José Ribamar Farias de Lima

Polinômios de Matrizes

Recife
2013

José Ribamar Farias de Lima

Polinômios de Matrizes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves

Recife
2013

LIMA, José Ribamar Farias de
Polinômios de Matrizes
40 páginas
Trabalho de Conclusão(Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

1. Determinantes
2. Teorema de Cayley-Hamilton
3. Polinômios de Matrizes

I. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Matemática.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
André Luis Meireles Araujo

Prof^{a}. Dr.
Cláudio Tadeu Cristino

Prof. Dr.
Bárbara Costa da Silva

À minha família, meu pão e aos meus pais, meu vinho.

Agradecimentos

A Deus por me proporcionar o privilégio de mais uma etapa de sucesso em minha vida.
Ao meu orientador Rodrigo Gondim, pelo auxílio paciente nas várias fases de confecção deste trabalho.
Ao colega de trabalho e professor Alberes Lopes pelos livros minuciosamente separados e emprestados de sua biblioteca particular.
Aos companheiros de mestrado e de trabalho Pedro Jr e Darlei Miranda pelo espírito de grupo demonstrado nas incontáveis horas de estudo e trabalho.
Aos meus pais pelas palavras incentivadoras. À minha família por compreender a minha ausência nesta fase de nossas vidas.

Resumo

Alguns livros didáticos do Ensino Médio trazem problemas envolvendo as potências de matrizes. As soluções desses problemas são apresentadas, geralmente, através de recorrências devido à limitação dos conteúdos abordados sobre matrizes e determinantes. Problemas mais interessantes são resolvidos com conhecimentos de Álgebra Linear como por exemplo autovalores, autovetores e diagonalizações de matrizes.

Este trabalho tem por finalidade propor uma nova abordagem na solução de problemas envolvendo potências de matrizes. Para isso, revemos algumas definições, propriedades e teoremas sobre matrizes e determinantes necessários à compreensão dos polinômios de matrizes, objeto deste trabalho.

Após a construção dessas bases, definimos o *polinômio característico*, primeiro passo na construção dos polinômios de matrizes. Apresentamos o Teorema de Cayley-Hamilton que nos dá a possibilidade de obter expressões polinomiais que envolvem potências de matrizes e definimos o polinômio mínimo, uma consequência desse Teorema.

Alicerçados nesses antecedentes propusemos algumas aplicações dos conteúdos estudados.

Palavras-chave: matrizes, determinantes, potências de matrizes, polinômios de matrizes, polinômio característico, Teorema de Cayley-Hamilton, polinômio mínimo.

Abstract

Some high-school textbooks present problems that use powers of matrices. These problems are usually solved using recurrences, due to a limitation of the content on matrices and determinants that is covered. Some of the more interesting problems are generally solved with an understanding of Linear Algebra, e.g., eigenvalues, eigenvectors and diagonalization of matrices.

This work proposes a new approach to the solution of problems involving powers of matrices. To this end, we review some definitions, properties and theorems about matrices and determinants that are required for the understanding of polynomials of matrices, the subject of this work.

After laying these foundations, we define the *characteristic polynomial*, the first step in the construction of polynomials of matrices. Introducing the Cayley-Hamilton theorem gives us the possibility of obtaining polynomial expressions that contain powers of matrices, and we define the *minimal polynomial*, a consequence of this theorem.

Building on these antecedents, some applications of the content studied are proposed.

Keywords: matrices, determinants, powers of matrices, matrix polynomials, characteristic polynomial, Cayley-Hamilton theorem, minimal polynomial.

Sumário

Introdução **1**

1 Determinantes **2**

1.1 Introdução 2

1.2 Definições 3

1.3 Propriedades 3

1.4 Teorema de Binet 10

1.5 Teorema de Cramer 15

2 Polinômios de matrizes **19**

2.1 Introdução 19

2.2 Polinômio característico 19

2.3 Teorema de Cayley-Hamilton 22

2.4 Polinômio mínimo 25

2.5 Aplicações 27

3 Sequência didática **34**

3.1 Introdução 34

3.2 Particularidades 34

3.3 Metodologia 34

4 Considerações Finais **39**

Referências Bibliográficas **40**

Introdução

É inquestionável a importância do estudo de matrizes e determinantes no Ensino Médio por serem amplamente utilizados na programação de computadores (imagens digitais, pixels etc.) e em várias áreas do Ensino Superior como engenharia, estatística e biotecnologia.

Encontramos nos livros didáticos, olimpídas de matemática e vestibulares alguns problemas que abordam as potências de matrizes. Os mais simples esperam que o estudante identifique um padrão conforme as potências aumentam.

Os polinômios de matrizes originários do Teorema de Cayley-Hamilton resolvem estes problemas de forma eficaz e eficiente retirando o empirismo das soluções que costumamos observar.

Doravante, este trabalho objetiva dar uma alternativa mais adequada e simples para a solução desses problemas. No *Capítulo* 1 lançamos as bases necessárias à confecção desse trabalho através de uma revisão de definições, propriedades e teoremas das matrizes e determinantes estudados no Ensino Médio. Em seguida, no *Capítulo* 2, definimos o polinômio característico, demonstramos o Teorema de Cayley-Hamilton e definimos o polinômio mínimo utilizando-os nas aplicações abordadas no final do capítulo através dos polinômios de matrizes. Encerramos, no *Capítulo* 3, com a apresentação de uma proposta de sequência didática para ser aplicada aos alunos do 2^o Ano do Ensino Médio. Para uma adequada compreensão desse tranbalho é importante que o leitor tenha o pleno domínio das operações de soma e de multiplicação de matrizes, principalmente, a percepção do fato de que, geralmente, o produto de matrizes não é comutativo. Tão importante quanto o descrito anteriormente é possuir um conhecimento geral do cálculo de determinantes. Isso pode ser obtido em (Iezzi and Hazzan, 1977).

Capítulo 1

Determinantes

1.1 Introdução

É interessante observar que embora matrizes, determinantes e sistemas lineares sejam abordados nesta ordem didática no Ensino Médio, historicamante não foi bem assim que estes conhecimentos surgiram.

A necessidade de processos práticos para resolução de sistemas lineares levaram ao surgimento dos determinantes. Para ilustrarmos como isso ocorreu acompanhe a solução do problema a seguir.

Seja S o sistema linear $\begin{cases} ax + by = c & (I) \\ dx + ey = f & (II) \end{cases}$ com { a, b, c, d, e, f} $\subset \mathbb{R}^*$, nas incógnitas x e y.

Para resolvê-lo basta multiplicarmos (I) por e e (II) por $-b$ obtendo $\begin{cases} aex + bey = ce \\ -bdx - bey = -bf \end{cases}$

Somando as duas equações obtemos $(ae - bd)x = ce - bf$

Analogamente, basta multiplicarmos (I) por $-d$ e (II) por a obtendo $\begin{cases} -adx - bdy = -cd \\ adx + aey = af \end{cases}$

Somando as duas equações obtemos $(ae - bd)y = af - cd$

Supondo $(ae - bd) \neq 0$ temos que $x = \frac{ce-bf}{ae-bd}$ e $y = \frac{af-cd}{ae-bd}$.

Assim, definiu-se um número associado à tabela $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$, formada pelos coeficientes das variáveis do sistema linear, como a diferença $ae - bd$.

1.2 Definições

Considere um conjunto $K \neq \emptyset$ munido de duas operações $+, \cdot$ satisfazendo as leis básicas da aritmética[1]. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ com elementos em K. Geralmente denota-se $\mathbb{M}(K, n)$ o conjunto das matrizes de ordem n com elementos em K. K é dito um corpo se todo $x \in K$, $x \neq 0$, possui um inverso multiplicativo, por exemplo, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$ são corpos, mas $\mathbb{Z}$ não.

Definição 1. Dados i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_{(i,j)}$ é a matriz obtida elimando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz A, de ordem, obviamente, $n - 1$.

Definição 2. O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, denotado $detA$ ou $|A|$, é um número real associado a esta matriz, tal que

$$detA = \begin{cases} a_{11},\ se\ n = 1 \\ a_{11} \cdot detA_{(1,1)} - a_{21} \cdot detA_{(2,1)} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot detA_{(n,1)},\ se\ n > 1 \end{cases}$$

Definição 3. O menor complementar de um elemento a_{ij} da matriz A, denotado D_{ij}, é o número $D_{ij} = detA_{(i,j)}$.

Definição 4. O cofator de um elemento a_{ij} da matriz A, denotado A_{ij}, é o número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot detA_{(i,j)}$. Logo, $detA = \begin{cases} a_{11},\ se\ n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1},\ se\ n > 1 \end{cases}$

1.3 Propriedades

Teorema 1. *Teorema de Laplace[2]: O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.*

Demonstração: *Por indução[3], temos:*

1^a *Parte.*

Vamos verificar que o teorema é válido para matrizes de ordem 2. Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

[1]Comutatividade da adição e da multiplicação, Associatividade da adição e da multiplicação, e a operação distributiva da multiplicação em relação à adição.

[2]Adaptado de (Iezzi and Hazzan, 1977)

[3]Para maiores informações sobre o assunto consulte (Neto, 2009)

Desenvolvendo pela 1^a *coluna:*

$a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} = a_{11} \cdot |a_{22}| + a_{21} \cdot (-1) \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = det\ M$

Desenvolvendo pela 2^a *coluna:*

$a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{12} \cdot (-1) \cdot |a_{21}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = det\ M$

Desenvolvendo pela 1^a *linha:*

$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot |a_{11}| + a_{12} \cdot (-1) \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = det\ M$

Desenvolvendo pela 2^a *linha:*

$a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{21} \cdot (-1) \cdot |a_{12}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = det\ M$

Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.

2^a *Parte.*

Admitamos que a propriedade seja válida para determinantes de ordem $(n-1)$ *e provemos que ela também é válida para determinantes de ordem* n. *Seja* M *uma matriz de ordem* $n > 2$. *Os menores complementares dos elementos de* M *serão determinantes de ordem* $(n-1)$. *Vamos usar o símbolo* D_{ij}^{kl} *para designar o determinante da matriz que se obtém, suprimindo as linhas* i *e* k *e as colunas* j *e* l *da matriz* M. *É claro que* D_{ij}^{kl} *é um determinante de ordem* $(n-2)$.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a_{1k}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \mathbf{a_{2k}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \mathbf{a_{nk}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Fixemos a coluna k *da matriz* M $(1 < k \leq n)$ *e calculemos o número*

$C = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + a_{3k} \cdot A_{3k} + \ldots + a_{nk} \cdot A_{nk}$

$C = a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot D_{1k} + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot D_{2k} + a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot D_{3k} + \ldots + a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D_{nk}$

Os determinantes $D_{1k}, D_{2k}, \ldots, D_{nk}$ *são de ordem* $(n-1)$. *Desenvolvendo-os pela* 1^a *coluna, temos:*

$$C = a_{1k}(-1)^{1+k} \left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{1k}^{i1}\right] + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \left[a_{11} \cdot D_{2k}^{11} + \sum_{i=3}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{2k}^{i1}\right] +$$

$$a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \left[a_{11} \cdot D_{3k}^{11} - a_{21} \cdot D_{3k}^{2i} + \sum_{i=4}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{3k}^{i1}\right] + \ldots +$$

$$+ a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \left[a_{11} \cdot D_{nk}^{11} - a_{21} \cdot D_{nk}^{21} + a_{31} \cdot D_{nk}^{31} - \ldots \pm a_{n-1,1} \cdot D_{nk}^{n-1,1}\right]$$

Na expressão de C, acima,

(i) tomemos as parcelas que contêm a_{11}. Temos:

$a_{11}\left[a_{2k}\cdot(-1)^{2+k}\cdot D_{2k}^{11}+a_{3k}\cdot(-1)^{3+k}\cdot D_{3k}^{11}+\ldots+a_{nk}\cdot(-1)^{n+k}\cdot D_{nk}^{11}\right]$

Como os determinantes D_{nk} são de ordem $(n-1)$, as potências de $(-1)^n$, $n>2$, podem ser reescritas como $(-1)^{n-2}$ e observando que $D_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & \mathbf{a_{2k}} & \cdots & a_{2n}\\ a_{32} & \cdots & \mathbf{a_{3k}} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nk}} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ *temos que:*

$a_{11}\left[a_{2k}\cdot(-1)^{k}\cdot D_{2k}^{11}+a_{3k}\cdot(-1)^{k+1}\cdot D_{3k}^{11}+\ldots+a_{nk}\cdot(-1)^{n+k-2}\cdot D_{nk}^{11}\right]=$

$a_{11}\cdot D_{11}$ *(por hipótese de indução).*

(ii) analogamente a (i) tomemos as parcelas que contêm a_{21}. Temos:

$a_{21}\left[a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}\cdot D_{1k}^{21}-a_{3k}\cdot(-1)^{3+k}\cdot D_{3k}^{21}-\ldots-a_{nk}\cdot(-1)^{n+k}\cdot D_{nk}^{21}\right]=$

$a_{21}\left[-a_{1k}\cdot(-1)^{k}\cdot D_{1k}^{21}-a_{3k}\cdot(-1)^{1+k}\cdot D_{3k}^{21}-\ldots-a_{nk}\cdot(-1)^{n+k-2}\cdot D_{nk}^{21}\right]=$

$-a_{21}\cdot D_{21}$ *(por hipótese de indução)*

(iii) tomemos as parcelas que contêm a_{31}. Temos:

$a_{31}\left[-a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}\cdot D_{1k}^{31}-a_{2k}\cdot(-1)^{2+k}\cdot D_{2k}^{31}+a_{4k}\cdot(-1)^{4+k}\cdot D_{4k}^{31}+\ldots+a_{nk}\cdot(-1)^{n+k}\cdot D_{nk}^{31}\right]=$

$a_{31}\left[a_{1k}\cdot(-1)^{k}\cdot D_{1k}^{31}+a_{2k}\cdot(-1)^{k+1}\cdot D_{2k}^{31}+a_{4k}\cdot(-1)^{k+2}\cdot D_{4k}^{31}+\ldots+a_{nk}\cdot(-1)^{n+k-2}\cdot D_{nk}^{31}\right]=$

$a_{31}\cdot D_{31}$ *(por hipótese de indução)*

Prosseguindo da mesma forma até obtermos as parcelas que contem a_{n1}, teremos:

$C=a_{11}\cdot D_{11}-a_{21}\cdot D_{21}+a_{31}\cdot D_{31}-\ldots\pm a_{n1}\cdot D_{n1}$, *isto é,*

$C=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}+\ldots+a_{n1}\cdot A_{n1}$

O que prova que $C=det\ M$, isto é, a propriedade é válida para qualquer coluna k, $(1<k\leq n)$.

Fixemos agora a 1^a linha de M, e calculemos o número

$L=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{1n}$, *temos:*

$L=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{11}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot D_{12}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot D_{13}+\ldots+a_{1n}\cdot(-1)^{1+n}\cdot D_{1n}$

Os determinantes $D_{11},D_{12},D_{13},\ldots,D_{1n}$ são de ordem $(n-1)$. Desenvolvendo-os pela 1^a coluna, *temos:*

$$L = a_{11} \cdot D_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{12}^{i1} \right] + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{13}^{i1} \right] + \ldots +$$

$$+(-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^i \cdot D_{1n}^{i1} \right]$$

Na expressão de L, acima,

(i) tomemos as parcelas que contêm a_{21}*, isto é, com* $i = 2$*. Temos:*

$a_{21} \left[(-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot D_{12}^{21} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot D_{13}^{21} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot D_{1n}^{21} \right]$

Como os determinantes D_{nk} *são de ordem* $(n-1)$*, as potências de* $(-1)^n$*,* $n > 1$*, podem ser reescritas como* $-(-1)^{n-1}$ *e observando que* $D_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1k}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{32} & \ldots & a_{3k} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *temos que:*

$a_{21} \left[-(-1)^2 \cdot a_{12} \cdot D_{12}^{21} - (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot D_{13}^{21} - \ldots - (-1)^n \cdot a_{1n} \cdot D_{1n}^{21} \right] =$

$-a_{21} \cdot D_{21}$ *(por hipótese de indução)*

(ii) tomemos as parcelas que contêm a_{31}*. Temos:*

$a_{31} \left[-a_{12} \cdot (-1)^3 \cdot D_{12}^{31} - a_{13} \cdot (-1)^4 \cdot D_{13}^{31} - \ldots - a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot D_{1n}^{31} \right] =$

$a_{31} \left[a_{12} \cdot (-1)^2 \cdot D_{12}^{31} + a_{13} \cdot (-1)^3 \cdot D_{13}^{31} + \ldots + a_{1n} \cdot (-1)^n \cdot D_{1n}^{31} \right] =$

$a_{31} \cdot D_{31}$ *(por hipótese de indução)*

Prosseguindo da mesma forma até obtermos as parcelas que contem a_{n1}*, teremos:*

$L = a_{11} \cdot D_{11} - a_{21} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot D_{31} - \ldots \pm a_{n1} \cdot D_{n1}$*, isto é,*

$L = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \ldots + a_{n1} \cdot A_{n1}$

O que prova que $L = det\ M$*, isto é, a propriedade é válida para a* 1^a *linha.*

Com raciocínio análogo ao que fizemos para as colunas, podemos provar que a propriedade é válida para a linha i $(1 < i \leq n)$*, já que é valida para a* 1^a*linha. Com isto, concluímos que o teorema é válido para matrizes de ordem* $n \geq 2$ ∎

Propriedade 1. [4] Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) obteremos uma nova matriz M' tal que $det\ M' = -det\ M$

[4] Segundo (Iezzi and Hazzan, 1977).

Demonstração: Por indução temos:

1^a Parte.

Provemos que a propriedade vale para $n = 2$

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, logo $det\ M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Trocando de posição as linhas, obtemos:

$M' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, logo $det\ M' = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -det\ M$.

Trocando de posição as colunas, obtemos:

$M" = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$, logo $det\ M" = a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11} = -det\ M$.

2^a Parte.

Admitamos que a propriedade seja válida para matrizes de ordem $(n-1)$ e provemos que ela será válida para matrizes de ordem n. Seja D_{ij} o determinante obtido excluindo-se a linha i e a coluna j da matriz M.

Tomemos a linha i, admitindo que ela não seja nenhuma das duas que tenham sido trocadas de posição. Desenvolvendo $det\ M$ e $det\ M'$ por esta linha, temos:

$$det\ M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \ e \ det\ M' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A'_{ij}$$

Como cada cofator A'_{ij} é obtido de A_{ij} trocando de posição duas linhas e, por hipótese de indução, $D'_{ij} = -D_{ij},\ \forall j \ \in \ \{1, 2, \ldots, n\}$ e, então, $det\ M' = -det\ M$

Para troca de posição de duas colunas a demosntração é análoga. ∎

Propriedade 2. [5] Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então $det\ M = 0$.

Demonstração: Suponhamos que as linhas de índices i e k sejam formadas por elementos respectivamente iguais, isto é, $a_{ij} = a_{kj},\ \forall j \ \in \ \{1, 2, \ldots, n\}$.

De acordo com a *Propriedade* 1, se trocarmos de posição estas duas linhas, obteremos uma nova matriz M' tal que $det\ M' = -det\ M$. (I)

Por outro lado $M' = M$, pois as filas paralelas trocadas são iguais.

Logo $det\ M' = det\ M$. (II)

[5] Segundo (Iezzi and Hazzan, 1977).

Substituindo (II) em (I) concluímos que

$$det\ M = -det\ M \Rightarrow 2det\ M = 0 \Rightarrow det\ M = 0$$

O caso de duas colunas iguais é demonstrado de forma análoga. ∎

Teorema 2. *Teorema de Cauchy[6]: A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz M, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela é igual a zero.*

Demonstração: *Seja* $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Substituindo em M a s'ésima linha pela r'ésima, obteremos a matriz $M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{r1}} & \mathbf{a_{r2}} & \mathbf{a_{r3}} & \cdots & \mathbf{a_{rn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Pela Propriedade 2, $det\ M' = 0$

Desenvolvendo $det\ M'$ *pela s'ésima linha,*

$$det\ M' = a_{r1} \cdot A_{s1} + a_{r2} \cdot A_{s2} + a_{r3} \cdot A_{s3} + \ldots + a_{rn} \cdot A_{sn} = 0$$

Observe que os cofatores dos elementos da s'ésima linha de M, são os mesmos que os da s'ésima linha de M'.

A demonstração é análoga se tomarmos em M duas colunas. ∎

[6]Adaptado de (Iezzi and Hazzan, 1977).

Propriedade 3. [7]Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por k, $k \in \mathbb{R}$, o determinante da nova matriz M' será o produto de k pelo determinante de M, isto é, $det(M') = k \cdot det(M)$.

Demonstração:

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & k \cdot a_{i3} & \dots & k \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Desenvolvendo $det(M)$ e $det(M')$ pela i 'ésima linha temos:

$det(M) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \ldots + a_{n1} \cdot A_{n1} \qquad (I)$

$det(M') = k \cdot a_{11} \cdot A_{11} + k \cdot a_{21} \cdot A_{21} + k \cdot a_{31} \cdot A_{31} + \ldots + k \cdot a_{n1} \cdot A_{n1} \qquad (II)$

De (I) e (II), concluímos que $det(M') = k \cdot det(M)$.

A demonstração seria análoga no caso de uma coluna multiplicada por um $k \in \mathbb{R}$ ∎

Propriedade 4. [8]Seja M uma matriz de ordem n, onde os elementos da j 'ésima coluna são tais que:

$\begin{array}{l} a_{1j} = b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} = b_{2j} + c_{2j} \\ a_{3j} = b_{3j} + c_{3j} \\ \quad\vdots \\ a_{nj} = a_{nj} + a_{nj} \end{array}$, isto é $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} + c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} + c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_{ij} + c_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} + c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ então teremos:

$det(M) = det(M') + det(M")$ onde M' é a matriz que se obtém de M, substituindo-se os elementos a_{ij} da j 'ésima coluna, pelos elementos b_{ij}, $(1 \leq i \leq n)$ e $M"$ é a matriz que se obtém de M, substituindo-se os elementos da j 'ésima coluna pelos elementos c_{ij}, $(1 \leq i \leq n)$. Isto é,

[7]Segundo (Iezzi and Hazzan, 1977).
[8]Segundo (Iezzi and Hazzan, 1977).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j}+c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j}+c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & b_{ij}+c_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj}+c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & +c_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & +c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração: Notemos que os cofatores dos elementos da j ′ésima coluna de M são os mesmos que os j ′ésima coluna de M' e M". Desenvolvendo o determinante de M pela j ′ésima coluna temos:

$$det(M) = (b_{1j}+c_{1j})\cdot A_{1j} + (b_{2j}+c_{2j})\cdot A_{2j} + (b_{3j}+c_{3j})\cdot A_{3j} + \ldots + (b_{nj}+c_{nj})\cdot A_{nj}$$

$$det(M) = \underbrace{(b_{1j}\cdot A_{1j} + b_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + b_{nj}\cdot A_{nj})}_{\text{det(M')}} + \underbrace{(c_{1j}\cdot A_{1j} + c_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + c_{nj}\cdot A_{nj})}_{\text{det(M")}}$$

$$det(M) \ = det(M') \ + det(M")$$

A demonstração onde as adições aparecem em uma mesma linha é análoga. ∎

1.4 Teorema de Binet

Teorema 3. *Teorema de Binet*[9]*:* $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$*.*

Demonstração: *Por indução temos:*

1^a *Parte.*

Provemos que a propriedade vale para $n = 2$*. Seja*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ eB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

.

$$det(A\cdot B) = det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

[9]Adaptado de (Kaplan and Lewis, 1974).

Pela Propriedade 4 *temos que*

$$det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

Pelas Propriedades 1, 2 *e* 3 *temos*

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}}_{0}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}}_{0}=$$

$$a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=det(A)\cdot det(B).$$

2^a *Parte.*

Admitamos que a propriedade seja válida para matrizes de ordem $(n-1)$ *e provemos que ela será válida para matrizes de ordem* n.

$$\text{Seja } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$$detAB=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\ldots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\ldots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn}\end{vmatrix}$$

Pela Propriedade 3 *e pelo Teorema* 1 (*Teorema de Cauchy*) *aplicado à primeira linha temos que* $det(AB)=$

$$a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+a_{1n}\begin{vmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(I)$$

No primeiro determinante, multiplicamos a primeira linha por a_{21} *e subtraímos da segunda linha eliminando os elementos da forma* $a_{21}b_{1n}$*. Multiplicamos a primeira linha por* a_{31} *e subtraímos da terceira eliminando os elementos da forma* $a_{31}b_{1n}$*. Seguindo o mesmo raciocínio na enésima linha eliminaremos os elementos da forma* $a_{n1}b_{1n}$*. O determinante resultante será:*

$$a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{22}b_{2n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nn}b_{n1} & a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n2}b_{2n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (II)$$

No segundo determinante, multiplicamos a primeira linha por a_{22} *e subtraímos da segunda linha eliminando os elementos da forma* $a_{22}b_{2n}$*. Multiplicamos a primeira linha por* a_{32} *e subtraímos da terceira eliminando os elementos da forma* $a_{32}b_{2n}$*. Seguindo o mesmo raciocínio eliminaremos na enésima linha os elementos da forma* $a_{n2}b_{2n}$*. O determinante resultante será:*

$$a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ a_{21}b_{11}+a_{23}b_{31}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{23}b_{32}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n3}b_{31}+\dots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n3}b_{32}+\dots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \quad (III)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os demais determinantes, o enésimo determinante resultante será:

$$a_{1n}\begin{vmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+\ldots+a_{2\ n-1}b_{n-1\ 1} & a_{21}b_{12}+\ldots+a_{2\ n-1}b_{n-1\ 2} & \dots & a_{21}b_{1n}+\ldots+a_{2\ n-1}b_{n-1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{n\ n-1}b_{n-1\ 1} & a_{n1}b_{12}+\ldots+a_{n\ n-1}b_{n-1\ 2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{n\ n-1}b_{n-1\ n} \end{vmatrix} \quad (IV)$$

Sejam $A_{(m,n)}$ e $B_{(m,n)}$ as matrizes A e B eliminando-se a linha m e a coluna n. O menor complementar em (II), de b_{11}, é o determinante do produto das matrizes $A_{(1,1)}$ e $B_{(1,1)}$ de ordem $n-1$. Obviamente, $detA_{(1,1)}$ e $detB_{(1,1)}$ são os menores complementares de a_{11} e b_{11} das matrizes A e B, respectivamente. Por hipótese de indução $det(A_{(1,1)}B_{(1,1)}) = detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,1)}$, e consequentemente o menor complementar de $b_{11} = detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,1)}$.

Da mesma forma o menor complementar,em (II), de b_{12} é o determinante do produto das matrizes $A_{(1,1)}$ e $B_{(1,2)}$ de ordem $n-1$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{22}b_{2n}+\ldots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}b_{22}+\ldots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n2}b_{2n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Consequentemente, o menor complementar de $b_{12} = detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,2)}$.

Da mesma maneira o menor complementar de $b_{13} = detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,3)}$ e de forma geral $b_{1n} = detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,n)}$.

No segundo determinante, em (III), o menor complementar de $b_{21} = det(A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21}b_{12}+a_{23}b_{32}+\ldots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+a_{23}b_{3n}+\ldots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{12}+a_{n3}b_{32}+\ldots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n3}b_{3n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Logo, $b_{21} = det(A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)}) = det(A_{(1,2)}) \cdot det(B_{(2,1)})$.

Da mesma maneira o menor complementar de $b_{22} = detA_{(1,2)} \cdot detB_{(2,2)}$ e de forma geral

$b_{2n} = detA_{(1,2)} \cdot detB_{(2,n)}$.

Consequentemente, conclui-se de I, II, III e IV que $det(AB)$ é igual a

$a_{11}(b_{11}detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,1)} - b_{12}detA_{(1,1)} \cdot detB_{(1,2)} + \ldots) + a_{12}(b_{21}detA_{(1,2)} \cdot detB_{(2,1)} - b_{22}detA_{(1.2)} \cdot detB_{(2,2)} + \ldots) + \ldots + a_{1n}(b_{n1}detA_{(1,n)} \cdot detB_{(n,1)} - b_{n2}detA_{(1,n)} \cdot detB_{(n,2)} + \ldots) =$

$= a_{11}detA_{(1,1)}(b_{11}detB_{(1,1)} - b_{12}detB_{(1,2)} + \ldots) - a_{12}detA_{(1,2)}(-b_{21}detB_{(2,1)} + b_{22}detB_{(2,2)} + \ldots) + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{(1,n)}((-1)^{n+1}b_{n1}detB_{(n,1)} + (-1)^{n+2}b_{n2}detB_{(n,2)} + \ldots)$

Na matriz B temos que $(b_{11}detB_{(1,1)} - b_{12}detB_{(1,2)} + \ldots) = (-b_{21}detB_{(2,1)} + b_{22}detB_{(2,2)} + \ldots) = \ldots = ((-1)^{n+1}b_{n1}detB_{(n,1)} + (-1)^{n+2}b_{n2}detB_{(n,2)} + \ldots) = detB$

Portanto, $det(AB) = a_{11}detA_{(1,1)}detB - a_{12}detA_{(1,2)}detB + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{(1,n)}detB =$

$= (a_{11}detA_{(1,1)} - a_{12}detA_{(1,2)} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{(1,n)})detB = (detA)(detB)$ ∎

Corolário 1. *Se $A \in \mathbb{M}(K, n)$ é uma matriz inversível então $det(A) \in K$ é um elemento inversível.*

Demonstração: *Como A é uma matriz inversível então existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Pelo Teorema* 3 − *Teorema de Binet,* $det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I) \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. *Portanto, $det(A)$ é um elemento inversível de K.* ∎

Observação 1. O resultado anterior não exige que K seja um corpo.

Exemplo 1.4.1. CONCURSO DE ADMISSÃO AO CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO − INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA − IME 2009

Seja A uma matriz inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

a) -81 b) -27 c) -3 d) 27 e) 81

Solução:

Supondo $K = \mathbb{R}$, se A é inversível então $det(A) \neq 0$. $(A^4 + 3A^3) = O_4 \Rightarrow A^4 = -3A^3 \Rightarrow det(A^4) = det(-3A^3)$

Pelo *Teorema* 3 (*Teorema de Binet*), $det(A^4) = det(A \cdot A^3) = det(A) \cdot det(A^3) = \ldots = det^4(A)$

Pela *Propriedade* 3, $det(-3A^3) = (-3)^4 det(A^3)$. Pelo *Teorema* 3 (*Teorema de Binet*), $det(A^3) = det(A \cdot A^2) = det(A) \cdot det(A^2) = \ldots = det^3(A)$. Portanto, $det(-3A^3) = (-3)^4 det^3(A) = 81det^3(A)$

Logo, se $det(A^4) = det(-3A^3) \Rightarrow det^4(A) = 81det^3(A) \Rightarrow det^4(A) - 81det^3(A) = 0 \Rightarrow$

$$det^3(A)[det(A) - 81] = 0 \begin{cases} det^3(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0 \ impossível, pois \ A \text{ é } inversível. \\ det(A) - 81 = 0 \Rightarrow det(A) = 81. \end{cases}$$

Alternativa E.

1.5 Teorema de Cramer

Segundo (Boyer, 1996) a Regra de Cramer, publicada em 1750, tem uma ideia similar ao que apresentamos na introdução do *Capítulo* 1. Rompendo paradigmas preferimos fazer uma abordagem diferente da apresentada nos livros didáticos como pode-se observar a seguir.

Definição 5. Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de matriz dos cofatores de M, e indicamos por M', a matriz que se obtém de M, substituindo cada elemento de M por seu cofator.

Assim, se $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$

Definição 6. Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M, definida anteriormente. Chamamos de matriz adjunta de M, e indicamos por $\overline{M}$, à transposta da matriz M', isto é, $\overline{M} = (M')^t$.

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $B_{ij} = A_{ji} \begin{cases} \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\} \\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$

Teorema 4. *Teorema de Cramer*[10]*: Se M é a matriz quadrada de ordem n e I_n é a matriz identidade de ordem n, então $M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = det\ (M) \cdot I_n$.*

Demonstração: *Seja $M \cdot \overline{M} = (b_{ik})$. Onde*

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj}$$

Pelo Teorema de Laplace, se $i = k \Rightarrow b_{ik} = det\ (M)$.

[10]Adaptado de (Iezzi and Hazzan, 1977).

Pelo Teorema de Cauchy se $i \neq k \Rightarrow b_{ik} = 0$. *Logo,* $M \cdot \overline{M}$, *é a matriz diagonal.*

$$\begin{bmatrix} det\ M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & det\ M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & det\ M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & det\ M \end{bmatrix} = det\ (M) \cdot I_n$$

Portanto,

$$M \cdot \overline{M} = det\ (M) \cdot I_n \qquad (I)$$

Analogamente, seja $\overline{M} \cdot M = (c_{ik})$. *Onde*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot a_{jk}$$

Pelo Teorema de Laplace, se $i = k \Rightarrow c_{ik} = det(M)$.

Pelo Teorema de Cauchy se $i \neq k \Rightarrow c_{ik} = 0$. *Logo,* $\overline{M} \cdot M$, *é a matriz diagonal.*

$$\begin{bmatrix} det\ M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & det\ M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & det\ M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & det\ M \end{bmatrix} = det\ (M) \cdot I_n$$

Portanto,

$$\overline{M} \cdot M = det\ (M) \cdot I_n \qquad (II)$$

De (I) *e* (II) *concluímos que* $M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = det(M) \cdot I_n$. ∎

O Teorema de Cramer é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio como descreveremos a seguir[11].

Consideremos um sistema linear S *onde o número de equações é igual ao número de incógnitas.*

[11] Adaptado de (Iezzi and Hazzan, 1977).

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

O sistema S pode ser escrito na forma matricial $A \cdot X = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} e\ C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Seja $\overline{A}$ a matriz de adjunta de A. Como $A \cdot X = C$, temos, pelo $Teorema\ 4$ ($Teorema\ de\ Cramer$):

$$\overline{A} \cdot A \cdot X = \overline{A} \cdot C \Rightarrow det(A) \cdot I_n \cdot X = \overline{A} \cdot C \Rightarrow det(A) \cdot X = \overline{A} \cdot C$$

$$\begin{bmatrix} det(A) \cdot x_1 \\ det(A) \cdot x_2 \\ det(A) \cdot x_3 \\ \vdots \\ det(A) \cdot x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se $det(A) \neq 0$, então $X = \frac{1}{det(A)}\overline{A} \cdot C$. Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

logo, fazendo $det(A) = D$, então, $x_i = \frac{1}{D}(A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + A_{3i} \cdot b_3 + \ldots + A_{ni} \cdot b_n)$

Seja D_i o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a $i\,'$ésima coluna pela coluna dos *termos independentes das equações do sistema. Assim*

$$x_i = \frac{1}{D} \cdot D_i = \frac{D_i}{D}$$

Corolário 2. *Seja A uma matriz quadrada com elementos em K, $A \in \mathbb{M}(K,\ n)$ e $det(A) \in K$ seu determinante, então A é uma matriz inversível em $\mathbb{M}(K,\ n)$ se, e somente se, $det(A)$ é inversível em K.*

Demonstração: *A é uma matriz inversível em $\mathbb{M}(K,\ n)$, então pelo Corolário 1 $det(A)$ é inversível em K.*

Analogamente, se $det(A)$ é inversível em K então pelo Teorema 4 (Teorema de Cramer) $A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = det(A) \cdot I_n$, e $A \cdot \left(\frac{1}{det(A)} \cdot \overline{A}\right) = \left(\frac{1}{det(A)} \cdot \overline{A}\right) \cdot A = I_n$, então A é uma matriz inversível em $\mathbb{M}(K,\ n)$. ∎

Exemplo 1.5.1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(\mathbb{Z},\ 2)$ Como $det(A) = 1$ então A é uma matriz inversível em $\mathbb{M}(\mathbb{Z},\ 2)$. De fato, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 1.5.2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(\mathbb{Z},\ 2)$ Como $det(A) = 2$ não é inversível em $\mathbb{Z}$ então A **não** é uma matriz inversível em $\mathbb{M}(\mathbb{Z},\ 2)$.

Por outro lado A pode ser considerada uma matriz em $\mathbb{M}(\mathbb{Q}, 2)$ e como $det(A) = 2$ é inversível em $\mathbb{Q}$ temos que A é inversível em $\mathbb{M}(\mathbb{Q}, 2)$, de fato, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Capítulo 2

Polinômios de matrizes

2.1 Introdução

Para efeito deste capítulo considere, indistintamente, K um dentre os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Observamos que no capítulo anterior K não era necessariamente um corpo.

Definição 7. Seja $f \in (K[x] \setminus 0)$ e $a_i \in K, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Dado $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M(K, n \times n)$ definimos $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$ o polinômio matricial de A aplicado em f onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

2.2 Polinômio característico

Sejam[1] $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $X = (x_{ij})_{n\times 1}$ matrizes que satisfazem a equação matricial $A \cdot X = \lambda \cdot X$ $(\lambda \in K)$. Logo, temos:

$$A \cdot X - \lambda \cdot X = (A - \lambda \cdot I)X = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

[1] Adaptado de (Frank, 1971).

O sistema de equações homogêneas formado admite soluções não triviais se, e somente se,

$$det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

O desenvolvimento desse determinante dá-nos um polinômio $\Delta(\lambda)$ de grau n em λ, chamado **polinômio característico** da matriz A. A equação $\Delta(\lambda) = 0$ é chamada equação característica de A e suas raízes complexas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, são chamadas de raízes características de A. Se $\lambda = \lambda_i$ é uma raiz característica então $(A - \lambda I)X = 0$ admite soluções não triviais.

Observação 2. Os termos de $A - \lambda I$ são polinômios, elementos de $\mathbb{K}[\lambda]$.

Observação 3. Seja $\Delta(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ o polinômio característico da matriz A. O coeficiente α_n de $\Delta(\lambda)$ é igual ao determinante da matriz A.

Demonstração: $\Delta(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$.

Basta tomar $\lambda = 0$, então $det(A - 0 \cdot I) = 0^n + \alpha_1 0^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} 0 + \alpha_n$.

Logo, $detA = \alpha_n$. ∎

Exemplo 2.2.1. CONCURSO DE ADMISSÃO AO CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO – INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA – IME 2009

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $-\binom{n}{n-i+1}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e $det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $det(x \cdot I - A) = 0$.

Solução:

Seja $M = (x \cdot I - A) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{bmatrix}$

Aplicando o *Teorema* 1 (*Teorema de Laplace*) à primeira linha de M obtemos os determinantes de ordem $n-1$ abaixo:

$$det(M) = x \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} + \binom{n}{n}(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$, pois é o determinante de uma matriz triangular,

temos que $det(M) = x(-1)^2 \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} + \binom{n}{n}(-1)^{2n}$, então $det(M) =$

$$x \left(x(-1)^2 \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \right) + \binom{n}{n}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}$, pois é o determinante de uma matriz triangular, temos que $det(M) = x^2 \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}$

Sequindo o mesmo raciocínio concluímos que

$det(M) = x^{n-2} \begin{vmatrix} x & \binom{n}{2} \\ -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2 + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} =$

$x^{n-2}\left[x^2 + x\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2 + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} =$

$x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2 + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} = (x+1)^n$

Então a equação $det(x \cdot I - A) = 0$ pode ser substituída por $det(x \cdot I - A) = (x+1)^n = 0$ cuja solução $(x = -1)$ tem multiplicidade n.

2.3 Teorema de Cayley-Hamilton

Lema 5. *Considere a seguinte equação polinomial com coeficiente matriciais* $A_n\lambda^m + A_{n-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0 = O_n$ [2], $A_K = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n} \in \mathbb{M}(\mathbb{K}, n)$. *Se a equação é satisfeita para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K}$ *um corpo infinito). Então* $A_j = 0$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$

Demonstração: *Vamos considerar os elementos posicionados na primeira linha, primeira coluna das matrizes* A_j. *Como* $a_{11}^{(n)}\lambda^m + a_{11}^{(n-1)}\lambda^{m-1} + \ldots + a_{11}^{(1)}\lambda + a_{11}^{(0)} = 0$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$, *como* $\mathbb{K}$ *é infinito, então* $a_{11}^{(k)} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. *Analogamente,* $a_{ij}^{(n)}\lambda^m + a_{ij}^{(n-1)}\lambda^{m-1} + \ldots + a_{ij}^{(1)}\lambda + a_{ij}^{(0)} = 0$ *e para* $\mathbb{K}$ *infinito temos* $a_{ij}^{(n)} = 0$ $\forall i, j, n$. ∎

Teorema 6. [3]*Seja* $A \in \mathbb{M}(\mathbb{K}, n)$ *uma matriz quadrada de ordem* n *com matriz característica* $(A - \lambda I) \in \mathbb{M}(\mathbb{K}[\lambda], n)$ *e equação característica* $\Delta(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$. *Então,*

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = O_n$$

isto é toda matriz A *satisfaz sua equação característica.*

Demonstração: [4] *Considere a matriz* $\overline{(A - \lambda I)}$ *(conforme a Definição 6, a matriz adjunta formada pelos cofatores obtidos ao retirar-se de* $(A - \lambda I)$ *uma linha e uma coluna), com elementos*

[2]Matriz nula de ordem n.
[3]Adaptado de (Frank, 1971), (UNICAMP, 2013a) e (UNICAMP, 2013b).
[4]Adaptado de (UNICAMP, 2013b).

cuja maior potência em λ *é* λ^{n-1}. *Assim, pode-se escrever*

$$\overline{(A-\lambda I)} = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n \qquad (I)$$

sendo B_i $(1 \leq i \leq n)$ *matrizes* $(n \times n)$ *constantes (isto é, independentes de* λ*) a determinar. Por outro lado, pelo Teorema* 4 *(Teorema de Cramer), para todo* $\lambda \in K$*, temos:*

$$(A-\lambda I)\overline{(A-\lambda I)} = det(A-\lambda I)I \qquad (II)$$

Substituindo I *em* II *temos*

$$(A-\lambda I)(B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n) = det(A-\lambda I)I$$

$$-B_1\lambda^n + (AB_1 - B_2)\lambda^{n-1} + (AB_2 - B_3)\lambda^{n-2} + \ldots + (AB_{n-1} - B_n)\lambda + AB_n = det(A-\lambda I)I$$

Substituindo o plinômio característico em $det(A-\lambda I)\cdot I$

$$-B_1\lambda^n + (AB_1 - B_2)\lambda^{n-1} + (AB_2 - B_3)\lambda^{n-2} + \ldots + (AB_{n-1} - B_n)\lambda + AB_n =$$

$$\lambda^n I + \alpha_1\lambda^{n-1}I + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda I + \alpha_n I$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em λ*, pelo Lema* 5*, temos:*

$$\begin{array}{rcl} -B_1 & = & I \\ AB_1 - B_2 & = & \alpha_1 I \\ AB_2 - B_3 & = & \alpha_2 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ AB_{n-1} - B_n & = & \alpha_{n-1} I \\ AB_n & = & \alpha_n I \end{array}$$

Multiplicando a primeira equação por A^n*, a segunda por* A^{n-1}*, e as demais iésimas linhas por*

$A^{n-(i-1)}$, *obtemos*

$$\begin{array}{rclcrcl}
-A^nB_1 & = & A^nI & & -A^nB_1 & = & A^n \\
A^{n-1}(AB_1-B_2) & = & A^{n-1}\alpha_1 I & & A^nB_1-A^{n-1}B_2 & = & \alpha_1 A^{n-1} \\
A^{n-2}(AB_2-B_3) & = & A^{n-2}\alpha_2 I & & A^{n-1}B_2-A^{n-2}B_3 & = & \alpha_2 A^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \Rightarrow & \vdots & \vdots & \vdots \\
A^1(AB_{n-1}-B_n) & = & A^1\alpha_{n-1}I & & A^2B_{n-1}-AB_n & = & \alpha_{n-1}A \\
AB_n & = & \alpha_n I & & AB_n & = & \alpha_n I
\end{array}$$

Note que a soma dos elementos da última coluna(à direita nas equações), é igual a $\Delta(A)$ *pelo Teorema 6. Já a soma dos termos à esquerda, na terceira coluna, será:*

$$(-A^nB_1+A^nB_1)+(-A^{n-1}B_2+A^{n-1}B_2)+(-A^{n-2}B_3+A^{n-2}B_3)+\ldots+$$

$$+(-A^2B_{n-1}+A^2B_{n-1})+(-AB_n+AB_n)=O_n$$

Logo, $\Delta(A)=O_n$. ∎

Exemplo 2.3.1. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$. Calcule A^{2013}.

Solução:

O polinômio característico da matriz A é $\Delta(\lambda)=det(A-\lambda\cdot I)=\begin{bmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&2\\0&2&-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^3+4\lambda$

Logo, $\Delta(A)=-A^3+4A=0\Rightarrow A^3=4A$

Assim, $A^3=4A\Rightarrow A^5=4A^3=16A\Rightarrow A^7=16A^3=64A\Rightarrow A^k=4^{\frac{k-1}{2}}A$ (k ímpar).

Por indução temos:

Para $k=3\Rightarrow A^3=4^{\frac{3-1}{2}}A\Rightarrow A^3=4A$, logo a propriedade é válida para $k=3$.

Supondo a propriedade válida para k, $A^k=4^{\frac{k-1}{2}}A\Rightarrow A^k\cdot A^2=4^{\frac{k-1}{2}}A\cdot A^2=4^{\frac{k-1}{2}}A^3=4^{\frac{k-1}{2}}\cdot 4A=4^{\frac{k+1}{2}}A$.

Logo, $A^{k+2}=4^{\frac{k+1}{2}}A$ e a propriedade é válida para $k+2$.

Portanto, $A^{2013}=4^{\frac{2013-1}{2}}A=4^{1006}\cdot A=2^{2012}\cdot A$

$$A^{2013} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2013} \\ 0 & 2^{2013} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Polinômio mínimo

Seja $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M(\mathbb{K}, n \times n)$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton existe um polinômio $f \in (\mathbb{K}[x] \setminus 0)$ tal que $f(A) = 0_n \in M$.

Definição 8. [5] O polinômio mônico[6] de menor grau tal que $f(A) = 0_n$ é chamado polinômio mínimo de A.

Proposição 1. *Seja A uma matriz de ordem n e $m_A(x) \in K$ seu polinômio mínimo. Se $f(x) \in K$ é um polinômio tal que $f(A) = 0_n$ então $m_A(x)|f(x)$. Em particular, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $m_A(x)|\Delta(\lambda)$, onde $\Delta(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz A.*

Demonstração: *Ao realizarmos a divisão euclidiana de $f(x)$ por $m(x)$ vamos obter um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$. Consequentemente,*

$$f(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x) \Leftrightarrow r(x) = f(x) - m(x) \cdot q(x)$$

com o grau de $r(x)$ menor que o grau de $m(x)$ ou $r(x) = 0$. Se $r(x)$ não é o polinômio nulo, então, avaliando o polinômio $r(x)$ em A temos $r(A) = f(A) - m(A) \cdot q(A)$.
Como $f(A) = m(A) = 0_n$, então $r(A) = 0_n - 0_n \cdot q(A) = 0_n$, mas isso é um absurdo pela minimilidade do grau de $m(x)$, e portanto, $m_A(x)|f(x)$. ∎

Proposição 2. *Seja A uma matriz de ordem n. Se existir $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio tal que $f(A) = 0_n$ e $a_0 \neq 0$, então A é inversível.*

Demonstração: *Como $f(A) = 0_n$, então $f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I = 0_n$. Assim*

$$A(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_2A + a_1I) = -a_0I, \text{ como } a_0 \neq 0$$

$$\frac{1}{-a_0} \cdot A(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_2A + a_1I) = I$$

[5] Adaptado de (UNICAMP, 2013a).
[6] Polinômio cujo coeficiente do termo de maior grau é unitário.

$$A\left[\frac{1}{-a_0}\cdot(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_2A+a_1I)\right]=I$$

Logo

$$A^{-1}=\frac{1}{-a_0}\cdot(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_2A+a_1I)$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.4.1. CONCURSO DE ADMISSÃO AO CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO – INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA – IME 2003

Considere uma matriz A, $n\times n$, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3=k\cdot A$, prove que a matriz $A+I$ é invertível, onde I é a matriz identidade $n\times n$.

Solução:

Seja $M=A+I$, então $A=M-I$. Como $A^3=k\cdot A$, então $(M-I)^3=k(M-I)$.

Assim $M^3-3M^2+3M-I^3=kM-kI\Rightarrow M^3-3M^2+(3-k)M+(k-1)I=0$.

Logo, $f(x)=x^3-3x^2+(3-k)x+(k-1)=0$ é um polinômio tal que $f(M)=0_n$.

Como $k\neq 1\Rightarrow(k-1)\neq 0$ e, então, pela *Proposição* 2 $M=A+I$ é invertível.

Em particular, $M\left[\frac{1}{1-k}\left(M^2-3M+(3-k)I\right)\right]=I$ e $M^{-1}=(A+I)^{-1}=\left[\frac{1}{1-k}\left(M^2-3M+(3-k)I\right)\right]$.

Proposição 3. *Seja A uma matriz de ordem n. A é inversível em $\mathbb{M}(\mathbb{K},\, n)$ se, e somente se, $det(A)$ é inversível em $\mathbb{K}$.*

Demonstração: *A é inversível, então $A\cdot A^{-1}=I$, e $det(A\cdot A^{-1})=detI$.*

Pelo Teorema 3 (Teorema de Binet), $det(A\cdot A^{-1})=detA\cdot detA^{-1}=1$, logo $detA$ é inversível em $\mathbb{K}$.

Reciprocamente, pelo Teorema de Cayley-Hamilton $A^n+\alpha_1A^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI=O_n$

Logo, $A^n+\alpha_1A^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}A=-\alpha_nI$

Pela Observação 3 $\alpha_n=detA$. Como $detA$ é inversível em $\mathbb{K}$,

$$A(A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}I)=-detA\cdot I\Rightarrow A\left[\frac{A^{n-1}+\alpha_1A^{n-2}+\ldots+\alpha_2A+\alpha_{n-1}I}{-detA}\right]=I$$

Logo,

$$A^{-1}=\frac{\alpha_nA^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\ldots+\alpha_2A+\alpha_1I}{-detA}$$

$\blacksquare$

Proposição 4. *Seja A uma matriz inversível de ordem n, polinômio característico $\Delta(\lambda)=$*

$det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ e $m_A(\lambda) \in K$ seu polinômio mínimo. Se β_m é o termo independente de $m_A(\lambda)$, então $\beta_m \neq 0$

Demonstração: *Pela Observação 3 $\alpha_n = detA$. Como A é inversível, então $\alpha_n \neq 0$.*

Pela Proposição 1, $m_A(\lambda)|\Delta(\lambda)$, logo $\Delta(\lambda) = m_A(\lambda) \cdot q(\lambda)$. (I)

Considere $m_A(\lambda) = \lambda^m + \beta_1\lambda^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\lambda + \beta_m$ e

$q(\lambda) = \lambda^{n-m} + \gamma_1\lambda^{n-m-1} + \ldots + \gamma_{n-m-1}\lambda + \gamma_{n-m}$.

De I concluímos que $\alpha_n = \beta_m \cdot \gamma_{n-m}$. Como $\alpha_n \neq 0$, então $\beta_m \neq 0$. ∎

2.5 Aplicações

Vejamos alguns exemplos de aplicação dos polinômios de matrizes.

Exemplo 2.5.1. XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – Primeira Fase – Nível Universitário (2004).

Considere a matriz complexa $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule A^{2004}.

Solução:

O polinômio característico da matriz A é $\Delta(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & i \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ i & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$

$-\lambda(1-\lambda)^2 - \lambda = -\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda$

Logo, $\Delta(A) = -A^3 + 2A^2 - 2A = 0 \Rightarrow A^3 = 2A^2 - 2A$

Assim, $A^4 = 2A^3 - 2A^2$ e $A^4 = 2(2A^2 - 2A) - 2A^2 \Rightarrow A^4 = 2A^2 - 4A = 2(A^2 - 2A)$

E, $(A^4)^2 = [2(A^2 - 2A)]^2 \Rightarrow A^8 = 4(A^4 - 4A^3 + 4A^2) \Rightarrow A^8 = 4[2A^2 - 4A - 4(2A^2 - 2A) + 4A^2] \Rightarrow$

$A^8 = 4(-2A^2 + 4A) \Rightarrow A^8 = -8(A^2 - 2A)$.

Concluímos que A^4 e A^8 estão em função de $(A^2 - 2A)$. Além disso,

$$(A^2 - 2A)^2 = A^4 - 4A^3 + 4A^2 = 2A^2 - 4A - 4(2A^2 - 2A) + 4A^2 = -2A^2 + 4A = -2(A^2 - 2A)$$

Por outro lado, $A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E $A^4 = 2(A^2 - 2A) = 2 \cdot (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M$ e, portanto, $M^k = M, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Consequentemente, $A^{2004} = (A^4)^{501} = (-4M)^{501} = -4^{501} \cdot M^{501} = -2^{1002} \cdot M = \begin{bmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.5.2. XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA − Primeira Fase − Nível Universitário (2002).

Seja A a matriz real $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x+y & x & \dots & x \\ x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x+y \end{pmatrix}$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é inversível e calcule A^{-1}.

Solução:

$A = x \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} + yI$. Seja $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, logo $A = xJ + yI$.

Temos, ainda, $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ$

$J^3 = J^2 \cdot J = nJ \cdot J = nJ^2 = n^2 J$. Assim, $J^k = n^{k-1} J$, $(k > 1)$.

Por indução temos:

A propriedade é válida para $k = 2$.

Supondo válida para k, temos $J^k \cdot J = n^{k-1} J \cdot J \Rightarrow J^{k+1} = n^{k-1} J^2 \Rightarrow J^{k+1} = n^{k-1} \cdot nJ \Rightarrow$

$J^{k+1} = n^k \cdot J$

Assim a propriedade é válida $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

De $A = xJ+yI$ temos, $(A)^2 = (xJ+yI)^2 \Rightarrow A^2 = x^2J^2+2xyJ+y^2I \Rightarrow A^2 = x^2nJ+2xyJ+y^2I \Rightarrow$

$$A^2 = xJ(xn+2y) + y^2I$$

Como $A = xJ + yI \Rightarrow xJ = A - yI$.

Substituindo na igualdade anterior, temos $A^2 = (A - yI)(xn + 2y) + y^2I \Rightarrow A^2 = nxA + 2yA - nxyI - 2y^2I + y^2I \Rightarrow A^2 = (nx + 2y)A - (nxy + y^2)I \Rightarrow A^2 - (nx + 2y)A = -(nxy + y^2)I \Rightarrow$

$$A[A - (nx + 2y)I] = -(nxy + y^2)I \qquad (I)$$

Se $detA[A - (nx + 2y)I] = 0 \Leftrightarrow detA = 0$ ou $det[A - (nx + 2y)I] = 0$.

Como $detA[A - (nx + 2y)I] = det[-(nxy + y^2)I]$, então para que a matriz A seja inversível devemos ter $det[-(nxy+y^2)I] \neq 0$, isto é, $-y(nx+y) \neq 0$. Isso ocorre se $y \neq 0$ e $nx+y \neq 0(x \neq \frac{-y}{n})$.

De (I) concluímos que para $-(nxy + y^2) \neq 0$, temos $A\left[\frac{1}{-(nxy+y^2)}(A - (nx + 2y)I)\right] = I$, logo

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{-(nxy + y^2)}(A - (nx + 2y)I)\right]$$

Exemplo 2.5.3. CONCURSO DE ADMISSÃO AO CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO – INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA – IME 2002

Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem

(a) exatamente $50km$?

(b) $n \times 10km$?

Solução:

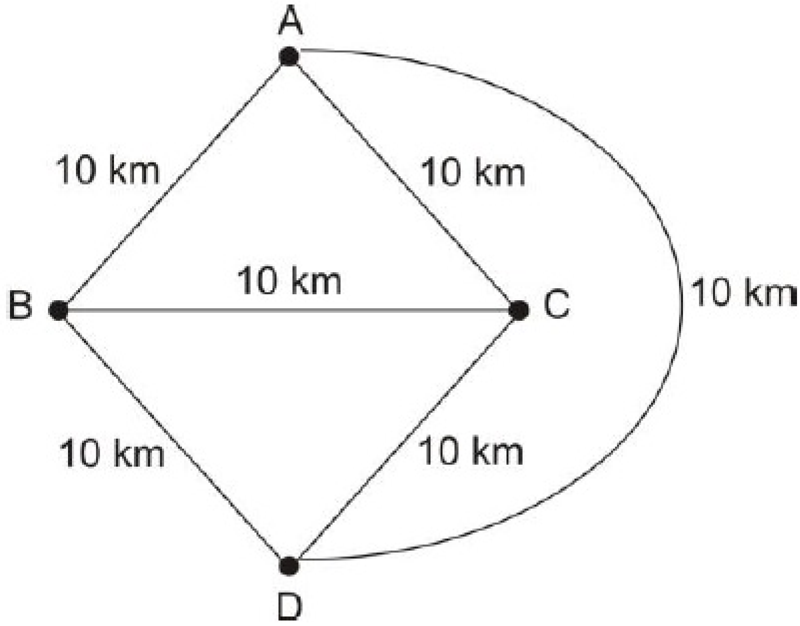

Figura 2.1: esboço das estradas

Seja $M = (a_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz que relaciona o número de maneiras de se deslocar entre as cidades i e j, passando por uma estrada. As cidades estão associadas aos números: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ e $D = 4$.

É fácil ver que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ nos fornecerá o número de maneiras de se deslocar entre as cidades i e j, passando por duas estradas com um deslocamento igual a $20Km$.

Isto indica que o número de maneiras de ir da cidade i à cidade j utilizando exatamente k estradas é o elemento a_{ij} da matriz M^k.

Demonstração: Por indução, temos:

1^a Parte.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. É imediato verificar que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & se\ i\ =\ j \\ a_{ij} = 1 & se\ há\ estrada\ interligando\ i\ a\ j\ ou\ a_{ij} = 0\ caso\ contrário\ (i \neq j) \end{cases}$$

2^a Parte.

Por indução sobre n temos:

Seja $A^n = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$ o número de maneiras de ir de i à j utilizando n estradas.

Seja $A^{n+1} = A^n \cdot A = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

Analizemos o elemento $c_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + \ldots + b_{1n} \cdot a_{n1}$.

Por hipótese, cada elemento b_{1j} indica o número de maneiras de ir a cidade "1" à cidade "j", passando por n estradas. Temos, ainda, que cada elemento a_{ij} indica se há ou não estrada interligando a cidade "i" à cidade "j". Assim, o total de maneiras de ir da cidade "1" à cidade "1", passando por $n+1$ estradas será $(b_{11} \cdot k_1 + b_{12} \cdot k_2 + \ldots + b_{1n} \cdot k_n)$ onde cada $k_m = 1$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, se há estrada interligando i à j ou $k_m = 0$ caso contrário.

Ora, os elementos a_{1j} indicam exatamente isto.

Portanto, $b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + \ldots + b_{1n} \cdot a_{n1} = c_{11}$ é o total de maneiras de ir da cidade "1" à cidade "1" , passando por $n+1$ estradas.

Analogamente, os demais elementos c_{ij} da matriz C seguem o mesmo raciocínio de c_{11} e, por hipótese de indução, c_{ij} nos fornecerá o número de maneiras de ir de i à j utilizando $n+1$ estradas. ∎

Assim, para obtermos exatamente $50km$ basta calcularmos M^5.

Seja $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade. Assim a matriz $M = J - I$.

No exemplo anterior mostramos que $J^2 = nJ$ e $J^k = n^{k-1}J$. Assim $J^2 = 4J$.

Logo, $M^2 = (J - I)^2 \Rightarrow M^2 = J^2 - 2JI + I^2 = 4J - 2J + I = 2J + I$.

Segue que , $M^3 = M^2 \cdot M = (2J+I)(J-I) = 2J^2 - 2JI + IJ - I^2 = 8J - 2J + J - I \Rightarrow M^3 = 7J - I$.

$M^4 = M^3 \cdot M = (7J - I)(J - I) = 7J^2 - 7JI - IJ + I^2 \Rightarrow M^4 = 20J + I$.

$M^5 = M^4 \cdot M = (20J + I)(J - I) = 20J^2 - 20JI + IJ - I^2 \Rightarrow M^5 = 61J - I$.

O número de percursos diferentes que começam e terminam na cidade A com exatamente $50km$ será obtido pelo termo a_{11} de M^5, isto é, 60.

O número de percursos diferentes que começam e terminam na cidade A, e possuem $n \times 10km$, pode ser calculado como

$$M^n = (J - I)^n = \binom{n}{0} J^n + \binom{n}{1} J^{n-1}(-I) + \ldots + \binom{n}{n-1} J(-I)^{n-1} + \binom{n}{n}(-I)^n$$

$$M^n = \binom{n}{0} 4^{n-1} J + \binom{n}{1} 4^{n-2} J(-I) + \ldots + \binom{n}{n-1} J(-I)^{n-1} + \binom{n}{n}(-I)^n$$

Como a resposta procurada será obtida do termo a_{11} de M^n, temos

$$a_{11} = \binom{n}{0} 4^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{1} 4^{n-2} \cdot (-1) + \ldots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n$$

Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo por 4, obtemos

$$a_{11} = \frac{1}{4}\left[\binom{n}{0} 4^n \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} 4^{n-1} \cdot (-1)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} 4 \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} 4 \cdot (-1)^n\right]$$

$$a_{11} = \frac{1}{4}\left[\binom{n}{0} 4^n \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} 4^{n-1} \cdot (-1)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} 4 \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} 4^0 \cdot (-1)^n + \binom{n}{n} 3 \cdot (-1)^n\right]$$

$$a_{11} = \frac{1}{4}\left[(4-1)^n + 3\cdot(-1)^n\right] = \frac{3^n + 3\cdot(-1)^n}{4}$$

∎

Capítulo 3

Sequência didática

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a sequência didática a ser aplicada aos alunos do 2^o Ano do Ensino Médio. A sequência possibilitará resolver problemas que envolvam as potências de matrizes.

3.2 Particularidades

1. Público alvo

   Alunos do 2^o Ano do Ensino Médio.

2. Objetivos

   Definir a potência de matrizes.

   Comprender o Teorema de Cayley-Hamilton.

   Resolver problemas envolvendo as potência de matrizes.

3. Descrição Geral

   A sequência didática deve ser realizada em duas partes, cada uma com 2 (duas) horas aulas, totalizando 4 (quatro) horas aula. Esta pode ser aplicada nas aulas regulares, em aulas de aprofundamento ou em mini curso direcionado aos alunos e/ou professores.

3.3 Metodologia

Para introduzir a ideia podemos usar o seguinte exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vamos calcular o determinante de $(A - \lambda I)$ onde I é a matriz identidade.

$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$. Agora vamos substituir λ por A e simplificar o máximo possível. $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I =$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$
Seguindo a mesma linha de raciocínio apresentamos o Teorema de Cayley-Hamilton e o exemplo descritos no Capítulo 2.

Podemos apresentar aos alunos alguns exercícios como o de (Paiva, 1995).

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, defini-se:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k fatores}, \forall k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^0 b) A^1 c) A^2 d) A^3 e) A^{18} f) A^{35}

A solução esperada pelo autor é:

Pela definição $A^0 = I_n$ e $A^1 = A$.
$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$

Assim concluímos que $A^{2n} = (A^2)^n = I$ e $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = A$.

Logo, $A^{18} = I$ e $A^{35} = A$

Resolvendo pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos:
$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -9 + 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 8$
$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$

$\Delta(A) = A^2 - I = 0 \Rightarrow A^2 = I$

Analogamente como na solução anterior temos:

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$

E, $A^{2n} = (A^2)^n = I$ e $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = A$.

Logo, $A^{18} = I$ e $A^{35} = A$

Vejamos agora um exercício resolvido de (Iezzi and Hazzan, 1977):

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular A^2, A^3, A^4 e A^n $(n \in \mathbb{N}\ e\ n \geq 1)$

Solução:

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observamos que em cada multilplicação por A os elementos a_{11}, a_{21} e a_{22} não se alteram e o elemento a_{12} sofre acréscimo de 1. Provaríamos por indução finita sobre n que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolvendo pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos:

$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2$

$\Delta(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$

$\Delta(A) = A^2 - 2A + I = 0 \Rightarrow A^2 = 2A - I$

$A^3 = A^2 \cdot A = (2A - I) \cdot A = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 4A - 2I - A = 3A - 2I$

$A^4 = A^3 \cdot A = (3A - 2I) \cdot A = 3A^2 - 2A = 3(2A - I) - 2A = 6A - 3I - 2A = 4A - 3I$

Observamos que a cada potência de A o seu expoente aparece como coeficiente de A e o seu antecessor como coeficiente de I.

Provaríamos por indução finita sobre n que $A^n = nA - (n-1)I$.

Lista de Exercícios.

1. (UFF) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Os valores de k que tornam nulo o determinante da matriz $M - kI$, sendo I a matriz identidade, são:

   a) 0 *e* 4 b) 4 *e* 5 c) -3 *e* 5 d) -3 *e* 4 e) 0 *e* 5

2. Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, defini-se:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k fatores}, \forall k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

De acordo com essa definição, calcule as seguintes potências da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$:

a) A^0 b) A^1 c) A^2 d) A^3 e) A^{50} f) A^{73}

3. (UFPB) Sendo a e b números reais, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$. Sabendo que $A^2 = 2A$, o valor de $(a - b)$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

4. (UFPE) - Modificado - Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) A^4 b) B^6 c) $(AB)^{12}$

5. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3 e A^4

6. Dê todas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, que satisfazem $A^3 + A = O$.

7. Determine o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Seja a matriz $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule J^2, J^3, J^4 e J^n.

9. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ verifique que $A^2 - 4A - 5I_3 = O_3$.

10. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ verifique que $A^{-1} = -\frac{1}{3}\left(A^2 - 2A - 4I\right)$.

Observação: alguns exerícios desta lista foram retirados de (Neto, 2009).

Respostas

1. C
2. a)I b)$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c)I d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e)I f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
3. C
4. a)I b)I c)I
5. $A^2 = 3A - 3I$, $A^3 = 6A - 9I$ e $A^4 = 9A - 27I$
6. $a = b = 0$ ou $b = -\frac{1}{a}$
7. $A^3 - 4A^2 + 4A - 3I = O$
8. $J^2 = 2J$, $J^3 = 4J$, $J^4 = 8J$ e $J^n = 2^{n-1}J$
9. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton.
10. Calcule a equação característica, isole I e multiplique ambos os membros por A^{-1}.

Capítulo 4

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho é trazer uma nova abordagem na solução de problemas envolvendo potências de matrizes. Após uma revisão das definições, propriedades e teoremas das matrizes e determinantes estudados no Ensino Médio, descrita no *Capítulo* 1, apresentamos no *Capítulo* 2 a definição do polinômio característico, a demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton e a definição do polinômio mínimo. De posse dessas ferramentas apresentamos, através de exemplos, soluções para alguns problemas mais elaborados. Encerrando o trabalho sugestionamos uma proposta de sequência didática para ser aplicada aos alunos do 2^o Ano do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

C. Boyer. *História da Matemática*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2 edition, 1996.

A. Frank. *Matrizes - Coleção Schaum*. McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.

G. Iezzi and S. Hazzan. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 4. Editora Atual, São Paulo, 2 edition, 1977.

W. Kaplan and D. Lewis. *Cálculo e álgebra linear*, volume 3. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1 edition, 1974.

A. Neto. *Noções de Matemática*, volume 4. Editora VestSeller, Fortaleza, 1 edition, 2009.

M. Paiva. *Matemática*, volume 2. Editora Moderna, São Paulo, 1 edition, 1995.

UNICAMP. Ia536 - teoria de sistemas lineares, Abril 2013a. URL `http://www.dt.fee.unicamp.br/~sala225/ia536/105/algebra4.pdf`.

UNICAMP. Ia536 - teoria de sistemas lineares, Abril 2013b. URL `http://www.dt.fee.unicamp.br/~sala225/ia536/105/algebra5.pdf`.