e procedimentais tenham sido bem compreendidos pelos alunos, o trabalho individual proporciona a aprendizagem significativa.

3.1.4 Organização do espaço e do tempo

A forma de organizar o espaço, em particular, a sala de aula, é mais uma variável do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, de acordo com a disposição das mesas e cadeiras dos alunos, a organização em grupos de trabalho ou trabalho individual, influenciam o processo educativo e demonstram as concepções de ensino dos professores.

Levando em consideração o perfil dos alunos e as tradições da escola em questão, optamos por uma concepção de ensino que tem por objetivo principal proporcionar aos alunos um processo de aprendizagem dos conteúdos típicos da matemática, onde, neste nível de ensino, predomina conteúdos conceituais e procedimentais. No entanto, também devemos deixar claro que pretendemos e desejamos que os alunos passem a ter atitudes mais favoráveis para a sua própria aprendizagem.

Assim, para os conteúdos conceituais e procedimentais, a organização da sala de aula com mesas e cadeiras enfileiradas, com os alunos de frente para a lousa e o professor é apropriada. Essa forma de organização permite ao professor fazer a exposição oral dos conteúdos conceituais e procedimentais com clareza, de maneira que todos os alunos o ouçam bem.

Além disso, proporciona também um melhor controle disciplinar, necessário ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, principalmente quando a turma de alunos não está bem habituada com relação ao comportamento e as relações sociais esperadas numa sala de aula entre sujeitos, sujeitos e meio material ou sujeitos e bens culturais.

A organização em grupos por tempo determinado será proposta quando desejarmos instigar a autonomia dos alunos, fazendo com que os mesmos se articulem, se organizem e sejam capazes de buscar o conhecimento requisitado nas fontes sugeridas pelo professor ou em outras fontes que eles tiverem acesso.

Já os trabalhos individuais serão propostos sempre que tivermos a intenção de proporcionar aos alunos a compreensão, o entendimento e a memorização de conteúdos conceituais ou procedimentais. Assim, o trabalho individual estará presente na resolução de exercícios, na resolução de problemas e no exame escrito.

Entretanto, para garantir que as atividades estejam sendo significativas para o desenvolvimento de cada um dos alunos, uma parte do tempo de cada aula será destinado à discussão em grupo e exposição oral dos alunos, seja fazendo observações, respondendo perguntas formuladas pelo professor, ou colocando suas dúvidas em forma de perguntas na tentativa de saná-las.

3.1.5 A organização dos conteúdos

Dentro dos limites que nos é imposto pelo sistema educacional e a estrutura escolar, na medida do possível trabalharemos com um *enfoque globalizador* (ZABALA, 1998, p. 160).

Zabala comenta quatro métodos globalizados: os *centros de interesse*, os *projetos*, a *investigação do meio* e os *projetos de trabalho*. Destes quatro, optaremos por aquele que é mais adequado aos nossos objetivos e às condições de trabalho.

Ao analisar os quatro métodos, julgamos, para a proposta de ensino-aprendizagem e as características próprias da área de conhecimento em questão, que os *centros de interesse* é, dentre os métodos apresentados por Zabala, o mais indicado para desenvolver o processo educativo.

Se denomina *centros de interesse* uma sequência de ensino-aprendizagem descrita por Zabala em três fases: observação, associação e expressão.

A fase de observação se refere à apresentação do tema ou problema, colocando os alunos em contato direto com os objetos associados ao tema ou problema. Esta fase consiste em "exercícios de comparação, cálculo, experimentação, expressão oral e escrita, desenho, etc." (ZABALA, 1998, p. 147)

Na fase seguinte – a associação – realiza-se exercícios de associar o tema ou problema com outros objetos sociais relacionados, por exemplo, associações com a tecnologia ou associações de causa-efeito.

A terceira fase – expressão – implica a verificação e a correção dos dados e hipóteses oriundas da observação e associação. Nas palavras do autor (ZABALA, 1998, p. 147):

> A expressão pode ser concreta, quando utiliza os trabalhos manuais, a modelagem, o desenho, a música, etc., ou abstrata, quando traduz o pensamento com ajuda de símbolos convencionais e se identifica com a linguagem, os signos matemáticos ou musicais, etc.

O método é justificado partindo do pressuposto de que a aprendizagem será mais efetiva quando há interesse pelo aluno, e que tal interesse pode ser motivado com temas e problemas relacionados aos conhecimentos prévios.

Apesar do método favorecer o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos conceituais, o mesmo também proporciona a aprendizagem de conteúdos procedimentais e atitudinais (ZABALA, 1998, p. 157):

> Os *centros de interesse*, numa primeira aproximação, consistem na busca da informação para conseguir a melhora no conhecimento de um tema que é interessante para o aluno. Portanto, os conteúdos de aprendizagem são basicamente conceituais. Mas podemos nos dar conta de que a forma de adquirir estes conteúdos tem um interesse crucial, daí que os conteúdos procedimentais relativos à investigação autônoma e à observação direta são essenciais. Ao mesmo tempo, os conteúdos atitudinais vinculados à socialização, à cooperação e à inserção no meio são estruturadores que configuram o método.

3.1.6 Os materiais curriculares

Zabala (1998, p. 167) chama de *materiais curriculares* todo tipo de material que serve de instrumento do professor, tanto para planejar e intervir no processo de ensino-aprendizagem, como para avaliar.

O referido autor classifica os materiais curriculares em quatro categorias: quanto ao *âmbito de intervenção*, quanto a *intencionalidade ou função*, quanto aos *conteúdos e a maneira de organizá-los* e quanto ao *suporte*.

Entende-se por âmbitos de intervenção os espaços onde tomam-se decisões a respeito do sistema educacional, da política educacional, do planejamento escolar e outros onde se definem as variáveis que influenciam o processo educativo. Portanto, tem aspecto muito geral.

A intencionalidade ou função do material curricular refere-se às qualidades que determinado material tem em potencial para uma dada finalidade de aprendizagem. Isto é, de acordo com o tipo de material, este pode ter a intenção de descrever um procedimento, fornecer exemplos, propor atividades, descrever uma estratégia etc.

Quanto aos conteúdos e a maneira de organizá-los, podemos encontrar materiais com propostas que se aproximam dos métodos globalizados ou disciplinares. Ainda encontra-se materiais destinados basicamente à conteúdos procedimentais, como os blocos de notas, programas de computadores para trabalhar algoritmos, desenho técnico etc. Já os livros didáticos são materiais associados aos conteúdos conceituais.

Os materiais de suporte são queles que, de certa forma, são o meio de transmissão da informação, ou aqueles materiais que auxiliam o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos. Um dos materiais de suporte muito conhecido, é o quadro-negro. Outros exemplos de materiais de suporte são, os cadernos, os livros didáticos, vídeos, a informática, os laboratórios etc.

3.1.7 Avaliação

Entendemos a avaliação como mais uma variável que intervêm no processo de ensino-aprendizagem. Para tanto, distinguiremos três fases da avaliação: *avaliação inicial*, *avaliação reguladora* e *avaliação final*, conforme descrito por Zabala (1998, p. 199).

A avaliação inicial buscará levar em conta as experiências escolares anteriores dos alunos, suas aprendizagens, seus conhecimentos prévios, os supostos conhecimentos e as possíveis motivações que os mesmos têm para aprender.

A partir da avaliação inicial, o processo de ensino-aprendizagem é estruturado. Como o número de variáveis que influem no processo de ensino-aprendizagem é muito grande e podemos ter o controle de apenas algumas delas, é certo que para poder proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem é necessário estar atento às dificuldades dos mesmos e à relevância das atividades propostas no decorrer do processo de ensino-aprendizagem.

Assim, desde que o planejamento do processo educativo seja flexível, poderemos fazer as adequações necessárias a fim de sempre propor atividades que estejam ao alcance dos alunos, mas que representem um desafio para proporcionar a aprendizagem dos conteúdos pretendidos.

A avaliação reguladora refere-se à análise frequente do processo de ensino-aprendizagem e às adequações que são feitas em função das necessidades e dificuldades de aprendizagens dos alunos.

Desta maneira, enquanto o enfoque da avaliação reguladora é a intervenção do professor no processo de ensino-aprendizagem, a avaliação final terá por objetivo avaliar os conteúdos de aprendizagens adquiridos pelos alunos. Ou seja, a avaliação final averiguará a aprendizagem dos conteúdos pelos alunos e a possível evolução dos mesmos.

3.2 Variáveis microdidáticas

Entendendo a escola como um espaço propício à formação integral do aluno, ou seja, onde os conteúdos de ensino-aprendizagens não se limitam às disciplinas tradicionais e, portanto, compreendendo a escola como um espaço favorável à formação de sujeitos conscientes dos valores e princípios que regem a sociedade em que vivem, de sua própria condição social e dos padrões dominantes de se comportar e relacionar com as pessoas, os objetos e a cultura, podemos falar de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais.

Por sua vez, os conteúdos conceituais se referem a fatos, conceitos ou princípios. Os procedimentais podem ser procedimentos, técnicas ou métodos. Enquanto os atitudinais referem-se a valores, atitudes e normas.

Assim, dependendo do tipo de conteúdo que é objeto de ensino, a aprendizagem se dará de um ou de outro modo. Entretanto, observa-se que na prática não é possível separar estes conteúdos, isto é, em geral, estes conteúdos se manifestam concomitantemente, ainda que um ou outro possa predominar sobre o demais. Além disso, cada área do conhecimento tem características próprias, particulares, e desta forma, dependendo do nível de ensino, podem pender mais para um ou outro tipo de conteúdo.

Então, definiremos as seguintes variáveis metodológicas que nos permitirá ter algum controle da concepção, aplicação e avaliação das sessões de ensino: conteúdos conceituais (fatos, conceitos e princípios), conteúdos procedimentais e conteúdos atitudinais.

3.2.1 Conteúdos Conceituais

Os conteúdos factuais se referem a "conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos, singulares" (ZABALA, 1998, p. 41).

Em particular, para a nossa proposta de ensino-aprendizagem da geometria, podemos considerar conteúdos factuais a linguagem matemática, os símbolos e os axiomas. O uso de símbolos e a linguagem matemática são úteis na medida que possibilitam pensar matematicamente com clareza, coerência, precisão e de forma mais simples quando comparado ao pensar matematicamente através da língua materna.

Nesse sentido, a linguagem própria da matemática facilita a comunicação entre professor e alunos, desde que estes estejam familiarizados com a linguagem ou em acordo comum do que se convencionou.

"Este tipo de conhecimento se aprende basicamente mediante atividades de cópias mais ou menos literais, a fim de ser integrado nas estruturas de conhecimento, na memória" (ZABALA, 1998, p. 42).

Na matemática, este tipo de conteúdo será aprendido através da explicação oral do professor com o auxílio do quadro-negro, seguido do uso repetitivo pelos alunos em atividades de cópias literais e associando os tais conteúdos aos respectivos conceitos relacionados.

Vejamos o que Zabala (1998, p. 42) diz sobre os conceitos e os princípios:

> Os conceitos se referem ao conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns, e os princípios se referem às mudanças que se produzem num fato, objeto ou situação em relação a outros fatos, objetos ou situações e que normalmente descrevem relações de causa-efeito ou de correlação.

Assim, na matemática, as definições fazem o papel dos conceitos. Por exemplo, um quadrado é definido por uma figura de quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos. Mesmo que um quadrado tenha a medida de seu lado menor do que a medida do lado de um outro quadrado, ainda assim ambos continuam sendo quadrados e, portanto, estamos realmente diante de um caso de conceito.

Enquanto aos princípios, na matemática, estes são traduzidos em forma de propriedades, proposições e teoremas. Por exemplo, a propriedade da distributividade dos números reais é um princípio. Esta propriedade decorre de proposições elementares – os axiomas – e a demonstração, geralmente, é feita em cursos onde se estuda a construção dos números, sendo neste caso os cortes de Dedekind uma via para a construção dos números reais.

Outro exemplo de princípio é o famoso Teorema de Pitágoras. Sempre que nos defrontamos com um triângulo retângulo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, sendo, portanto, um princípio.

Ao contrário dos fatos, os conceitos e os princípios não podem ser aprendidos com a simples cópia e reprodução das definições e enunciados, pois, neste caso é necessário compreendê-los, ou seja, é preciso entender os significados.

Sendo assim, para que exista aprendizagem, o processo de ensino deve levar em conta os conhecimentos prévios dos alunos de maneira que estes possam relacioná-los aos novos objetos de conhecimento, além de propiciar as operações mentais necessárias para a compreensão a fim de que no processo de ensino os alunos sejam capazes de utilizar os tais conceitos e princípios na resolução de problemas, na relação e interpretação de novas situações e na compreensão de novos fatos.

3.2.2 Conteúdos Procedimentais

Técnicas, métodos e procedimentos são conteúdos procedimentais. O que caracteriza estes conteúdos é a realização de ações, isto é, todos eles dizem respeito à realização de uma ação ou de um conjunto de ações para se alcançar um determinado objetivo.

Na matemática, temos tanto técnicas, métodos e procedimentos como conteúdos procedimentais. Mas, mesmo que tais conteúdos guardem certas semelhanças, há diferenças significativas.

Alguns destes conteúdos podem exigir poucas ações e estas podem ser bem definidas e constantes, ou seja, se explicam de forma geral sem exceções. Por exemplo, os algoritmos da soma, subtração, multiplicação e divisão dos números Naturais, se aplicam para dois números Naturais quaisquer, isto é, as ações são sempre as mesmas, sem exceções.

Já em relação às técnicas, geralmente, diante de um problema se torna necessário escolher uma técnica que permita avançar na resolução do mesmo. No entanto, dentre um certo número de técnicas disponíveis, apenas algumas delas serão apropriadas para prosseguir na resolução do problema. Neste caso, é necessário fazer a escolha adequada, o que só será possível com uma atividade cognitiva bem mais complexa do que no caso anterior.

Por exemplo, no cálculo de uma integral, pode ser necessário usar alguma técnica de integração. Entretanto, nem todas as técnicas de integração possibilitarão avançar na resolução. Assim, em certas ocasiões, pode ser que a técnica da mudança de variável seja a mais indicada, enquanto que numa outra situação, pode ser que a técnica de integração por partes permita o cálculo da integral com mais eficiência.

Por outro lado, em muitos casos, um determinado problema pode ser resolvido de várias maneiras diferentes. Assim, cabe decidir qual dos métodos disponíveis é mais adequado ou apropriado a julgar pelas circunstâncias e pelos dados que o problema apresenta.

Suponha, por exemplo, que nos deparemos com o problema de calcular a área de uma região plana em forma de trapézio. A depender dos dados conhecidos um método pode ser mais recomendado do que outros. Por exemplo, se não conhecemos as dimensões do trapézio, teremos que adotar um método experimental, isto é, escolher uma unidade de área adequada e comparar quantas unidades de área equivale, aproximadamente, a área do trapézio. Se, por outro lado, conhecemos as dimensões do trapézio, podemos calcular sua área por composição e decomposição usando o princípio de equivalência de áreas. Ou então, poderíamos fazer um cálculo, já que em função das bases e da altura do trapézio é possível calcular sua área.

Percebemos assim a íntima ligação dos tipos de conteúdos. A fórmula do cálculo da área de um trapézio é um princípio, já que se trata de uma proposição demonstrável. No entanto, as ações envolvidas na aplicação deste princípio é um método. Podemos então dizer que a característica fundamental dos métodos é a necessidade de se realizar muitas ações. De fato, qualquer que seja o método escolhido para calcular a área de um trapézio, serão necessárias muitas ações. Mesmo que a escolha seja aplicar a fórmula do cálculo da área do trapézio, será necessário reconhecer o trapézio, identificar os elementos do trapézio que são relevantes para a resolução do problema, associar estes elementos às suas medidas e ao conhecimento da fórmula e, finalmente, realizar o cálculo.

Portanto, a aprendizagem dos conteúdos procedimentais segue, mais ou menos, a seguinte sequência:

a) Execução das ações. É imprescindível que as ações sejam executadas pelos alunos. Apesar de óbvio, muitas vezes se espera que o aluno aprenda um determinado conteúdo procedimental apenas com a memorização da descrição dos passos do procedimento;

b) Os exercícios de repetição das ações do determinado conteúdo procedimental são necessários para que o aluno possa dominar o mesmo;

c) A reflexão sobre a atividade é essencial para que se possa compreender melhor os conceitos e as propriedades associadas ao conteúdo procedimental, bem como para melhorar a realização do procedimento tendo como suporte a teoria;

d) A utilização do conteúdo procedimental em contextos diferentes é importante para desenvolver a abstração. Pois, a aprendizagem de um conteúdo procedimental implica a capacidade de usar tal conhecimento nos mais diversos contextos, o que torna necessário o contato com exercícios que se situam em contextos diferentes.

3.2.3 Conteúdos Atitudinais

Um valor, uma atitude ou uma norma, são classificadas como conteúdos atitudinais.

Sem entrar no mérito das discussões sociológica e filosófica, vamos adotar algumas noções a respeito dos significados de valor, atitude e norma.

Vamos entender por valores os princípios pelos quais formamos uma opinião ou um juízo de uma certa conduta ou situação.

Quanto às atitudes, entenderemos por um comportamento, uma forma de agir ou atuar, que esteja em função da situação ou circunstância que se apresenta diante do sujeito.

Já as normas, podem ser entendidas por regras, leis, ou padrões de comportamentos dominantes que regem um determinado coletivo social.

Não vamos desenvolver os conceitos de cada um destes termos porque isso está fora dos limites deste trabalho. Também não vamos tentar responder como se aprende os conteúdos atitudinais, pois essa discussão é bem mais geral do que os estudos que se referem à educação escolar. No entanto, não há dúvidas de que a forma de se organizar em sala de aula, as regras de convivência escolar, a comunicação estabelecida entre professor e alunos ou alunos e alunos, a posição e a atuação dos professores e dos alunos diante circunstâncias específicas, têm influência na formação dos sujeitos que fazem parte do coletivo.

Sendo assim, podemos tentar identificar como criar as condições mais favoráveis para que os alunos desenvolvam certos valores, atitudes e aprendam certas normas.

Para que as escolhas de como criar tais condições favoráveis não dependam exclusivamente das opiniões pessoais do professor, é imprescindível que este conheça os valores, as atitudes e as normas universalmente aceitas pela sociedade brasileira. É aconselhável também conhecer os padrões de comportamentos sociais dominantes.

Assim, podemos considerar como objetivo de ensino-aprendizagem os seguintes conteúdos atitudinais: solidariedade, respeito à diversidade étnica, cultural, política, religiosa, sexual e inclusão de pessoas com necessidades especiais.

3.3 As sessões de ensino

A seguir consta as sessões de ensino concebidas para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. São oito sessões de ensino, cada uma com determinados conteúdos conforme descrito nas próprias sessões. O tempo de duração das sessões é variável e depende do ritmo de aprendizagem dos alunos.

Antes de iniciar as sessões de ensino será aplicado um questionário com a finalidade de conhecer as experiências escolares dos alunos em relação aos seus conhecimentos sobre o tema e os conteúdos de aprendizagens que serão propostos (ver apêndice A).

A nossa proposta de Engenharia Didática tem como estrutura fundamental as sessões de ensino que estão apresentadas a seguir. Por sua vez, estas foram concebidas a partir de um problema sobre pipas para desenvolver um processo de ensino-aprendizagem da geometria plana. Para resolver o problema, será necessário adquirir determinados conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais.

As atividades das primeiras sessões tem caráter predominantemente empírico. No entanto, gradualmente as atividades vão requisitando raciocínio lógico, dedução e abstração. Elas também contribuem de forma imprescindível para a resolução do problema inicial. Além disso, as atividades e os conteúdos de aprendizagens encontram-se bem articulados.

Cada atividade resolvida representa um progresso em direção à construção das pipas e à resolução do problema inicial. O problema inicial envolver três tipos de pipas que denominamos de pipa Arraia, pipa Hexagonal e pipa Estrela. Como os nomes sugerem, as pipas têm formas geométricas bem conhecidas: quadrado, hexágono regular e uma estrela de cinco pontas que pode ser obtida traçando as diagonais de um pentágono regular, respectivamente.

As fontes de informação serão extraídas empiricamente nas primeiras atividades onde os alunos serão solicitados a medir os comprimentos das varetas das pipas. Mas as pipas não serão construídas simultaneamente com o desenvolvimento das sessões de ensino. Ou seja, o material para desenvolver as sessões de ensino, salvo exceções mencionadas, é o material impresso com o conteúdo das mesmas. Isso implica a necessidade de pensar, deduzir e abstrair. Ao final do processo de ensino-aprendizagem pretendemos desenvolver uma oficina de pipas para que os alunos possam construí-las.

As sessões de ensino a seguir representam apenas a estrutura para o desenvolvimento da terceira fase da Engenharia Didática – a aplicação nas salas de aulas. Durante o desenvolvimento das sessões ou entre uma sessão e outra, podemos propor outras atividades para auxiliar e ajudar o processo de ensino-aprendizagem. Em geral, essas atividades complementares serão compostas por exercícios para memorizar os conteúdos, e problemas para aplicar os conteúdos estudados em contextos diferentes.

3.3.1 Sessão 1

Conteúdos: ângulos, medidas de massa e a noção de área.

Nesta sessão, apresentaremos o problema sobre as pipas para os alunos e iniciaremos um primeiro debate sobre o tema.

Sobre as pipas

Segundo **Voce**, a pipa é um objeto cultural e sua utilização é muito extensa. Como esporte, pode se inserir no contexto das competições ou servir apenas de lazer; "É um instrumento se for usada para pesca, meteorologia, fotografias aéreas, ou uso militar" (Voce, 1994, p. 8).

Certamente pode ser considerado um brinquedo popular, sendo conhecida em todas as regiões do Brasil. Para a sua confecção são utilizados linha, papel, varetas de bambu e cola.

Historicamente a pipa já era conhecida na atual região da China há mais de 200 anos antes de Cristo e era utilizada com fins militares e também estava associada a superstições.

Durante a história da humanidade, verifica-se que a pipa também já foi usada como sinaleiros; na suspensão de cargas; na ciência contribuiu no campo da eletricidade sendo usada em experimentos por Benjamin Franklin; e na invenção do avião por Santos Dumont que adaptou um motor a um modelo de pipa.

No Brasil, introduzida pelos portugueses no século 16, foi utilizada pelos negros do Quilombo dos Palmares para sinalizar, ao serem colocadas no ar, que algum perigo se aproximava, permitindo antecipar o ataque do inimigo e organizar a defesa.

Responda:

1. O que faz uma pipa voar?

2. Como a pipa levanta voo?

3. Quais características que uma pipa deve ter para voar?

4. Qual é o ângulo mais apropriado que o plano que contém a pipa deve formar com a direção do vento para a pipa voar?

5. Como podemos prever se uma pipa poderá voar ou não?

A relação *massa/área*

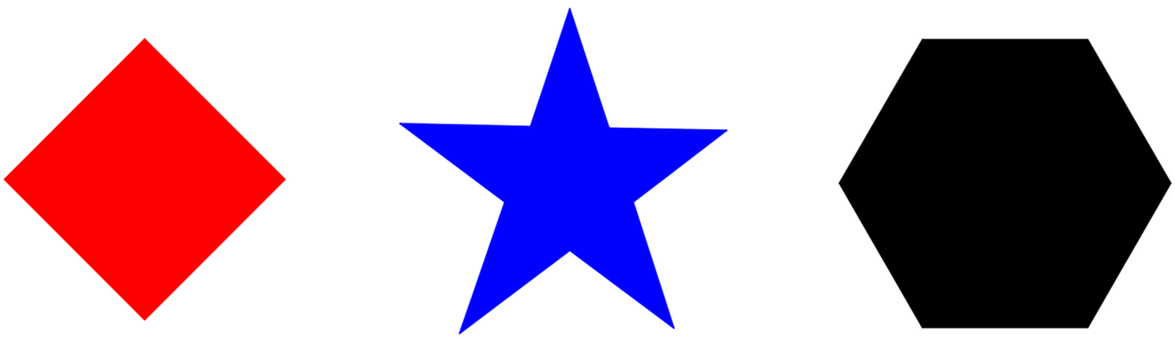
Existe um cálculo que permite fazer uma boa previsão sobre a possibilidade de uma pipa voar ou não. O cálculo consiste em encontrar a razão entre a massa (Kg) da pipa e a área de sua superfície (m^2).

Em função desta razão, estima-se a intensidade do vento necessário para o voo da pipa. Observe o quadro a seguir.

Quadro 2: Razão massa/área

Massa/área (kg/m^2)	Até 0,2	De 0,2 a 0,35	De 0,35 a 1
Vento	Suave	Moderado	Forte

Problema: Considere as pipas Arraia, Hexagonal e Estrela de cinco pontas ilustradas a seguir e responda:



Desenho 11 - Representação das pipas

6. Qual delas precisa de um vento mais forte?

7. Qual pode levantar voo com um vento mais suave?

3.3.2 Sessão 2

Conteúdos: noções primitivas (ponto e reta no plano), pontos colineares, representação simbólica de elementos geométricos, retas paralelas, retas perpendiculares, polígonos e alguns de seus elementos (lados e vértices).

Esta sessão foi planejada para introduzir os conceitos fundamentais da geometria plana sem, num primeiro momento, preocupação com explicações para os respectivos conceitos. A intenção é trabalhar os conceitos intuitivamente resolvendo as atividades desta sessão no *software GeoGebra*[2].

Atividade 1. Construa um ponto A. Quantas retas são possíveis passar por um único ponto?

Atividade 2. Construa dois pontos (distintos) A e B. Quantas retas passam por dois pontos (distintos)?

Atividade 3. Construa uma reta r e um ponto A não pertencente a tal reta. Quantas retas passando pelo ponto A são paralelas à reta *r*? Descreva com suas palavras o que são duas retas paralelas.

Atividade 4. Construa três pontos A, B e C. Existe uma única reta que passa simultaneamente pelos três pontos? Se existe, dizemos que os pontos são colineares, caso contrário, dizemos que os pontos são não-colineares.

Atividade 5. Construa três pontos não-colineares A, B e C. Unir os pontos A e B por um segmento de reta. Construir também os segmentos de reta BC e CA.
a) Quantos lados tem a forma geométrica construída?
b) Os pontos A, B e C são chamados de vértices. Quantos vértices tem a forma geométrica construída?

Atividade 6. Construa quatro pontos A, B, C e D de forma que nenhum conjunto de três destes

[2]GEOGEBRA. Versão 4.2. Saafelden, Áustria: International Geogebra Intitute, 2013. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/. Acesso em: 15/07/2013.

pontos sejam colineares. Em seguida, construa os segmentos de reta AB, BC, CD e DA.

a) Quantos vértices tem a forma geométrica?

b) Quantos lados tem a forma geométrica?

c) Existe uma forma geométrica de três lados que pode ser "superposta"[3] a uma outra forma geométrica de quatro lados?

Atividade 7. Utilizando apenas segmentos de reta, construa uma forma geométrica de cinco lados.

a) Quantos vértices essa forma geométrica tem?

b) Pode-se afirmar que o número de lados de uma forma geométrica dos tipos vistos até agora é sempre igual ao número de vértices?

Atividade 8. Você já deve ter notado que é possível classificar essas formas geométricas em função do número de lados. Observe o quadro a seguir.

Quadro 3: Denominação de polígonos de acordo com o número de lados

Número de lados	**Denominação**
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
20	icoságono

[3]Usamos o termo "superposta" para dar a ideia de congruência. Como não tínhamos a intenção de dar a definição de congruência, achamos melhor substituir o termo por um outro que pudesse transmitir a ideia de forma intuitiva.

a) Construa um polígono regular de três lados. Use a ferramenta “polígono regular”.

b) Construa um polígono regular de quatro lados.

c) Construa um polígono regular de 5 lados.

Atividade 9.

a) Medir o comprimento de todos os lados de cada um dos polígonos. Use a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”.

b) Medir todos os ângulos de cada um dos polígonos. Use a ferramenta “Ângulo”.

c) O que os polígonos regulares tem em comum?

3.3.3 Sessão 3

Conteúdos: noções de frações, números decimais, medidas de comprimento, o sistema métrico decimal, divisão e multiplicação com números não inteiros.

Nessa sessão, a proposta é que os alunos obtenham os comprimentos das varetas das pipas empiricamente. Ou seja, as varetas e os instrumentos para as medidas deverão ficar disponíveis aos alunos.

Uma vez obtido os comprimentos das varetas é possível desenvolver as demais atividades.

Atividade 10. Com uma régua, efetue a medida do:

a) comprimento da vareta da pipa Arraia em centímetros:

b) comprimento da vareta da pipa Hexagonal em centímetros:

c) comprimento da vareta da pipa Estrela em centímetros:

Atividade 11. Quando queremos representar a medida de algo menor do que a unidade tomada como padrão, podemos utilizar as frações. Por definição, uma fração é formada por dois números inteiros, um chamado numerador e outro denominador. O numerador se posiciona acima do denominador. Além disso, o denominador de uma fração é sempre diferente de zero. Exemplo de uma fração:$\frac{3}{7}$. Neste exemplo, o 3 é o numerador enquanto o 7 é o denominador. Vejamos como podemos usar as frações para representar valores menores do que a unidade. Suponha que a nossa unidade padrão seja o centímetro. Se desejarmos medir a espessura de um maço com 15 folhas de papel sulfite, podemos criar dez divisões igualmente espaçadas na nossa unidade padrão, no caso, o centímetro. Assim, comparamos quantas divisões correspondem à espessura do maço de folhas. Ao fazer isso, observaremos, aproximadamente, que a espessura do maço de folhas é equivalente a 3 divisões de um total de dez. Então, representamos a medida da espessura do maço de folhas através da fração $\frac{3}{10}$(três décimos de centímetros).

Com a disponibilidade de uma régua de madeira de 1 metro de comprimento, encontre:

a) as frações que representam o valor do comprimento de cada uma das varetas da pipa Arraia em metros: $\frac{}{}$e$\frac{}{}$.

b) a fração que representa o valor do comprimento da vareta da pipa Hexagonal em metros: $\frac{}{}$.

c) a fração que representa o valor do comprimento da vareta da pipa Estrela em metros: $\frac{}{}$.

Atividade 12. Dividindo o numerador pelo denominador de uma fração, encontra-se a representação decimal. Encontre a representação decimal:

a) dos comprimentos de cada uma das varetas da pipa Arraia em metros: _______ e

b) do comprimento das varetas da pipa Hexagonal em metros:

c) do comprimento das varetas da pipa Estrela em metros:

Atividade 13. Encontramos os comprimentos das varetas das pipas:

- Arraia – uma vareta de 42,5cm e uma vareta de 47cm;
- Hexagonal – três varetas de 50cm;
- Estrela – três varetas de 51cm.

Vimos também como obter esses mesmos valores em metros. Complete os espaços em branco a seguir.

a) $42,5cm \div \_ = 0,425m$

b) $47cm \div \_ = 0,47m$

c) $50cm \div \_ = 0,5m$

d) $51cm \div \_ = 0,51m$

Atividade 14. Complete os espaços indicados a seguir.

a) $0,425m \times \_ = 42,5cm$

b) $0,47m \times \_ = 47cm$

c) $0,5m \times \_ = 50cm$

d) $0{,}51m \times \quad = 51cm$

Atividade 15. Os valores dados a seguir estão em centímetros. Represente os mesmos valores em metros.

a) *7cm*

b) *109cm*

c) *1002cm*

d) *406cm*

Atividade 16. Represente os valores a seguir em centímetros.

a) *0,63m*

b) *1,04m*

c) *0,08m*

d) *20,09m*

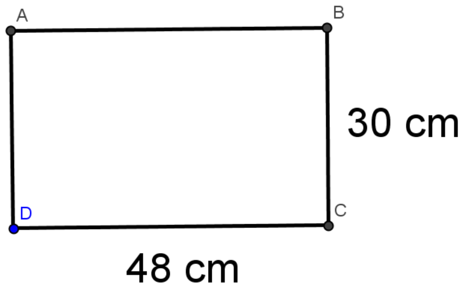
3.3.4 Sessão 4

Conteúdos: quadriláteros (retângulo, quadrado, trapézio) e perímetro de polígonos.

As atividades desta sessão mostram os procedimentos envolvidos na construção da pipa Arraia. Neste processo, é possível explorar as propriedades de um retângulo, de um trapézio e de um quadrado.

No item c) da atividade 19 é necessário deduzir o comprimento de um dos lados do trapézio representado no desenho 14. A dedução é necessária porque os procedimentos com a folha de seda não deve ser realizada durante as aulas. Assim, os alunos precisarão desenvolver o pensamento abstrato para responder as atividades. Porém, vamos manter ainda algumas ações empíricas, como a de medir os ângulos nos desenhos com o uso de um transferidor.

Atividade 17. Para confeccionar a pipa Arraia é necessário uma folha de seda que tenha a forma de um quadrado. Para obter a forma desejada, pegue uma folha de seda (tamanho padrão *48cm* por *60cm*), dobre ao meio e corte. Após isto, a folha apresentará a seguinte forma geométrica:



Desenho 12 - Representação da metade de uma folha de seda

a) Quantos lados tem a forma geométrica da folha representada no desenho 12?

b) Os lados dessa forma geométrica possuem comprimentos iguais?

c) Com o auxílio de um transferidor, realize a medida dos ângulos indicados a seguir e registre.

$m(\widehat{ABC}) =$ _ $m(\widehat{BCD}) =$ _

$m(\widehat{CDA}) =$ _ $m(\widehat{DAB}) =$ _

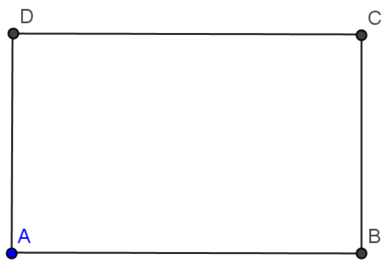
Atividade 18. A forma geométrica representada no desenho 12 é chamada retângulo. Com base no que foi respondido na atividade anterior, complete os espaços indicados na sentença a seguir.

a) Um retângulo é um polígono de __________________ lados e quatro ângulos de medidas iguais a _____ graus. Um ângulo cujo a medida é igual a 90 graus é chamado ângulo reto.

b) A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada perímetro. Qual é o perímetro do retângulo representado no desenho 12?

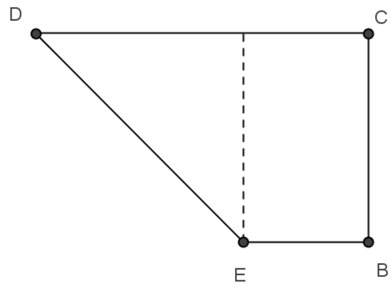
Atividade 19. A partir da folha de seda representada no desenho 12, podemos obter um quadrado seguindo os passos a seguir.

Situação 1: a folha está na forma de um retângulo



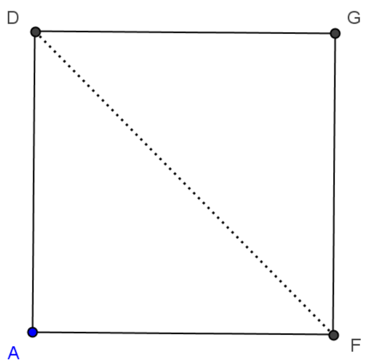
Desenho 13 - Situação 1

Situação 2: dobra-se a folha de modo que o lado representado por AD sobreponha-se ao lado representado por DC, conforme o desenho 14. Corte com uma tesoura onde é indicado por uma linha tracejada.



Desenho 14 - Situação 2

Situação 3: desdobrando a folha, obtemos o quadrado representado logo a seguir.



Desenho 15 - Situação 3

a) Na situação 2 representada no desenho 14 surge uma nova forma geométrica. Essa forma é denominada trapézio. Quantos lados possui um trapézio?

b) Observe o trapézio do desenho 14 e complete o espaço vazio com o sinal de igual (=) ou com o sinal de diferente (≠).

$m(\widehat{BCD})\ \_\ 90graus$ $m(\widehat{CDE})\ \_\ 90graus$

$m(\widehat{DEB})\ \_\ 90graus$ $m(\widehat{EBC})\ \_\ 90graus$

c) No desenho 14, sabendo que o comprimento do lado DE é aproximadamente $42{,}5cm$, calcule o perímetro do trapézio?

Atividade 20. Ainda em relação ao desenho 14, as retas que contém os segmentos DE e BC são paralelas? Dica: prolongue os referidos segmentos com o uso de uma régua.

Atividade 21. Duas retas distintas que possuem um único ponto comum são denominadas concorrentes. Assim, no trapézio representado no desenho 14, as retas que contém os segmentos DE e BC são concorrentes. E as retas que contém os lados BE e CD são:

( ) concorrentes mas não perpendiculares

( ) perpendiculares

( ) paralelas

Atividade 22. Um trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos:

( ) perpendiculares

( ) paralelos

Atividade 23. O desenho 15 representa a folha de seda em forma de um quadrado obtido pelo processo descrito na atividade 19. Observe os desenhos de 12 a 15 e responda:

a) Qual é o comprimento aproximado, em centímetros, do lado AF?

b) E o comprimento do lado FG?

c) E o comprimento dos lados GD e DA?

d) Qual é o perímetro do quadrado?

Atividade 24. Usando um transferidor, faça as medidas dos ângulos a seguir no desenho 15.

$m(\widehat{AFG}) = \_\ graus$ $m(\widehat{FGD}) = \_\ graus$

$m(\widehat{GDA}) = \_\ graus$ $m(\widehat{DAF}) = \_\ graus$

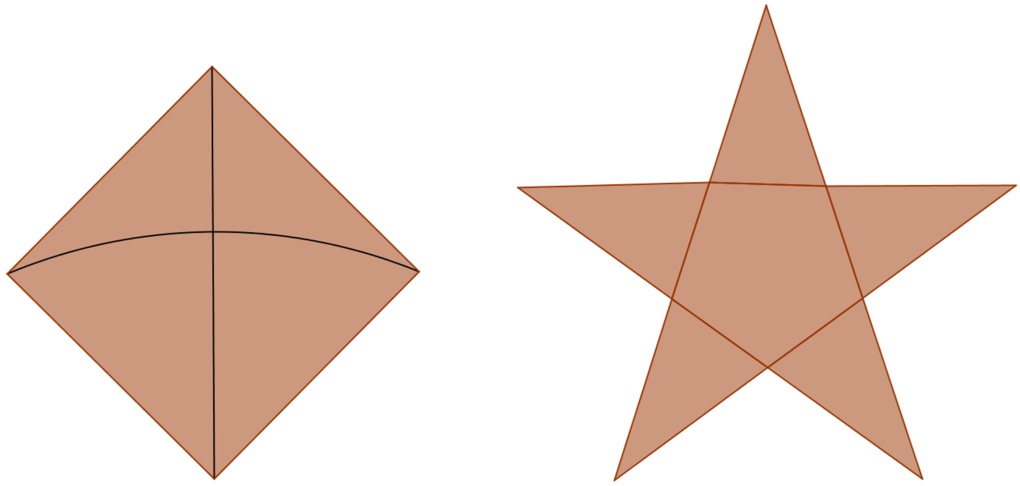
Atividade 25. Um quadrilátero recebe a denominação de quadrado quando a medida de cada um de seus ângulos é igual a ______ graus e o comprimento de seus lados são ____________.

3.3.5 Sessão 5

Conteúdo: área, cálculo de áreas, o metro (m) e o metro quadrado (m^2), múltiplos e submúltiplos do metro (m) e do metro quadrado (m^2).

Nesta sessão vamos introduzir o conceito de área e um método para se calcular áreas de formas geométricas planas. Com as atividades desta sessão também vamos trabalhar unidades de medidas de comprimento e de área, assim como alguns múltiplos e submúltiplos do metro e do metro quadrado.

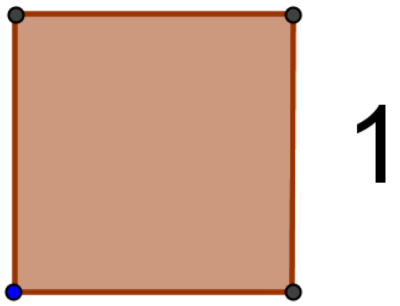
Atividade 26. Observe a representação das pipas Arraia e Estrela a seguir.



Desenho 16 - Representação das pipas Arraia e Estrela

Em qual das pipas foi usado mais papel de seda? Medir a quantidade de papel que foi usada para a confecção das pipas é equivalente a medir a superfície do papel que foi usado. Ou seja, queremos expressar regiões delimitadas por formas geométricas planas através de um número. Este número é chamado de área. Então é preciso definir uma unidade de área.

Convenciona-se que todo quadrado de lado igual a 1 (uma unidade de comprimento) tem área igual a 1 (uma unidade de área).

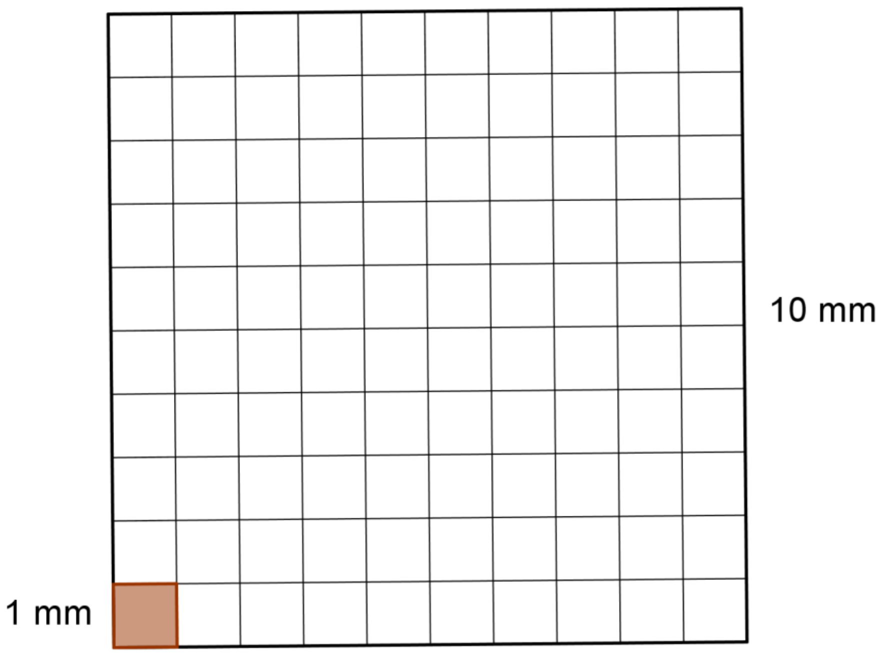


Desenho 17 - A unidade de área

Por exemplo, um quadrado cujo o comprimento de seu lado é igual a *1cm* tem área igual a$1cm^2$(um centímetro quadrado); Um quadrado de lado igual a *1m* de comprimento tem área igual a $1m^2$(um metro quadrado).

Sabendo que o comprimento do lado do quadrado referente à pipa Arraia é igual a *30cm*, qual é a área deste quadrado?

Atividade 27. Você conseguiu responder a pergunta anterior? Observe o seguinte problema de calcular a área do quadrado do desenho a seguir.



Desenho 18 - Quadrado de lado igual a 1cm dividido em quadrados de lado igual a 1mm

Veja que o quadrado maior foi dividido em quadrados menores de lado cujo o comprimento é igual a *1mm*. E já sabemos que a área de cada um dos quadrados menores é igual a $1\mathrm{mm}^2$. Então, para saber qual é a área do quadrado maior, basta contar em quantos quadrados menores o mesmo foi dividido.

Uma maneira de fazer a contagem é observar que existem *10* faixas horizontais sendo que em cada uma dessas faixas existem *10* quadrados menores. Logo, o número de quadrados menores é $10 \cdot 10 = 100$. Como o quadrado menor é a unidade de área, temos que a área do quadrado maior é igual a $100\mathrm{mm}^2$.

A mesma ideia aplica-se à atividade anterior. Tente fazê-la agora.

Atividade 28. *1cm* é equivalente a quantos milímetros? Observe uma régua para responder.

Atividade 29. Observe o desenho 18 e responda: qual é a área do quadrado maior em cm^2?

Atividade 30. Complete os espaços indicados.

a) $100\mathrm{mm}^2 \div \_\_ = 1\mathrm{cm}^2$

b) $1\mathrm{cm}^2 \cdot \_\_ = 100\mathrm{mm}^2$

Atividade 31. Responda:

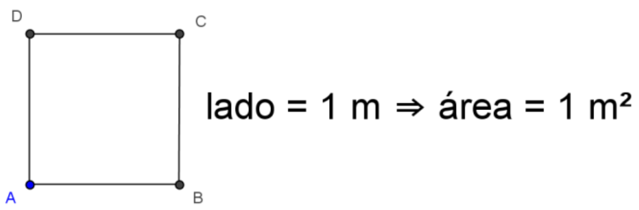
a) $200\mathrm{mm}^2$ é equivalente a quantos cm^2?

b) $7\mathrm{cm}^2$ é equivalente a quantos mm^2?

Atividade 32. Responda:

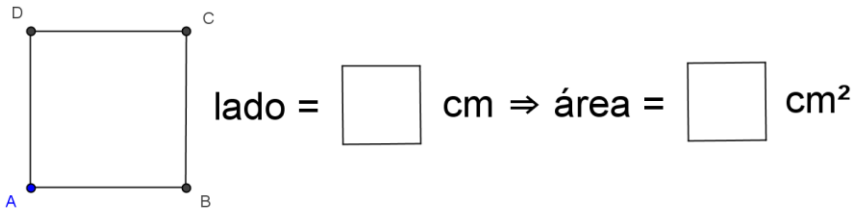
a) 1m é equivalente a quantos cm?

b) Observe o quadrado representado a seguir.



Desenho 19 - O metro quadrado (m^2)

O desenho 20 representa o mesmo quadrado do desenho 19. Preencha os espaços indicados.



Desenho 20 - Quadrado ABCD de lado igual a 1m

c) 1m^2 é equivalente a quantos cm^2?

Atividade 33. Complete.

a) $1\text{m}^2 \cdot \underline{\quad} = 10000\text{cm}^2$

b) $10000\text{cm}^2 \div \underline{\quad} = 1\text{m}^2$

Atividade 34. Complete os esquemas a seguir.

a) $mm \overset{\div 10}{\rightarrow} cm \overset{\div 100}{\rightarrow} m \overset{\div 1000}{\rightarrow} km$ $\quad km \overset{\times}{\rightarrow} m \overset{\times}{\rightarrow} cm \overset{\times}{\rightarrow} mm$

b) $mm^2 \overset{\div 100}{\rightarrow} cm^2 \overset{\div 10000}{\rightarrow} m^2 \overset{\div 1000000}{\rightarrow} km^2$ $km^2 \overset{\times}{\rightarrow} m^2 \overset{\times}{\rightarrow} cm^2 \overset{\times}{\rightarrow} mm^2$

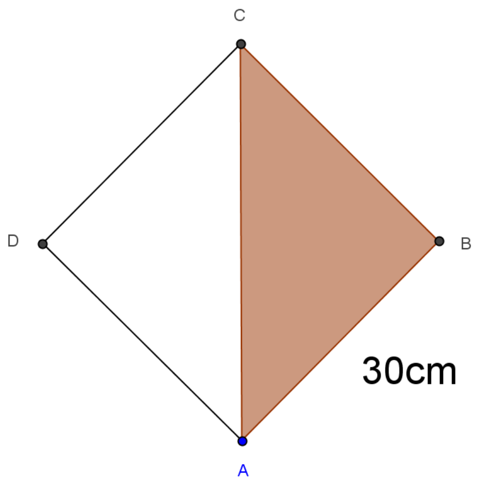
3.3.6 Sessão 6

Conteúdo: cálculo de áreas e formas geométricas (triângulo equilátero, triângulo isósceles, triângulo escaleno, hexágono regular, paralelogramo e trapézio).

Nesta sessão apresentaremos o método de composição e decomposição para o cálculo de áreas utilizando o princípio da equivalência de áreas.

Apesar de ainda dependermos de medições empíricas em alguns casos, também há atividades que requerem deduções.

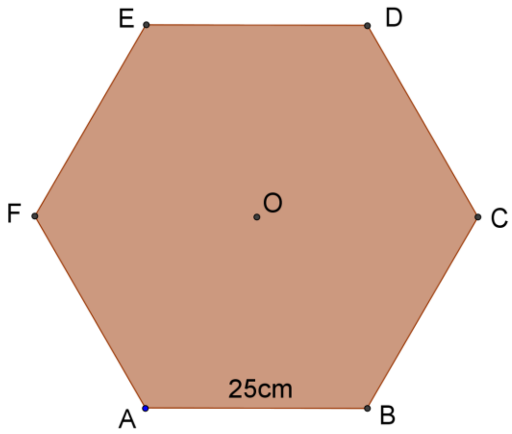
Atividade 35. O polígono ABCD do desenho 21 é um quadrado e representa a forma da pipa Arraia. Qual é a área do triângulo ABC?



Desenho 21 - Quadrado de lado igual a 30cm

Atividade 36. Sabendo que o segmento AC representa a posição de uma das varetas da pipa e assumindo que seu comprimento é igual a 42,5cm, calcule o perímetro do triângulo ABC. Observe que os comprimentos de dois dos lados do referido triângulo são iguais. Todo triângulo que possui dois lados de comprimentos iguais é chamado de triângulo isósceles.

Atividade 37. Vamos mostrar uma maneira de calcular a área da superfície da pipa Hexagonal representada a seguir.



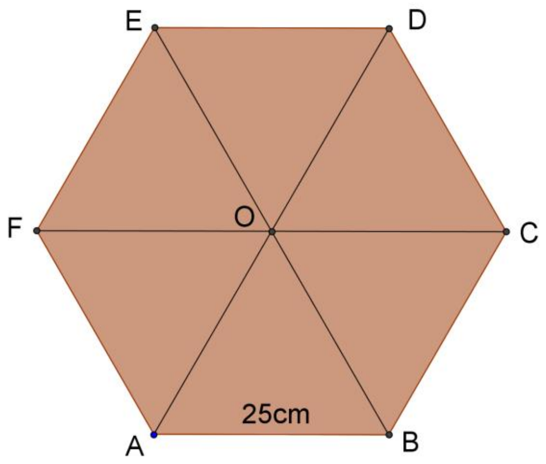
Desenho 22 - Hexágono regular de lado igual a 25cm

Observe atentamente e responda.

a) Vamos dividir o hexágono regular em seis triângulos tendo como vértice comum o ponto O, onde O é o ponto de encontro das diagonais do hexágono regular. Quais são os comprimentos dos segmentos AO e BO no desenho 23 logo adiante? Lembre-se que cada diagonal do hexágono representa uma vareta da pipa e o comprimento de cada uma das varetas é igual a 50cm.

Comprimento do segmento AO = _______ cm

Comprimento do segmento BO = _______ cm

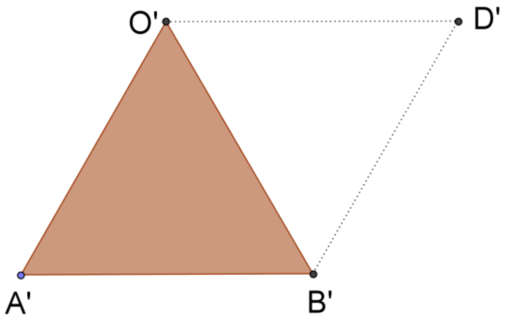


Desenho 23 - Hexágono regular dividido em 6 triângulos

Observe no desenho 23 que os três lados do triângulo ABO têm o mesmo comprimento. Assim, dizemos que ABO é um triângulo equilátero.

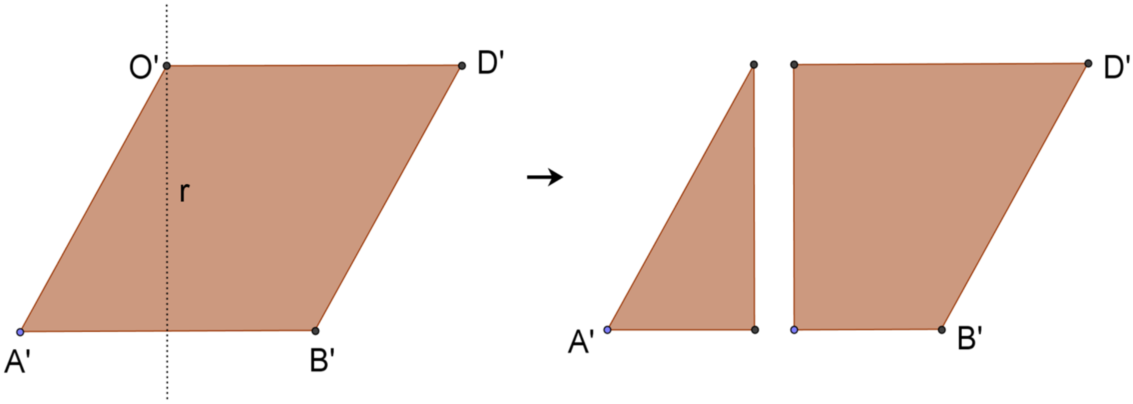
b) Tome um triângulo que pode ser superposto[4] ao triângulo ABO. Vamos denotar este triângulo por A'B'O', como indicado no desenho 24. Seja O'D' um segmento paralelo a A'B', e B'D' paralelo a A'O'. Então o quadrilátero construído tem lados opostos paralelos e é chamado paralelogramo. O triângulo B'D'O' é equilátero?

[4]Evitamos falar do conceito de congruência com os nossos alunos de 6º ano e usamos a ideia de superposição para substituir o referido conceito.



Desenho 24 - Paralelogramo construído traçando as paralelas a A'B' e a A'O'

c) Seja r uma reta perpendicular a A'B' passando por O'. Desenhe o paralelogramo representado acima em uma folha de sulfite e recorte-o. Depois, corte na reta r, como indicado a seguir.



Desenho 25 - Decomposição do paralelogramo

Já sabemos o que é triângulo equilátero e triângulo isósceles. Quando os três lados de um triângulo têm comprimentos diferentes, dizemos que o triângulo é escaleno.

Assinale:

O triângulo formado após o corte é:

( ) equilátero

( ) isósceles

( ) escaleno

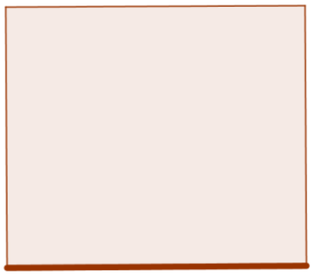
A outra forma geométrica que aparece após o corte é chamada

(   ) retângulo

(   ) paralelogramo

(   ) trapézio

d) Junte o segmento A'O' com o segmento B'D'. Observe no desenho 26 o retângulo formado. Note que a área do retângulo representado no desenho 26 é igual à área do paralelogramo representado no desenho 24. Deduza quantos centímetros tem a base que está em destaque no retângulo do desenho 26.



Desenho 26 - Composição das duas formas geométricas obtidas no passo anterior

e) Sabendo que a altura do retângulo é aproximadamente *216mm*, encontre o valor de sua área.

Atividade 38. Deduza qual é a área do triângulo A'B'O', representado no desenho 24.

Atividade 39. Deduza um valor aproximado para a área da superfície da pipa Hexagonal representada no desenho 23. Dê a resposta emm^2.

3.3.7 Sessão 7

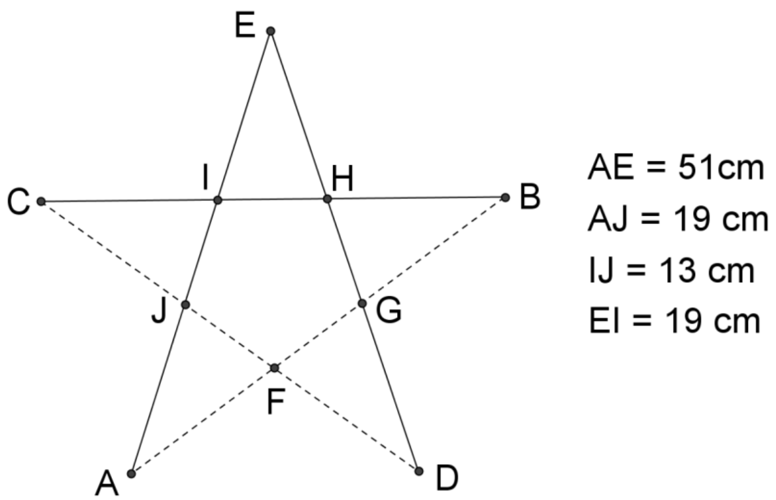
Conteúdo: o pentágono regular, perímetro, cálculo de áreas.

As atividades a seguir mostram uma maneira de se calcular a área delimitada por um pentágono regular. Novamente vamos usar o método de composição e decomposição das formas geométricas e o princípio da equivalência de áreas.

Em algumas atividades é necessário deduzir certos valores, já que não podemos obtê-los empiricamente. Assim, estimula-se o pensamento dedutivo.

O conteúdo desta sessão também retoma o conceito de perímetro e as relações entre os múltiplos e submúltiplos de unidades de medidas.

Atividade 40. O desenho 27 a seguir é uma representação da pipa Estrela. As varetas de bambu estão representadas por uma linha contínua, enquanto a linha utilizada na armação está indicada por linhas tracejadas. Também estão indicadas algumas medidas.



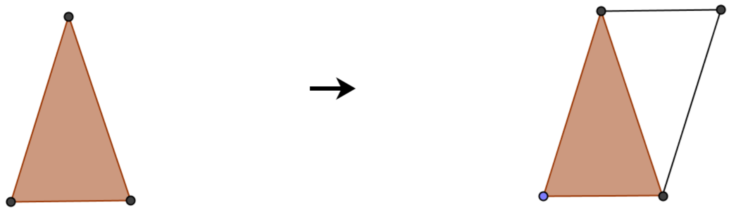
Desenho 27 - Representação da pipa Estrela

Quais formas geométricas é possível identificar no desenho 27?

Atividade 41. Qual é, aproximadamente, o perímetro do pentágono regular que aparece na região central do desenho 27?

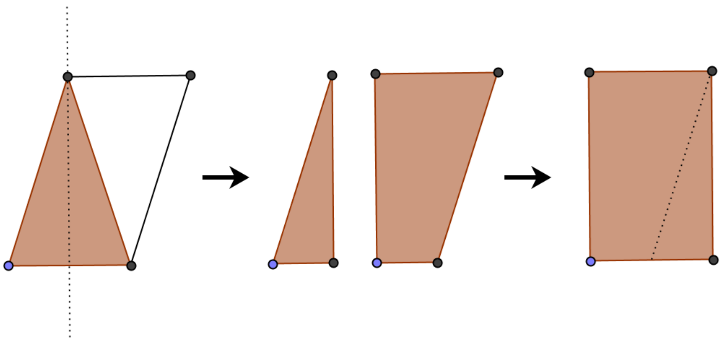
Atividade 42. Considere a ponta EIH da estrela representada no desenho 28. Acompanhe atentamente os procedimentos a seguir para calcular a área da região delimitada pelo triângulo EIH.

a) Vamos construir um paralelogramo a partir do triângulo EIH como mostra o desenho 28.



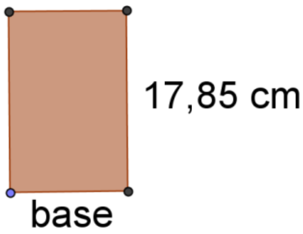
Desenho 28 - Construção de um paralelogramo traçando paralelas

b) Agora vamos construir um retângulo a partir do paralelogramo.



Desenho 29 - Decomposição e composição para chegar à forma de um retângulo

c) A altura do retângulo obtido está indicada no desenho 30.



Desenho 30 - Retângulo obtido no processo anterior

Atividade 43. Responda.

a) Quantos centímetros tem a base do retângulo representado no desenho 30?

b) Complete os espaços indicados.

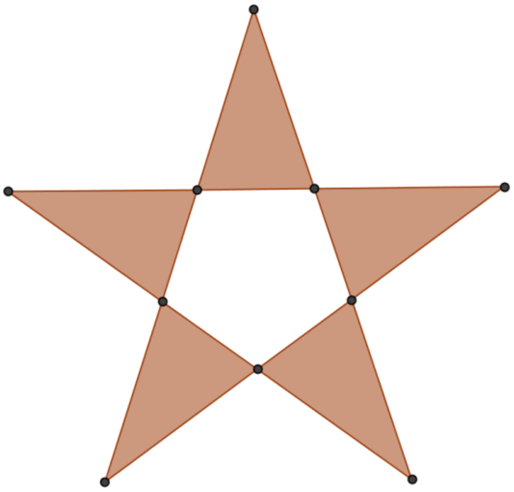
$17{,}85cm =$ ___ mm

$base do retângulo do desenho 30 =$ ___ mm

c) Qual é a área do triângulo EIH representado no desenho 27? Dê a resposta em mm^2?

d) Qual é o valor da mesma área dada emm^2?

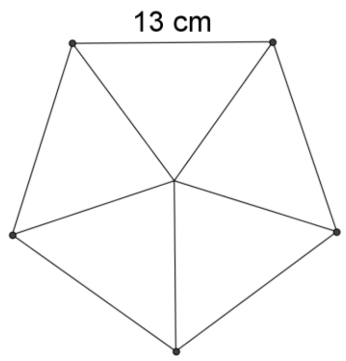
Atividade 44. Qual é a área, emm^2, da região escurecida no desenho 31 a seguir?



Desenho 31 - A região escurecida representa a área que se quer calcular

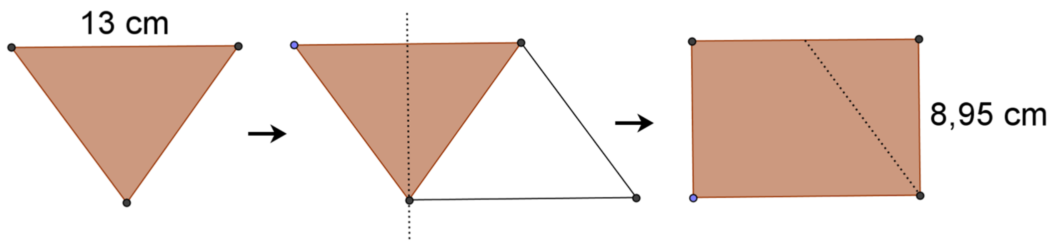
Atividade 45. Agora, vamos calcular um valor aproximado para a área da região pentagonal localizada no centro da estrela. Veja o desenho 32 e acompanhe atentamente o procedimento adiante.

a) Vamos dividir o pentágono regular em cinco triângulos tendo como vértice comum o ponto central. O ponto central de um pentágono regular pode ser obtido pela interseção das mediatrizes dos lados do respectivo pentágono. Observe o desenho a seguir.



Desenho 32 - Representação da parte central da pipa Estrela

b) Vamos calcular a área de um desses triângulos. A partir do triângulo construímos um paralelogramo e depois construímos um retângulo de área equivalente ao do paralelogramo. Observe o desenho a seguir.



Desenho 33 - Passos para calcular a área de um triângulo

Atividade 46.

a) Qual é a área, em mm^2, do retângulo representado no desenho 33?

b) Qual é a área, em mm^2, do triângulo representado no desenho 33?

c) Qual é a área do mesmo triângulo em m^2?

d) Qual é a área, em m^2, do pentágono regular representado no desenho 32?

Atividade 47. Qual é, aproximadamente, o valor da área em m^2 da superfície da pipa Estrela representada no desenho 27?

3.3.8 Sessão 8

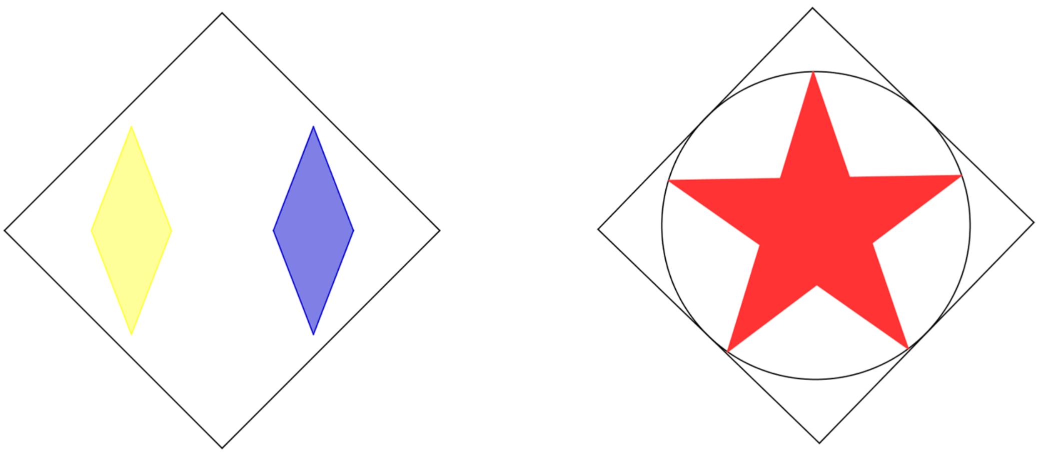
Conteúdo: formas geométricas, simetria e cálculo de áreas.

Esta é a última sessão de ensino. Nela encontramos os princípios norteadores para decorar uma pipa. Isso requer o conceito de simetria.

Na atividade 49 é proposto uma série de exercícios para treinar os métodos de cálculo de áreas.

E finalmente, a atividade 50 solicita aos alunos encontrar a massa de cada uma das pipas utilizando uma balança de precisão. Obviamente, isso pressupõe que os alunos tenham construído as pipas. Porém, como não trabalhamos a construção das pipas em concomitância ao desenvolvimento das sessões de ensino, a atividade 50 deve ser resolvida apenas depois de realizada a oficina de pipas.

Atividade 48. Para decorar uma pipa é necessário tomar um certo cuidado, pois a distribuição da massa da pipa deve ser uniforme. Sendo assim, a pipa e a decoração da mesma devem ser simétricas em relação à reta vertical que passa pelo centro da pipa. Observe os exemplos no desenho a seguir.

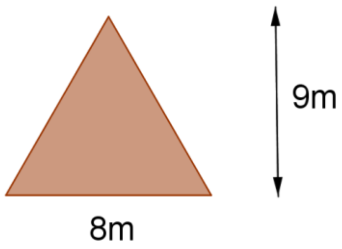


Desenho 34 - Representação de pipas Arraia decoradas

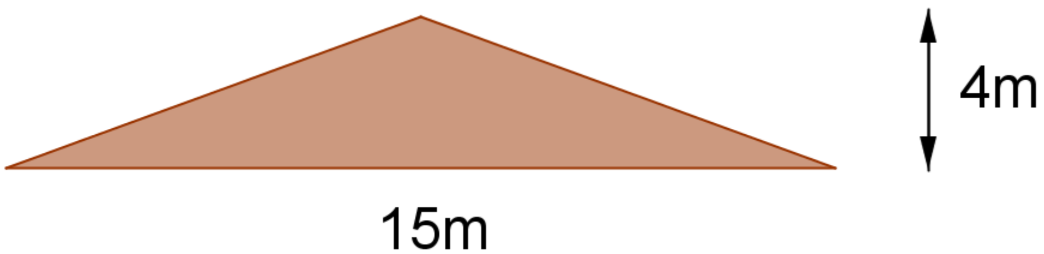
No desenho acima, a pipa Arraia que está do lado esquerdo foi decorada com uma forma geométrica chamada losango, isto é, um quadrilátero que possui os comprimentos dos lados iguais.

Atividade 49. Identifique cada forma geométrica a seguir e calcule a sua área.

a)



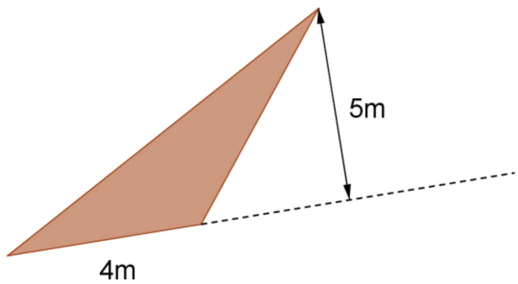
Desenho 35 - Polígono irregular de 3 lados



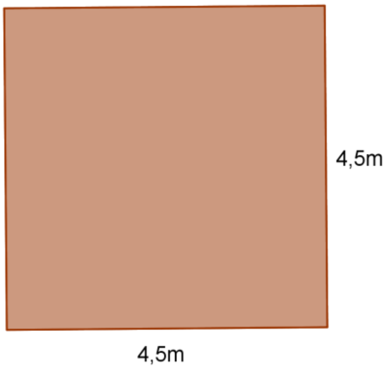
Desenho 36 - Polígono irregular de 3 lados

b)

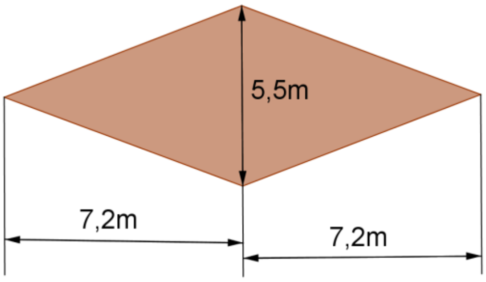
c)



Desenho 37 - Polígono irregular de 3 lados d)



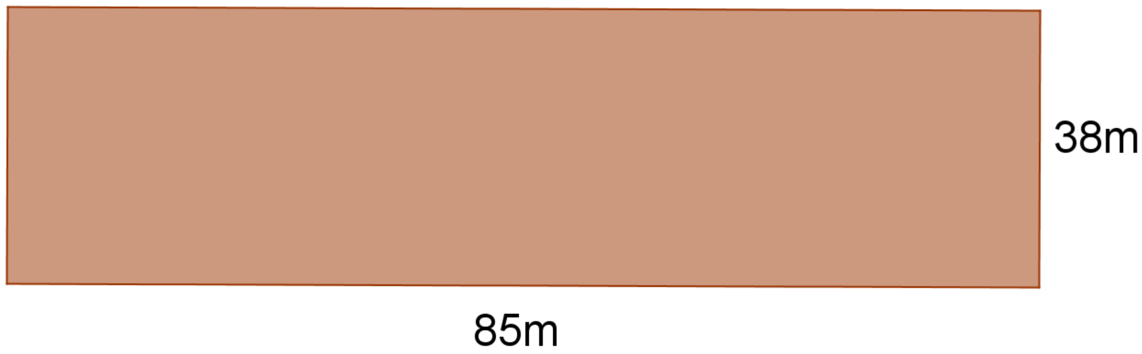
Desenho 38 - Polígono regular de 4 lados



Desenho 39 - Polígono com os comprimentos dos lados iguais

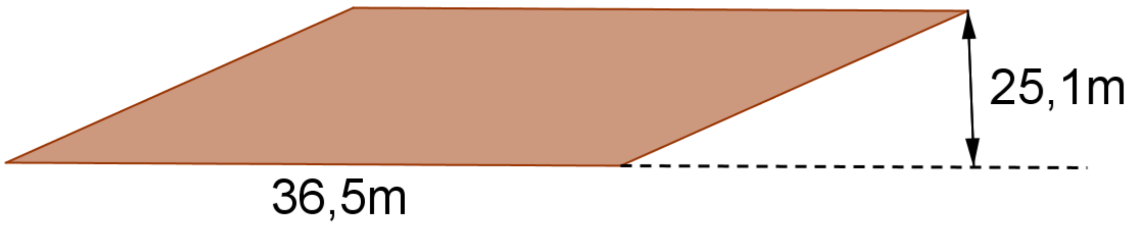
e)

f)



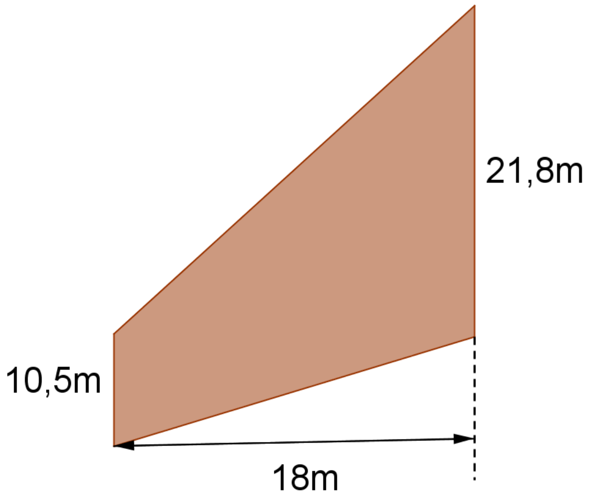
Desenho 40 - Polígono de 4 lados e 4 ângulos retos

g)



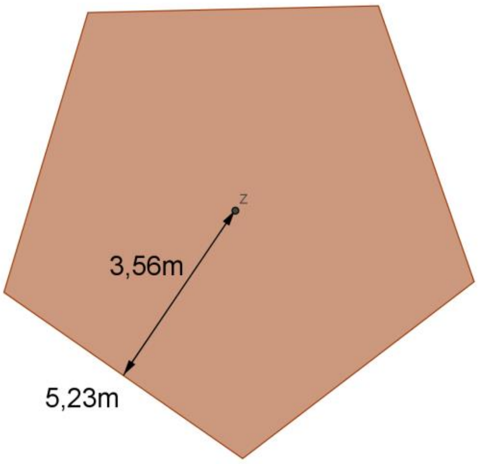
Desenho 41 - Polígono de 4 lados tal que seus lados opostos são paralelos

h)



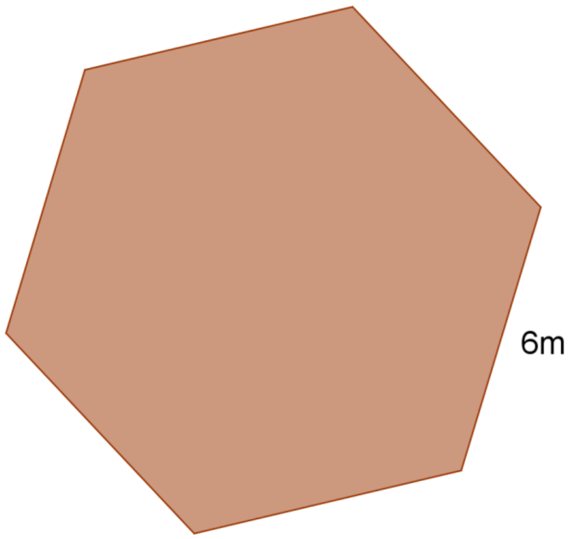
Desenho 42 - Polígono de 4 lados tal que dois de seus lados opostos são paralelos

i)



Desenho 43 - Polígono regular de 5 lados. O ponto Z é a interseção das mediatrizes referentes aos lados do polígono

j)



Desenho 44 - Polígono regular de 6 lados

Atividade 50. De posse das pipas, encontre a massa de cada uma delas. Isso pode ser feito utilizando uma balança digital encontrada em uma quitanda (peça gentilmente para o dono ou ao atendente da quitanda permissão para realizar as medidas). Anote os valores em quilogramas e depois calcule a razão *massa/área* e responda as duas últimas perguntas da primeira sessão de aula. Compare os resultados com as respostas dadas naquela ocasião.

3.4 *Hipóteses de trabalho*

O presente trabalho apresenta uma maneira de investigar os processos de ensino-aprendizagens ao mesmo tempo que propicia ao professor instrumentos de trabalho para fundamentar e viabilizar sua atuação docente a fim de ter algum controle sobre determinadas variáveis que se encontram no processo educativo.

Assim, leva-se em consideração o conhecimento do professor e seu domínio sobre o conhecimento que estará em jogo no processo de ensino-aprendizagem, os conhecimentos prévios dos alunos e suas capacidades de aprendizagens e o próprio processo de ensino-aprendizagem que deve ser concebido por escolhas das situações de aprendizagens mais apropriadas de acordo com os conteúdos de ensino e os objetivos educacionais.

A proposta de ensino que segue tem por objetivo introduzir noções e conceitos geométricos elementares, em particular: noções sobre posições relativas de pontos e retas no plano, conceito de retas paralelas e retas perpendiculares, propriedades das formas geométricas (quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango), conceito de perímetro, área de polígonos e cálculo de áreas.

Nestes termos, formulamos as seguintes hipóteses:

a) As sessões de ensino proporcionam a aprendizagem dos respectivos conteúdos;

b) A organização social das aulas favorecerá, aos poucos, o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos;

c) O contexto das pipas para desenvolver conteúdos da geometria motivará a aprendizagem e o envolvimento autônomo dos alunos;

d) A abordagem concebida será favorável para desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos;

e) As sessões de ensino possibilitarão a aprendizagem das propriedades das formas geométricas estudadas contribuindo com o desenvolvimento do pensamento abstrato;

f) A geometria, mesmo em nível elementar, promove o desenvolvimento da capacidade de generalizar.

4 A APLICAÇÃO

Este capítulo é referente a terceira fase da Engenharia Didática. Começaremos por descrever o contexto social da escola e de nosso cotidiano profissional. Em seguida, vamos fazer os relatos, ou seja, os registros das observações feitas no decorrer do processo de ensino-aprendizagem.

4.1 O contexto social da escola

A proposta de ensino foi aplicada na Escola Municipal Ricardo Junco Neto, localizada no município de Vinhedo, São Paulo. A escola possui dez salas de aulas funcionando nos períodos da manhã e da tarde.

A escola oferece os cursos do ensino fundamental do 6º ao 9º ano. Em geral, os cursos referente aos 8ºˢ e 9ºˢ anos são oferecidos no período da manhã, das 7h às 11h50. Enquanto os 6ºˢ e 7ºˢ anos são oferecidos no período da tarde, das 12h45 às 17h35. As aulas têm duração de 45 minutos e há um intervalo, após a terceira aula, para a refeição dos alunos com duração de 20 minutos.

Sou professor efetivo desde janeiro de 2012. Em 2013, me foram atribuídas as turmas 6º B, 6º C, 6º D, 6º E, e 6º F. Cada turma do 6º ano tem seis aulas de matemática por semana. São, portanto, cinco turmas atribuídas, cada uma com, em média, 26 alunos matriculados.

Foram com essas cinco turmas que aplicamos a respectiva proposta de ensino durante o primeiro bimestre escolar, ou seja, no período de 04 de fevereiro a 26 de abril do ano de 2013. A aplicação, as observações e os relatos ficaram sob minha responsabilidade. Assim, não apenas concebi a proposta de ensino, como também me encarreguei de aplicá-la na condição de professor e de aluno do mestrado profissional em matemática.

A escola conta com uma pequena biblioteca, uma sala com aparelhos de televisão e DVD, uma sala com projetor multimídia, uma sala com materiais de artes, um laboratório de ciências da natureza e uma sala de informática.

Apesar da disponibilidade destes recursos, muitas vezes os mesmos não podem ser utilizados por falta de manutenção, como é o caso da sala de informática, ou por falta de condições adequadas do ambiente, como é o caso da sala que contém os aparelhos de televisão e DVD onde não há circulação de ar adequada, ou por falta de recursos materiais como é o caso do laboratório de ciências.

Os alunos, em sua maioria, vêm de escolas públicas municipais e pertencem a famílias de baixa renda. Em geral, moram nos bairros arredores da escola e locomovem-se de sua casa até a escola a pé. Mas, existe uma minoria de alunos, que fazem o percurso de sua casa até a escola e vice-versa por veículos fretados. Há ainda aqueles que moram em bairros mais distantes e, neste caso, a prefeitura disponibiliza transporte gratuito.

Como todas as escolas, existem as normas de convivência. Entre as mais conhecidas e observadas, temos:

a) a recomendação do uso de uniforme para todos os alunos;
b) que os deslocamentos internos dos alunos em turma seja feita em filas;
c) a proibição do uso de bonés, de celulares e similares no ambiente escolar,

principalmente durante as aulas;

d) a recomendação de não mascar chiclete ou chupar balas durante as aulas;

e) a pontualidade;

f) e o dever de realizar as atividades propostas pelos professores.

4.2 Os registros

Abaixo, seguem os registros das observações feitas durante o processo de ensino-aprendizagem.

4.2.1 O questionário

A proposta de ensino iniciou, de fato, no dia 18 de fevereiro de 2013. Assim, usamos os dias 18 e 19 de fevereiro para aplicar um questionário investigativo sobre os conhecimentos prévios dos alunos, suas experiências escolares, suas expectativas e os possíveis conteúdos de aprendizagens que de alguma forma podem se relacionar com a proposta de ensino que propomos.

4.2.2 Relato referente à aplicação da sessão 1

Nos dias 20 e 21 de fevereiro trabalhamos um pequeno texto[5] para introduzir o tema da geometria no contexto das pipas. Estabelecemos um debate em torno dos fatores que fazem uma pipa voar. De acordo com o diálogo estabelecido, constatamos que os meninos tinham muito mais conhecimento sobre a brincadeira de pipa do que as meninas. No geral, as meninas nunca brincaram antes com pipas.

Um dos problemas apresentados aos alunos foi sobre qual deveria ser o ângulo de inclinação da pipa com relação a direção do vento mais adequado para que esta pudesse voar. Este foi, como percebemos, o primeiro contato que os alunos tiveram com o conceito de ângulo. Percebemos com isto que os alunos não tinham a menor noção do conceito de ângulo, nem mesmo associavam o conceito de ângulo com a ideia de abertura entre duas semirretas com origem num mesmo ponto.

No dia 22 de fevereiro, apresentamos três tipos de pipas aos alunos: a pipa Arraia, a pipa Hexagonal e a pipa Estrela. A partir das pipas, propomos as seguintes perguntas: qual

[5]Nos referimos ao texto “Sobre as pipas” que consta na primeira sessão de ensino.

delas precisa de um vento “mais forte” para voar? E qual delas pode voar com um vento mais fraco?

Discutimos sobre as questões que influenciam o voo da pipa e como poderíamos responder as perguntas se soubéssemos a razão da massa (kg) pela área (m^2) da superfície da pipa em questão. Assim, os alunos tiveram um primeiro contato com o conceito de área, onde este foi associado à ideia de medir superfícies planas.

Perguntamos para os alunos em qual das pipas havia mais papel de seda, fazendo uma correspondência da quantidade de papel com a área da superfície da pipa. Houve consenso, em todas as turmas, de que a pipa com superfície de maior área era a Hexagonal. Tudo isso feito de maneira visual e intuitiva. Mas as turmas tiveram opiniões divididas quando tentaram comparar a área da pipa Arraia com a da Estrela.

4.2.3 Relato referente à aplicação da sessão 2

No dia 25 de fevereiro, iniciamos as primeiras atividades da proposta de ensino para introduzir algumas ideias e conceitos fundamentais da geometria. Assim, introduzimos os conceitos primitivos de ponto, reta, plano e convencionamos a notação empregada para indicar pontos e retas num dado plano.

Além de trabalhar as noções primitivas, também foram explorados os conceitos de pontos colineares e retas paralelas. Isso foi feito em sala de aula com o auxílio da lousa para ilustrar e exemplificar os conteúdos de aprendizagens, a saber, os conceitos de duas retas paralelas e pontos colineares. Simultaneamente à exposição das ideias com o auxílio da lousa, através de perguntas, fomentamos um diálogo com os alunos.

Perguntando como poderíamos explicar o que são pontos colineares ou o que são retas paralelas, os alunos não exitaram em responder através de gestos e dizendo algo como: são pontos assim... Ou então, são duas retas uma do lado da outra...

Reformulamos então a pergunta: como você explicaria para outra pessoa através de uma carta o que são pontos colineares e retas paralelas? As respostas não mudaram muito!

Em princípio, as atividades da sessão 2 foram planejadas para ser aplicadas na sala de informática, onde as atividades seriam desenvolvidas com a utilização do *GeoGebra*. Porém, apenas seis microcomputadores estavam funcionando apropriadamente, o que inviabilizou o uso de tais recursos didáticos.

Em 26 de fevereiro, concluímos a sessão 2 desenvolvendo as atividades 7, 8 e 9. Como não havia possibilidade de usar a sala de informática como planejado, adaptamos as referidas atividades fornecendo para cada aluno uma folha com as figuras já impressas.

Propomos então que os alunos comparassem as figuras a fim de perceber que estas poderiam ser classificadas em função do seu número de lados. Solicitamos também que os alunos realizassem as medidas dos lados dos polígonos e de seus ângulos internos. Com isso, esperávamos que pudessem perceber o que os polígonos regulares têm em comum. No entanto, observamos que os alunos tinham muita dificuldade de utilizar o transferidor e a própria régua para medir comprimentos de segmentos de reta.

No dia seguinte, 27 de fevereiro, começamos as aulas dialogando com os alunos na expectativa de que os mesmos manifestassem suas aprendizagens, suas dúvidas, suas dificuldades, fizessem suas observações etc.

Notamos então que, em geral, havia bastante dificuldade para utilizar o transferidor para medir ângulos. Também notamos que a noção de ângulo não estava clara para a maioria dos alunos.

Então, retomamos os problemas trabalhados nas aulas anteriores e fizemos as representações do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono utilizando a régua e o transferidor. Esperávamos que com a manipulação do transferidor para desenhar os referidos polígonos regulares os alunos pudessem desenvolver melhor o conceito de ângulo.

Enquanto os alunos tentavam usar o transferidor para representar os referidos polígonos, circulamos pela sala de aula para auxiliar individualmente os alunos que estavam com dificuldade. Ao mesmo tempo, permitimos que aqueles que já tinham entendido como manipular o transferidor ajudassem seus colegas. Ainda que o conceito de ângulo não tenha ficado claro para a maioria dos alunos, as atividades deveriam ajudar a construção deste conceito nas próximas aulas.

4.2.4 Relato referente à aplicação da sessão 3

Os dias 28 de fevereiro e 01 de março foram reservados para os alunos tomarem notas das atividades da sessão 3, pois não tínhamos condições de imprimir o material para cada um dos alunos. Dessa forma, optamos por passar as atividades na lousa para que os alunos pudessem registrar em seus respectivos cadernos. Entretanto, as figuras utilizadas nas atividades foram impressas e entregue para cada um dos alunos. Esse esquema de trabalho se manteve na aplicação das outras sessões.

Em 04 de março começamos a desenvolver a atividade 10. Os alunos mediram com régua o comprimento das varetas de cada uma das pipas. Observamos que as estimativas dos alunos eram significativamente discrepantes com as nossas.

Assim, questionando como eles estavam efetuando a medida, identificamos que tal discrepância se devia ao fato dos mesmos usarem a régua de forma inadequada. Muitos dos alunos mediam as varetas usando o espaço da régua que antecipa a marca do zero e também usavam o espaço da régua posterior à marca dos 30 centímetros. Alguns ainda começavam a contar da marca do 1 centímetro.

Então orientamos os alunos a usarem a régua de maneira conveniente para uma melhor estimativa.

Depois de registrar os comprimentos das varetas, propomos aos alunos que encontrassem a fração correspondente à medida das varetas em metros. Dessa forma, pretendíamos dar um significado para as frações. Observando uma régua de madeira de 1 metro, com 100 marcações igualmente espaçadas, os alunos notaram que cada espaço entre duas marcas consecutivas é o que se convenciona de 1 centímetro.

Associando esta observação às medidas registradas para as varetas das pipas, os alunos comparavam cada vareta à quantidade de partes em que o metro foi dividido, definindo assim o numerador da fração. O denominador ficou definido pelo número de divisões iguais marcadas na régua de 1 metro, ou seja, 100.

Obtida as frações que representa o tamanho de cada uma das varetas das pipas, os alunos tiveram que encontrar a representação decimal das respectivas frações, o que deveria ser feito dividindo o numerador da fração pelo seu denominador. Ao resolver a atividade 12, mostramos como se pode fazer a divisão entre dois números inteiros, mas cujo o quociente é não inteiro.

No dia seguinte, 05 de março, propomos uma série de exercícios para que os alunos pudessem treinar e memorizar o algoritmo da divisão entre dois números inteiros cujo o quociente é não inteiro. Os exercícios consistiam em encontrar a representação decimal de uma dada fração, o que implica fazer a divisão do numerador pelo denominador da respectiva fração.

Para termos ideia das dificuldades dos alunos na aplicação do algoritmo, propomos que alguns alunos fossem expor sua resolução na lousa. Desta forma, foi possível intervir de forma mais específica, tratando de esclarecer aqueles pontos onde os alunos erravam ou então ficavam com dúvidas. Além disso, ao ver a resolução do colega que estava à frente da lousa, os demais alunos se sentiram à vontade para expor oralmente suas soluções, fazer observações e sugestões de como proceder na divisão, ou ainda dirigir perguntas ao professor.

No dia 06 de março, começamos a trabalhar com as atividades 13, 14, 15 e 16, ainda da sessão 3.

As referidas atividades solicitavam que os alunos expressassem medidas de comprimentos dadas em centímetros em metros e vice-versa. Assim, dada uma medida em centímetros, por exemplo, 45 cm, os alunos tinham que construir a fração que representa esta medida de comprimento em metros e depois encontrar a representação decimal da respectiva fração. Isto é, os alunos deveriam construir a fração $\frac{45}{100}$ e em seguida dividir 45 por 100 para encontrar a representação decimal da fração, a saber, 0,45 metros.

Nas atividades anteriores, foi dado um significado para as frações e nessas atividades tratamos de mostrar como se pode encontrar a representação decimal de uma determinada fração.

Também propomos atividades para que os alunos observassem que a conversão de unidades de comprimento do metro para centímetro poderia ser feita por uma constante de multiplicação, no caso, o número inteiro 100. Enquanto que para converter uma medida cuja a unidade de comprimento é dada em centímetros para metros, bastaria dividir pela constante 100.

Em 07 de março, após a resolução das atividades referidas anteriormente, propomos uma série de exercícios complementares com a finalidade de fixar os procedimentos envolvidos na divisão e multiplicação por 100, procedimentos estes necessários quando se quer expressar uma medida dada em metros em centímetros ou vice-versa.

4.2.5 Relato referente à aplicação da sessão 4

Nas aulas do dia 08 de março os alunos copiaram as próximas atividades a serem desenvolvidas, a saber, as atividades 17 a 25.

Dia 11 de março iniciamos o desenvolvimento das atividades 17 a 25. Nesta aula, trabalhamos o conceito de ângulo e a medida, em graus, de um ângulo dado com o uso do transferidor. Assim, os alunos realizaram diversas medidas de ângulos com o transferidor.

Observamos, novamente, uma grande dificuldade dos alunos em realizar as medidas dos ângulos com o transferidor, o que evidenciava problemas na compreensão do conceito de ângulo, ou seja, os alunos ainda não tinham entendido a ideia de ângulo.

Não tínhamos a intenção de fornecer aos alunos uma definição precisa de ângulo, mas trabalhamos no sentido de atribuir um significado geométrico para tal conceito associando à ideia de abertura entre duas semirretas de origem comum.

No próximo dia, 12 de março, prosseguimos com o desenvolvimento das atividades da sessão 4. Assim, as atividades requeriam dos alunos a exploração das propriedades de algumas figuras geométricas planas: retângulo, trapézio e quadrado.

Aproveitando a ocasião, introduzimos o conceito de ângulo reto ao associar a este a medida de 90 graus, e também definimos o perímetro de polígonos. Desta forma foi possível definir o que é um retângulo ou pelo menos explicar o que se quer dizer por retângulo. Os alunos então observaram que um retângulo é uma figura plana formada por quatro segmentos de retas, chamados lados, e quatro ângulos retos.

Em seguida os alunos foram colocados em contato com outra forma geométrica, o trapézio. Da mesma forma que antes, a ideia era explorar as propriedades da forma geométrica com a finalidade de poder distingui-la das demais. A capacidade para explicar em palavras e usar a linguagem matemática eram também conteúdos de aprendizagens.

Ao explorar as propriedades do trapézio, oportunizamos aos alunos retomar o conceito do que são duas retas paralelas, além de possibilitar a compreensão da necessidade de ter critérios que permitam distinguir uma forma geométrica de outra.

A sessão 4 termina com a definição de quadrado. Como antes, os alunos são instigados a explorar as propriedades do quadrado e concluir que o mesmo se diferencia das outras formas vistas anteriormente porque tem quatro lados de comprimentos iguais e quatro ângulos retos. Ainda na sessão quatro, caracterizamos o que são duas retas perpendiculares.

Dia 13 de março propomos vários exercícios de medidas e representação de ângulos devido às dificuldades apresentadas pelos alunos nas atividades que envolviam a medida e o conceito de ângulo. Desta forma, complementamos as atividades que visavam contribuir para o entendimento do conceito de ângulo.

4.2.6 Relato referente à aplicação da sessão 5

No dia 14 de março escrevemos na lousa as próximas atividades para que os alunos fizessem o registro em seus respectivos cadernos.

Em 15 de março, iniciamos a sessão 5, onde foi introduzido o conceito de área e os procedimentos associados ao cálculo de área de figuras geométricas planas. Propomos a leitura de um pequeno texto onde se retomava os problemas iniciais sobre qual das pipas têm maior quantidade de papel de seda. Para responder essa pergunta com segurança era necessário calcular a área da superfície de cada uma das três pipas.

Nesta ocasião, convencionamos a unidade de área como sendo a região delimitada por um quadrado de lado medindo uma unidade de comprimento. Logo em seguida foi proposto aos alunos o cálculo da área da superfície da pipa Arraia, considerando que esta é plana e tem o formato de um quadrado cujo o comprimento de seu lado é igual a 30 centímetros.

Nossa intenção era trabalhar com a ideia de correspondência entre a área da região que se deseja encontrar com a quantidade de unidades de área que a mesma equivale.

Para tanto, após os alunos tentarem por algum tempo fazer o cálculo, prosseguimos com a leitura das atividades da sessão 5. Assim, foi apresentado aos alunos o método de decompor a região plana em unidades de áreas, permitindo assim o cálculo da área da região em questão ou pelo menos uma aproximação para a mesma.

Em seguida, os alunos usaram o método para calcular a área da superfície da pipa Arraia, como foi solicitado. Depois, continuamos na resolução das próximas atividades que propunham a relação entre metros, centímetros e milímetros, assim como a relação entre metros quadrados, centímetros quadrados e milímetros quadrados. As relações foram estabelecidas no contexto que se colocava com tema das pipas.

4.2.7 Relato referente à aplicação da sessão 6

Terminamos as atividades da sessão 5 no dia 15 de março e no dia 18 de março escrevemos no quadro-negro as próximas atividades das quais os alunos tomaram nota.

Dia 18 de março, iniciamos a resolução das atividades correspondentes à sessão 6. Nesta sessão, o objetivo era calcular a área da superfície da pipa Hexagonal, apresentando aos alunos um outro método para o cálculo de áreas, a saber, o cálculo por equivalências e a utilização de ideias de composição e decomposição das formas geométricas.

Na atividade 35, possibilitamos a observação de que a área de um triângulo retângulo é a metade da área de um retângulo e, em particular, a área de um triângulo isósceles cujo o ângulo interno definido pelos lados de medidas iguais é reto tem a metade da área de um quadrado. Assim, também aproveitamos a oportunidade para dar a definição de triângulo isósceles.

Na sequência, iniciamos as atividades que mostravam o procedimento para se calcular a área do hexágono, isto é, mostramos através de uma sequência de ações um método que permite calcular a área do hexágono. O método consistia na decomposição do hexágono em seis triângulos congruentes entre si. Em particular, para o hexágono que representava a pipa, os seis triângulos eram equiláteros, conceito este apresentado aos alunos neste momento.

Através de uma exposição oral e com o auxílio da lousa, mostramos o procedimento descrito nas atividades da sessão 6 para calcular a área do hexágono. Após a exposição, propomos que os alunos respondessem as atividades da referida sessão. Na ocasião, os alunos também exploraram as propriedades do paralelogramo e do trapézio.

No dia seguinte, 19 de março, iniciamos a aula investigando como os alunos tinham respondido as atividades. Para tanto, estabelecemos um diálogo com o grupo de alunos da sala, propondo que alguns manifestassem suas respostas expondo o que pensou. Em geral, as respostas estavam corretas mas havia grande dificuldade de expressar os pensamentos que os levaram às respostas.

4.2.8 Relato referente à aplicação da sessão 7

Resolvemos seguir adiante passando para as próximas atividades referente à sessão 7, onde novamente seria trabalhado o mesmo método para o cálculo da área da superfície da pipa Estrela. Terminamos de passar as atividades da sessão 7 apenas na aula seguinte do dia 20 de março.

No dia 21 de março iniciamos o desenvolvimento das atividades referentes à sessão 7. O objetivo da sessão era trabalhar o cálculo de área por composição e decomposição. Assim, as atividades mostravam passo a passo como poderíamos calcular a área da superfície da pipa Estrela.

Explicamos com o auxílio da lousa todos os passos descritos nas próprias atividades. A ideia inicial era propor aos alunos que fizessem uma tentativa de resolver as atividades individualmente lendo os procedimentos. No entanto, a grande maioria dos alunos tinha muita dificuldade de leitura e interpretação, entendendo o que se deveria fazer apenas depois de explicarmos oralmente e com o auxílio da lousa.

Desta maneira, explicamos que a estrela foi decomposta em 5 regiões triangulares e 1 região pentagonal. E mostramos como se pode proceder para calcular a área de uma das regiões triangulares, observando que todos os 5 triângulos eram congruentes entre si.

No dia 22 de março concluímos a sessão 7 ao calcular a área da região pentagonal e consequentemente a área da superfície da pipa Estrela. Nessas últimas aulas, trabalhamos bastante o cálculo de áreas por composição e decomposição das figuras, tendo em vista o princípio de equivalência de áreas. As ideias gerais envolvidas neste método foram bastante exploradas e devido aos princípios de atuação que adotamos, pudemos dialogar com os alunos e se aproximar mais de suas dificuldades fazendo as intervenções de maneira mais relevante.

4.2.9 Relato referente à aplicação da sessão 8

Na semana seguinte, de 25 de março a 28, propomos uma série de exercícios onde o cálculo de área era requisitado. Os exercícios requisitavam o cálculo de áreas por composição e decomposição. Também aproveitamos a oportunidade para propor exercícios onde o conceito de área aparece em contextos diferentes da brincadeira de empinar pipa.

Na primeira e segunda semana de abril, nos dias 03, 04, 05, 08, 09 e 10, resolvemos ir além e trabalhamos mais exercícios e problemas extraordinários envolvendo o cálculo de áreas e perímetro. Desta forma, deixamos a atividade 50 para ser resolvida num momento posterior. Foi dado ênfase no cálculo de áreas das seguintes formas geométricas: quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e paralelogramo.

Para tanto, as propriedades de cada uma dessas formas geométricas deveria estar clara para os alunos e os conceitos envolvidos nas definições também eram requisitados. Com isso, pretendíamos proporcionar aos alunos as condições necessárias para aprender os respectivos conteúdos conceituais e procedimentais.

Por fim, alguns alunos, depois de repetir os cálculos de áreas das mesmas formas geométricas por diversas vezes, perceberam que para cada uma das formas geométricas referidas acima havia um procedimento padrão que permitia calcular a área do mesmo. Aproveitamos a deixa destes alunos para mostrar que poderíamos generalizar estes resultados utilizando uma linguagem apropriada, isto é, apresentamos para os alunos as fórmulas para o cálculo de área do quadrado, do retângulo, do trapézio, do triângulo e do paralelogramo.

Fizemos isso associando as fórmulas aos procedimentos do método de calcular a área por composição e decomposição. E os símbolos usados nas fórmulas, no caso as letras, foram associadas aos elementos dos polígonos em questão e ao seu significado de medida ou comprimento. Assim, encerramos a aplicação das atividades.

4.2.10 Considerações finais a respeito da aplicação

No dia 11 de abril, aplicamos a avaliação final. Nesta avaliação, procuramos investigar o possível progresso dos alunos depois de terminarmos a aplicação das sessões de ensino. A análise dos resultados será feita no capítulo seguinte. Para fechar o ciclo da primeira variável macrodidática que definimos no capítulo anterior – sequência didática – comunicamos aos alunos os resultados da avaliação do processo de ensino-aprendizagem depois de corrigirmos a avaliação final.

Com o desenvolvimento do processo educativo ficou claro que seria inviável trabalhar a construção das pipas com todos os alunos – por diversos motivos, como a inexperiência dos mesmos em fazer pipas já que estes relataram estar acostumados a comprá-las prontas, a falta de habilidade destes em manipular materiais concretos, a falta de autonomia para se organizar em grupos e tomar iniciativas, além da logística em ter um espaço e tempo para as construções das pipas assim como os materiais necessários como varetas de bambu, linha, cola, folha de seda etc – e resolvemos, portanto, construir algumas pipas com apenas três alunos de cada turma. Estes ficaram responsáveis por medir a massa de cada uma das pipas e levar a informação para o restante da turma.

Finalizamos as atividades das sessões de ensino constatando que a pipa que necessita menor intensidade de vento para voar é a pipa Hexagonal, ao contrário do que a grande maioria dos alunos pensavam no início do processo de ensino porque achavam aquela pipa mais "pesada", não compreendendo na ocasião que era a razão massa por área que importava e não apenas uma dessas variáveis. Por seguinte, verificou-se que a pipa Estrela é a que necessitava de um vento mais forte para voar. Alguns alunos tiveram a oportunidade de verificar as conclusões na prática, isto é, ao empinar as pipas com alguns alunos, observamos a pipa Hexagonal voar com muita facilidade, enquanto a pipa Estrela só subiu quando o vento estava forte.

5 ANÁLISE A POSTERIORI

Chegamos à última fase da Engenharia Didática: a análise *a posteriori*.

5.1 Análise da aplicação

A análise será feita por sessão, já que as hipóteses dizem respeito aos conteúdos de aprendizagens de acordo com o seu tipo: conteúdos conceituais, conteúdos procedimentais e conteúdos atitudinais.

Obviamente, todos os tipos de conteúdos estão presentes em cada uma das sessões de ensino, porém, um ou dois tipos de conteúdos sempre serão predominantes dependendo dos objetivos de ensino.

Após analisar os dados registrados sessão por sessão, teremos condições de julgar as hipóteses a fim de validá-las ou refutá-las. Devemos lembrar que o referencial teórico adotado, a Engenharia Didática, concebe um método de validação interno, isto é, as conclusões deste trabalho não se aplicam em casos gerais, mas sim a este trabalho em particular. Também deve-se ressaltar que as hipóteses que porventura vierem a ser validadas não excluem outros processos de ensino-aprendizagem, tampouco poderíamos afirmar que as mesmas hipóteses seriam validadas utilizando a mesma proposta de ensino com outro público de alunos, ainda que de mesmo nível escolar. Assim, considerando as devidas ressalvas, passemos a análise.

Vamos iniciar analisando o questionário aplicado no início do processo de ensino-aprendizagem.

O questionário, como já mencionamos anteriormente, visava coletar informações a respeito das experiências dos alunos com a matemática escolar, suas supostas aprendizagens e disposições para aprender novos conteúdos.

Com a aplicação do questionário verificamos que a grande maioria dos alunos tinham muita dificuldade para escrever ou para se expressar através da escrita com clareza. Além disso, também constatamos em boa parte dos alunos muitos erros de ortografia, evidenciando problemas de alfabetização.

Ao analisar a questão 9, observamos que, de fato, a quase totalidade dos alunos acertaram as operações de somar e subtrair com números naturais, enquanto nas operações de multiplicar e dividir houve alguns erros de procedimento ao usar o algoritmo.

Já na questão 10 do questionário praticamente todos os alunos deixaram os itens em branco. Poucos alunos foram capazes de efetuar as operações de somar e subtrair frações com denominadores iguais, mas nenhum aluno soube operar com frações de denominadores diferentes.

Na questão 11 observamos muitas respostas corretas, evidências de que os alunos estudaram em anos anteriores as frações como uma forma de medir quantidades menores do que a unidade.

Na questão 14, o número de alunos que acertaram também chegou a quase cem por cento. Entretanto, avaliando o questionário como um todo, notamos que todos os alunos tinham a capacidade de reconhecer tais formas geométricas (quadrado, círculo, retângulo e triângulo) sem conhecer as propriedades que as definem. Uma evidência disso são as respostas dos alunos da questão 15. Vejamos as respostas de alguns alunos:

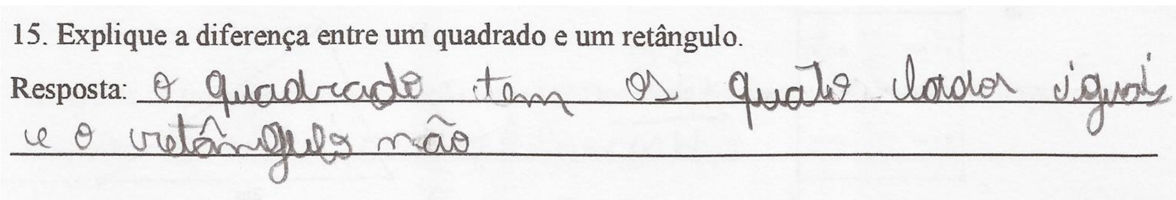
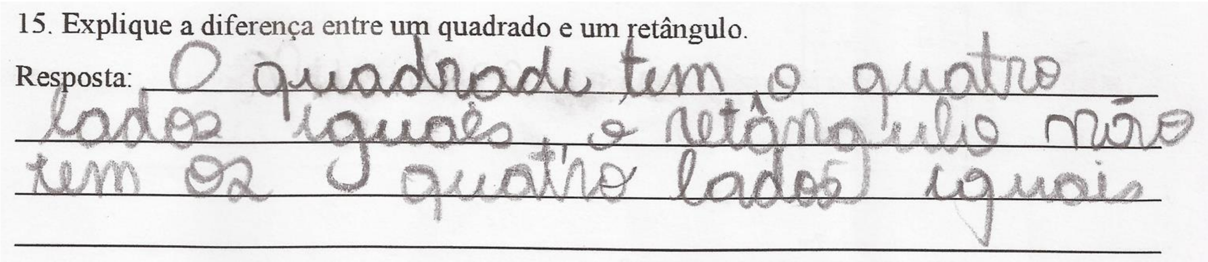
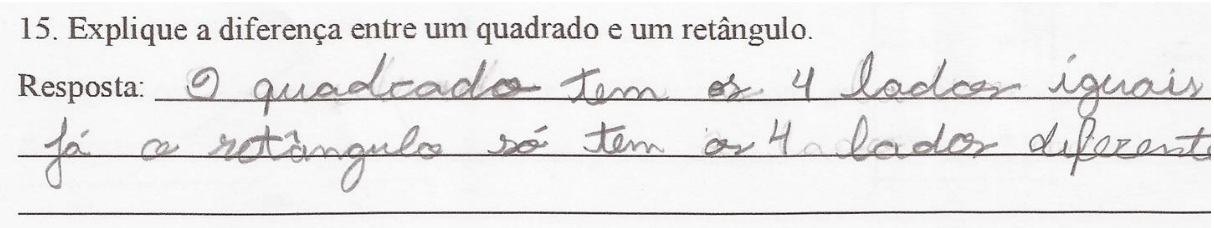

15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.
Resposta: o quadrado tem os quatro lados iguais e o retângulo não

Ilustração 1: Resposta do aluno A.I.O.L.


15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

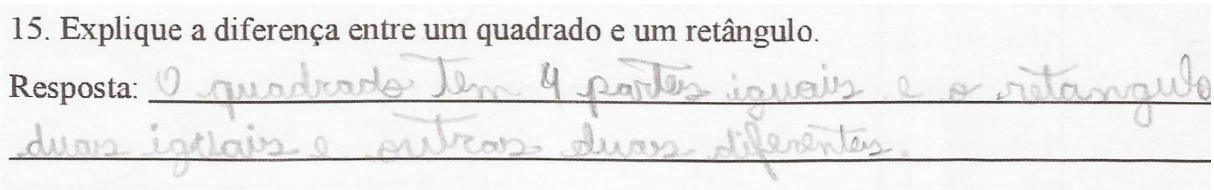
Resposta: O quadradu tem o quatro lados iguaes e retângulio não tem os quatro lados iguais

Ilustração 2: Resposta do aluno A.S.O.


15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

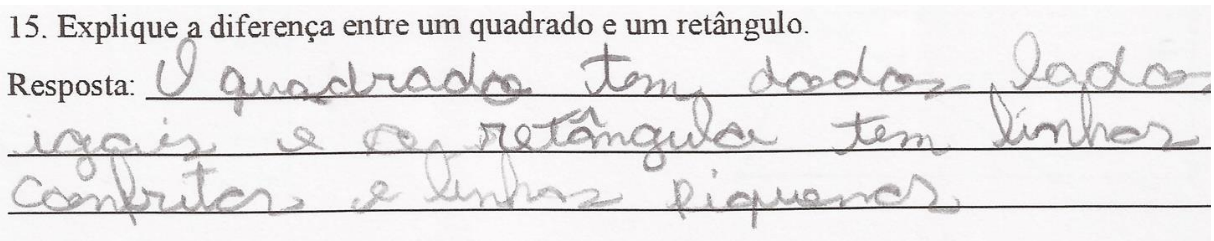
Resposta: O quadrado tem os 4 lados iguais já o retângulo só tem os 4 lados diferent

Ilustração 3 - Resposta do aluno B.B.S.


15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

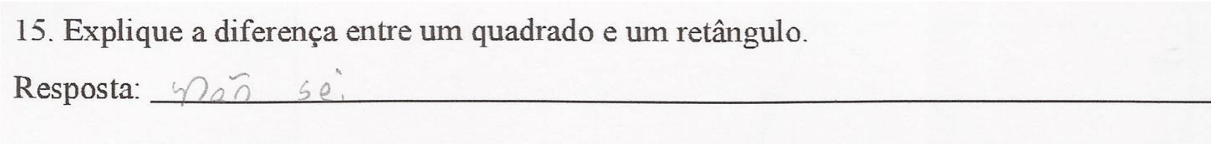
Resposta: O quadrado tem 4 partes iguais e o retangulo duas igiais e outras duas diferentes.

Ilustração 4 - Resposta do aluno P.H.C.P.


15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

Resposta: O quadrado tem dodos lados igais e o retângula tem linhas comfritas e linhas piquenas.

Ilustração 5 - Resposta do aluno L.C.S.

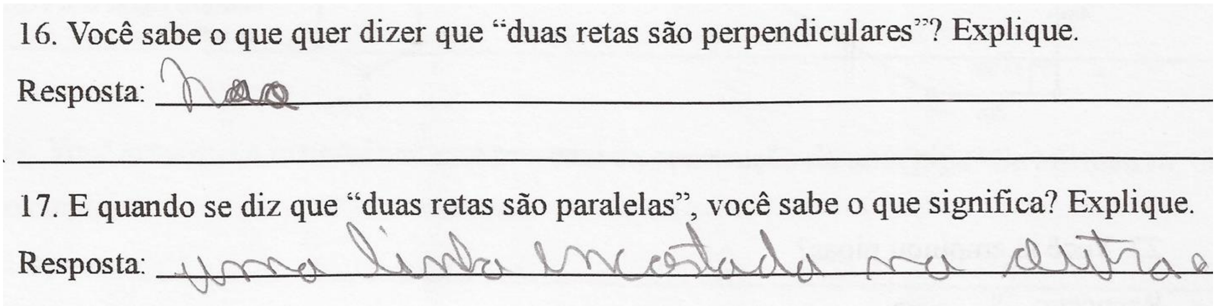


15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

Resposta: Não sei.

Ilustração 6 - Resposta do aluno M.F.

As respostas das questões 15 e 16 (algumas respostas dadas pelos alunos à questão 16 segue logo adiante) mostram, mais uma vez, a dificuldade dos alunos em traduzir suas ideias, pensamentos ou intuições para uma linguagem convencional. De fato, isso se deve à falta de conhecimento dos conceitos em questão ou à falta de conhecimento da linguagem convencional que permite definir com precisão os respectivos conceitos. É óbvio que o conhecimento da referida linguagem os alunos não possuem, pois esta, se trata da linguagem dos conjuntos. Mas o que requisitávamos não eram as definições matemáticas, mas sim uma explicação usando termos da língua portuguesa que permitem, de certa maneira, uma explicação satisfatória para os conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares. Como podemos ver a seguir, as explicações foram insatisfatórias.



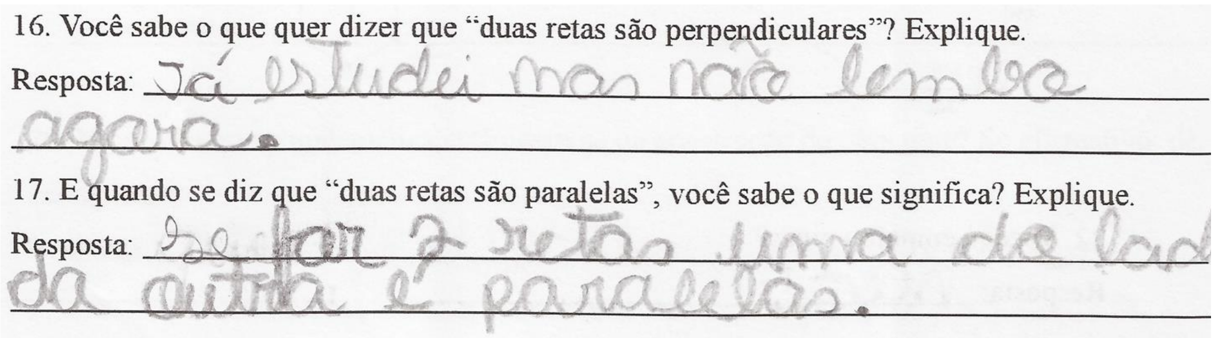
16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

Resposta: Não

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: uma linha encostada na outra

Ilustração 7 - Resposta do aluno A.V.L.A.



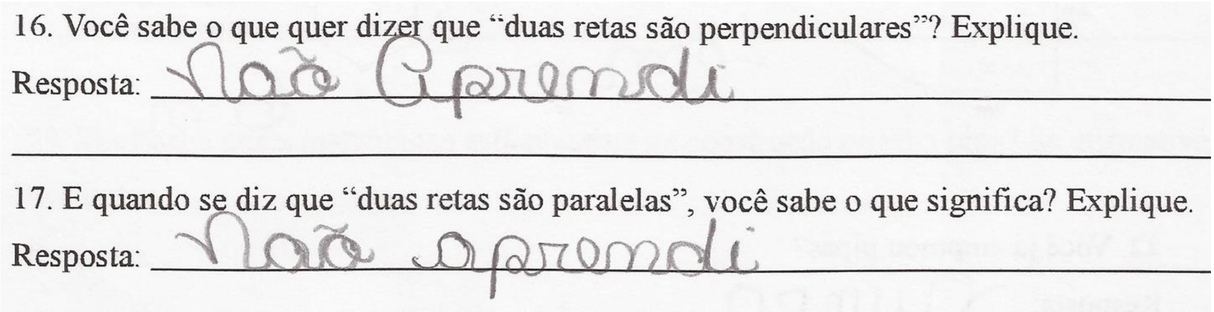
16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

Resposta: Já estudei mas não lembro agora.

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: Se for 2 retas uma do lado da outra é paralelas.

Ilustração 8 - Resposta do aluno S.R.S.

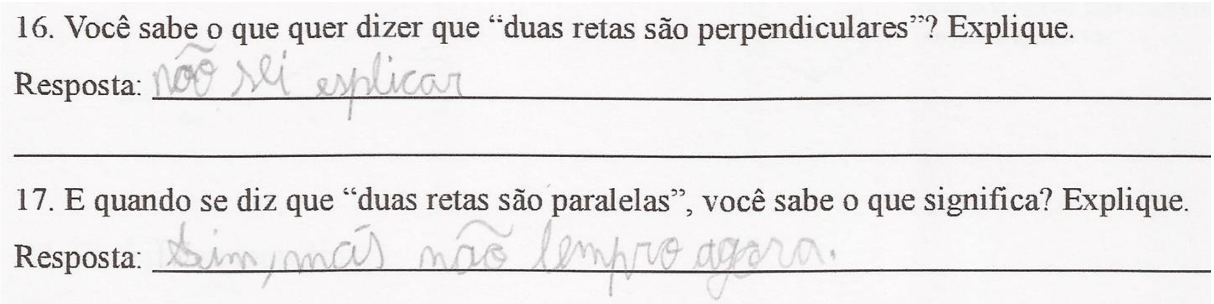

16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

Resposta: Não Aprendi

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: Não aprendi

Ilustração 9 - Resposta do aluno J.P.S.

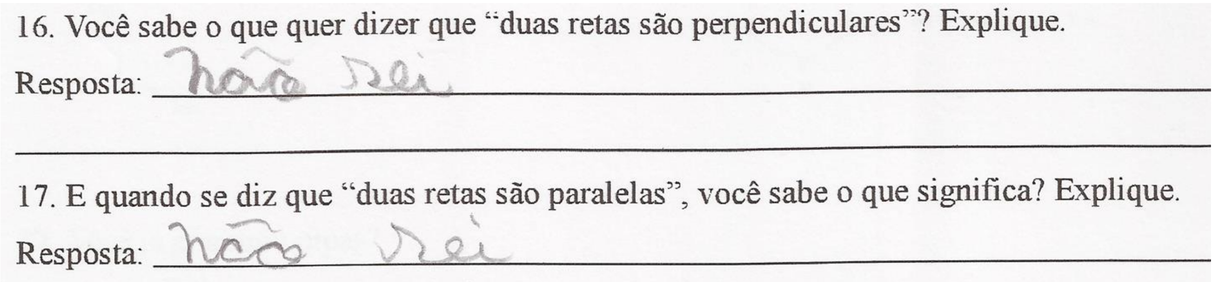

16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

Resposta: não sei explicar

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: Sim, mas não lembro agora.

Ilustração 10 - Resposta do aluno G.C.A.B

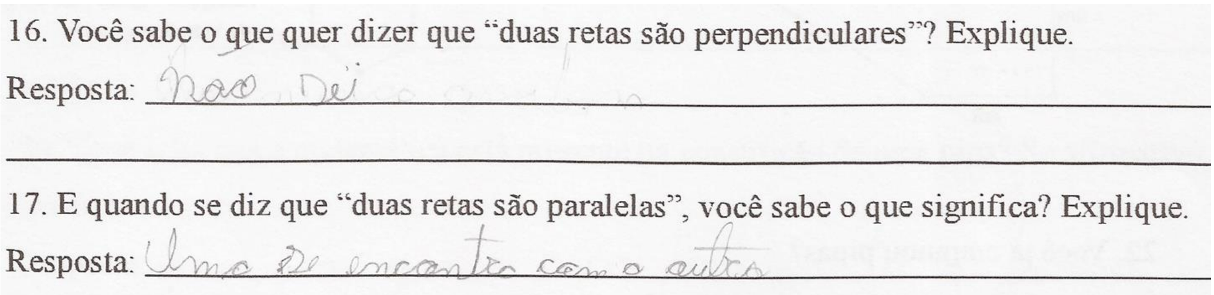

16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

Resposta: não sei

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: não sei

Ilustração 11 - Resposta do aluno L.C.S.


16. Você sabe o que quer dizer que "duas retas são perpendiculares"? Explique.

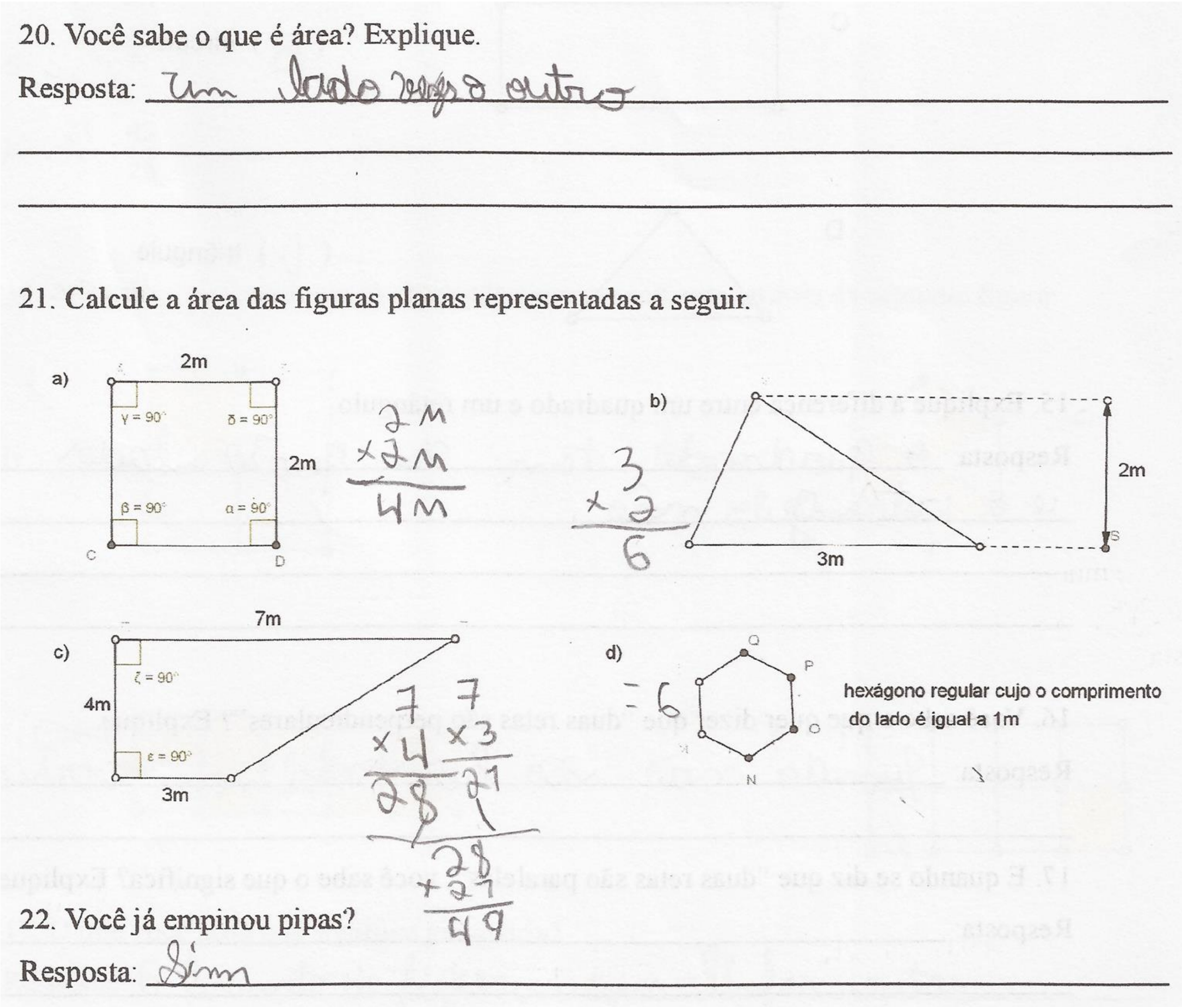
Resposta: Não sei

17. E quando se diz que "duas retas são paralelas", você sabe o que significa? Explique.

Resposta: Uma se encontra com a outra

Ilustração 12 - Resposta do aluno L.R.P.

Com a questão 20 e 21 tínhamos a intenção de investigar o conhecimento dos alunos sobre o conceito de área e o cálculo de áreas. Observamos contudo conceitos muito limitados e ideias indiscriminadas de multiplicar as medidas dos lados de uma dada forma geométrica para obter a sua área. Tal fato nos evidencia a ausência do conceito de área e ao mesmo tempo mostra que os alunos aprenderam a calcular a área de determinadas formas geométricas, como o quadrado e o retângulo, sem no entanto compreender o conceito. A seguir, algumas respostas das questões 20 e 21 dadas pelos alunos.


20. Você sabe o que é área? Explique.

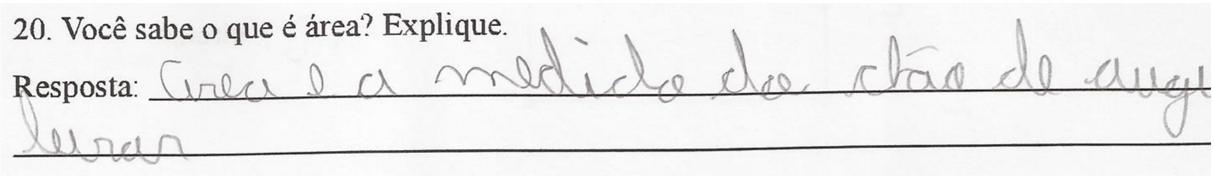
Resposta: Um lado vezes o outro

21. Calcule a área das figuras planas representadas a seguir.

22. Você já empinou pipas?

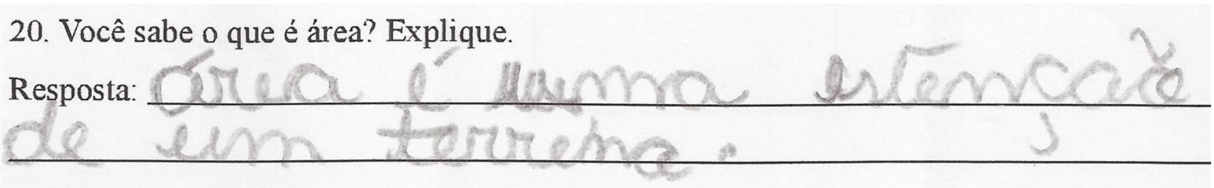
Resposta: Sim

Ilustração 13 - Resposta do aluno A.I.O.L.


20. Você sabe o que é área? Explique.

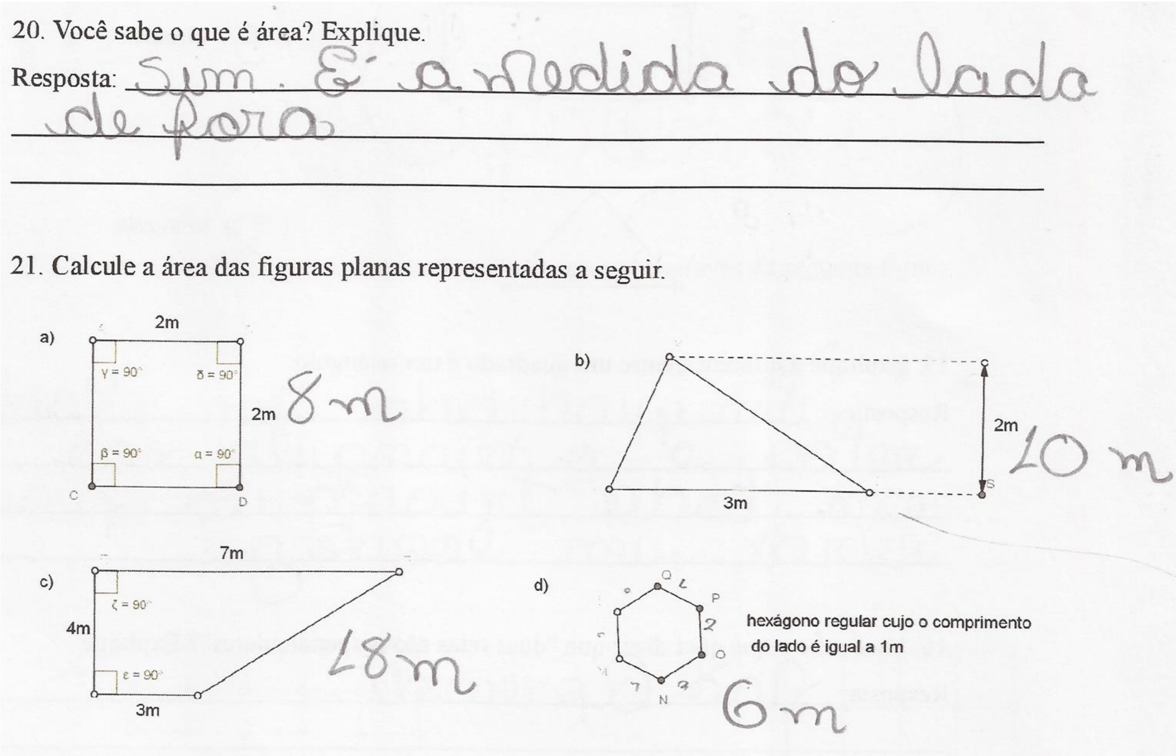
Resposta: Área é a medida do chão de algum lugar

Ilustração 14 - Resposta do aluno A.V.L.A.


20. Você sabe o que é área? Explique.

Resposta: Área é numa extenção de um terreno.

Ilustração 15 - Resposta do aluno S.R.S.



20. Você sabe o que é área? Explique.

Resposta: Sim. É a medida do lado de fora

21. Calcule a área das figuras planas representadas a seguir.

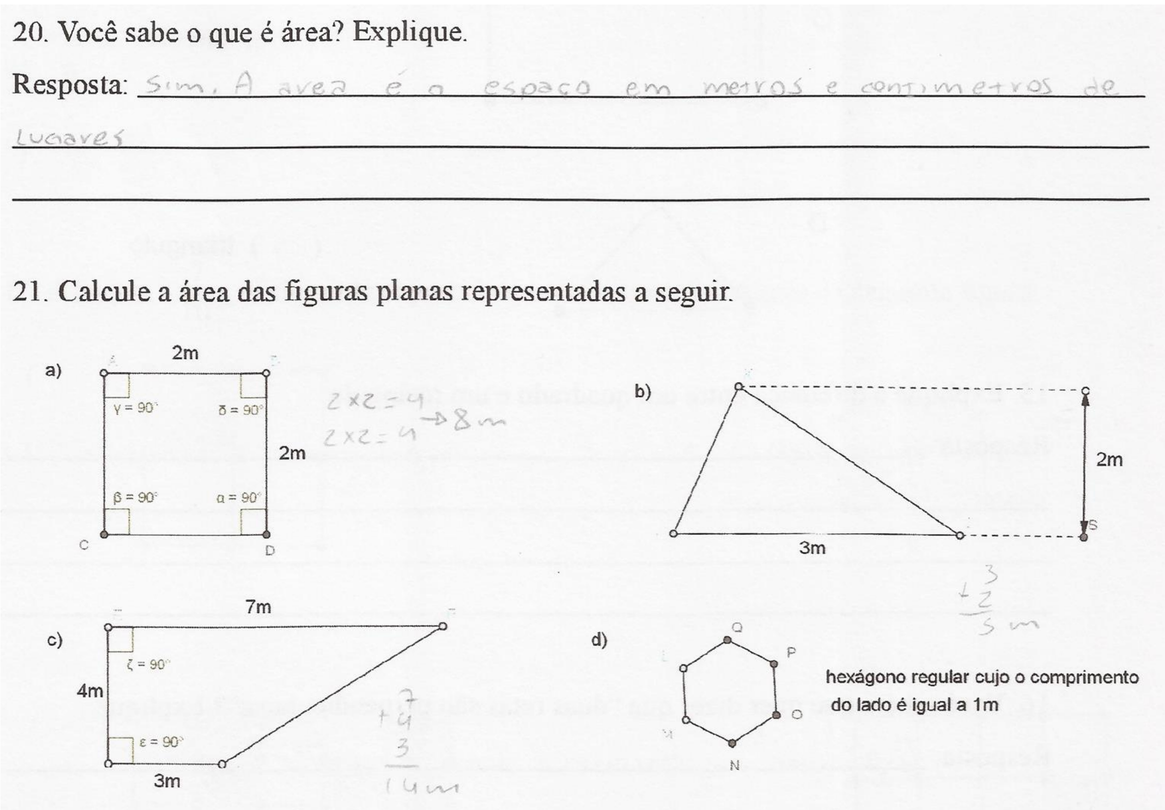
a) 2m, 2m — 8m

b) 2m, 3m — 10 m

c) 7m, 4m, 3m — 18m

d) hexágono regular cujo o comprimento do lado é igual a 1m — 6m

Ilustração 16 - Resposta do aluno J.P.S.



20. Você sabe o que é área? Explique.

Resposta: Sim. A area é o espaço em metros e centimetros de lugares

21. Calcule a área das figuras planas representadas a seguir.

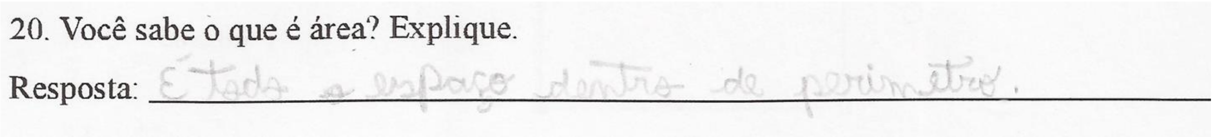
a) 2m, 2m — 2x2=4, 2x2=4 → 8m

b) 2m, 3m — 3 + 2 = 5m

c) 7m, 4m, 3m — 7 + 4 + 3 = 14m

d) hexágono regular cujo o comprimento do lado é igual a 1m

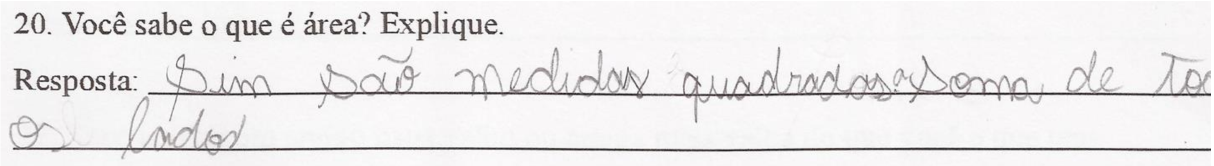
Ilustração 17 - Resposta do aluno G.B.C.



20. Você sabe o que é área? Explique.

Resposta: É toda o espaço dentro de perímetro.

Ilustração 18 - Resposta do aluno P.H.C.P.



20. Você sabe o que é área? Explique.

Resposta: Sim são medidos quadrados Soma de To
os lados

Ilustração 19 - Resposta do aluno L.F.S.

Com a análise dos questionários entendemos que uma das principais dificuldades dos alunos é expressar seus pensamentos, mas que também lhes faltavam conhecimento de diversos conceitos fundamentais da geometria.

Então, ao iniciar as sessões de ensino, nossas expectativas era de não apenas proporcionar a aprendizagem dos conteúdos em questão, mas também possibilitar o desenvolvimento da capacidade de se expressar, de explicar e de argumentar.

A primeira sessão de ensino, na verdade, destinava-se à apresentação do problema, a saber: como prever qual das pipas necessita de um vento mais forte e qual delas pode levantar voo com um vento suave. No diálogo estabelecido com os alunos percebemos que os mesmos não tinham noção do conceito de ângulo e confirmamos que o conceito de área não estava claro. Porém, ainda que alguns alunos insistiam em afirmar que a pipa Hexagonal era a que precisava de um vento mais forte para voar porque sua massa era maior do que as outras, nos demos por satisfeito, pois os alunos demonstraram ter entendido o problema.

Os conteúdos de aprendizagens tomam destaque a partir da segunda sessão de ensino. Nesta sessão, como vimos anteriormente, os conteúdos de aprendizagens são predominantemente do tipo conceitual. Como já relatamos, a ideia inicial era trabalhar esta sessão de ensino utilizando o software de geometria dinâmica chamado *GeoGebra*. Porém, como não foi possível, esta sessão de ensino foi trabalhada através de aulas expositivas com o auxílio da lousa.

De fato, essa forma de trabalho se demonstrou suficiente para a aprendizagem desse tipo de conteúdo, ou seja, os alunos não tiveram dificuldades para aprender as notações para pontos e retas no plano, o conceito de pontos colineares e os conceitos de vértices e lados de um determinado polígono. Atenção especial foi dada aos conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares, onde fizemos questão de que os alunos fossem capazes de explicar satisfatoriamente cada um desses conceitos. Uma vez que a linguagem da Teoria dos Conjuntos está distante do nível de ensino dos alunos do sexto ano, consideramos satisfatório se os mesmos fossem capaz de dizer algo como “duas retas são ditas paralelas se não se encontram” e “duas retas são ditas perpendiculares de formam quatro ângulos retos”.

A dificuldade maior dos alunos se apresentou no entendimento do conceito de ângulo. Assim, o conceito de retas perpendiculares não foi significativo para os alunos, já que estes não compreenderam a ideia de ângulo. Mesmo trabalhando exercícios e atividades extras sobre ângulos, os alunos demonstraram bastante dificuldades para aprendizagem deste conceito. Logo, com exceção do conceito de ângulos, a sessão de ensino 2 se desenvolveu de maneira satisfatória. Mas, de fato, ressalta-se a necessidade de planejar uma atividade mais adequada para a aprendizagem do conceito de ângulo.

Na sessão 3 temos predominância dos conteúdos factuais, conceituais e procedimentais. Os conteúdos factuais referem-se aos comprimentos das varetas e ao sistema métrico decimal, os conceituais se manifestam no estudo de fração e no sistema de numeração decimal, enquanto o conteúdo procedimental se dá por conta dos algoritmos de multiplicar e dividir com números não inteiros.

No processo de ensino-aprendizagem percebemos que não podemos desvalorizar as ações concretas, como o ato de medir e comparar, em função do caráter abstrato da geometria. Como relatamos, os alunos tiveram um progresso importante ao aprender a usar a régua adequadamente para efetuar medidas de comprimentos. Um conteúdo de aprendizagem que nos parecia banal mas que se revelou merecer atenção por parte do professor.

Os conteúdos se demonstraram bem articulados, o que possibilitou uma aprendizagem significativa aos alunos. Assim, os alunos puderam reforçar o conceito que tinham de fração interpretando-a como uma medida de algo menor do que a unidade tomada como padrão. Aproveitando-se a ocasião, o conceito de fração se articulava com o sistema métrico decimal, proporcionando a aquisição do conteúdo factual referente às unidades de medidas de comprimento.

O conteúdo procedimental desta sessão de ensino, isto é, os algoritmos das operações de multiplicar e dividir com números não inteiros, foi desenvolvido de maneira articulada aos outros conteúdos de aprendizagens, mas não se limitou a isso. Dado que um conteúdo procedimental necessita ser exercitado para a aprendizagem significativa, complementamos as atividades com outros exercícios para possibilitar aos alunos a aprendizagem deste conteúdo. Dadas as observações feitas no decorrer do processo de ensino-aprendizagem, consideramos que a proposta da sessão 3 pôde proporcionar aos alunos a aprendizagem dos referidos conteúdos.

A sessão 4 propõe a aprendizagem de conteúdos conceituais. Nesta sessão de ensino-aprendizagem, pretendeu-se desenvolver os conceitos de: triângulo isósceles, retângulo, quadrado, trapézio e perímetro de polígonos. Para tal, os alunos eram solicitados a efetuar várias medidas de comprimentos usando régua e várias medidas de ângulos usando um transferidor. Após realizar as medidas, essas eram registradas para logo em seguida proporcionar aos alunos a observação de qual relação as mesmas estabelecem com as formas geométricas estudadas na ocasião. Novamente, os conteúdos mostram-se bem articulados com o problema inicial e com os outros conteúdos de ensino-aprendizagem.

O principal objetivo desta sessão de ensino era possibilitar aos alunos explorar as propriedades que definem as referidas formas geométricas. Com isso, foi possível retomar alguns conceitos vistos anteriormente, como o de retas paralelas, retas perpendiculares e ângulos. Como já comentamos, as atividades anteriores foram insuficientes para que os alunos compreendessem a ideia de ângulo, o que nos levou a propor exercícios complementares na tentativa de possibilitar a aprendizagem deste conceito. Julgamos que a realização de medidas de ângulos com o uso do transferidor pudesse ajudar a construção do conceito por parte dos alunos. Com o mesmo intuito, também propomos que os mesmos representassem geometricamente determinados ângulos com o uso do transferidor. Tais exercícios parecem ter, de fato, contribuído para a aprendizagem deste conteúdo.

Ressalta-se a importância dada ao desenvolvimento da capacidade de explicar o que são cada uma das formas geométricas estudadas nesta sessão de ensino. Ao explorar as propriedades das referidas formas geométricas, as atividades solicitavam aos alunos que explicassem cada uma delas. A expectativa era que os alunos construíssem explicações em função das propriedades observadas. Uma parcela dos alunos foram capazes de fazer isso e outra parte repetiram as explicações vagas e erradas contidas no questionário aplicado antes de iniciar as atividades das sessões de ensino. Depois de debater as respostas das atividades com os alunos, observando as diferenças de respostas e julgando qual era satisfatória e qual não o era, intervimos no sentido de legitimar as explicações que levam em consideração as propriedades das formas geométricas. Assim, podemos considerar que o desenvolvimento desta sessão de ensino atingiu nossas expectativas.

Na sessão 5 observamos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, mas com maior ênfase aos conteúdos procedimentais. Ao convencionar a unidade de área como sendo a região delimitada por um quadrado cujo a medida de seu lado é igual a uma unidade de comprimento, estamos lidando com um conteúdo conceitual. Podemos considerar o estudo das unidades de medidas também como conteúdos conceituais.

O conteúdo conceitual de destaque nessa unidade de ensino trata-se do conceito de área. Levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e as noções que os mesmos traziam sobre o conceito de área, possibilitamos uma compreensão melhor de tal conceito ao desenvolver as atividades das sessões de ensino. O conceito de área se mostrou de muita importância para a aprendizagem do cálculo de áreas, pois, ao compreenderem o conceito de área evitamos entendimentos sem significados nos procedimentos envolvidos no cálculo de áreas.

Expomos um método para se calcular a área de uma determinada região geométrica. O método articulava os diversos conteúdos de aprendizagens, o que garantiu aos alunos uma aprendizagem significativa. Mesmo assim, para memorizar o método, propomos exercícios complementares, como é recomendado para a aprendizagem de conteúdos procedimentais. Com o diálogo estabelecido com os alunos observamos reações positivas quanto ao entendimento do método, evidenciando clareza na exposição do mesmo e boa articulação deste com os outros conteúdos de aprendizagens.

As atividades e os exercícios propostos exigiam uma certa abstração, pois, o método exposto pressupõe a dedução da quantidade de quadrados tomados como unidade de área que é equivalente à área da forma geométrica em questão. Obviamente que esse número não poderia ser obtido sempre através de procedimentos concretos, sendo mais viável e necessário utilizar-se do pensamento dedutivo. Nesse sentido, a respectiva sessão de ensino possibilitou e motivou o desenvolvimento da abstração.

De forma menos presente, o conteúdo atitudinal do qual nos referimos trata-se da autonomia e a capacidade de iniciativa para atacar um determinado problema. No caso, os alunos precisam de certa autonomia e iniciativa para resolver os problemas de cálculos de áreas. Para um adulto pode parecer fácil reproduzir este método, mas para uma criança de 11 anos de idade não o é, e exige conteúdos atitudinais.

Prevalecem na sessão 6 conteúdos conceituais e procedimentais. São conteúdos conceituais os conceitos de triângulo equilátero, triângulo isósceles, triângulo escaleno, hexágono regular, paralelogramo e de trapézio. O conteúdo procedimental é referente ao método exposto de se calcular áreas, a saber, o método que utiliza composição e decomposição das formas geométricas e o princípio da equivalência de áreas.

Os conteúdos conceituais foram desenvolvidos através de atividades que solicitavam aos alunos a exploração das propriedades que definem as respectivas formas geométricas. Os alunos então começaram a entender a importância de conhecer e saber explicar satisfatoriamente o conceito de uma dada forma geométrica.

Já as atividades que desenvolviam o método do cálculo de áreas através do princípio de equivalência exigia dos alunos o raciocínio lógico-dedutivo. Isso porque, em algumas atividades, os alunos precisavam deduzir certos valores para comprimentos de lados que eram implícitos. A esta altura, não estávamos mais trabalhando com materiais concretos e os alunos dependiam do pensamento abstrato para seguir na resolução das atividades, diferente das sessões iniciais aonde os materiais concretos eram permitidos e estimulados.

Devido a essa evolução gradual na sequência das sessões de ensino e das atividades, mais a oportunidade de articular bem os conteúdos de aprendizagens, a possibilidade dos alunos desenvolver o pensamento abstrato e o raciocínio lógico foi real. Além disso, ocorreu a aprendizagem significativa do conteúdo procedimental.

Na sessão 7 os conteúdos continuam os mesmos da sessão anterior. Ou seja, predominam conteúdos procedimentais. Porém, como o método para resolver as atividades desta sessão era o mesmo do exposto na sessão anterior, demos a oportunidade para os alunos desenvolverem as atividades desta sessão com mais autonomia. Porém, a autonomia dos alunos esbarrava-se nos problemas de alfabetização, ou seja, nas dificuldades de leitura e interpretação. Aliás, este foi um problema que limitou bastante o desenvolvimento da proposta de ensino-aprendizagem.

Assim, fornecendo ajudas necessárias à evolução e ao desenvolvimento dos alunos, as atividades da respectiva sessão de ensino possibilitou melhor entendimento do método de composição e decomposição no cálculo de áreas usando o princípio de equivalências de áreas. Dado que o método pode ser aplicado em circunstâncias diferentes, para formas geométricas diferentes, a aprendizagem do mesmo está condicionada a capacidade de generalização, proporcionando aos alunos o desenvolvimento desta.

Na última sessão de ensino proporcionamos aos alunos a exercitação dos conteúdos aprendidos para que os alunos pudessem memorizá-los e desenvolver as habilidades envolvidas nos procedimentos. A repetição dos métodos para se calcular área também foi importante para que alguns alunos percebessem um determinado padrão para o cálculo de áreas dos triângulos. Ou seja, alguns alunos foram capazes de deduzir, a partir de um determinado momento, a área de qualquer triângulo sem precisar repetir todos os passos do procedimento que envolve composição e decomposição mais o princípio da equivalência de áreas.

Sem dúvidas, este fato é uma forte evidência do potencial da geometria para estimular o desenvolvimento do pensamento abstrato e da capacidade de generalização. Todo esse processo culminou com as fórmulas para o cálculo das áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio. Mas ressaltamos que isso só foi possível depois de um ardo trabalho para proporcionar a aprendizagem significativa dos conteúdos. Portanto, fomos além do planejado e os alunos tiveram um primeiro contato com a linguagem algébrica ao estabelecermos as fórmulas que permitem o cálculo de áreas das formas geométricas referidas anteriormente.

Mesmo com os problemas encontrados no que se refere às dificuldades dos alunos quanto à leitura, interpretação e escrita, os conteúdos de aprendizagens propostos nas sessões de ensino foram bem desenvolvidos, guardadas as devidas ressalvas.

5.2 Validação das Hipóteses

Levando em consideração a análise do processo de ensino-aprendizagem feita anteriormente, vamos validar ou refutar as hipóteses definidas na análise *a priori*.

5.2.1 As sessões de ensino proporcionam a aprendizagem dos respectivos conteúdos

De fato, como analisamos anteriormente, as sessões de ensino articulavam muito bem os conteúdos de aprendizagens, propondo atividades que favoreciam a aprendizagem dos conteúdos gradativamente, partindo do concreto e caminhando para atividades que demandavam pensamento abstrato.

No geral, os conteúdos de aprendizagens foram bem desenvolvidos, com exceção do conceito de ângulo. Houve uma grande dificuldade por parte dos alunos na construção desse conceito. De nossa parte, podemos dizer que tomamos de forma inadequada o pressuposto de que os alunos já tinham uma boa noção intuitiva de tal conceito, o que na prática não se verificou. Disso decorre uma proposta de sessões de ensino com atividades insuficientes para proporcionar aos alunos a construção desse conceito.

Logo, a primeira hipótese não pode ser validada de forma absoluta, mas também não teria sentido refutá-la. Assim, validaremos parcialmente essa hipótese, ressaltando a necessidade de ajustar as atividades das sessões de ensino para possibilitar aos alunos a aprendizagem do conceito de ângulo.

5.2.2 A organização social das aulas favorecerá, aos poucos, o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos

Esta hipótese tem mais a ver com conteúdos atitudinais e como vimos as sessões de ensino priorizaram conteúdos conceituais e procedimentais. Porém, a organização social das aulas permitiu, de fato, uma certa evolução dos alunos quanto a sua autonomia. No início do trabalho encontramos alunos completamente dependentes do professor para a realização de qualquer atividade escolar. Perguntas do tipo “quantas linhas deixamos para responder?”, “pode começar a resolver?” eram frequentes.

Os alunos também apresentavam um comportamento disciplinar fora dos padrões para o ambiente escolar. A indisciplina, realmente, comprometia a comunicação que tentávamos estabelecer no início. Com muita insistência e perseverança, aos poucos o comportamento disciplinar foi se adequando ao ambiente escolar e as aulas passaram a render melhor. Também observamos que as perguntas citadas anteriormente como evidências de falta de autonomia não eram mais frequentes.

Entretanto, a autonomia dos alunos foi limitada por um fator externo ao respectivo processo de ensino-aprendizagem, a saber: uma grande parcela de alunos apresentava grande dificuldade para ler, interpretar e escrever.

Sendo assim, não podemos validar a segunda hipótese, não porque as sessões de ensino se demonstraram inadequadas, mas sim porquê existiu um fator externo que limitou muito o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

5.2.3 O contexto das pipas para desenvolver conteúdos da geometria motivará a aprendizagem e o envolvimento autônomo dos alunos

Levando em consideração que a brincadeira de pipas é tradicionalmente praticada por crianças e jovens de todo o Brasil com raras exceções, supomos que as crianças em idade escolar teriam experiências suficientes para agir com autonomia quando se deparassem com a proposta de ensino-aprendizagem de geometria construindo pipas. Porém, mesmo que uma grande parcela dos meninos tenham declarado que brincavam de empinar pipas, o mesmo não verificamos com relação à construção das pipas. Ou seja, em geral, os alunos compravam as pipas prontas e não se interessavam em construí-las.

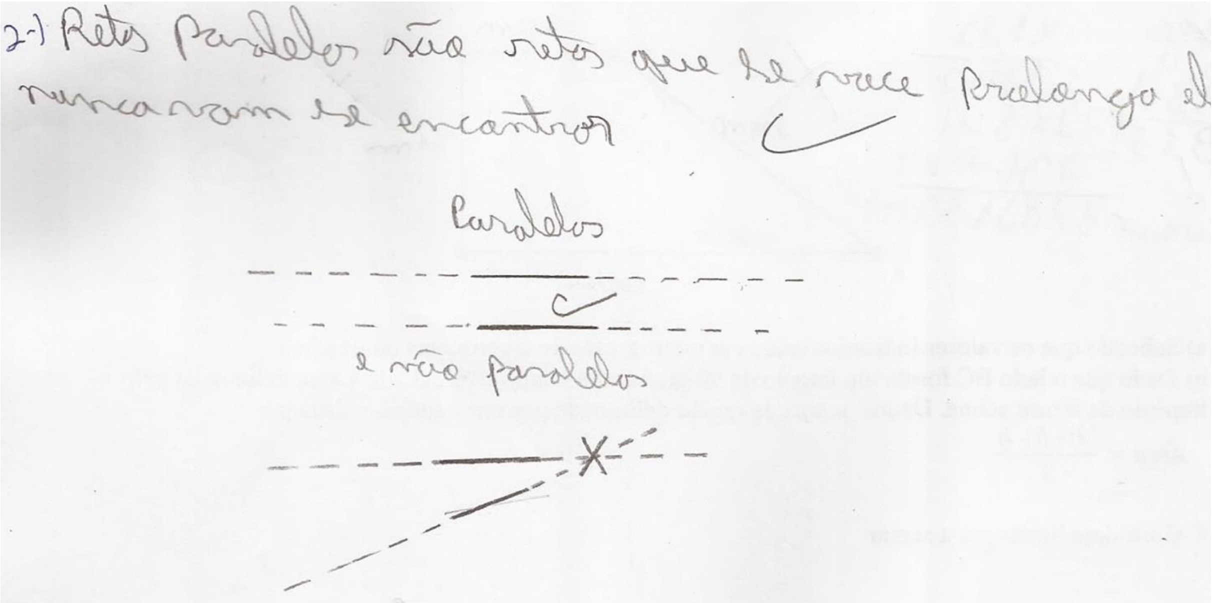
Desta forma, os alunos não tinham as habilidades necessárias para a construção das pipas que pretendíamos trabalhar. Isso foi mais um fator que contribuiu para a desistência de construir as pipas com os alunos, além de outros fatores que inviabilizavam essa construção, como a falta de flexibilidade do espaço e do tempo, típico de um sistema educacional.

Logo, devemos refutar a hipótese em questão. Isto é, apesar dos bons resultados apresentados pelos alunos quanto às aprendizagens dos conteúdos, não observamos os alunos se mobilizarem com autonomia por conta da motivação promovida pela brincadeira da pipa. Talvez a idade dos alunos, em média 11 anos, tenha sido outro fator limitante para a ação autônoma dos alunos.

5.2.4 A abordagem concebida será favorável para desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos

Uma das características da geometria é a argumentação precisa e clara. Com o processo de ensino-aprendizagem proposto, favorecemos o desenvolvimento da capacidade dos alunos de argumentar. Novamente, a articulação dos conteúdos de aprendizagens desempenhou um papel importante para o desenvolvimento desta capacidade.

A seguir, podemos observar uma significativa evolução na forma como os alunos explicaram o conceito de retas paralelas no questionário, antes de iniciar as sessões de ensino e, no exame final, após o desenvolvimento das sessões de ensino.


2-) Retas Paralelos são retos que se nuce prolonga e nuncavam se encontrar

Paralelos

e não paralelos

Ilustração 20 - Resposta do aluno A.V.L.A.

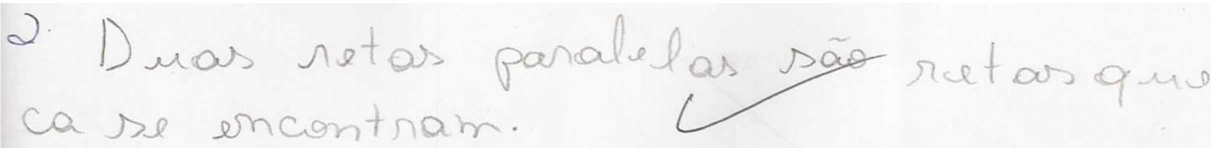

2. Duas retas paralelas são retas que nun-
ca se encontram.

Ilustração 21 - Resposta do aluno K.P.F

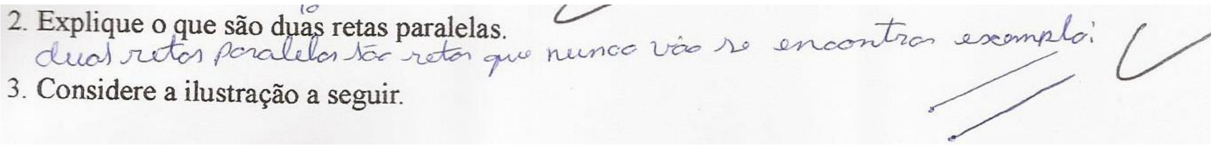

2. Explique o que são duas retas paralelas.
duas retas paralelas são retas que nunca vão se encontrar exemplo:
3. Considere a ilustração a seguir.

Ilustração 22 - Resposta do aluno L.C.T.

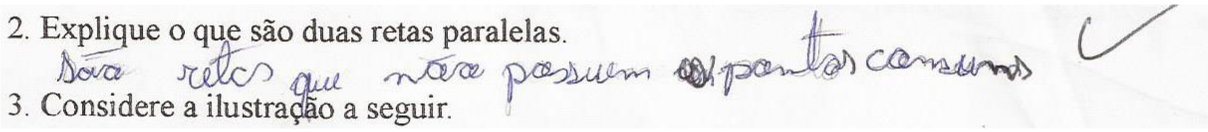

2. Explique o que são duas retas paralelas.
São retas que não possuem pontos comuns
3. Considere a ilustração a seguir.

Ilustração 23 - Resposta do aluno L.R.P.

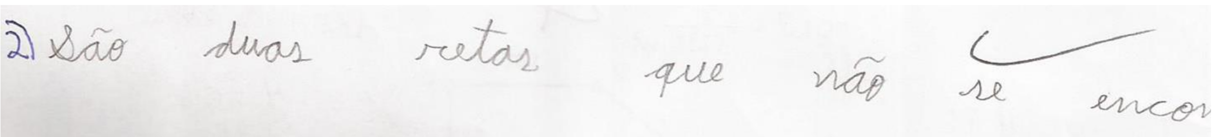

2) São duas retas que não se encon

Ilustração 24 - Resposta do aluno T.S.V.

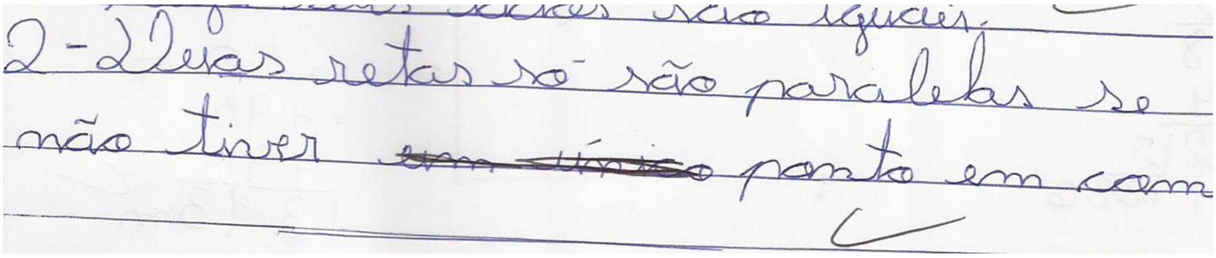


Ilustração 25 - Resposta do aluno C.M.C.E.

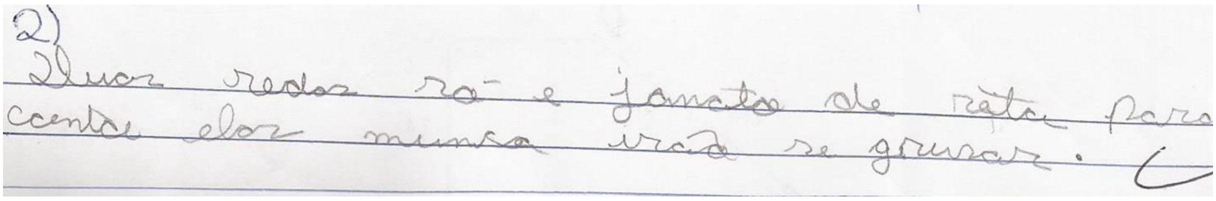


Ilustração 26 - Resposta do aluno L.C.S.

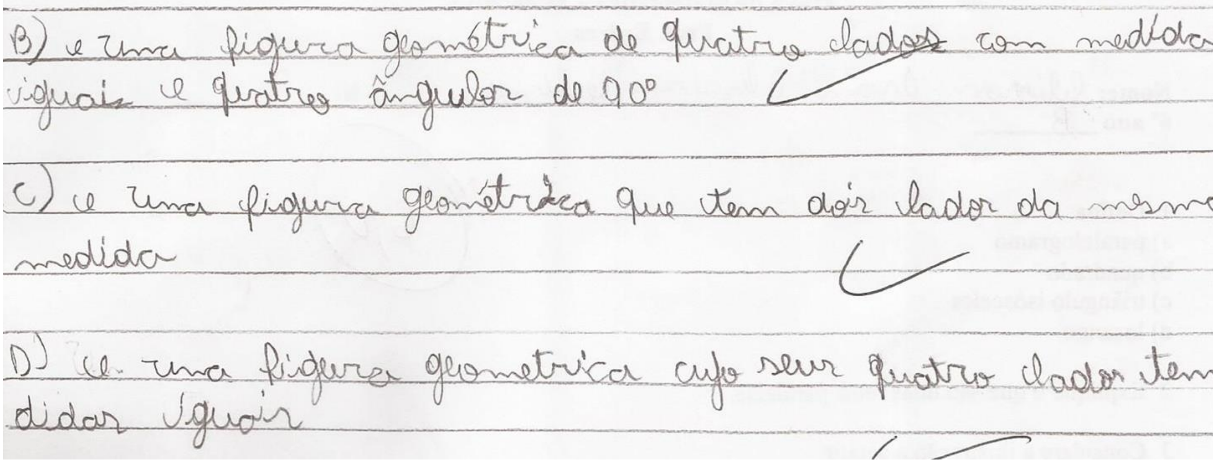
Como podemos observar, ocorreu uma melhora significativa na forma de argumentar e explicar o conceito de retas paralelas. O mesmo pôde ser observado em outros aspectos também, como no caso de explicar os conceitos das formas geométricas estudadas.

Logo, podemos validar a quarta hipótese.

5.2.5 As sessões de ensino possibilitarão a aprendizagem das propriedades das formas geométricas estudadas contribuindo com o desenvolvimento do pensamento abstrato

De fato, trabalhamos no sentido de explorar as propriedades das formas geométricas para além da capacidade de diferenciá-las atentando-se para as suas propriedades. Quando analisamos os questionários aplicados antes de iniciar as sessões de ensino, vimos algumas respostas dos alunos na tentativa de conceituar ou explicar o que é um retângulo e um quadrado e consideramos todas as respostas insatisfatórias.

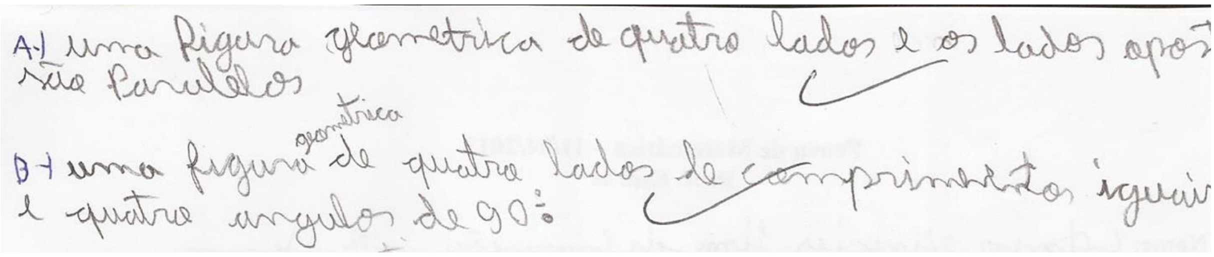
Vamos ver agora como os mesmos alunos responderam perguntas semelhantes no exame escrito realizado após o término das sessões de ensino. No exame final, solicitávamos aos alunos definir ou explicar o conceito de: (1.a) paralelogramo, (1.b) quadrado, (1.c) triângulo isósceles e (1.d) losango.


B) e uma figura geométrica de quatro lados com medida iguais e quatro ângulos de 90°

C) e uma figura geométrica que tem dois lados da mesma medida

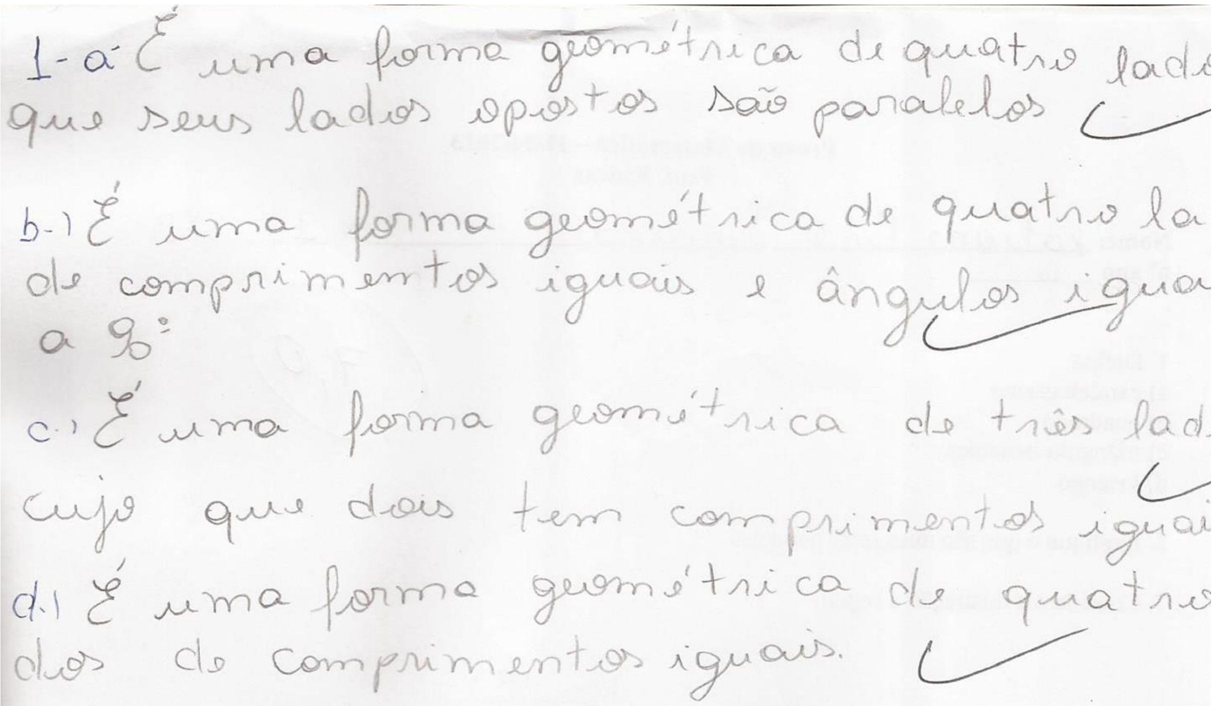
D) e uma figura geometrica cujo seus quatro lados tem didas iguais

Ilustração 27 - Resposta do aluno A.I.O.L.


A) uma figura geometrica de quatro lados e os lados opos são paralelos

B) uma figura geométrica de quatro lados de comprimentos iguais e quatro angulos de 90°

Ilustração 28 - Resposta do aluno A.V.L.A.


1- a) É uma forma geométrica de quatro lad que seus lados opostos são paralelos

b) É uma forma geométrica de quatro la de comprimentos iguais e ângulos igua a 90°

c) É uma forma geométrica de três lad cujo que dois tem comprimentos iguai

d) É uma forma geométrica de quatro dos de comprimentos iguais.

Ilustração 29 - Resposta do aluno K.P.F.

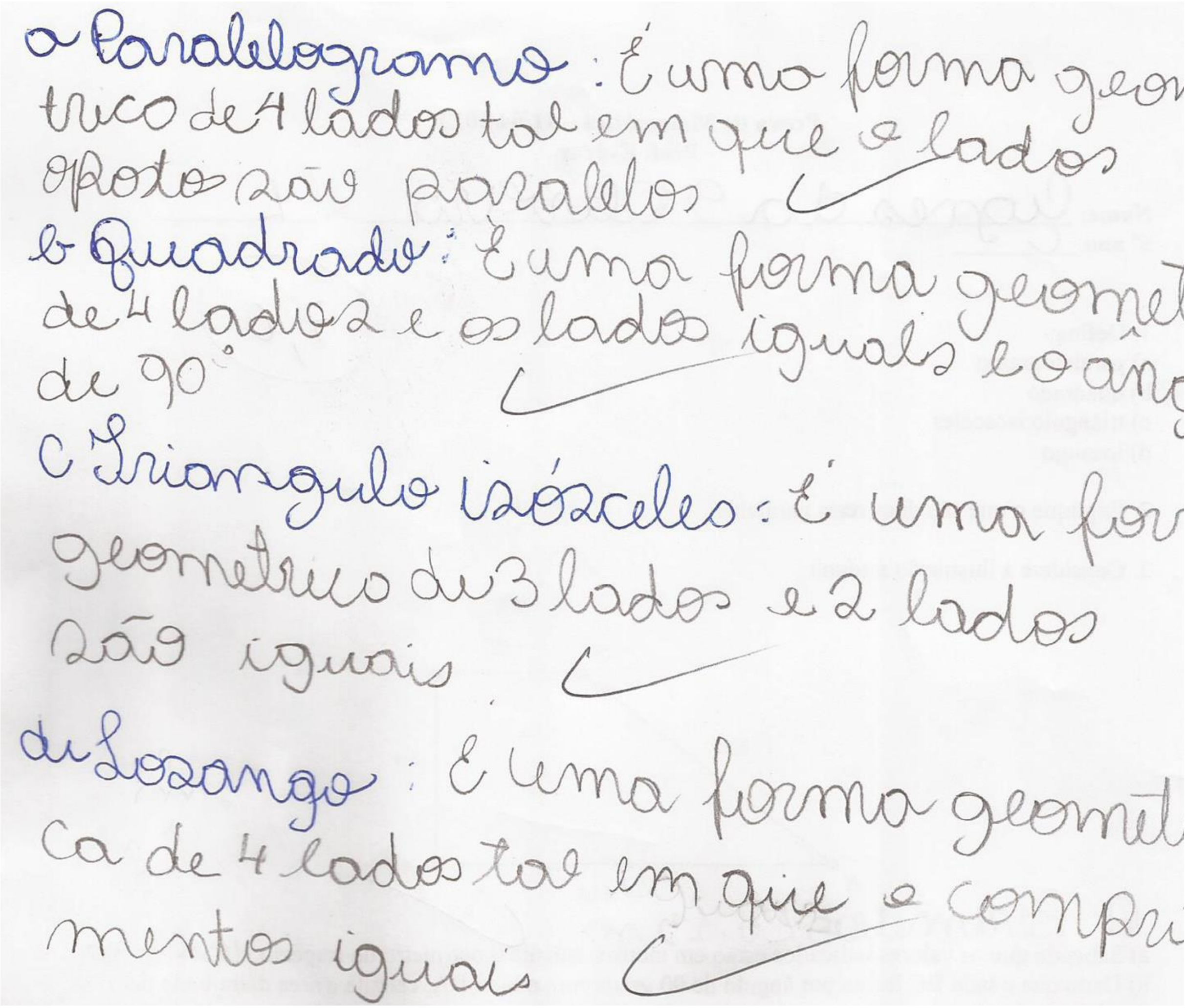
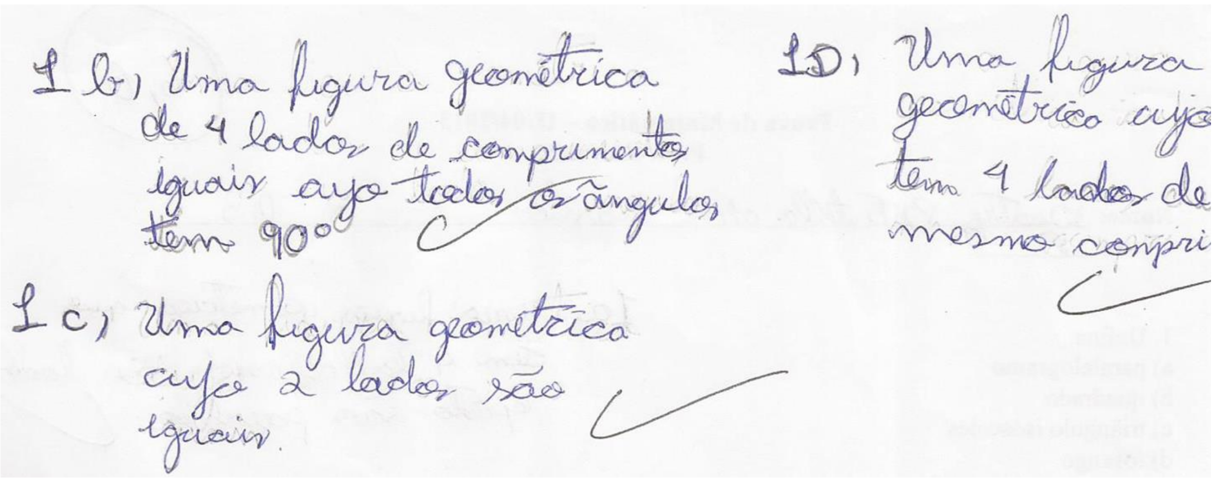

a Paralelogramo: É uma forma geom
trico de 4 lados tal em que o lados
opostos são paralelos
b Quadrado: É uma forma geomet
de 4 lados e os lados iguais e o ân
de 90°
c Triangulo isózceles: É uma for
geometrico de 3 lados e 2 lados
são iguais
d Losango: É uma forma geomet
ca de 4 lados tal em que o compri
mentos iguais

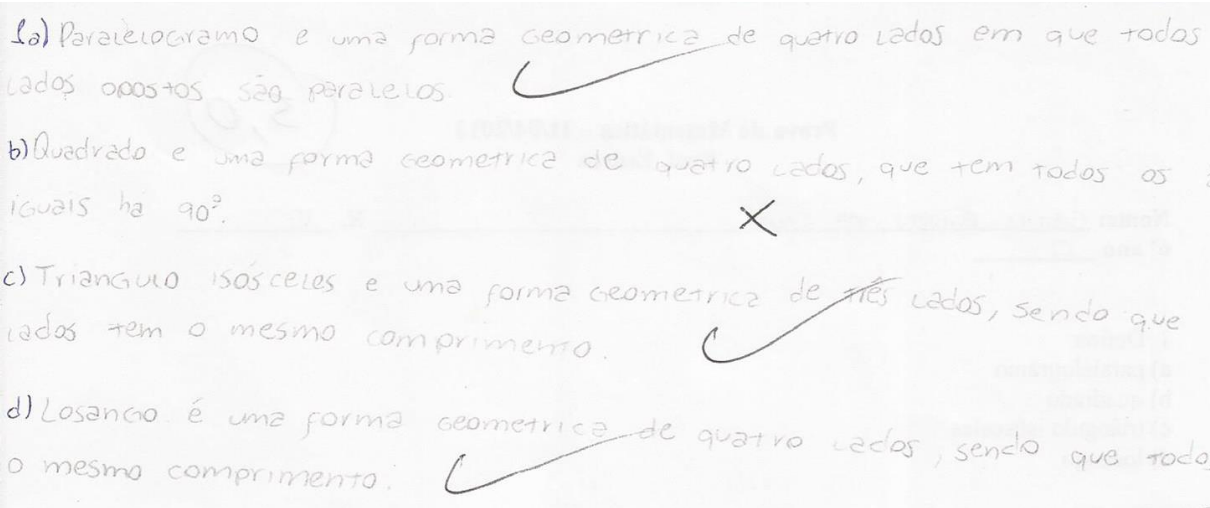
Ilustração 30 - Resposta do aluno A.S.O.


1 b) Uma figura geométrica
de 4 lados de comprimentos
iguais cujo todos os ângulos
têm 90°

1 c) Uma figura geométrica
cujo 2 lados são
iguais.

1 d) Uma figura
geométrico cujo
tem 4 lados de
mesmo compri

Ilustração 31 - Resposta do aluno B.B.S.



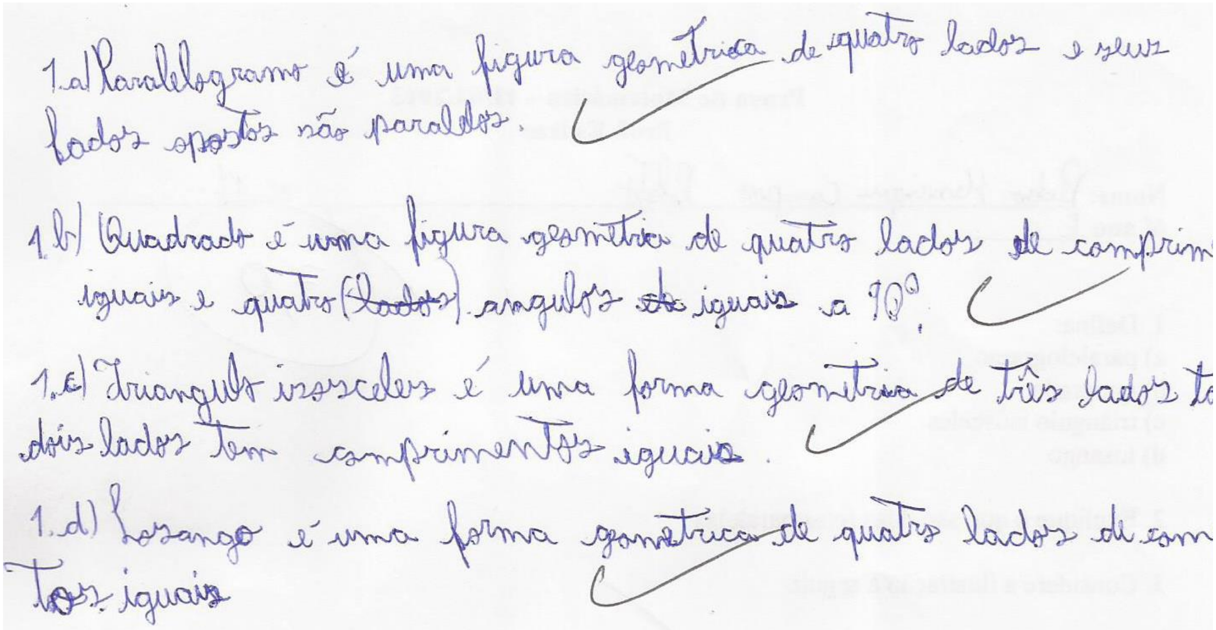
1a) Paralelogramo e uma forma geometrica de quatro lados em que todos lados opostos são paralelos.

b) Quadrado e uma forma geometrica de quatro lados, que tem todos os iguais ha 90°.

c) Triangulo isósceles e uma forma geometrica de três lados, sendo que lados tem o mesmo comprimento.

d) Losango é uma forma geometrica de quatro lados, sendo que todo o mesmo comprimento.

Ilustração 32 - Resposta do aluno G.B.C.



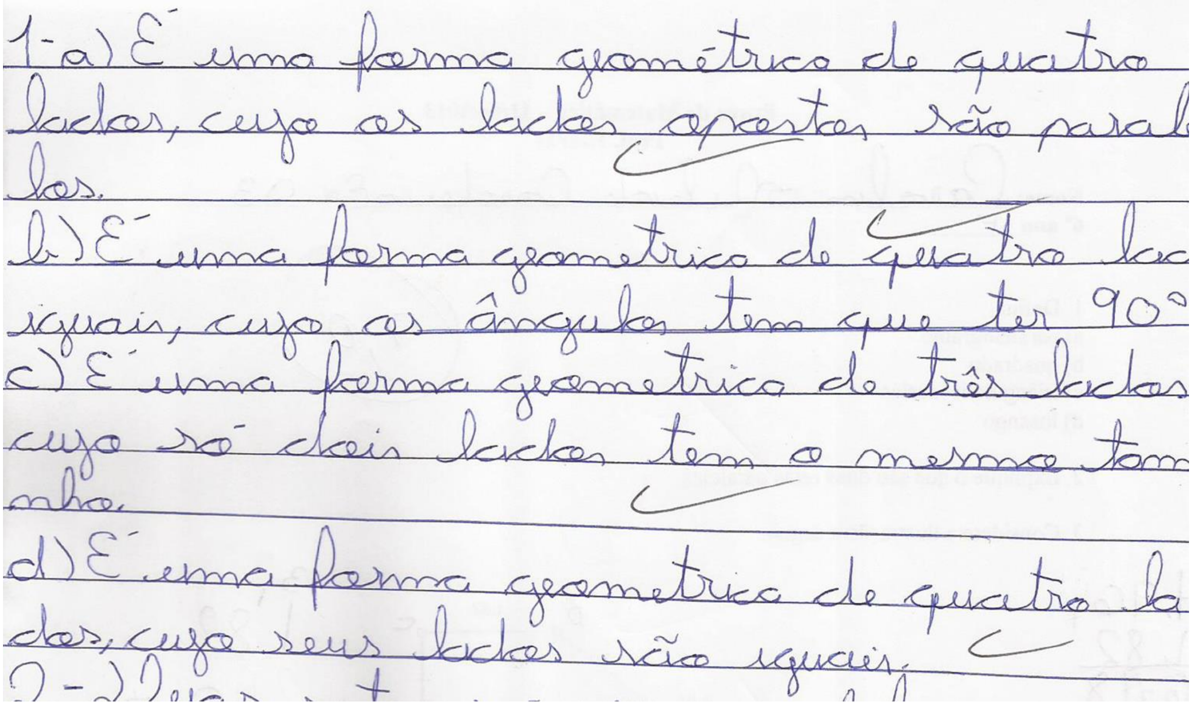
1.a) Paralelogramo é uma figura geométrica de quatro lados e seus lados opostos são paralelos.

1.b) Quadrado é uma figura geométrica de quatro lados de comprim iguais e quatro (~~lados~~) angulos ~~são~~ iguais a 90°.

1.c) Triangulo isosceles é uma forma geométrica de três lados to dois lados tem comprimentos iguais.

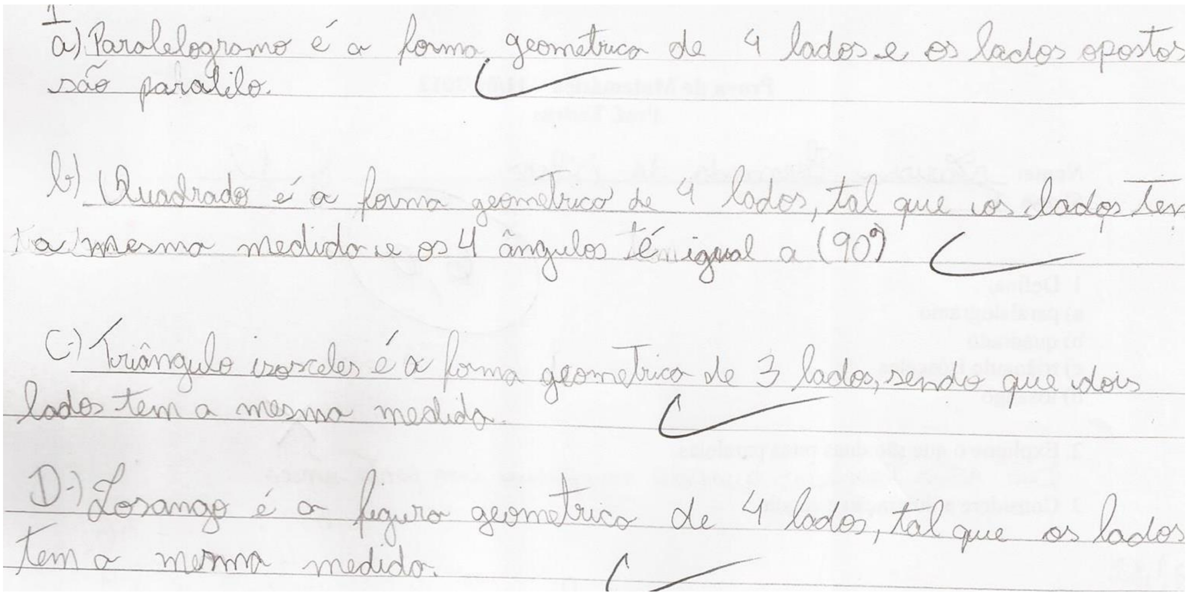
1.d) Losango é uma forma geométrica de quatro lados de com tos iguais

Ilustração 33 - Resposta do aluno P.H.C.P.



1-a) É uma forma geométrica de quatro lados, cujo os lados opostos são paralelos.
b) É uma forma geometrica de quatro lados iguais, cujo os ângulos tem que ter 90°
c) É uma forma geometrica de três lados cujo só dois lados tem o mesmo tamanho.
d) É uma forma geometrica de quatro lados, cujo seus lados são iguais.

Ilustração 34 - Resposta do aluno C.M.C.E.



1
a) Paralelogramo é a forma geometrica de 4 lados e os lados opostos são paralelo.
b) Quadrado é a forma geometrica de 4 lados, tal que os lados tem a mesma medida e os 4 ângulos té igual a (90°)
C-) Triângulo isosceles é a forma geometrica de 3 lados, sendo que dois lados tem a mesma medida.
D-) Losango é a figura geometrica de 4 lados, tal que os lados tem a mesma medida.

Ilustração 35 - Resposta do aluno L.F.S.

Assim, fica evidente que o processo de ensino-aprendizagem possibilitou aos alunos entender os conceitos de cada uma das formas geométricas. Uma vez que as definições das formas geométricas dependem de suas propriedades e essas são gerais para formas geométricas semelhantes, o entendimento das propriedades estimula a abstração. Com isso, validamos essa hipótese.

5.2.6 A geometria, mesmo em nível elementar, promove aos alunos o

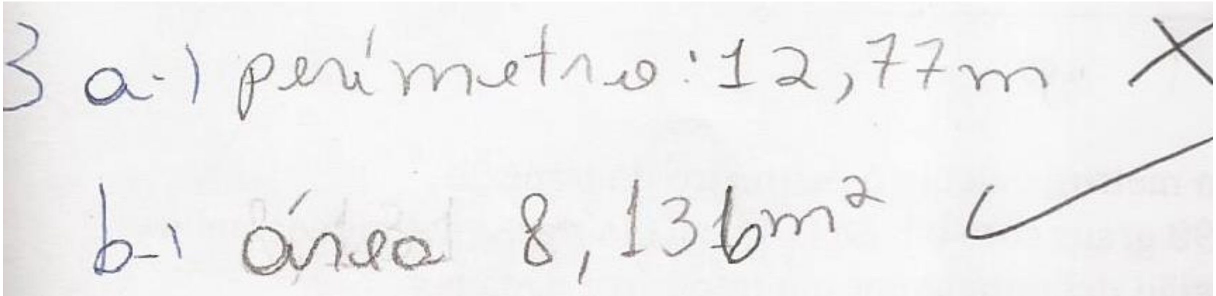
desenvolvimento da capacidade de generalizar

Os alunos deram evidências de que o estudo da geometria, mesmo em um nível muito elementar, intuitivo e exploratório, propicia o desenvolvimento das ideias de generalização no final da última sessão quando propomos a exercitação do método apresentado para se calcular áreas. Após repetirem o método para uma mesma forma geométrica, por exemplo, o triângulo, alguns alunos perceberam que a área poderia ser obtida em função da base do triângulo e sua altura. Ou seja, estes alunos foram capazes de fazer uma generalização, pois, perceberam que a fórmula poderia ser usada para qualquer triângulo.

Aproveitando as circunstâncias, fornecemos para os alunos as fórmulas para o cálculo da área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do trapézio e do triângulo. Usamos a linguagem algébrica para escrever as fórmulas, explicando o significado das letras e fornecendo uma interpretação para as mesmas. No caso, convencionamos que b representava a base, ou a base menor no caso do trapézio e h a altura. Dizemos que a altura é perpendicular a um dos lados do polígono e é este lado que se considera a base. Por sua vez, deixamos claro que tanto a base quanto a altura significavam comprimentos de segmentos.

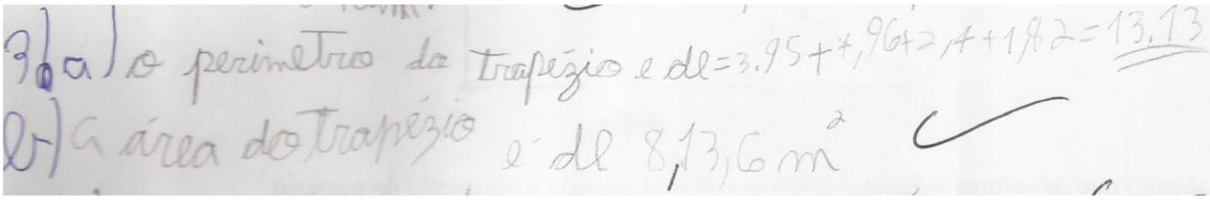
Este trabalho complementar às sessões de ensino foi importante para estimular a capacidade de generalizar dos alunos, pois com o conhecimento das fórmulas, propomos a resolução de diversos execícios envolvendo o cálculo de áreas. Tais atividades complementares apresentavam conteúdos conceituais e procedimentais, envolvendo várias operações mentais para fazer o cálculo de áreas.

Vamos observar alguns fragmentos do exame final dos mesmos alunos já citados neste trabalho. As respostas a seguir referem-se ao cálculo da área de um trapézio onde$B = 4{,}96m$,$b = 1{,}82m$,$h = 2{,}4m$e a fórmula era dada como informação *a priori*.


3 a-) perímetro: 12,77m

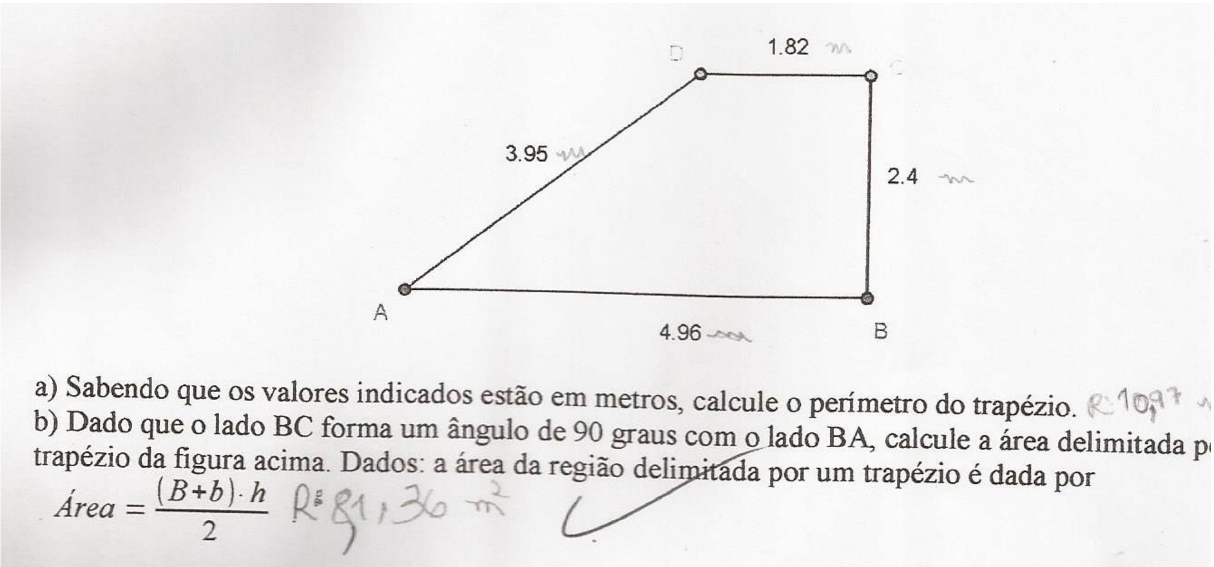
b-) área 8,136m²

Ilustração 36 - Resposta do aluno K.P.F.


3) a) o perímetro do trapézio é de = 3.95 + 4,96 + 2,4 + 1,82 = 13,13

b) a área do trapézio é de 8,13,6 m²

Ilustração 37 - Resposta do aluno G.C.A.B.



a) Sabendo que os valores indicados estão em metros, calcule o perímetro do trapézio. R: 10,97 m

b) Dado que o lado BC forma um ângulo de 90 graus com o lado BA, calcule a área delimitada p[...] trapézio da figura acima. Dados: a área da região delimitada por um trapézio é dada por

$Área = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ R: 81,36 m²

Ilustração 38 - Resposta do aluno R.P.R.

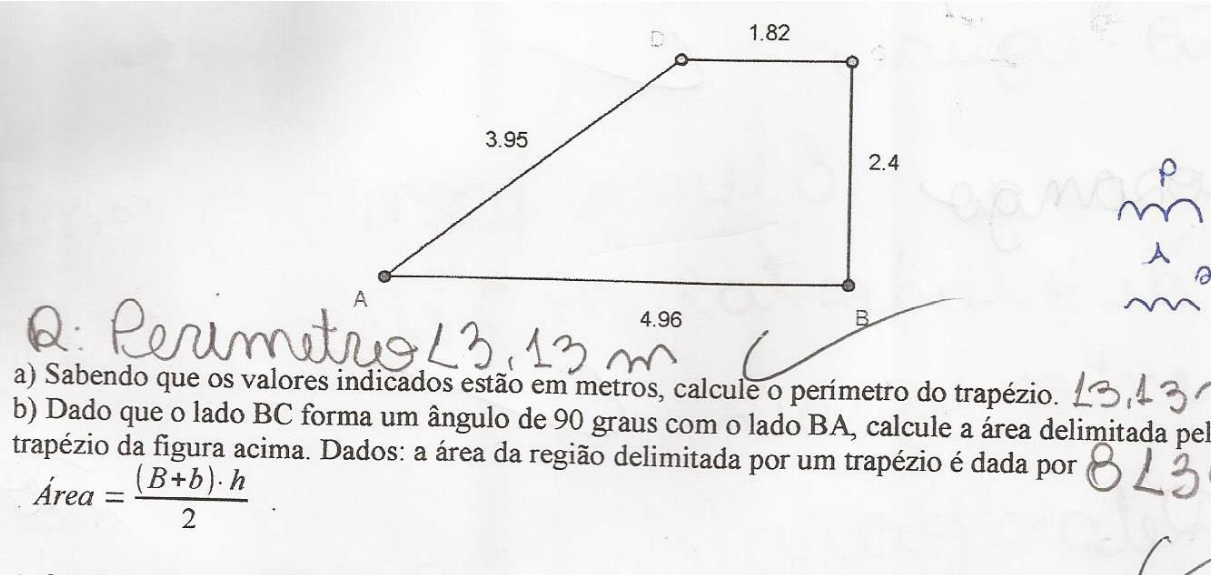


Ilustração 39 - Resposta do aluno A.S.O.

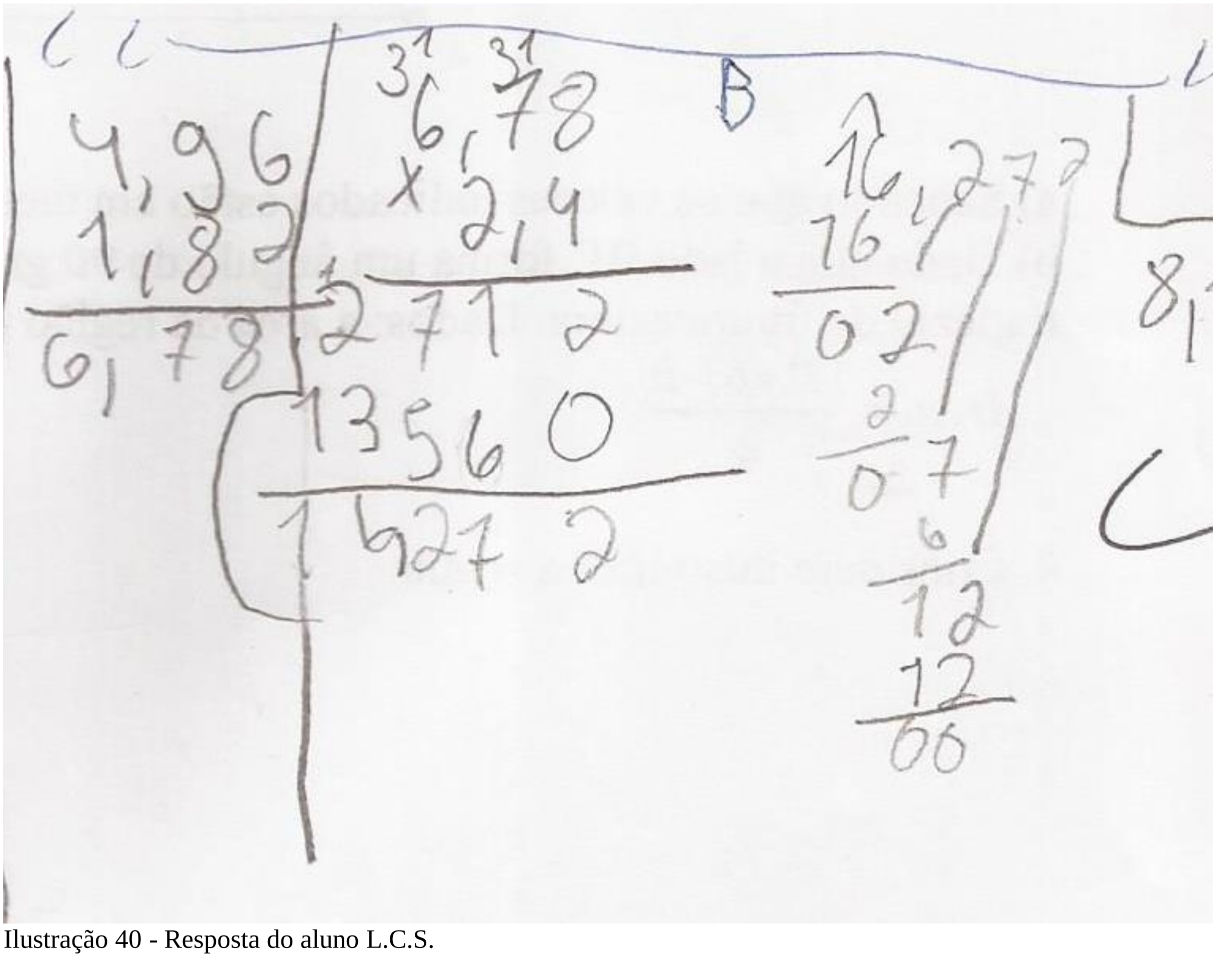


Ilustração 40 - Resposta do aluno L.C.S.

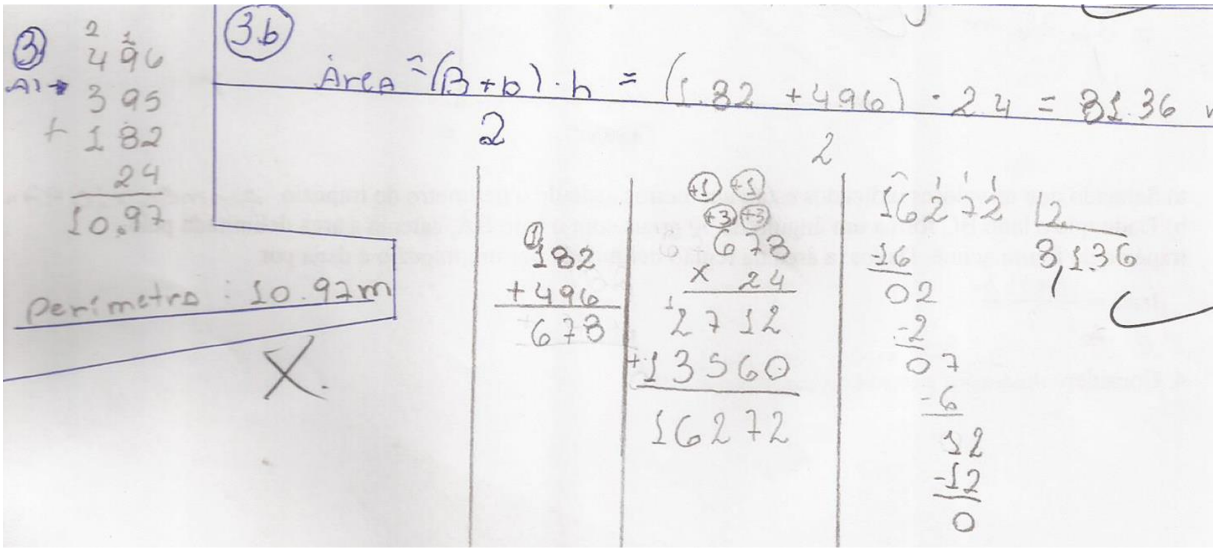


Ilustração 41 - Resposta do aluno M.F.

Para calcular a área do trapézio nesta questão, os alunos precisavam, primeiramente, reconhecer o trapézio e seus elementos, identificando as bases e sua altura. Em seguida, deveriam reconhecer a linguagem algébrica da fórmula e efetuar as operações respeitando-se as propriedades dos números. Portanto, o processo de ensino-aprendizagem da geometria contribuiu para o desenvolvimento dos alunos quanto a capacidade de generalizar.

No fragmento do exame final a seguir, mais uma resposta de um aluno para outra questão que solicitava o cálculo da área de um triângulo. Diferente da questão anterior, neste caso, a fórmula para o cálculo da área não foi dada.

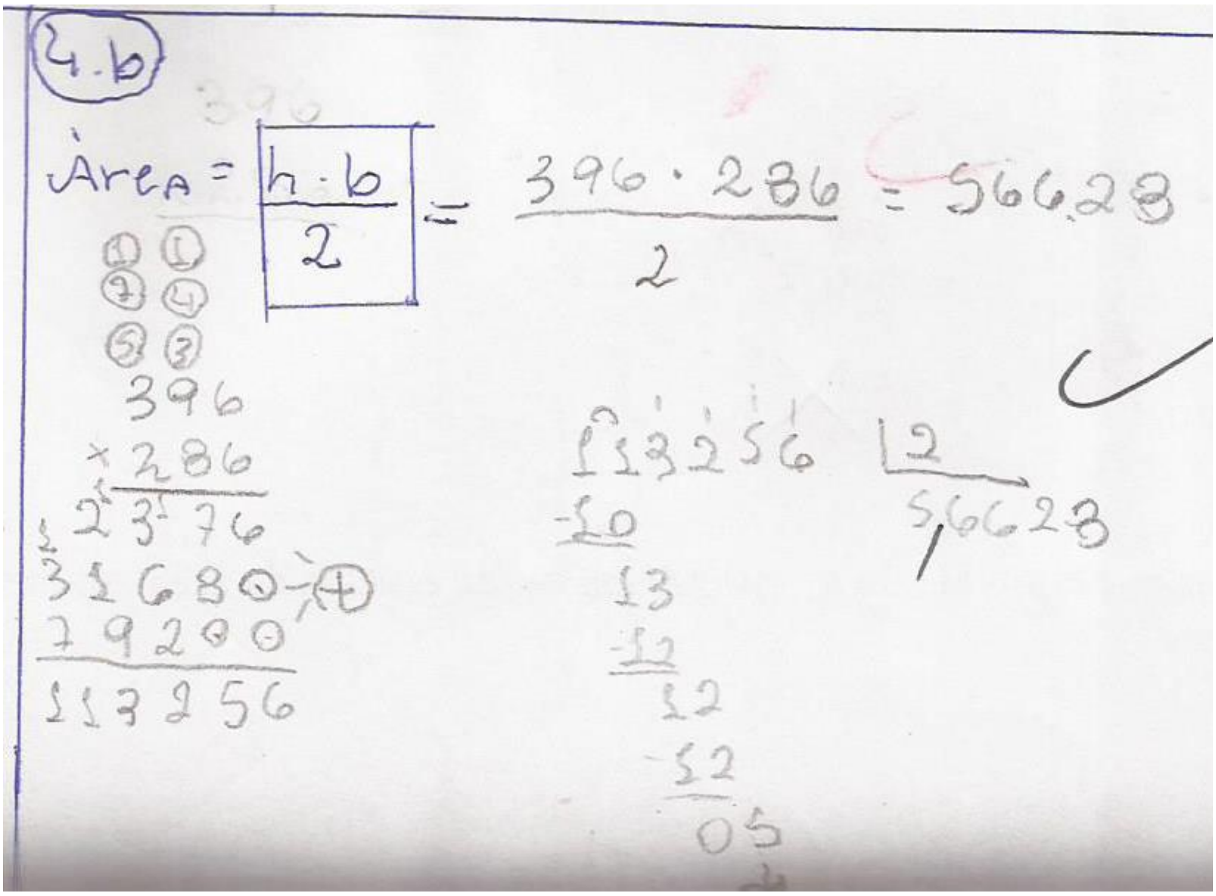


Ilustração 42 - Resposta do aluno M.F.

Neste caso, os alunos precisavam saber a fórmula do cálculo da área de um triângulo para aplicá-la. Também era exigido uma maior maturidade, pois o triângulo representado na figura tinha aspecto não muito comum para a maior parte dos alunos. Isso dificultou o reconhecimento de seus elementos, necessários ao cálculo de sua área.

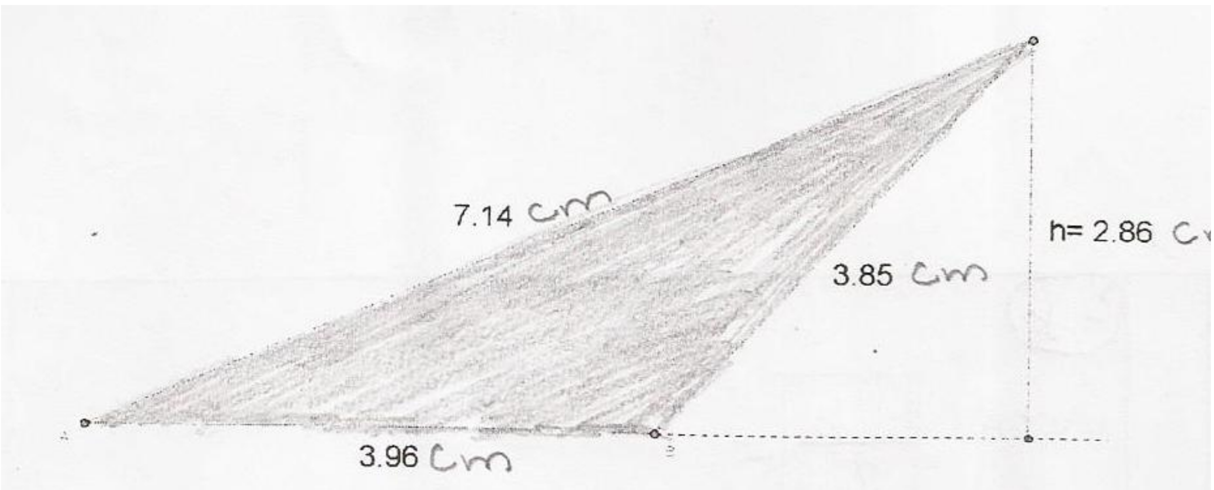


Ilustração 43 - Aspecto do triângulo da avaliação final

Considerando a análise *a posteriori* e os fragmentos do exame final apresentados, podemos validar a nossa última hipótese.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a intenção de pesquisar o processo de ensino-aprendizagem da matemática tomamos conhecimento de uma metodologia de trabalho concebida para este fim, a saber, a Engenharia Didática. Essa metodologia se demonstrou, de fato, muito relevante para este tipo de trabalho, pois, ao contrário de outras metodologias propõe um método de validação que depende dos resultados, registros e análises oriundos do próprio trabalho em sala de aula.

Outras características da metodologia é que ela pressupõe uma fase onde o contato com as situações de ensino-aprendizagem é imprescindível para o trabalho, ou seja, ela não apenas permite que exista essa aproximação com a realidade educacional, como define isso como uma condição *sine qua non* para o trabalho. Esse é outro diferencial com relação a outras metodologias utilizadas no estudo do processo de ensino-aprendizagem nas salas de aulas escolares.

Para fazer o estudo prévio, pesquisamos artigos nas diversas bases de dados acadêmicos sobre o ensino da geometria e consideramos apenas os artigos que nos pareceu mais relevantes. Apesar de existir uma boa quantidade de artigos sobre o ensino de geometria nas escolas, as abordagens podem variar bastante. E daqueles que fazem uma abordagem relevante para o nosso estudo, verificamos uma certa convergência dos autores sobre os problemas referentes ao ensino da geometria. Assim, não podemos dizer que fizemos uma revisão bibliográfica como de praxe. Isso é uma das limitações desta pesquisa, pois, apesar do referencial teórico não exigir que se faça uma revisão bibliográfica, não há dúvidas de que esta é muito útil e necessária em qualquer trabalho acadêmico, seja para não repetir erros já apontados em outras pesquisas, seja para não repetir ideias e pensamentos já amplamente discutidos, seja para enriquecer a pesquisa com informações que contribuem para um trabalho autêntico.

Um outro problema que limitou a pesquisa foi o fato de que a concepção do processo de ensino-aprendizagem, a aplicação da proposta de ensino, os registros e as análises foram feitos por uma única pessoa. Assim, desempenhamos múltiplos papéis: o profissional, pois estávamos em sala de aula com os alunos antes de mais nada como seu professor, e também encontravámos na condição de aluno de um programa de mestrado realizando seu trabalho de conclusão de curso e produzindo material em seu próprio ambiente profissional sem um olhar crítico de outro mestrando ou pessoa qualificada para tanto.

Com isso, perdemos a oportunidade de conceber uma ideia de ensino-aprendizagem mais crítica, como também tivemos um rendimento abaixo de nosso potencial em sala de aula, seja como profissional ou como aluno do mestrado, pois deveríamos estar atentos ora como professor dos alunos ora como aluno do mestrado realizando sua pesquisa. Além disso, fomos nós também que ficamos responsáveis pelos registros que poderiam ser relevantes para a análise à posteriori. Obviamente, esse acúmulo e sobrecarga de papéis limitou nosso trabalho, nossas ações e nossas observações.

Nesse sentido, acreditamos que um próximo trabalho deste gênero deve ser feito por um grupo de trabalho, possibilitando o desenvolvimento de um trabalho mais meticuloso e menos limitado.

Com efeito, consideramos que um outro grande diferencial da Engenharia Didática é permitir que o profissional das salas de aulas das escolas de educação básica seja também um pesquisador do processo de ensino-aprendizagem. De fato, o profissional – o professor – pode ter um olhar crítico que o docente ou pesquisador das academias universitárias não podem ter, por não estarem, de fato, inseridos naquele cotidiano que é objeto de pesquisa. Da mesma maneira, o professor das escolas de educação básica pode não ter o olhar crítico do pesquisador ou docente da academia que detêm um grande conhecimento relevante sobre os objetos de pesquisa. Daí a importância de se ter um grupo de trabalho e evitar que o mesmo seja realizado por uma única pessoa. A troca de ideias, as discussões em grupos, as opiniões divergentes, em princípio, beneficiam o trabalho acadêmico.

Com exceções de fatores externos ao estudo e ao nosso trabalho como professor de matemática, podemos apontar mais alguns fatores de influência no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem: a idade dos alunos, a estrutura física e os recursos materiais disponíveis na escola, as experiências e o conhecimento dos alunos sobre o tema e os conteúdos de aprendizagens, e os hábitos sociais dos alunos. Esses fatores influenciam o processo de ensino-aprendizagem e em outras circunstâncias podem produzir conclusões diferentes.

Assim, outras pesquisas podem ser feitas e produzir conhecimentos diferentes ao trabalhar com essas variáveis. Por exemplo, se o trabalho tivesse sido realizado com alunos do ensino médio, talvez poderíamos observar um envolvimento mais autônomo dos alunos no que se refere às construções das pipas e também na aprendizagem dos conteúdos.

Por sua vez, os conteúdos também poderiam mudar. Além disso, a proposta de se trabalhar geometria com pipas permite, de fato, adequar as sessões de ensino e os conteúdos de aprendizagens para qualquer faixa de idade escolar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no G. T. 19 / ANPEd. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1298. Acesso em: jul. 2013.

ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n. 27, set./dez., p. 94-108, 2004.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO DO G. T. 19, 27., 2004, Caxambú. **Anais...** USF, 2004. p. 1-18.

ARBACH, N. **O Ensino de Geometria Plana**: o saber do aluno e o saber escolar. 2002. p. 94. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 222 p. (Coleção do Professor de Matemática).

BORGES, M. M. A. Geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: novas perspectivas. In: CONADE, 25., 2009, Jataí. **Anais...** Jataí: UFG, 2009. p. 1-9.

CHARLOT, Bernard. **Da Relação com o Saber**: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 93.

DUTRA, L. H. A. **Introdução à Epistemologia**. São Paulo: Editora UNESP, 2010. 192 p.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 39. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. 148 p.

GEOGEBRA. Versão 4.2. Saafelden, Áustria: International Geogebra Intitute, 2013. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/. Acesso em: 15/07/2013.

GONÇALVES, L. M. G.; GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M. Compartilhando Saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr., 2008. Disponível em: http://www.scielo.br/cgi-bin/wxis.exe/iah/. Acesso em: jul. 2013.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. p. 200. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 1998.

LAMONATO, M. **Investigando Geometria**: aprendizagens de professoras da educação infantil. 2007. p. 244. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. V. 1 (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 93 p. (Coleção do Professor de Matemática).

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: _____. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012. p. 233-247.

MELLO, E. G. S. **Demonstração**: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria. 1999. p. 172. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

MELO, M. F. A. Q. Algumas aprendizagens construídas durante a brincadeira de pipa: o que está em jogo. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 26, n. 2, p. 89-116, 2010.

PAIS, L. C. Estratégias de Ensino de Geometria em Livros Didáticos de Matemática em Nível de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. In: REUNIÃO DO G. T. 19, 29., 2006, Caxambú. Anais... UFMG, 2006. p. 1-15.

REBELO, P. C.; GOMES, Alexandra. Reorganização Curricular da Geometria: uma experiência no 6º ano de escolaridade. **Quadrante**, Lisboa, v. 21, n. 1, p. 3-28, 2012.

REZENDE, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. 260 p.

VOCE, S. **Brincando com pipas planas**. 4. ed. São Paulo: Global, 1994. 60 p.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 110 p. (Coleção do Professor de Matemática).

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

Questionário

Nome completo:

Número da chamada: ____________ 6º ano _________ Data: _____/_____/

1. Qual é a data de seu nascimento?

Resposta:

2. Qual é o nome da escola que você estudou em 2012? A escola que você estudou em 2012 se localiza em qual cidade?

Resposta:

3. Você considera ter o domínio das quatro operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão) de números naturais?

Resposta:

4. Você já estudou frações?

Resposta:

5. Você sabe somar frações?

Resposta:

6. Você sabe multiplicar frações?

Resposta:

7. Você sabe dividir frações?

Resposta:

8. Você sabe interpretar a fração como um número que representa a medida de alguma coisa?

Resposta:

9. Arme e efetue as operações a seguir.

a) $109 + 987 =$

b) $798 - 599 =$

c) $234 \cdot 102 =$

d) $8192 : 128 =$

10. Resolva as operações indicadas a seguir.

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$

b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$

c) $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} =$

d) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} =$

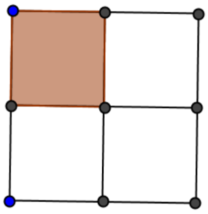
e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$

f) $\frac{7}{9} - \frac{5}{12} =$

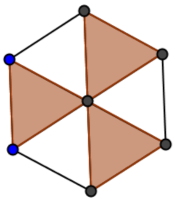
g) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} =$

h) $\frac{21}{5} : \frac{42}{25} =$

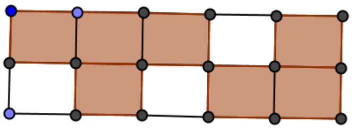
( )



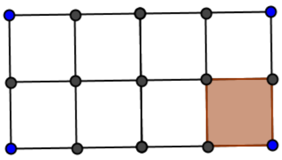
( )



( )



( )



11. A fração $\frac{7}{10}$ pode ser interpretada geometricamente através da seguinte figura:

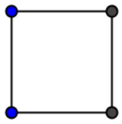
12. O que você acha que significa geometria?

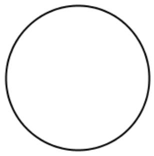
Resposta:

13. O que você lembra ter estudado sobre geometria?

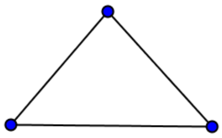
Resposta:

14. Faça a correspondência entre as figuras e seu respectivo nome.

A  (   ) retângulo

B  (   ) quadrado

C  (   ) círculo

D  (   ) triângulo

15. Explique a diferença entre um quadrado e um retângulo.

Resposta:

16. Você sabe o que quer dizer que “duas retas são perpendiculares”? Explique.

Resposta:

17. E quando se diz que “duas retas são paralelas”, você sabe o que significa? Explique.

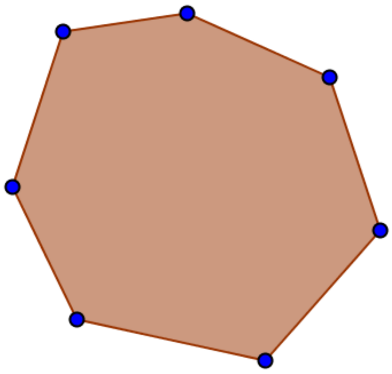
Resposta:

18. O que é um triângulo equilátero?

Resposta:

19. A figura abaixo é um polígono. Qual é o nome que ela recebe em função do seu número de lados?

Resposta:

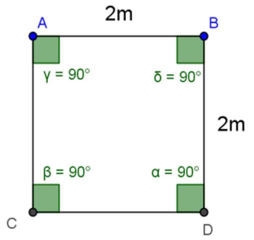


20. Você sabe o que é área? Explique.

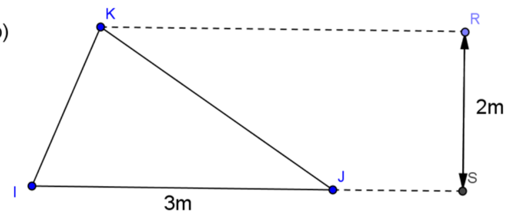
Resposta:

21. Calcule a área das figuras planas representadas a seguir.

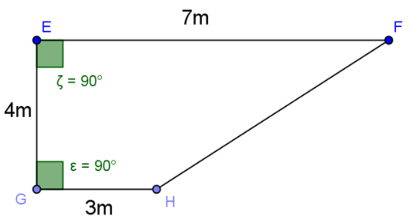
a)



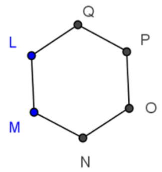
b)



c)



d)



hexágono regular cujo o comprimento do lado é igual a 1m

22. Você já empinou pipas?

Resposta:

23. Você sabe construir uma pipa?

Resposta:

24. Quais são os materiais que você utiliza na construção de pipas?

Resposta:

25. O que você acha mais divertido ao brincar de empinar pipa?

Resposta:

26. Aonde você costuma empinar pipa?
Resposta:

27. Você tem algum amigo mais velho ou amiga mais velha do que você e que tem experiência na arte de fazer e empinar pipas? Se você precisar, este amigo ou esta amiga poderá te ajudar a construir uma pipa?
Resposta:

28. Quais os tipos de pipa que você conhece? Descreva com suas palavras cada uma delas?
Resposta:

29. Você acha que a matemática está presente na construção de uma pipa? Se afirmativo, dê exemplos.
Resposta:

30. Você acha que saberia construir uma pipa com o formato de uma estrela de cinco pontas, como na imagem a seguir?
Resposta: