VANESSA VÂNIA SILVA MARINHO RIBEIRO

# REVISITANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA**
**MINAS GERAIS - BRASIL**
**2013**

VANESSA VÂNIA SILVA MARINHO RIBEIRO

**REVISITANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de março de 2013.

Lucy Tiemi Takahashi

Marinês Guerreiro

Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

*Ao meu querido tio Naninho,*

*quando pude pela última vez dizer o quanto o amava,
eu estava em uma reunião para elaboração deste trabalho, portanto, sei que de
onde ele está, sempre me acompanha e me inspira.*

*"Mas esforçai-vos, e não desfaleçam as vossas mãos; porque a vossa obra tem
uma recompensa."*

Crônicas 15: 7

# Agradecimentos

Ao meu esposo Agenor Ferreira Ribeiro Junior, que não mediu esforços em me ajudar. Sempre presente, me dizendo para seguir em frente. TE AMO MUITO!!!

Aos meus filhos Victor e Lívia, por terem tido tanta paciência comigo. Saberem o momento certo de saírem de cena e o momento que eu precisava muito da presença deles. Vocês são meu porto seguro.

Aos meus pais que sofreram e torceram sempre. A minha mãe por tantas orações e ao meu pai por suas palavras.

Ao meu irmão Luiz Faustino Marinho Junior por ter sido tão amigo e trazer conforto com suas palavras em momentos tão difíceis.

Em especial, a uma prima que durante estes anos sempre se manteve presente, através de nossas maneiras de comunicação, mandando mensagens de otimismo. Vaninha Geiler, obrigada.

À minha orientadora Simone Maria de Moraes por acreditar em meu trabalho, pela atenção e paciência, pelo exemplo profissional.

À banca da dissertação pelas sugestões e correções.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual dificultaria minhas atividades acadêmicas.

A Deus, por ter me concedido força, determinação e coragem na busca deste sonho.

Os sonhos não terminam aqui, continuam...

# Sumário

# Resumo

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2013. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Orientadora: Simone Maria de Moraes.

Esta dissertação é dedicada ao estudo do Teorema de Pitágoras sob vários aspectos. Começamos traçando um histórico deste teorema, e então apresentamos várias demonstrações dele, assim como aplicações e oficinas para o ensino do mesmo. A continuação apresentamos uma proposta de atividades motivacionais e criativas para a utilização deste teorema, a fim de ajudar os professores e despertar o interesse nos estudantes. Concluímos este trabalho com a apresentação de uma inovadora Cartilha do Teorema, a Cartilha Pitagórica, que deverá orientar a utilização do trabalho por professores de Matemática em sala de aula.

# Abstract

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2013. **Revisiting the Pythagorean Theorem**. Adviser: Simone Maria de Moraes.

This dissertation is devoted to studying the Pythagorean Theorem about various aspects. We begin by tracing a historical about this theorem, and then we present several demonstrations from him, as well as applications and workshops for your teaching. The continuation we present a proposal of activities motivational and creative in the use of this theorem in order to help teachers and arouse interest in students. We finalized this work by presenting an innovative Theorem Primer that should directing the use of labor by mathematics teachers in the classroom.

# Introdução

O **Teorema de Pitágoras** é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na História do conhecimento matemático. Desde o século V a.C. até o século XX d.C. inúmeras demonstrações do **Teorema de Pitágoras** apareceram, porém na atualidade são conhecidas muitas outras, por exemplo, em 1940, o matemático americano *Elisha Scott Loomis* publicou 370 demonstrações (veja [11]).

*Pitágoras* nasceu na ilha de *Samos*, nas costas da Ásia Menor, por volta do ano 569 a.C.. Durante sua vida viajou bastante. Esteve no Egito e na Babilônia de onde absorveu os conhecimentos matemáticos e as idéias religiosas de cada região. Voltando ao mundo grego, fundou em *Crotona*, atual sul da Itália, uma escola, na verdade uma sociedade secreta, dedicada ao estudo da Matemática e Filosofia, a *Escola Pitagórica*.

Uma das grandes contribuições da *Escola Pitagórica* à Matemática foi organizar partes do conhecimento da Geometria, como a teoria das paralelas, por meio do método demonstrativo, ou seja, por meio de teoremas. Como nenhum escrito da *Escola Pitagórica* sobreviveu até hoje, informações como essa derivam de fontes indiretas e muito posteriores.

A *Escola Pitagórica*, além de secreta, era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comuns, pertenciam a todos. Assim, não se sabe se foi o próprio *Pitágoras* quem descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito de uma descoberta ao mestre. No entanto, com base em alguns depoimentos posteriores, acredita-se que os *pitagóricos* tenham sido os primeiros a demonstrá-lo e que tal demonstração deva ter sido alguma usando áreas.

Dados históricos confirmam que o conhecimento do **Teorema de Pitágoras** data de muito antes da era de *Pitágoras*, uma vez que os babilônios antigos já o conheciam.

Atualmente o **Teorema de Pitágoras** é enunciado da seguinte maneira:

***Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.***

Já que esse teorema é um dos clássicos do desenvolvimento da Matemática, de fácil compreensão e tem diversas aplicações, pode ser utilizado pelo professor como um mecanismo para despertar o interesse de alunos no ensino de Matemática.

Nesta perspectiva, nessa dissertação pretendemos mostrar a importância do Teorema de Pitágoras no ensino da Matemática. Para isto fazemos um recorrido histórico do Teorema de Pitágoras, apresentamos algumas de suas demonstrações e várias aplicações. Finalizamos propondo atividades de estimulo ao ensino de Matemática através do estudo deste teorema.

Assim dividimos o trabalho em quatro capítulos distribuídos como segue:

No capítulo 1 apresentamos um histórico do Teorema de Pitágoras, começando com a história do próprio Pitágoras e passando pela Escola pitagórica e suas peculiaridades, as contribuições dos pitagóricos até chegarmos nas evidências de que o teorema já era conhecido antes de Pitágoras.

Em seguida, no capítulo 2, apresentamos diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, iniciando pela demonstração atribuída aos pitagóricos, depois apresentamos demonstrações clássicas, outras que são utilizadas no estudo de Geometria e finalizamos com demonstrações contemporâneas, pós século XX.

A primeira parte do capítulo 3 é dedicada a aplicações do Teorema de Pitágoras na Geometria e em outras áreas. Já na segunda parte do capítulo apresentamos sugestões de softwares matemáticos e oficinas que podem auxiliar no ensino deste teorema.

Finalmente, no capítulo 4, apresentamos a *"Cartilha Pitagórica"*, que contém atividades interessantes mostrando o uso do Teorema de Pitágoras. Fornecemos algumas sugestões para serem aproveitadas pelos professores de forma que a aula se torne mais atrativa.

# Capítulo 1

# Histórico do Teorema de Pitágoras

Bertrand Russell definiu Pitágoras como *"intelectualmente um dos homens mais importantes que já viveram, tanto quando era sábio como quando era tolo."*

## 1.1 Pitágoras

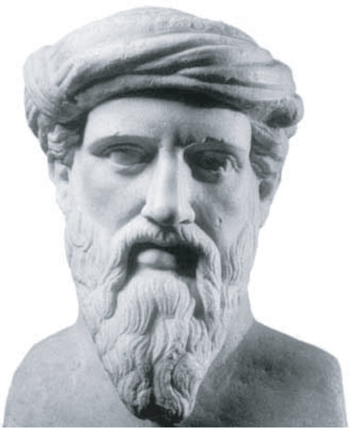


Figura 1.1: Pitágoras de Samos

*Pitágoras de Samos*, foi um dos personagens mais importantes na História da Matemática. Os dados sobre sua vida são escassos, pois não existem textos de sua autoria nem biografias feitas por seus contemporâneos. Os primeiros escritos detalhados sobre sua vida datam de 150 e 250 anos depois de sua morte e baseiam-se em histórias transmitidas de maneira oral com grandes diferenças entre si.

Ainda assim, muitos mitos e lendas se formaram em torno de sua pessoa, motivados provavelmente pelo próprio Pitágoras e também devido à natureza da doutrina pitagórica e seus seguidores: uma irmandade hermética, regida por símbolos místicos e costumes esotéricos.

As obras mais extensas, detalhadas e influentes sobre a vida de Pitágoras e seu pensamento datam do século III d.C., ou seja, uns 800 anos após sua morte. *Diógenes Laercio* (200-250 d. C.) e *Porfírio* (234-305 d. C.) escreveram sobre a vida de Pitágoras e *Jâmblico*[1] (245-325 d. C.) *Sobre a vida pitagórica*. Estas biografias são, com algumas exceções, as únicas fontes disponíveis mais recentes sobre a vida de Pitágoras, nelas os autores coincidem em destacar a enorme influência que teve Pitágoras em sua época.

De acordo com a maioria dos historiadores, Pitágoras nasceu por volta do ano 569 a. C. na ilha de Samos, na Grécia. Seu pai, *Mnesarco*, era um mercador de Tiro e sua mãe, *Pythais*, era originária de Samos. Foi nesta ilha que viveu seus primeiros anos de vida.

Pitágoras acompanhou seu pai em muitas viagens. Certamente era instruído: aprendeu a tocar a lira, a escrever poesia e a recitar *Homero*. É possível que seu pai o tenha levado a Tiro e que ali recebera instrução de homens instruídos da Síria. Entre seus professores, se menciona três filósofos: *Ferécides de Siros*, a quem com frequência se descreve como o maestro de Pitágoras, *Tales* e seu pupilo, *Anaximandro*.

Segundo Jâmblico [18], quando tinha entre 18 e 20 anos, Pitágoras visitou Tales, em Mileto. Embora Tales já fosse um ancião, exerceu uma forte impressão no jovem Pitágoras, despertando nele interesse por Matemática e Astronomia. *Anaximandro* dava aulas à Pitágoras sobre os ensinamentos de Tales. Essas aulas influenciaram Pitágoras em suas idéias e sua visão sobre Geometria e Cosmologia. Tales também lhe aconselhou a visitar o Egito para aprender mais sobre as questões que haviam estudado.

Não existe certeza alguma sobre o tempo em que Pitágoras passou no Egito ou no Leste, nem de suas vicissitudes em Samos ou outras cidades gregas antes de sua chegada a Itália. Tampouco há evidência direta do tipo e da quantidade de conhecimentos que pode haver adquirido, nem de como chegou a suas visões filosóficas definitivas. Alguns sugerem que visitou templos e participou de discussões com sacerdotes, iniciando-se nos rituais e crenças que depois colocaria em pratica na sociedade que fundaria na Itália. Sabe-se que após essas viagens Pitágoras adotou vários costumes, dos quais se destacam o sigilo, o vegetarianismo, a recusa em usar roupas feitas com pele de animais e a obstinação pela pureza.

[1] Jâmblico escreveu *De Vita Pythagorica Liber* (sobre a vida pitagórica): uma edição em Grego e Latin de 1598 por Teodoreto; em 1707 por Kuster; em 1816 por Kiessling de Leipzig, e em 1884 por Wauck. Traduzido por Thomas Taylor, 1818.

No entanto, é difícil determinar até que ponto Pitágoras era seguidor dos sacerdotes egípcios ou mesmo se eles o influenciaram, pois suas características poderiam ter sido desenvolvidas apenas por ser uma mente grega exposta às influências comuns do seu tempo. Inclusive as mais antigas fontes chegam a conclusões semelhantes ao tentar conectar as peculiaridades religiosas e ascéticas de Pitágoras com os mistérios órficos ou de Creta, ou com o oráculo de Delfos. O que parece ser mais provável é que a geometria desenvolvida por Pitágoras teve influência direta dos ensinamentos de Tales e de Anaximandro e que frequentemente aparece retratado com carácter religioso e de legislador devido às suas visitas a vários lugares na Grecia:Delos, Esparta, Fliunte, Creta, entre outros.

Já quanto à escolha das razões pelas quais Pitágoras escolheu a cidade *Crotona*, no sul da Itália, como centro de suas atividades só existem fontes de especulação. Segundo Diógenes, quando retornou a Samos fundou sua primeira escola, que recebeu o nome de *Semicírculo*, porém emigrou para fugir da tirania de *Polícrates* que governava a ilha. No entanto, talvez seja mais provável que a mudança tenha ocorrido devido ao escasso êxito que teve com seus ensinamentos em sua cidade natal. Além do que se exigia dos discípulos que participassem dos assuntos públicos e de política.

Em Crotona, por volta de 529 a. C., Pitágoras fundou uma escola filosófica e religiosa, a *Escola Pitagórica* ou *Sociedade Pitagórica*, considerada como a "primeira universidade do Mundo", que rapidamente ganhou notoriedade e atraiu numerosos seguidores. Pitágoras foi o mentor desta sociedade dentro de um restrito círculo de adeptos conhecidos como *matematikoi*. De acordo com alguns relatos, casou-se com *Téano*, de Crotona, e tiveram uma filha, *Damo*, e um filho, *Telauges*, outros dizem que foram duas filhas, *Damo* e *Myia*; e outros dizem que quando chegou na Itália já tinha esposa e filha.

Quanto à morte de Pitágoras as evidências sobre o lugar e o ano são incertas. O que se sabe é que, em 508 a.C., a *Sociedade Pitagórica* de Crotona foi violentamente atacada e Pitágoras fugiu para *Metaponto*, lugar onde terminaria seus dias (alguns autores afirmam que deixou-se morrer de fome).

No entanto, de acordo com alguns historiadores, em 510 a. C., Crotona atacou e venceu sua vizinha Síbaris, houve suspeitas de que Pitágoras estava envolvido na disputa. Em cerca de 508 a. C., a Sociedade Pitagórica em Crotona foi atacada por Cílon, um nobre da própria Crotona. Pitágoras escapou a Metaponto e quase todos os autores afirmam que morreu nesta cidade, enquanto que outros dizem que suicidou-se por causa do ataque a sua Sociedade.

O que realmente se sabe é que a Sociedade Pitagórica prosperou por muitos anos após essa ocorrência e se expandiu de Crotona a outras cidades italianas.

## 1.2 A Sociedade Pitagórica

A *Escola* ou *Sociedade Pitagórica* tinha uma dualidade: por um lado, dedicava-se a questões espirituais, os pitagóricos acreditavam na imortalidade da alma e na reencarnação e tinham a auto-reflexão como um dever consciente e imprescindível na espiritualização da vida. Por outro lado, como parte dessa espiritualização, incluía estudos de Matemática, Astronomia e Música, o que lhe imprimiu um caráter também científico, no sentido moderno da palavra.

Figura 1.2: Escola de Pitágoras

Esta escola foi fundada por Pitágoras em Crotona, no sul da Itália, e teve numerosos adeptos, que se denominavam *matemáticos* (*mathematikoi*), viviam nesta sociedade de forma permanente, não tinha posses pessoais e eram vegetarianos. Este grupo seleto chegou a congregar até 300 seguidores que ouviam os ensinamentos diretamente de Pitágoras e deveriam seguir regras estritas de conduta, suas máximas podem ser resumidas como:

1. Que, em seu nível mais profundo, a realidade é de natureza matemática.
2. Que a filosofia pode ser utilizada para a purificação espiritual.
3. Que a alma pode elevar-se para unir-se com o divino.
4. Que certos símbolos são de natureza mística
5. Que todos os membros da sociedade devem manter absoluta lealdade e sigilo.

Na Sociedade de Pitágoras era admitida a presença de mulheres, fato incomum naquela época entre a maioria dos povos e em qualquer espécie de escola. Também haviam membros que não pertenciam ao núcleo do grupo, chamados *acusmáticos* (*akousmatikoi*), viviam em suas próprias casas, podiam ter posses pessoais e não lhes eram imposto o vegetarianismo, participavam como ouvintes apenas durante o dia. Segundo *Krische* [9], as mulheres pertenciam a este grupo, no entanto, muitas pitagóricas foram reconhecidas posteriormente como filósofas e matemáticas.

No que diz respeito às práticas e à estrutura interna da Escola Pitagórica, apenas algumas características podem ser consideradas confiáveis, como a prática do *ascetismo*, prática da abstenção de prazeres e até do conforto material, adotada com o fim de alcançar a perfeição moral e espiritual, e da *metempsicose*, transmigração da alma de um corpo para outro.

Todos os relatos sugerem que seus membros praticavam sigilo absoluto e vida comunitária, de uma maneira muito rigorosa, e que uma de suas máximas era que: *"Nem tudo deve ser divulgado a todos"*. Os membros dessa irmandade deviam estar conscientes dos princípios exigidos pela escola, dentre estes estavam o do sigilo (tudo o que era ali descoberto ficava entre seus membros) e o da autoria das descobertas (tudo o que era produzido intelectualmente por seus membros ficava dentro da escola e levava o nome do seu mestre e fundador). Assim, as contribuições dos pitagóricos e sua influência para o desenvolvimento da Matemática e Astronomia, entre outras ciências naturais foram todos creditados a Pitágoras.

O Pentagrama, ou pentágono estrelado, veja figura 1.3, era o símbolo da Escola Pitagórica, representando o sigilo e o companheirismo que pregavam. Este pentágono também simbolizava a união, o casamento. Para os pitagóricos o número 2 (primeiro número par) era feminino e o número o 3 (primeiro número ímpar) masculino e o número 5 era a união dos dois. Também consideravam o número 1, o gerador.

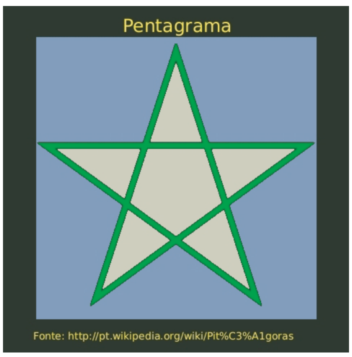



Figura 1.3: Pentagrama ou Pentágono Estrelado

A Escola Pitagórica introduziu o costume de se demonstrar certas descobertas.

Provavelmente o rigor matemático na escrita surge a partir disto, pois seus alunos como também estudavam filosofia eram acostumados a indagar, a investigar e a questionar o novo.

Segundo historiadores nas discussões filosóficas, religiosas e políticas mais profundas participavam provavelmente apenas os membros mais seletos, suas investigações reforçavam a fé crescente na Matemática. Para eles, a Matemática era mais que uma busca intelectual, era um mecanismo para explicar o mundo. Assim, nessa doutrina alguns de seus pensamentos ficaram conhecidos pela humanidade, dos quais destacamos:

1. Educai as crianças e não será preciso punir os homens.
2. Não é livre quem não obteve domínio sobre si.
3. Pensem o que quiserem de ti; faz aquilo que te parece justo.
4. O que fala semeia; o que escuta recolhe.
5. Ajuda teus semelhantes a levantar a carga, mas não a carregues.
6. Com ordem e com tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem.
7. Todas as coisas são números.
8. A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar é aproximar-se de Deus.
9. A evolução é a Lei da Vida, o número é a Lei do Universo, a unidade é a Lei de Deus.
10. A vida é como uma sala de espetáculos: entra-se, vê-se e sai-se.
11. A sabedoria plena e completa pertence aos deuses, mas os homens podem desejá-la ou amá-la tornando-se filósofos.
12. Anima-te por teres de suportar as injustiças; a verdadeira desgraça consiste em cometê-las.

O pensamento de número 7 (*"Todas as coisas são números"*) ficou conhecido como o principal da Escola Pitagórica. A partir dele foi criada uma doutrina na qual os alunos foram transformados em discípulos e o que lhes ensinava adquiriu uma aura religiosa, chegando muitas vezes a extremos que beiravam ao sobrenatural, ao irreal. Por exemplo:

1. Acreditavam na transmigração da alma após a morte, de um corpo para outro. Portanto, acreditavam na imortalidade da alma e na reencarnação.
2. Estavam proibidos de beber vinho e comer carne. Seus membros eram vegetarianos e alimentavam-se a base de feijões e lentilhas. Pitágoras se declarou contrário ao sacrifício de animais, muito comum em sua época.
3. Praticavam a lealdade entre seus membros e distribuição comunitária dos bens materiais. Seus membros eram proibidos de aceitarem pagamentos em caso de partilhar seus conhecimentos com os outros.
4. Juravam não revelar descobertas científicas da sociedade para o mundo. A pena para os desobedientes era a morte.
5. Praticavam a austeridade e obediência à hierarquia.
6. Praticavam a purificação da mente pelo estudo da geometria, aritmética, música e astronomia.

Os pitagóricos deram aos números significados esotéricos:

- **zero** significava o absoluto e infinito, o estado latente.
- O número **um** é identificado como a razão e o considerado a origem de todos os números, o início de tudo, o germe a partir do qual emanam todas as coisas.
- O número **dois** é a opinião, o primeiro número par ou feminino, princípio passivo, o transitório, a dualidade essencial
- O **três** é o primeiro número masculino, o número da harmonia, representava a estabilidade, a base sobre a qual tudo repousa.
- O **quatro** é a justiça, imutável e equitativa, a cifra do mundo objetivo dos elementos.
- O **cinco** sugeria o casamento do primeiro número par (2) com o primeiro número ímpar autêntico (3), a representação autêntica do homem, o quinário glorificado homem perfeito.
- O número **seis** é o número da criação.
- O número **sete**, é o único entre os dez que não tem fatores ou nem produto, e foi associado com a saúde, mas também com o septenário divino, símbolo do homem perfeito e, ao mesmo tempo, do Universo.

- O número **oito**, ou duplo quadrado, símbolo da pureza, da igualdade entre homens e do amor $(3 + 5)$.
- O **nove** representava a tripla trindade, símbolo da justiça.
- Finalmente, o **dez** *Tetractys* sagrado era um símbolo altamente reverenciado pelos pitagóricos, sua virtude residia no fato que era constituído pela soma de todos os quatro primeiros números: $1 + 2 + 3 + 4$, em sua natureza se encontrava várias espécies de números: dos pares, dos quais o primeiro é o dois, que aqui é a unidade e dos quadrados perfeitos dos quais é o quatro é o primeiro.

Quanto aos desenvolvimentos de trabalhos matemáticos atribui-se à Escola Pitagórica as seguintes descobertas:

1. De estabelecer em que proporções uma corda deve ser dividida para a obtenção das notas musicais dó, ré, mi, etc.
2. A classificação dos números em: pares e ímpares, primos e compostos, figurados, perfeitos.
3. O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.
4. Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
5. Que a soma das áreas dos quadrados determinados pelos lados catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado determinado pela hipotenusa.
6. O primeiro número irracional, a raiz quadrada de 2.

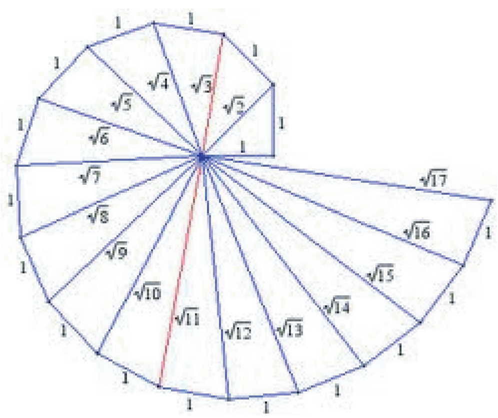



Figura 1.4: Números Irracionais

Segundo alguns historiadores os irracionais não foram bem aceitos na Escola Pitagórica, seus alunos estavam proibidos de estudarem ou divulgarem esses números, isto se deve ao fato de que na doutrina daquela escola acreditava-se que os número representavam a harmonia do universo e os irracionais, por não serem inteiros, nem frações, nem números decimais que seguem um padrão não se encaixavam nessa harmonia.

Escolas semelhantes foram abertas em Síbaris, Metaponto, Tarento e outras cidades da Magna Grécia. Se sabe que os pitagóricos se expandiram rapidamente depois de 500 a.C., que a sociedade tomou conotação política e que mais tarde se dividiu em facções. Em 460 a.C. foram atacados e suprimidos, suas casas foram saqueadas e queimadas. Menciona-se em particular a *"casa de Milo"*, em Crotona, onde mais de 50 pitagóricos foram surpreendidos e aniquilados. Aqueles que sobreviveram se refugiaram em Tebas e em outras cidades.

## 1.3 O Teorema de Pitágoras antes de Pitágoras

O teorema de Pitágoras tem esse nome porque sua descoberta é atribuída a Escola Pitagórica. Anteriormente, na Mesopotâmia e Antigo Egito se conheciam valores que se correspondiam com os lados de um triângulo retângulo, e eram utilizados para resolver problemas relacionados a esse tipos de triângulos, tal como se indica em alguns papiros e tablitas. No entanto, não há documentos que tenham resistido ao tempo e que exponham teoricamente essa relação. A pirâmide de *Kefren*, que data do século XXVI a.C., foi a primeira grande pirâmide construída com base no chamado triângulo sagrado egípcio, de proporções 3-4-5.

Há também as obras chinesas *"Chou Pei"*, escrita entre 500 e 300 a. C., e *"Chui Chang"* posterior à morte de Pitágoras, escrita por volta do ano 250 a. C.. Embora a obra de Chou Pei tenha sido escrita na época de Pitágoras acredita-se que ele não a conheceu. Sua demonstração é feita construindo um quadrado de lado $a+b$ que se parte em quatro triângulos de base $a$ e altura $b$ e um quadrado de lado $c$, conforme ilustrado na figura 1.5.

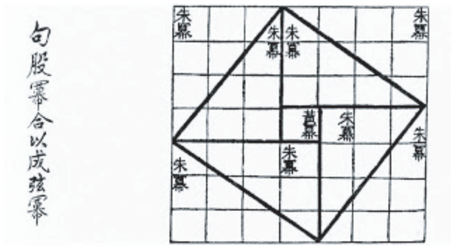



Figura 1.5: Ilustração da demonstração de *Chou Pei* para um triângulo de lados 3, 4 e 5

### 1.3.1 A Plimpton 322

Numa plaqueta de argila pode estar o mais antigo exemplo conhecido do uso do teorema de Pitágoras, a *Plimpton 322*. Essa plaqueta é originária do Reino dos Antigos Babilônios, que existiu aproximadamente de 1800 a 1600 a.C.. Baseando-se em similaridades de formato com outras plaquetas que possuem datas explícitas, a Plimpton 322 pode ser datada entre o período de 1822 e 1784 a.C. Suas medidas correspondem a 13 centímetros de largura, 9 centímetros de altura e 2 centímetros de espessura.

Esse nome se deve ao seu último proprietário, o editor nova-iorquino George A. Plimpton. Ele comprou a plaqueta a partir de um vendedor de arqueologia, Edgar J. Banks, provavelmente em 1922 e a doou com o resto de sua coleção para a Columbia University, no meio da década de 1930. De acordo com Banks, as plaquetas vieram de Senkereh, um local ao sul do Iraque correspondente à antiga cidade de Larsa, na Mesopotâmia.

Os pesquisadores descobriram que esta plaqueta de barro continha uma tabela na qual aparecem ternos pitagóricos. Como o que restou é apenas um pedaço de uma plaqueta, que deveria fazer parte de um conjunto, não se sabe como esses números foram encontrados.

A tabela Plimpton, como vários artefatos antigos, foi interpretada por diversos historiadores e matemáticos, levando assim a conclusões diferentes. No entanto, todos afirmam ser ela um resumo do uso do Teorema de Pitágoras na antiguidade.

Figura 1.6: Plimpton 322

Observando a placa podemos distinguir quatro colunas de números com cabeçalhos de palavras no topo de cada coluna. Os números estão todos no sistema de numeração sexagesimal, que era o utilizado na Babilônia naquela época.

O conteúdo principal da Plimpton 322 é uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas. A quarta coluna é apenas uma linha de números em ordem de 1 a 15, a segunda e a terceira colunas são totalmente visíveis na tableta. No entanto, a ponta da primeira coluna foi quebrada, e há duas suposições consistentes para o que poderiam ser os dígitos faltando. Segundo estudiosos os lados do triângulo retângulo $x$, $y$ e $z$ foram parametrizados em termos de parâmetros de inteiros $a$ e $b$ da seguinte forma: catetos $x = a^2 - b^2$ e $y = 2ab$ e a hipotenusa $z = a^2 + b^2$ satisfazendo o Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$.

Na tabela a seguir apresentamos os dados destas três colunas, colocando colunas adicionais com os números na forma decimal e o valor do cateto $y$. Os números entre parênteses são os registros originais.

| $x_{60}$ | $x_{10}$ | $z_{60}$ | $z_{10}$ | $y_{10}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1:59 | 119 | 2:49 | 169 | 120 | 1 |
| 56:07 | 3367 | 1:20:25 (32:00:21) | 4825 (115221) | 3456 | 2 |
| 1:16:41 | 4601 | 1:50:49 | 6649 | 4800 | 3 |
| 3:31:49 | 12709 | 5:09:01 | 18541 | 13500 | 4 |
| 1:05 | 65 | 1:37 | 97 | 72 | 5 |
| 5:19 | 319 | 8:01 | 481 | 360 | 6 |
| 38:11 | 2291 | 59:01 | 3541 | 2700 | 7 |
| 13:19 | 799 | 20:49 | 1249 | 960 | 8 |
| 8:01 / (9:01) | 481 / (541) | 12:49 | 769 | 600 | 9 |
| 1:22:41 | 4961 | 2:16:01 | 8161 | 6480 | 10 |
| 45 | 45 | 1:15 | 75 | 60 | 11 |
| 27:59 | 1679 | 48:49 | 2929 | 2400 | 12 |
| 2:41 | 161 | 4:49 | 289 | 240 | 13 |
| 29:31 | 1771 | 53:49 | 3229 | 2700 | 14 |
| 56 | 56 | 1:46 | 106 | 90 | 15 |

### 1.3.2 A corda de 12 nós

Uma outra prova da existência do Teorema antes de Pitágoras, era a maneira como os povos egípcios faziam para marcarem seus territórios. Após a cheia do rio Nilo, eles sempre tinham que fazer estas marcações novamente, por que desapareciam todos os anos. Para isso utilizavam uma corda com 12 nós igualmente espaçados.

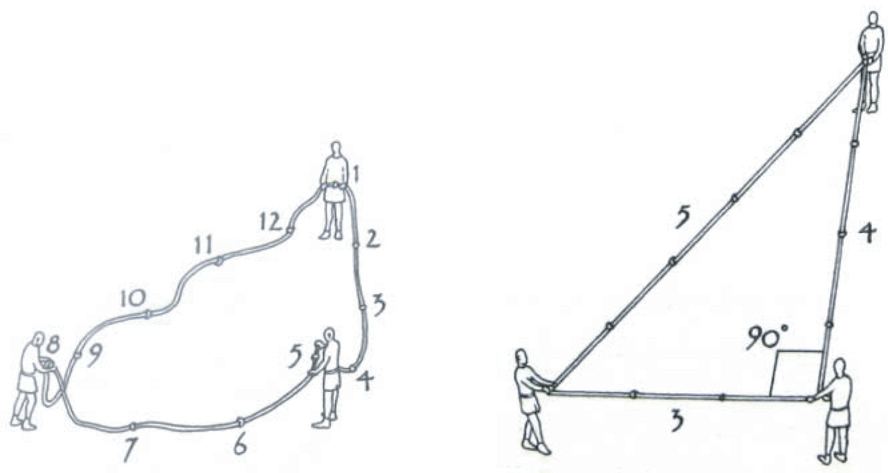



Figura 1.7: Medição com a corda de 12 nós

Eles se distribuíam em posições de maneira que formavam um ângulo reto e assim podiam fazer as marcações.

Como a corda possuía 12 nós, ela tinha então 12 espaços, que devidamente organizados formam um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, o que sabemos se tratar de um triângulo pitagórico. Logo, esta corda é também uma comprovação do uso do Teorema antes mesmo de Pitágoras existir.

É importante observar que a corda de 12 nós, de acordo com alguns historiadores, também é denominada corda de 13 nós. Estes consideram 13 ao se unir o primeiro e o último nó quando se forma o triângulo pitágorico.

### 1.3.3 As Pirâmides do Egito

As pirâmides do Egito são consideradas uma das sete maravilhas do mundo antigo principalmente por se levar em conta sua construção na época em que se deu.

A Grande Pirâmide manteve-se como sendo a mais alta estrutura construída pelo homem até 1889 momento em que foi ultrapassada, em altura, pela Torre Eiffel, cerca de 4500 anos após a sua construção!

Muitos historiadores defendem que Pitágoras teve o primeiro contato com o teorema que viria ter seu nome em uma das viagens feitas ao Egito. Estando nesta terra, ele teve contato com a matemática egípcia, vindo a conhecer os ternos, futuramente chamados ternos pitagóricos. Usavam o terno, (3, 4, 5), como já foi mencionado anteriormente, para obterem ângulos retos, extremamente necessários na construção das pirâmides.

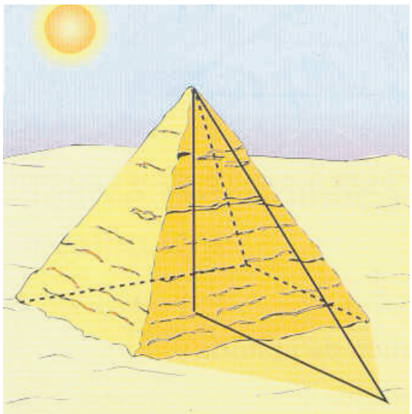



Figura 1.8: Triângulo pitagórico em uma Pirâmide e as Pirâmides do Egito

### 1.3.4 Descobertas atribuídas aos Pitagóricos

São atribuídas aos pitagóricos, discípulos de Pitágoras, as seguintes descobertas:

1. A fundamentação científica da música.
2. O teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (este teorema é atribuído a Pitágoras por *Eudemus* no livro História da Geometria).
3. A descoberta de grandezas incomensuráveis.
4. A construção dos sólidos regulares (figuras cósmicas).
5. A teoria das proporcionais (teoria das médias).
6. Classificação dos números (par, ímpar, amigo, perfeito, deficiente, abundante, primo, composto).
7. A criação dos números figurados (números triangulares, números oblongos, números quadrangulares, números pentagonais,...).
8. A divisão de um segmento em média e extrema razão.
9. A obtenção de ternos pitagóricos.

10. A esfericidade da Terra.

Como os pitagóricos acreditavam que tudo é número, realizavam estudos bem detalhado sobre esse assunto. Era comum utilizarem pedras para representar números, sempre em formatos diferentes e, assim, descobriam certas propriedades. A seguir alguns destes números, também conhecidos como números figurados.

- **Números triangulares**: são números que se dispõem em forma de triângulos.

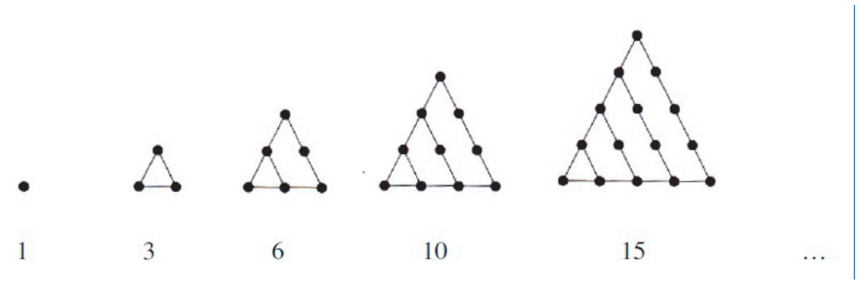



Figura 1.9: Sequência dos primeiros números triangulares

- **Números quadrados**: são números que se dispõem em forma de quadrados.

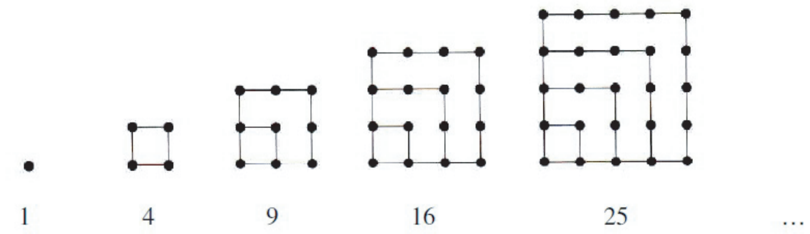



Figura 1.10: Sequência dos primeiros números quadrangulares

- **Números pentagonais**: são números que se dispõem em forma de pentágonos.

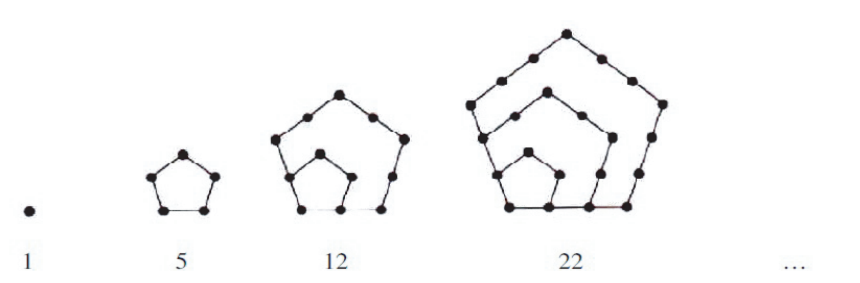



Figura 1.11: Sequência dos primeiros números pentagonais

- **Números retangulares**: são números que se dispõem em forma de retângulo e também podem ser usados para descobrir os divisores de um número.

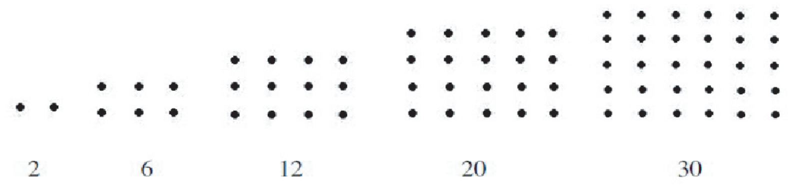



Figura 1.12: Sequência dos primeiros números retangulares

- **Números amigáveis**: dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Por exemplo, 284 e 220, que constituem o par atribuído a Pitágoras. Esse par de números alcançou uma aura mística e, rezava a superstição, que dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita. Os dois números vieram a ter um papel importante na magia, na feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos.

- Também se atribuem aos pitagóricos os **números perfeitos**, **deficientes** e **abundantes**. Um número se diz perfeito se é igual à soma de seus divisores próprios, deficiente se excede a soma de seus divisores próprios e abundante se é menor que a soma de seus divisores próprios.

# Capítulo 2

# Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Neste capítulo apresentamos diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Iniciamos apresentando duas demonstrações que são consideradas as feitas pelos pitagóricos. Em seguida apresentamos algumas demonstrações clássicas do teorema, para então considerarmos demonstrações que aparecem no estudo de outros temas da Geometria. Finalizamos apresentando demonstrações mais recentes que mostram como este teorema tem sido uma inspiração no estudo de matemática ainda nos dias de hoje.

As principais referências do capítulo são:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras

www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babilonyan_Pythagoras.html

http://obaricentrodamente.blogspot.com.br

Já as figuras foram retiradas das seguintes páginas eletrônicas:

http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAIXQAK/demonstracao-teorema-pitagoras

www.prof2000.pt/users/hjco/pitagora/pg000007.htm

O Teorema de Pitágoras é tanto uma afirmação a respeito de áreas quanto a respeito de comprimentos, algumas provas do teorema são baseadas em uma dessas interpretações, e outras provas são baseadas na outra.

O teorema diz que:

**"Em um triângulo retângulo a soma das áreas dos quadrados de lados iguais aos lados menores do triângulo, os catetos, é igual à área do**

**quadrado de lado igual ao lado maior do triângulo, a hipotenusa”**.

Observemos que naquela época o significado do *“quadrado de um número”* era interpretado como a área do quadrado (figura geométrica) de lado com essa medida e não como o número multiplicado por si mesmo.

Atualmente, se enuncia o teorema simplesmente:

*“Em um triângulo retângulo, a soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos é igual à área do quadrado cujo lado é a hipotenusa.”*

Normalmente quando se lê ou se ouve falar deste teorema, nos vem a mente uma figura como a seguinte:

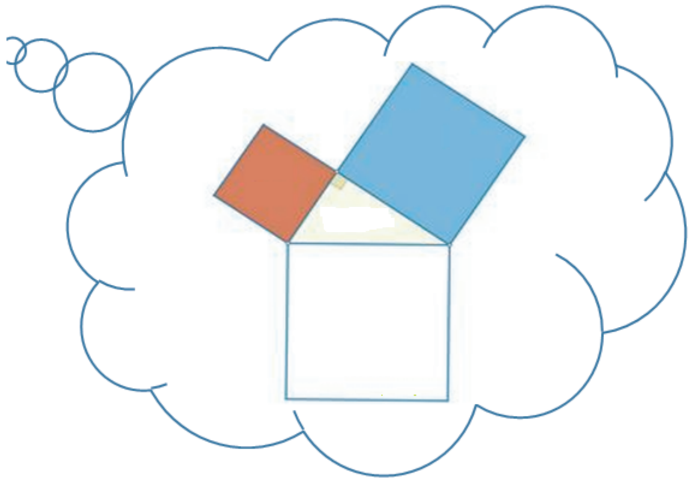


Figura 2.1: Ilustração do Teorema de Pitágoras

Esta figura acima, aos olhos de um leigo não representaria muita coisa, a não ser é claro, um desenho matemático elaborado!

Vamos considerar o triângulo amarelo no centro da figura como sendo retângulo, e os dois quadrados menores, construídos sobre os catetos deste triângulo. Então, pelo enunciado do Teorema de Pitágoras, o quadrado maior de cor vermelho, construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo central tem a mesma área que a soma das áreas dos outros dois quadrados vindos dos catetos.

Para nos convencermos matematicamente da veracidade desta afirmação, precisamos de algumas demonstrações, o que torna o Teorema mais interessante ainda, pois, desde o século 5 a.C., até o dias de hoje vários matemáticos e leigos têm se dedicado a apresentar demonstrações desse teorema.

*Elisha Scott Loomis* (1852-1940) foi um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras, professor de Matemática em Cleveland, colecionou, durante 20 anos, 370 demonstrações do teorema que organizou e publicou no livro *The Pythagorean Proposition* ([11]). Ainda hoje encontramos novas demonstrações do teorema como podemos ver, por exemplo, na página eletrônica:

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

## 2.1 Demonstrações Clássicas

### 2.1.1 Dos Pitagóricos

Existe mais de uma demonstração atribuída aos pitagóricos, mas como foi comentado no capítulo anterior, devido à falta de material escrito da época em que o Teorema foi demonstrado não é possível determinar qual delas foi realmente demonstrada por eles. A seguir apresentamos aquela que é considerada como sendo a original dos pitagóricos.

Consideremos um triângulo retângulo de catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$.

As figuras abaixo representam dois quadrados, ambos de lado $b + c$. Na figura da esquerda destacam-se quatro triângulos retângulos idênticos de catetos $b$ e $c$, e hipotenusa $a$, e ainda um quadrado de lado $a$. Já na figura da direita os mesmos quatro triângulos retângulos são colocados de forma que agora há dois quadrado, um de lado $b$ e outro de lado $c$.

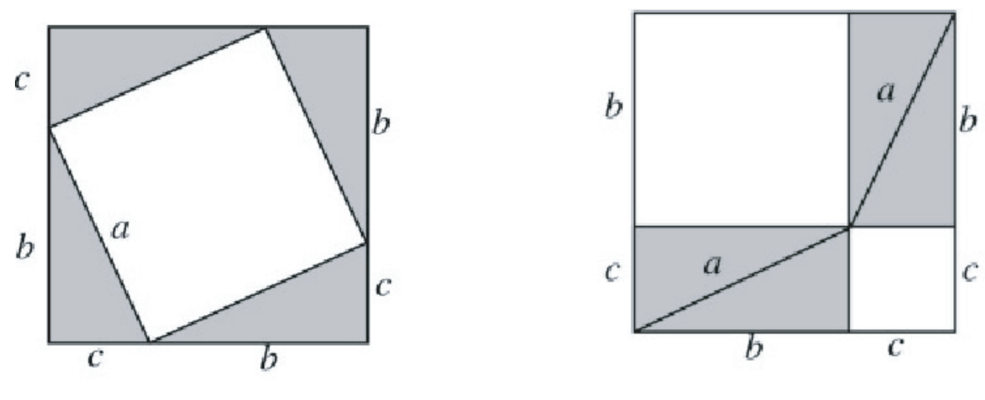



Figura 2.2: Quadrados de lado $b + c$ utilizados na demonstração dos pitagóricos

Assim, se retirarmos de cada uma das figuras os quatro triângulos retângulos idênticos, ficaremos com o quadrado de lado $a$ na figura da esquerda e os quadrados de lado $b$ e $c$ na figura da direita.Logo, podemos afirmar que a área do quadrado de lado $a$ é igual à soma das área dos quadrados de lados $b$ e $c$. Portanto, o Teorema de Pitágoras está demonstrado.

Existe uma lenda que diz que Pitágoras ao dar conta da importância desta descoberta ordenou uma *hecatombe*, isto é, o sacrifício de cem bois aos deuses, em sinal de alegria e agradecimento.

### 2.1.2 Por Semelhança de Triângulos

A partir do triângulo $\triangle ABC$, retângulo em $\widehat{C}$, traçamos uma altura relativa ao lado $AB$, interceptando-o no ponto $H$ e formando neste os segmentos $d$ e $e$.

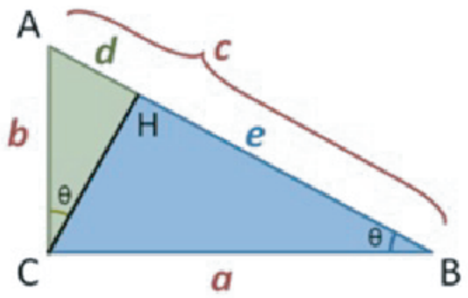



Figura 2.3: Triângulo retângulo $\triangle ABC$

Consideremos triângulos $\triangle ACH$ e $\triangle ABC$, como possuem o mesmo ângulo $\widehat{A}$ e o ângulo $A\widehat{H}C = C\widehat{H}B = 90°$, consequentemente, o terceiro ângulo possui a mesma medida, $A\widehat{C}H = A\widehat{B}C = \theta$. Assim, aplicando o caso de semelhança $AAA$, concluímos que os triângulos $\triangle ACH$ e $\triangle ABC$ são semelhantes.

Aplicando raciocínio análogo nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CBH$, concluímos que estes também são semelhantes.

Agora aplicamos a relação de proporcionalidade a partir da semelhança entre esses triângulos como segue.

Da semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CBH$, obtemos: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{e}{a}$.

Da semelhança dos triângulos $\triangle ACH$ e $\triangle ABC$, obtemos: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{d}{b}$.

Assim, podemos escrever:

$$a^2 = e \cdot c \qquad \text{e} \qquad b^2 = c \cdot d.$$

Somando essas igualdades, obtemos:

$$a^2 + b^2 = e \cdot c + c \cdot d = c \cdot (e + d).$$

Assim, de acordo com a figura 2.3, $e + d = c$, então

$$a^2 + b^2 = c \cdot c = c^2,$$

demonstrando o Teorema de Pitágoras.

### 2.1.3 De Bhaskara

A demonstração do matemático hindu *Bhaskara* é datada do século XII. Segundo Boyer [4] está no seu tratado *Lilavati*,e, aparece ali como o problema do *"bambu quebrado."*

Bhaskara decompôs um quadrado maior de lado $c$ em quatro triângulos retângulos de catetos $a$ e $b$, admitindo o cateto $b$ maior ou igual a $a$, e hipotenusa $c$, e ainda em um quadrado menor cujo lado a partir da figura 2.4 abaixo, podemos observar ser $b - a$.

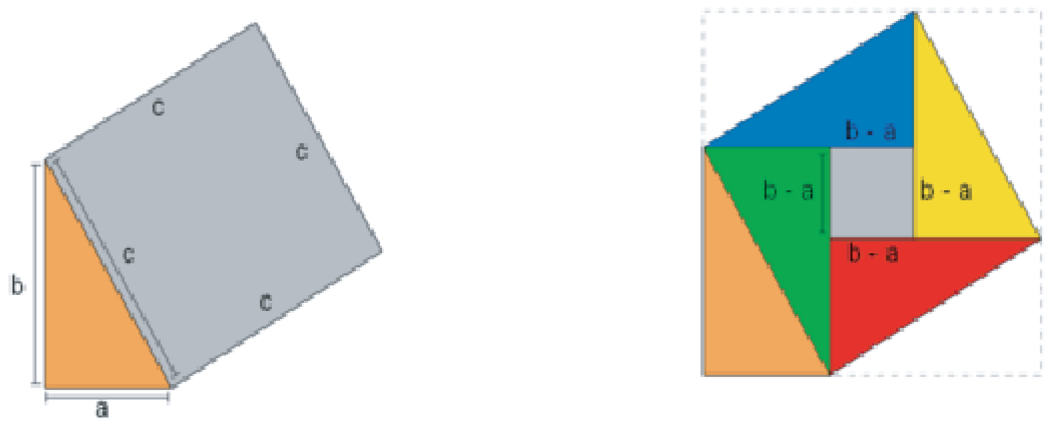



Figura 2.4: Decomposição de Bhaskara

Cada triângulo retângulo possui área $\dfrac{a \cdot b}{2}$, como são 4, então a área total destes triângulos é:

$$4\frac{a \cdot b}{2} = 2a \cdot b.$$

No centro da figura temos um quadrado de lado $b - a$ e, portanto, de área $(b - a)^2$.

O quadrado maior de lado $c$ tem área $c^2$, assim organizando todas informações obtemos:

$$c^2 = 2a \cdot b + (b-a)^2 = 2a \cdot b + a^2 - 2a \cdot b + b^2 = a^2 + b^2,$$

provando assim o Teorema de Pitágoras.

### 2.1.4 De Garfield

*James Abran Garfield* (1831-1881) foi o vigésimo presidente dos Estados Unidos em 1881 durante apenas 4 meses, pois foi assassinado neste mesmo ano.

Conta-se que Garfield sempre teve uma atração especial pela Matemática. Em 1876, alguns anos antes de tornar-se presidente, quando estava na câmara de representantes, rabiscou uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras que posteriormente foi publicada no *New England Journal of Education*.

Garfield começou desenhando um triângulo retângulo $\triangle ABC$ de catetos $b$ e $c$ e hipotenusa $a$. Depois desenhou o mesmo triângulo de forma que coincidisse um dos vértices. Assim ficou alinhado o cateto $b$ de um triângulo com o cateto $c$ do outro.

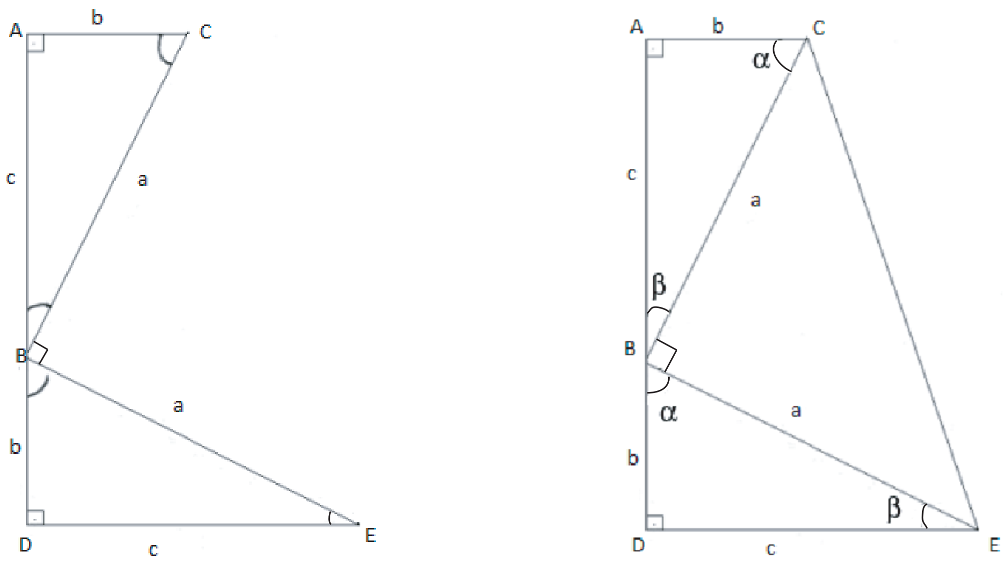



Figura 2.5: Triângulos retângulos com seus vértices alinhados e o trapézio retângulo

Em seguida, "fechou" a figura formando o trapézio retângulo $ACED$, constituído de dois triângulos ($\triangle ABC$ e $\triangle DBE$), feitos anteriormente e um novo triângulo foi formado, $\triangle CBE$.

Nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBE$, sabemos que $\alpha + \beta = 90°$, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$ e já temos um ângulo de $90°$.

Ao observamos os três ângulos, $\alpha$, $\beta$ e $\theta$, em torno do ponto $B$ vemos que sua soma é $180°$. Portanto, $C\widehat{B}E = 90°$, e consequentemente, o triângulo $\triangle CBE$ também é retângulo.

Podemos observar que os três triângulos juntos formaram um trapézio retângulo de altura $b+c$ e bases $b$ e $c$. Para calcular a área deste trapézio temos duas maneiras:

**(a)** Calcular a área de cada triângulo da figura e somá-las.

**(b)** Calcular diretamente através da fórmula da área do trapézio.

Sabemos, é claro, que em qualquer opção escolhida o resultado deverá ser o mesmo.

Pelo item $(a)$ obtemos:

$$\text{área}(\triangle ABC) + \text{área}(\triangle DBE) + \text{área}(\triangle CBE) = 2 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} = b \cdot c + \frac{a^2}{2}.$$

Já pelo item $(b)$, obtemos:

$$\frac{(b+c) \cdot (b+c)}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}.$$

Igualando as duas expressões encontradas, temos

$$b \cdot c + \frac{a^2}{2} = \frac{(b+c)^2}{2} \iff 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \iff a^2 = b^2 + c^2,$$

demonstrando o Teorema de Pitágoras.

## 2.2 Demonstrações mais Geométricas

Nesta seção apresentamos demonstrações que utilizam diferentes argumentos geométricos, como propriedades de uma circunferência, altura de um triângulo retângulo, construção de perpendicular e paralela, entre outros, para provar o Teorema. Assim, diremos que essas demonstrações são mais geométricas.

### 2.2.1 Utilizando uma Circunferência

A partir do triângulo $\triangle ABH$, retângulo em $H$ e lado $AB = h$, traça-se uma circunferência de centro $A$, e raio $AH$.Denota-se por $C$ o ponto de intersecção de $AB$ com esta circunferência. O que está ilustrado na figura 2.6 a seguir.

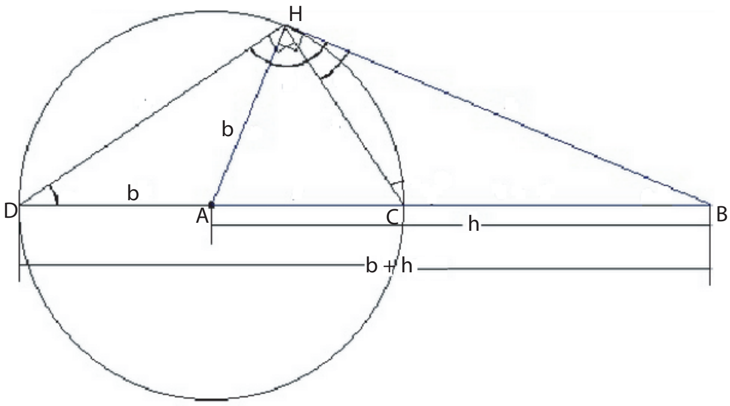



Figura 2.6: Circunferência a partir do triângulo $\triangle ABH$

Podemos afirmar que o triângulo $\triangle BHC$ é semelhante ao triângulo $\triangle BDH$, pois o ângulo $\widehat{H}$ e $\widehat{D}$ dos triângulos correspondem à metade da medida do arco $CH$ e, ainda, eles possuem um ângulo em comum, $\widehat{B}$.

Assim, teremos $\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BC}{BH}$, como $BD = h + b$ e $BC = hb$, substituindo na proporcionalidade acima obtemos:

$$\frac{a}{h+b} = \frac{h-b}{a} \iff a^2 = (h+b)(h-b) = h^2 - b^2 \iff a^2 + b^2 = h^2,$$

que demonstra o Teorema de Pitágoras.

### 2.2.2 Utilizando Trigonometria

Seja o triângulo retângulo $\triangle ABC$, retângulo em $A$, onde traçamos a altura $AH$ relativa ao lado $BC$.

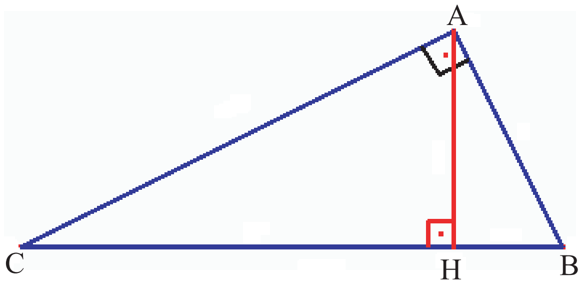



Figura 2.7: Triângulo retângulo $\triangle ABC$

Os triângulos $\triangle AHC$ e $\triangle ABC$ são semelhantes pelo caso $AAA$. Logo, temos a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB} = \cos C. \tag{2.1}$$

Também temos semelhança de triângulos entre $\triangle AHB$ e $\triangle ABC$, pelo caso $AAA$, e a consequente relação de proporcionalidade:

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} = \cos B. \tag{2.2}$$

Ainda, temos em (2.1): $(CA)^2 = CB \cdot CH$ e em (2.2): $(BA)^2 = BH \cdot BC$.

Somando as igualdades, obtemos:

$$(CA)^2 + (BA)^2 = BC \cdot (BH + HC) = (BC)^2,$$

demonstrando o Teorema de Pitágoras.

### 2.2.3 De Perigal

*Henry Perigal* foi um matemático e astrônomo amador, que passou a maior parte de sua longa vida (1801-1898), perto de Londres, na Inglaterra. Perigal era contador por profissão, mas suas paixões eram a observação de estrelas e a Matemática. Ele era um membro da Sociedade Astronômica Real e tesoureiro da *Royal Meteorological Society*.

Perigal desenvolveu uma nova prova do Teorema de Pitágoras, em 1830, complexa e não tão evidente para o observador casual, quando comparada a algumas das provas da antiguidade. Essa demonstração foi descoberta por acaso, pois, na ocasião, na verdade ele estava tentando encontrar uma solução para a quadratura do círculo.

Perigal deve ter considerado sua prova um grande feito em sua vida, pois pediu que fosse colocada em sua lápide. Seu pedido foi atendido.

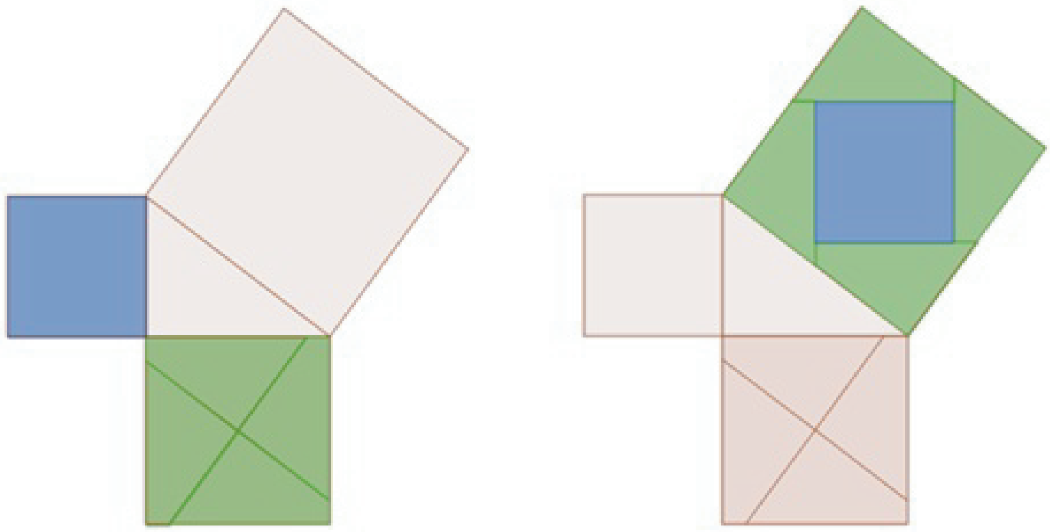


Figura 2.8: Diagrama de Perigal

Sua demonstração tem o seguinte raciocínio:

- **Passo 1:** Constrói os três quadrados sobre os lados do triângulo.
- **Passo 2:** No quadrado do cateto de maior lado, traça uma paralela à hipotenusa passando pelo centro do quadrado.
- **Passo 3:** Traça uma perpendicular à paralela à hipotenusa passando pelo centro do quadrado.
- **Passo 4:** Obtém quatro quadriláteros idênticos no quadrado do cateto maior.
- **Passo 5:** Faz uma montagem de um quebra-cabeças, através de movimentos de translação com os quadriláteros construídos, encaixando-os no quadrado referente à hipotenusa, deixando um espaço central neste quadrado que corresponde ao outro quadrado do cateto menor.

Como os dois quadrados menores preenchem a área do quadrado maior, sem sobreposições, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

### 2.2.4 Por Rotação de Triângulos Retângulos

Nesta demonstração utilizamos rotações e construções geométricas sobre figuras planas para transformar os dois quadrados construídos sobre os catetos no quadrado determinado pela hipotenusa.

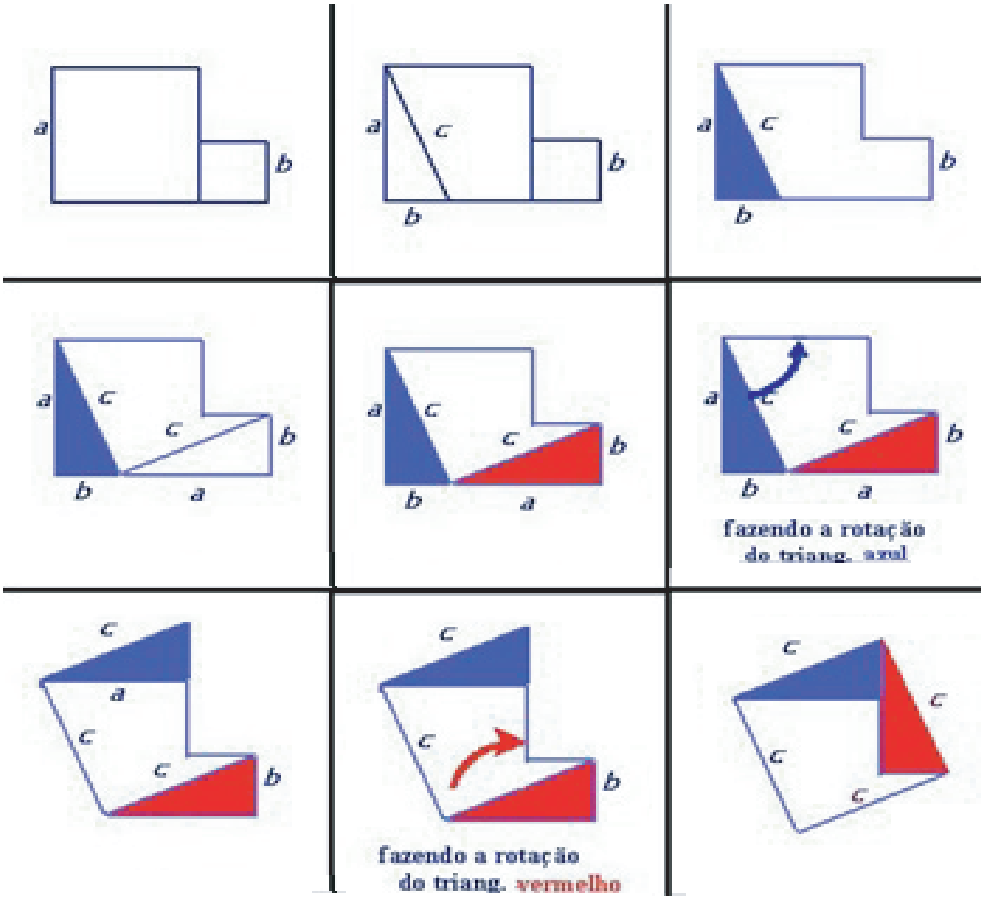



Figura 2.9: Passos para a rotação dos triângulos retângulos

A seguir descrevemos os passos utilizados nessa demonstração:

- **Passo 1:** Consideramos dois quadrados de lados $a$ e $b$ colocados lado a lado, é claro que a soma das áreas desses quadrados é $a^2 + b^2$.

- **Passo 2:** Construímos um triângulo retângulo onde o lado $a$ do quadrado maior será um dos catetos e o outro cateto $b$ será representado pela medida do lado do quadrado menor.
- **Passo 3:** Representamos pela cor azul o triângulo retângulo formado.
- **Passo 4:** Unimos um vértice do quadrado menor a um vértice do triângulo retângulo azul formado anteriormente, conforme a figura 2.9.
- **Passo 5:** Representamos pela cor vermelha o novo triângulo retângulo formado.
- **Passo 6:** Efetuamos uma rotação de 90° do triângulo azul.
- **Passo 7:** Observe a nova figura encontrada.
- **Passo 8:** Efetuamos uma rotação de 90° do triângulo vermelho.
- **Passo 9:** Obtemos um quadrado maior de lado $c$.

Logo, temos $a^2 + b^2 = c^2$ e o teorema está demonstrado.

### 2.2.5 De Leonardo da Vinci

*Leonardo da Vinci* (1452-1519) nasceu em Anchiano, Itália. Ao longo dos seus 67 anos, Leonardo se tornou um pintor, arquiteto, designer, engenheiro e matemático. Por toda a sua obra é considerado o grande homem da Renascença.

De fato, o mundo não viu um outro equivalente que tivesse um intelecto tão abrangente. Assim, não é uma surpresa que da Vinci, o mestre eclético de tantas disciplinas, teria estudado e elaborado uma prova independente do Teorema de Pitágoras.

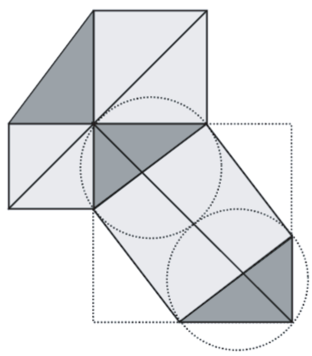


Figura 2.10: Diagrama utilizado por Leonardo da Vinci

Na figura 2.10, vemos o diagrama que ele usou para demonstrar o Teorema de Pitágoras. As linhas tracejadas foram adicionadas para mostrar que o ângulo reto do triângulo retângulo fundamental é bisectado pela linha sólida que une os dois cantos opostos do quadrado maior pontilhado envolvendo a parte inferior do diagrama.

A figura 2.11, do livro de Sparks [19], mostra a sequência utilizada por Da Vinci para demonstrar o teorema.

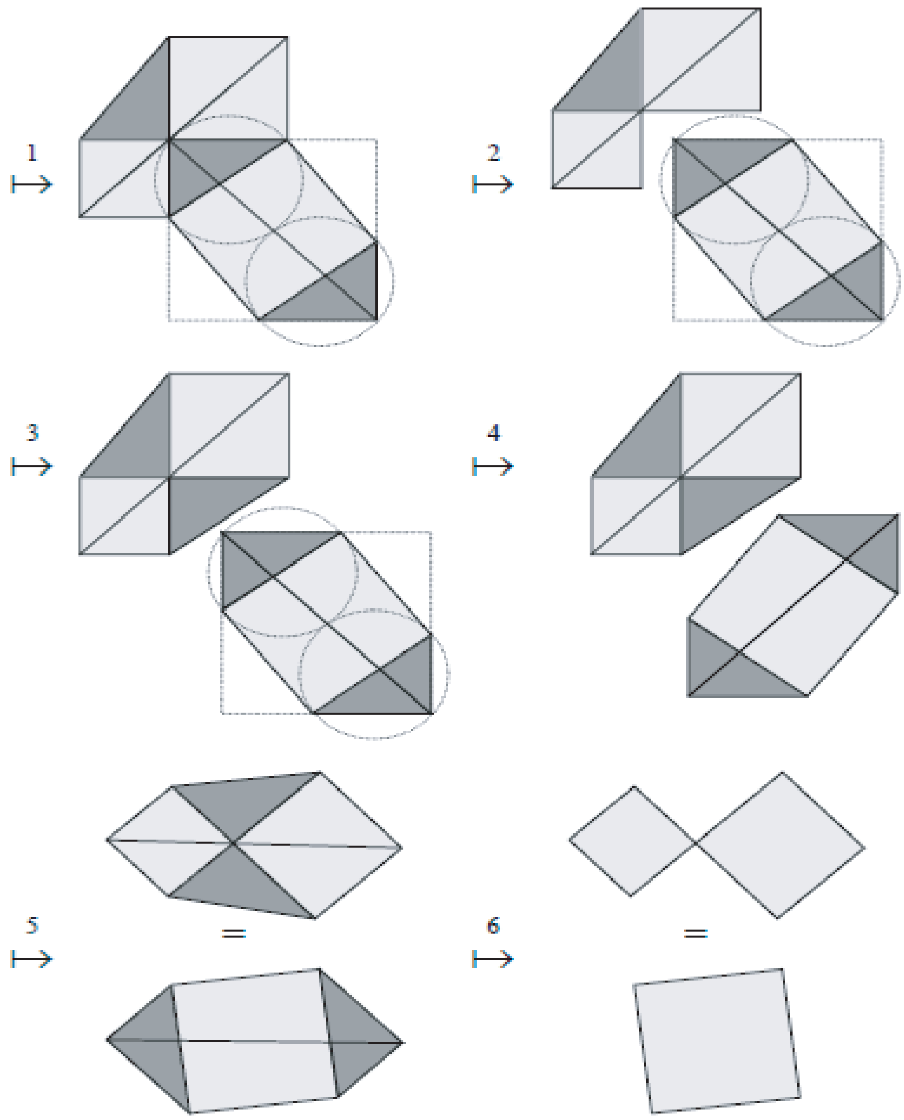



Figura 2.11: Sequência da prova de Leonardo da Vinci na qual, ao final, são retirados quatro triângulos retângulos congruentes, sobrando dois quadrados menores que juntos possuem a mesma área de um quadrado maior.

Uma prova analítica utilizando o diagrama de Da Vinci pode ser feita considerando a figura abaixo:

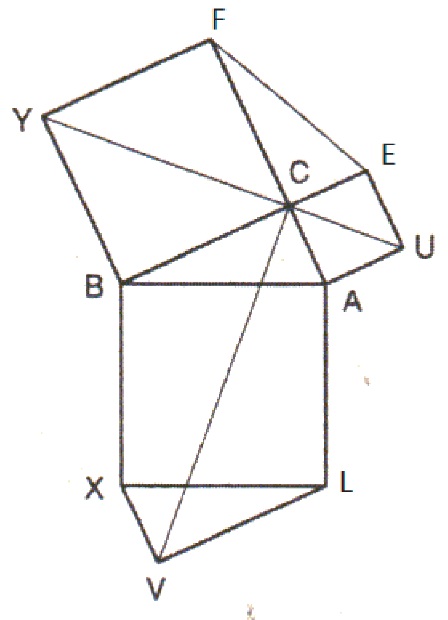



Figura 2.12: Divisão de Leonardo da Vinci

A partir dos lados do triângulo retângulo $\triangle ABC$ são feitos três quadrados $ACEU$, $BCFY$ e $ABXL$. Do lado $XL$ do quadrado $ABXL$ é feito o triângulo $\triangle LXV$ idêntico ao triângulo $\triangle ABC$.

Nota-se que os quadriláteros $ACVL$, $XVCB$, $AUYB$ e $EUYF$ são congruentes, portanto a área($ACVL$)+ área($XVCB$)= área($AUYB$)+ área($EUYF$). Cada uma das somas contém a área de dois triângulos iguais a $\triangle ABC$.

Logo, os hexágonos $ABYFEU$ e $CALVXB$ têm a mesma área.

Daí resulta que, a área do quadrado $BALX$ é a soma das áreas dos quadrados $ACEU$ e $CBYF$.

### 2.2.6 De Euclides

A Proposição 47 do Livro I dos *Elementos* de Euclides apresenta a seguinte prova do Teorema de Pitágoras.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo, a partir de cada um de seus lados são construídos os quadrados $ACKH$, $ABFG$ e $BCED$. Em seguida são traçados segmentos partindo do vértice $A$ aos vértices $D$ e $E$ e ao ponto $L$, este é a intersecção da reta da altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $BC$ com o lado $DE$ do quadrado $BCED$. Euclides também considerou a união dos vértices $F$ com $C$, formando o triângulo $\triangle FBC$ e $B$ com $K$ formando triângulo $\triangle BCK$.

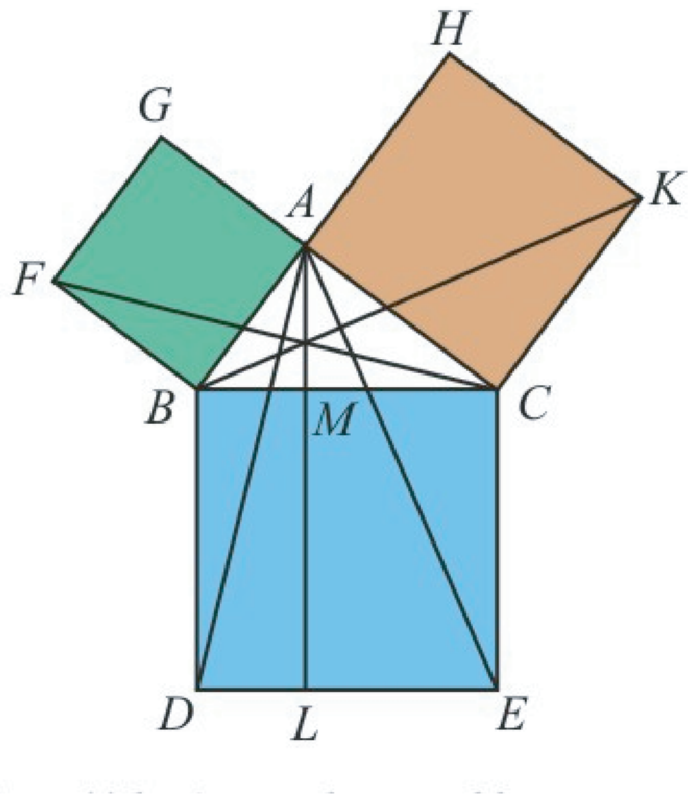



Figura 2.13: Diagrama de Euclides

Os triângulos $\triangle FBC$ e $\triangle ABD$ são congruentes, uma vez que $FB = AB$, $BC = BD$ e tanto o ângulo $F\widehat{B}C$ como o ângulo $A\widehat{B}D$ são iguais à soma de um ângulo reto com o ângulo $A\widehat{B}C$. Logo, as suas áreas são iguais, bem como são iguais os respectivos dobros ou seja, as áreas do quadrado $ABFG$ e do retângulo $BDLM$.

Analogamente, os triângulos $\triangle KCB$ e $\triangle ACE$ são congruentes e, portanto, a área do quadrado $ACKH$ é igual à do retângulo $CELM$.

Portanto, a soma das áreas dos dois quadrados é igual à soma das áreas dos dois retângulos, ou seja, a área do quadrado $BDEC$.

Curiosamente, esta figura apresentada acima é conhecida às vezes como capelo franciscano ou cadeira da noiva.

# 2.3 Demonstrações Contemporâneas

## 2.3.1 De Gaetano Speranza

Recentemente o italiano *Gaetano Speranza* fez uma demonstração dinâmica do Teorema de Pitágoras, disponível em:

http://w3.romascuola.net/gspes/geogebra/pitagora2.html

A seguir apresentamos o diagrama em que se baseia a sua prova.

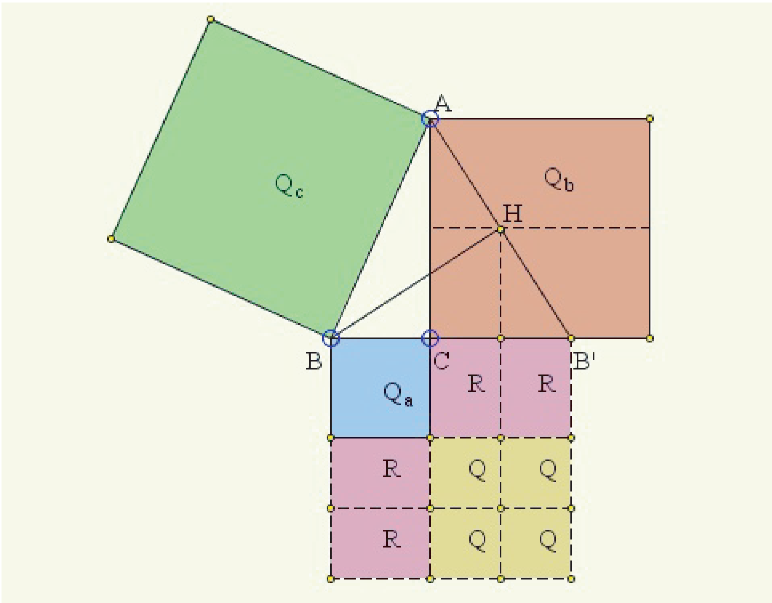



Figura 2.14: Diagrama de Gaetano Speranza

A demonstração de Gaetano é feita da seguinte maneira:

- **Passo 1:** No triângulo $\triangle ABC$, estende-se o lado $BC$ até $B'$, de modo que $BB' = AB$, que é a hipotenusa do triângulo $\triangle ABC$.
- **Passo 2:** Observamos que o triângulo $\triangle ABB'$ é isósceles, assim a altura $BH$, relativa ao lado $AB'$, é também a mediana e $H$ é o ponto médio de $AB'$.
- **Passo 3:** O triângulo $\triangle BHB'$ retângulo em $H$, logo o quadrado da sua altura a partir de $H$, denotada por $h$, é igual ao produto do número de segmentos da hipotenusa que são iguais a $a+m$ e $m$, onde $m = \dfrac{BB' - BC}{2} = \dfrac{c-a}{2}$.

- **Passo 4:** Consequentemente, obtemos $h^2 = (a+m)m = am + m^2$.
- **Passo 5:** Consideramos os quadrados $Qa$, $Qb$, $Qc$, que são construídos sobre os lados do triângulo $\triangle ABC$ onde usamos os mesmos símbolos para indicar suas áreas.
- **Passo 6:** Finalmente, observamos que por construção, $h = \dfrac{b}{2}$ e, portanto, $Qb = 4h^2$.

Agora, basta observar que $Qc$ é também a área do quadrado com lados $BB'$, logo

$$Qc = Qa + 4R + 4Q = Qa + 4am + 4m^2 = Qa + 4h^2 = Qa + Qb.$$

Gaetano observou que as únicas áreas que são avaliadas na prova são aquelas cujos lados são paralelos (e perpendiculares) para as pernas do triângulo $\triangle ABC$, tornando-se "analiticamente" de bom gosto.

### 2.3.2 De Ann Condit

Esta prova apareceu em *Pitágoras*, uma revista de matemática holandesa para alunos da escola secundária, na edição de dezembro de 1998, em um artigo de *Bruno Ernst*. A prova é de 1938 e é atribuída a *Ann Condit*, estudante de uma escola secundária americana, esta demonstração aparece na coleção de Loomis [11] como prova geométrica 68.

A demonstração é feita da seguinte forma:

- **Passo 1:** Dado um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em $C$, denotamos os comprimentos dos lados $BC, CA$ e $AB$ da hipotenusa por $a$, $b$ e $c$, respectivamente, e construímos sobre os lados $BC$ e $AC$ quadrados como no Figura 2.15.
- **Passo 2:** Observamos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PCQ$ são semelhantes, de acordo com o caso de semelhança $LAL$, assim os $Q\widehat{P}C$ e $B\widehat{A}C$ são congruentes.
- **Passo 3:** Consideramos $M$ o ponto médio da hipotenusa e denotamos a intersecção de $MC \cap PQ$ por $R$, vemos que $MR$ é perpendicular a $PQ$.
- **Passo 4:** A mediana da hipotenusa é igual à $\dfrac{MR}{2}$, portanto,triângulo $\triangle CMB$ é isósceles e os ângulos $M\widehat{B}C$ e $M\widehat{C}B$ são congruentes.

- **Passo 5:** Como os ângulo $P\widehat{C}R$ e $M\widehat{C}B$ são congruentes, obtemos também a congruência dos ângulos $Q\widehat{P}C$ e $B\widehat{A}C$.

Logo $P\widehat{C}R$ é ângulo reto, ou seja, $MR$ é perpendicular a $PQ$.

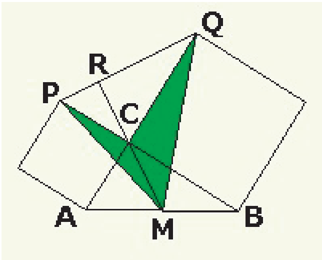



Figura 2.15: Prova atribuída a Ann Condit

Após esses passos analisamos as áreas dos triângulos $\triangle MCP$ e $\triangle MCQ$ de duas maneiras diferentes:

Por um lado, a altura $M$ relativa ao lado $PC$ é igual a $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{b}{2}$, por outro lado $PC = b$.

Portanto, área$(\triangle MCP) = \dfrac{b^2}{4}$, por outro lado, área$(\triangle MCP) = CM \cdot \dfrac{PR}{2} = c \cdot \dfrac{PR}{4}$.

Da mesma forma, área$(\triangle MCQ) = \dfrac{a^2}{4}$ e área$(\triangle MCQ) = CM \cdot \dfrac{RQ}{2} = c \cdot \dfrac{RQ}{4}$.

Somando as áreas obtemos:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = c \cdot \frac{PR}{4} + c \cdot \frac{RQ}{4} = c \cdot \frac{c}{4} = \frac{c^2}{4} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

### 2.3.3 Por Barry J. Sutton

A demonstração de *Barry J. Sutton*, foi publicada na revista *The Mathematical Gazette*, v 86, n 505, em Março de 2002, p.72, esta demonstração também está na coleção de Loomis, ali aparece como demonstração n.14.

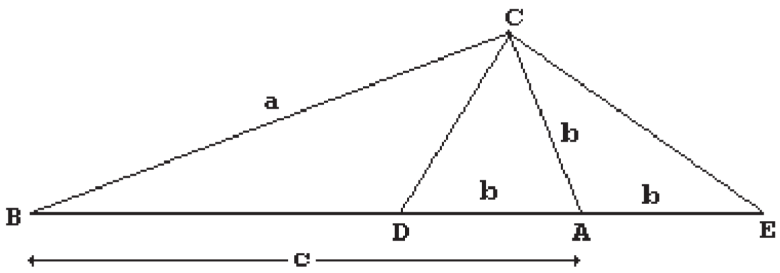



Figura 2.16: Diagrama de Barry Sutton

A demonstração é feita da seguinte forma:

- **Passo 1:** Consideramos o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em $C$, denotamos $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ e tomamos os pontos $D$ e $E$ na reta determinada por $AB$ tais que $AD = AE = b$, $D$ esteja entre $A$ e $B$ e $A$ esteja entre $D$ e $E$.
- **Passo 2:** Construindo um circulo de centro $A$ e raio $b$, teremos $C$ no círculo e o ângulo $D\widehat{C}E$ subtende o diâmetro e, portanto, $D\widehat{C}E = 90°$.
- **Passo 3:** Observamos que os ângulos $B\widehat{C}D$ e $A\widehat{C}E$ são congruentes.
- **Passo 4:** Por construção, o triângulo $\triangle ACE$ é isósceles, com $C\widehat{E}A \equiv A\widehat{C}E$.
- **Passo 5:** Assim, os triângulos $\triangle DBC$ e $\triangle EBC$ possuem o ângulo comum $D\widehat{B}C$ e os ângulos $B\widehat{C}D$ e $B\widehat{E}C$ são congruentes. Portanto, triângulos $\triangle DBC$ e $\triangle EBC$ são semelhantes.

Logo,

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BC} \Longleftrightarrow \frac{a}{(c+b)} = \frac{(c-b)}{a} \Longleftrightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

### 2.3.4 Por Jack Oliver

Esta prova é devido a *Jack Oliver* [10], e foi originalmente publicada na revista *The Mathematical Gazette*, p 117-118, v. 81, Março de 1997.

Esquema da prova de Jack Oliver:

- **Passo 1:** A área do triângulo pode ser calculada por $rp$, onde $r$ é o raio da circunferência inscrita no triângulo e $p = \dfrac{(a+b+c)}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

- **Passo 2:** No diagrama, visualizado na 2.17, obtemos as medidas: a hipotenusa é $c = (a - r) + (b - r)$ e $r = p - c$.

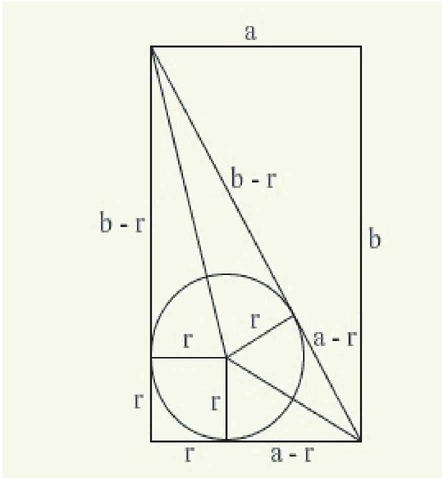


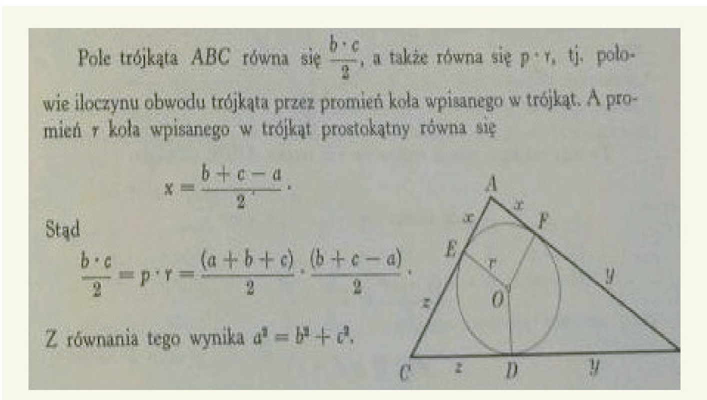

Figura 2.17: Diagrama de Jack Oliver

Assim, área do triângulo é calculada das duas formas seguintes:

$$p \cdot (p - c) = \frac{ab}{2} \Longleftrightarrow (a + b + c) \cdot (a + b - c) = 2ab$$

$$\Longleftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

É interessante observar que uma demonstração idêntica apareceu em uma edição da revista polonesa *Sladami Pitagorasa*, de 1988, por *Szczepan Jelenski*:



Pole trójkąta $ABC$ równa się $\frac{b \cdot c}{2}$, a także równa się $p \cdot r$, tj. połowie iloczynu obwodu trójkąta przez promień koła wpisanego w trójkąt. A promień $r$ koła wpisanego w trójkąt prostokątny równa się

$$x = \frac{b + c - a}{2}.$$

Stąd

$$\frac{b \cdot c}{2} = p \cdot r = \frac{(a + b + c)}{2} \cdot \frac{(b + c - a)}{2}.$$

Z równania tego wynika $a^2 = b^2 + c^2$.



Figura 2.18: Edição polonesa que apareceu uma demonstração idêntica a de Jack Oliver

Jelenski atribui a prova a *Möllmann* sem mencionar uma fonte ou uma data.

### 2.3.5 Por Adam Rose

Esta é a demonstração de *Adam Rose* publicada na página eletrônica http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml em setembro de 2004.

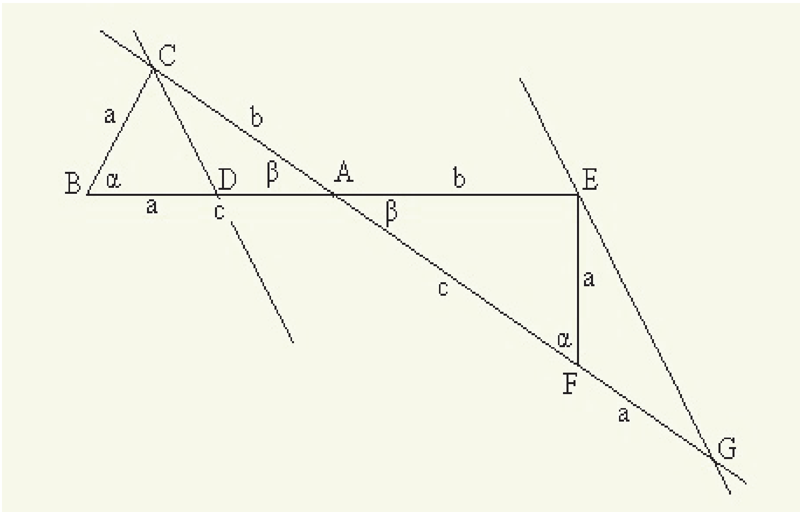



Figura 2.19: Diagrama de Adam Rose

Esquema da demonstração:

- **Passo 1:** Começamos com dois triângulos retângulos congruentes $\triangle ABC$ e $\triangle AFE$, com $A$ intersecção de $BE$ e $CF$.
- **Passo 2:** Marcamos $D$ em $AB$ e $G$ sobre a extensão de $AF$, de tal forma que $BC = BD = FG = EF$.
- **Passo 3:** Observamos que triângulo $\triangle BCD$ é isósceles, portanto, o ângulo $B\widehat{C}D = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$.
- **Passo 4:** Como o ângulo $B\widehat{C}A$ é reto, então o ângulo $A\widehat{C}D = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.
- **Passo 5:** Observamos que ângulo $A\widehat{F}E$ é exterior ao triângulo $\triangle EFG$, logo $A\widehat{F}E = F\widehat{E}G + F\widehat{G}E$.
- **Passo 6:** Como o triângulo $\triangle EFG$ isósceles, temos $A\widehat{G}E = F\widehat{G}E = \dfrac{\alpha}{2}$.

- **Passo 7:** Finalmente, temos agora duas linhas de $CD$ e $EG$ atravessado por $CG$ com dois ângulos internos alternos, $A\widehat{C}D$ e $A\widehat{G}E$, congruentes. Por conseguinte, $CD$ é paralelo a $EG$.

Agora basta observar que os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle AGE$ são semelhantes e daí

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AG} \Longleftrightarrow \frac{b}{(c-a)} = \frac{(c+a)}{b} \Longleftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

## 2.4 Generalizações do Teorema de Pitágoras

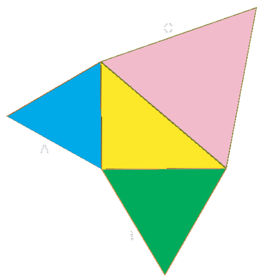
### 2.4.1 Generalização de Euclides

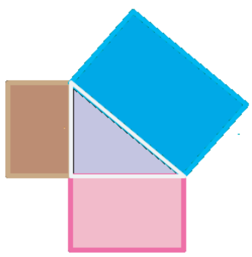
Nesta seção vamos trabalhar com a proposição 31 do livro VI dos *Elementos* de Euclides que apresenta uma generalização do Teorema de Pitágoras estendendo-o ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie.

**Definição 2.1** *Dizemos que duas* ***figuras*** $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{F}'$ *são* ***semelhantes*** *se entre elas há uma proporção, ou seja, se existe uma correspondência biunívoca* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ *tal que* $\dfrac{X'Y'}{XY} = r$*, para quaisquer dois pontos* $X$ *e* $Y$ *em* $\mathcal{F}$*, onde* $\varphi(X) = X'$ *e* $\varphi(Y) = Y'$*. Neste caso, a constante* $r$ *é chamada* ***razão de semelhança****.*

Nas figuras abaixo apresentamos alguns casos da generalização de Euclides para figuras semelhantes:

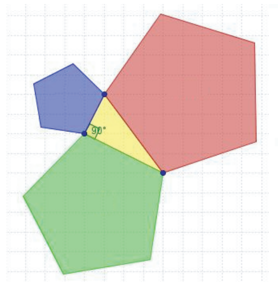
"A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos."





"A área de um retângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos retângulos semelhantes ao primeiro construídos sobre os catetos."

"A área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre os catetos."



### 2.4.2 Generalização de Thabit ibn-Qurra (séc. IX)

*Thabit ibn Qurra* (826 a 901) nasceu em Harran e é considerado o melhor geômetra do mundo islâmico. Dentre seus feitos, há trabalhos sobre trigonometria esférica e uma generalização do Teorema de Pitágoras.

Thabit considerou um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em $A$ qualquer e construiu três quadrados sobre seus lados.

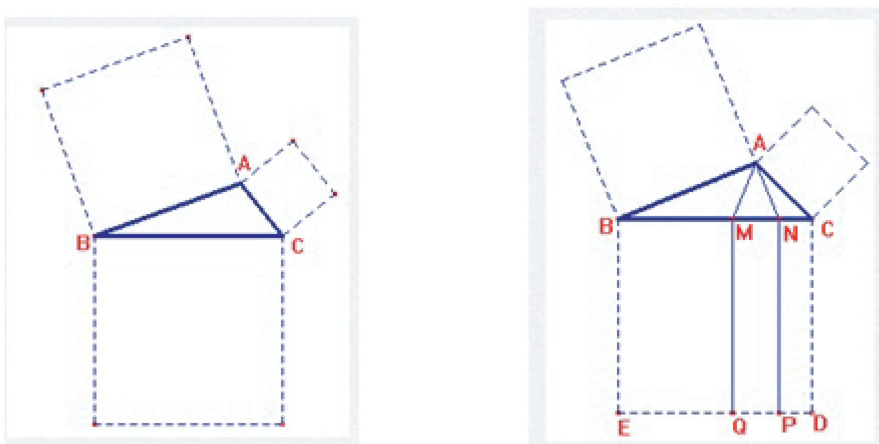



Figura 2.20: Quadrados a partir do triângulo central $\triangle ABC$ e a generalização do teorema

Em seguida considerou $M$ e $N$ os pontos de $BC$ tais que os ângulos $B\widehat{M}A$ e $C\widehat{N}A$ fossem iguais ao ângulo $B\widehat{A}C$; e considerou $P$ e $Q$ as projeções de $M$ e $N$ sobre $DE$.

Nessas condições verificou que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados $AB$ e $AC$ é igual à soma das áreas dos retângulos $BMQE$ e $NCDP$.

Assim, obteve

$$AB^2 + AC^2 = (BM + NC) \cdot BC.$$

### 2.4.3 Generalizando Geral

De acordo com o enunciado do Teorema de Pitágoras, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Agora será demonstrado que esse resultado pode ser generalizado para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. Para isso, vamos considerar figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ e $c$ .

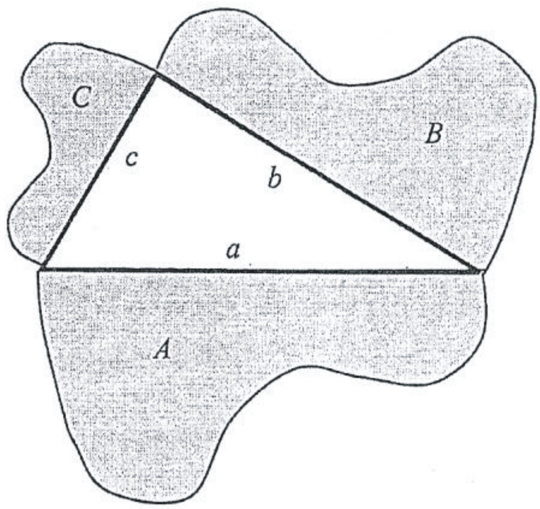



Figura 2.21: Figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo

Sejam $A$ , $B$ e $C$ as áreas dessas figuras, conforme está indicado na figura acima. Pela propriedade da razão entre áreas de figuras semelhantes, sabemos que ela é igual ao quadrado da razão de semelhança. Daí temos :

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} \quad \text{e} \quad \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Da propriedade das proporções $\dfrac{B}{b^2} = \dfrac{C}{c^2} = \dfrac{B+C}{b^2+c^2}$ e daí obtemos

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$.

Logo, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

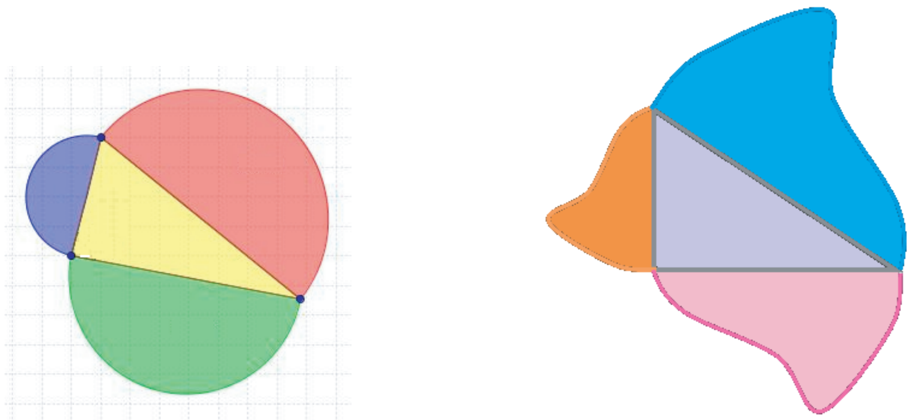


Figura 2.22: Figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa e os catetos

**Observação:**

A recíproca do teorema de Pitágoras também é verdadeira, ou seja, vale a afirmação:

*"Se num triângulo a área do quadrado sobre um dos lados for igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo é um ângulo reto."*

A afirmação ainda pode ser escrita da seguinte maneira, cuja demonstração pode ser provada utilizando a lei dos cossenos.

"Dado um triângulo com lados $a$, $b$ e $c$ tais que $a^2 + b^2 = c^2$, então o ângulo entre os lados $a$ e $b$ mede 90°".

# Capítulo 3

# Aplicações do Teorema de Pitágoras

O objetivo deste capítulo é apresentar aplicações do Teorema de Pitágoras em Geometria e em outras áreas. Também apresentamos sugestões de softwares matemáticos e oficinas que podem auxiliar no ensino deste teorema.

As figuras foram retiradas das seguintes páginas eletrônicas:

http://denifazendocomarte.blogspot.com.br/2011/03/teorema-de-pitagoras-e-o-origami.html

http://www.uff.br/cdme/tangrans_pitagoricos_eletronico/index.html

www.prof2000.pt/users/hjco/pitagora/pg000007.htm

www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babilonyan_Pythagoras.html

http://www.reitoria.uri.br/~vivencias/Numero$_0$10$/artigos/artigos_vivencias_10/m1.htm$

http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2006

http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAIXQAK/demonstracao-teorema-pitagoras

## 3.1 Aplicações em Geometria

### 3.1.1 Diagonal de um Quadrado

Uma das primeiras aplicações do Teorema de Pitágoras ocorreu ainda na escola pitagórica. Este fato levou a muitas discussões entre os discípulos de Pitágoras, pois os mesmos acreditavam só existirem e serem suficiente para a matemática, os números inteiros.

Foi a partir desta aplicação feita em um quadrado de lado 1 que os pitagóricos descobriram a existência do primeiro número irracional, o $\sqrt{2}$.

Consideremos o quadrado $ABCD$, abaixo, de lado $L$:

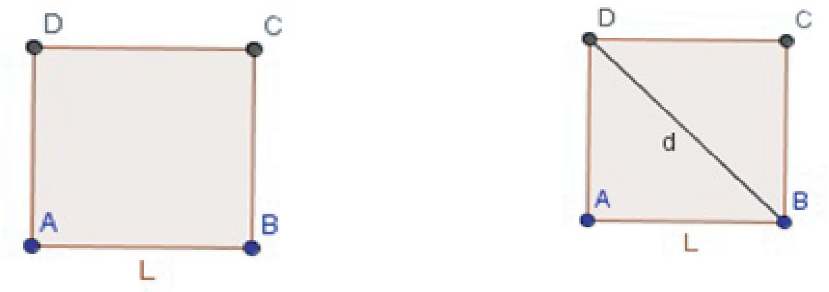



Figura 3.1: Quadrado $ABCD$ e sua diagonal

Ao traçarmos sua diagonal, $DB = d$, formamos dois triângulos retângulos $\triangle DBA$ e $\triangle DBC$.

Aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle DBA$, onde $AB = AD = L$, obtemos:

$$d^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \overset{d>0}{\Longrightarrow} d = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}.$$

Logo, para se calcular a diagonal de um quadrado a partir da medida de seu lado podemos utilizar a relação $d = L\sqrt{2}$.

### 3.1.2 Altura de um Triângulo Equilátero

Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero de lados $L$:

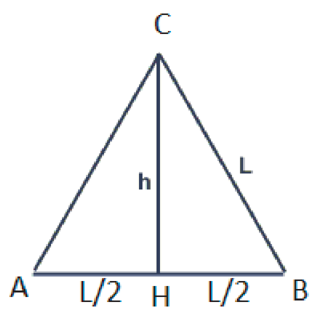



Figura 3.2: Triângulo $ABC$ e sua altura

Traçamos a altura relativa ao lado $AB$, formando os triângulos retângulos $\triangle ACH$ e $\triangle BCH$.

Pelas propriedades do triângulo equilátero, temos: $AH = HB = \dfrac{L}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle ACH$, obtemos

$$AC^2 = CH^2 + HA^2 \iff L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \iff h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4}.$$

Logo,

$$h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, para se calcular a altura de um triângulo equilátero a partir da medida de seu lado podemos utilizar a relação $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$.

### 3.1.3 Diagonal de um Paralelepípedo Retângulo

Consideremos o paralelepípedo $ABECHFGI$, como na Figura 3.3 :

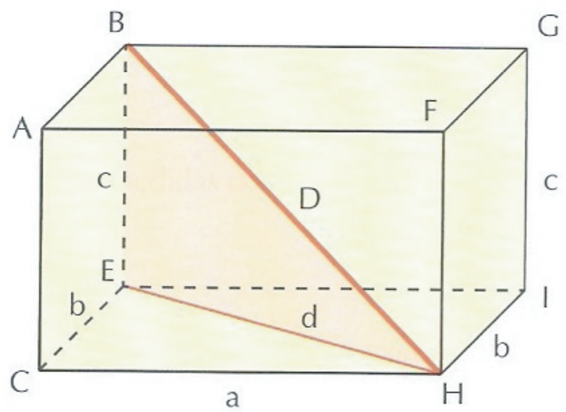



Figura 3.3: Paralelepípedo retângulo

O triângulo $\triangle CEH$ formado com a diagonal $EH$ e lados $CE$ e $CH$ da base $CEIH$ é retângulo com ângulo reto $E\widehat{C}H$. Aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, obtemos

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Em seguida consideramos o triângulo $\triangle BEH$ que também é retângulo com ângulo reto $B\widehat{E}H$. Aplicando novamente o teorema de Pitágoras, obtemos

$$D = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Diagonal de um Cubo

Como o cubo é um paralelepípedo retângulo de arestas com mesma medidas, podemos então calcular sua diagonal aplicando o caso anterior fazendo $a = b = c$.

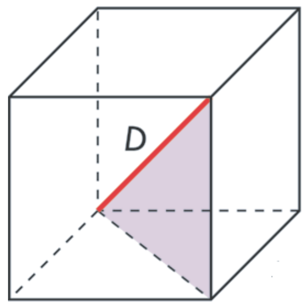



Figura 3.4: Cubo

Logo, a diagonal do cubo de lado $a$ é dada por

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

### 3.1.4 Relação entre o Lado e as Diagonais de um Losango

O losango é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos e congruentes e duas diagonais que são perpendiculares e se cruzam exatamente no ponto médio de cada uma.

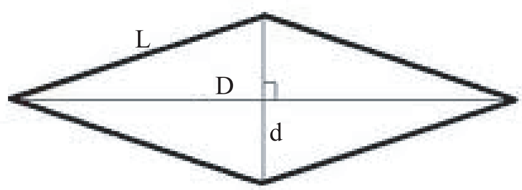



Figura 3.5: Losango

Denotemos por $D$ a diagonal maior, $d$ a diagonal menor e $L$ o lado do losango.

A partir do traçado das diagonais do losango, formam-se quatro triângulos retângulos congruentes, onde aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$L^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} \overset{L>0}{\Longrightarrow} L = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{2}.$$

Portanto, para se calcular o lado de um losango a partir de suas diagonais, basta usar a relação $L = \dfrac{\sqrt{D^2 + d^2}}{2}$.

### 3.1.5 Distância entre dois Pontos no Plano Cartesiano

Consideremos os pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ no plano cartesiano. A distância entre $P$ e $Q$ pode ser obtida facilmente utilizando o teorema de Pitágoras.

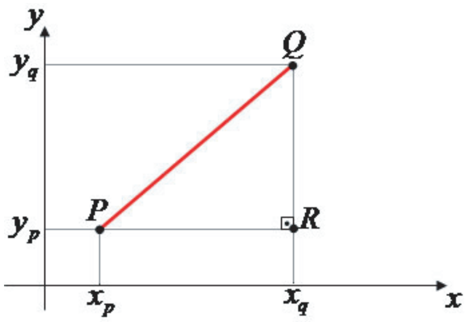



Figura 3.6: Distância entre $P$ e $Q$

Como o triângulo $\triangle PQR$ é retângulo em $\widehat{R}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Longrightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Uma Relação Fundamental da Trigonometria

Consideremos o círculo unitário centrado na origem de um sistema cartesiano e um ponto $B$ do círculo, cujas coordenadas polares são (cos a, sen a), como mostra a figura.

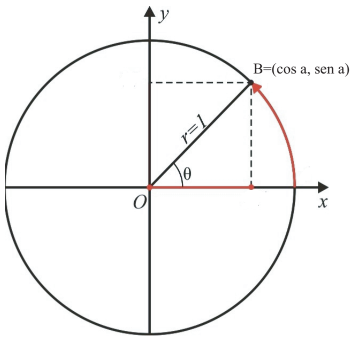



Figura 3.7: Ciclo trigonométrico

Sabemos que distância de $O$ a $B$ é igual a 1, logo temos:

$$1 = d(O, B) = \cos^2 a + \text{sen}^2 a.$$

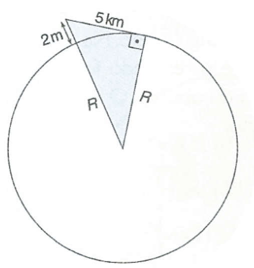
## 3.2 Outras Aplicações

### 3.2.1 Raio da Terra

Há cerca de 2000 anos, matemáticos e astrônomos procuravam desenvolver métodos para calcular o raio da Terra. Muitos métodos foram desenvolvidos, mas o método que ganhou maior destaque foi um que utilizava o Teorema de Pitágoras.

Vejamos a idéia: inicialmente imaginemos uma praia, se olharmos o mar veremos a linha do horizonte, que é o lugar onde o mar e o céu parecem encontrar. Suponhamos primeiro que estamos na praia a 2 m de altura e que um barco saia em linha reta numa rota perpendicular a linha da praia.

Em seguida, medimos a distância entre a praia e o horizonte, supondo que esta distância seja 5 km fica fácil calcular o raio da Terra, veja a figura ao lado. O cálculo é simples:




$$5^2 + R^2 = (0,002 + R)^2$$

$$\iff 25 + R^2 = 0,000004 + 0,004R + R^2$$

$$\iff R = \frac{24,999996}{0,004} \cong 6250.$$

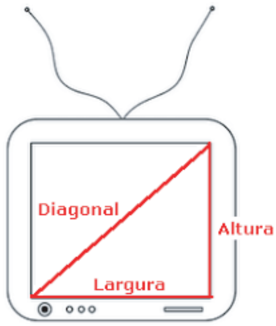
Assim, conclui-se que o raio da Terra é aproximadamente 6250 km. Métodos mais precisos e modernos mostram que o valor do raio é 6375 km.

### 3.2.2 Área da Tela de uma Televisão

Este problema é baseado no artigo de *Daniel Teodoro* e *Robinson Nelson dos Santos* na RPM [17] número 70.

Se a tela de uma TV de LCD mede 80 cm de largura e a respectiva diagonal mede 100 cm, qual é área da tela da TV?

A solução é simples. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a altura $h$ do aparelho; conhecendo as medidas da diagonal e a largura:




$$100^2 = h^2 + 80^2,$$

de onde teremos:

$$h = 60cm.$$

Consequentemente, a área da tela da TV é

$$60 \times 80 = 4.800cm^2.$$

### 3.2.3 Aplicações na Biologia

As aplicações abaixo são apresentadas no livro *Introdução a Matemática para Biocientistas* [2].

#### Alavancas dos Ossos de um Braço

Abaixo são representadas as forças que agem sobre um braço, a força $F$ é decomposta em duas partes:

- Uma componente $F_1$, perpendicular ao antebraço.
- Uma componente $F_2$, paralela ao antebraço.

A força $F_1$ é chamada de **força de cisalhamento**.

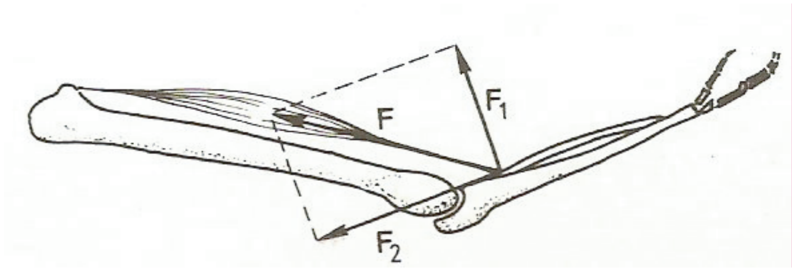



Figura 3.8: Movimentos dos ossos do braço

Para se calcular o módulo da **força resultante** $F$, aplica-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle FF_1F_2$, formado pelas componentes de $F$ e a própria força $F$, como na Figura 3.8.

### Plano Inclinado Gerado por um Corpo

Na figura 3.9 temos outra vez uma força atuando sobre um corpo.

Agora temos $F_1$ a força que empurra o corpo para baixo (**componente horizontal da força peso**), $F_2$ a força perpendicular ao chão (**componente vertical da força peso**) e $F$, a soma dos vetores $F_1$ e $F_2$, a força gravitacional (também chamada de **força peso**).

Neste caso utiliza-se o Teorema de Pitágoras determinar o módulo da força $F$, e isto é feito aplicando-o no triângulo retângulo $\triangle FF_1F_2$ da Figura 3.9 formado pelos vetores $F_1, F_2$ e $F$.

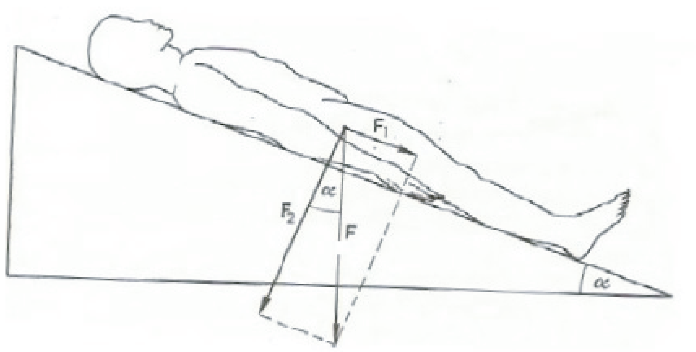



Figura 3.9: O plano inclinado

## 3.3 O Teorema de Pitágoras e alguns *softwares*

Para tornar o aprendizado mais prazeroso é conveniente que o professor utilize de recursos diferentes e atrativos para os alunos.

Pensando assim, apresentaremos algumas aplicações e confirmações do Teorema utilizando *softwares* de fácil acesso.

A utilização destes *softwares* leva muitas vezes ao processo de erros e acertos. É importante que isso aconteça, sempre com a presença de um professor para que o aluno sinta-se seguro e motivado a tentar novamente, pois, muitas vezes, a partir da correção de erros se chega a um resultado esperado.

### 3.3.1 Desenhando um triângulo Pitagórico com o Slogo

O LOGO é uma linguagem de programação que propicia um ambiente de aprendizagem baseado em resolução de problemas.

O SuperLOGO envolve uma tartaruga gráfica, que é um robô pronto para responder aos comandos do usuário. Existem diversos programas na linguagem LOGO, porém com outras animações que substituem o uso da Tartaruga na tela (SMFLOGO, XLOGO).

No SuperLOGO os comandos são de fácil acesso. Consistem em ensinar a Tartaruga em seu ambiente de trabalho a fazer algum procedimento. Oferecem oportunidades para que o aluno ensine a tartaruga e entenda seus erros, buscando uma nova solução para o problema, investigando e explorando possibilidades (aprendizagem pela descoberta).

O SuperLOGO está disponível gratuitamente para *download* na página eletrônica:

http://pan.nied.unicamp.br/softwares/software_detalhes.php?id=33

Para utilizar a linguagem LOGO no desenho de um polígono qualquer é preciso estabelecer as medidas dos lados ($x$) e as medidas dos ângulos externos ($y$), já que a "tartaruga" necessita dos comandos de para frente $x$ (**pd x**) e para direita $y$ (**pd y**).

Neste caso, as medidas dos lados serão multiplicadas por 100, para que seja possível fazer o desenho na tela do LOGO, ficando as medidas dos lados do triângulo a ser desenhado 300, 400 e 500 (sabendo que 3, 4 e 5 representam um terno Pitagórico). É importante ressaltar que neste caso a figura é semelhante à proposta, de lados 3, 4 e 5, uma vez que os lados são proporcionais aos do triângulo original e, portanto , os ângulos entre os lados ficam inalterados.

Considere o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em $A$ (a medida do ângulo $A$ é igual a 90 graus), sendo **b** e **c** as medidas dos catetos e **a** a medida da hipotenusa. É preciso que se estabeleçam as medidas dos ângulos B e C em função das medidas dos lados **a**,**b** e **c**.

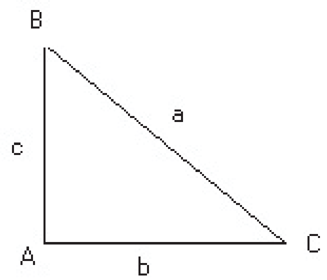



Figura 3.10: Triângulo $\triangle ABC$

Assim, pela definição de seno de um ângulo, tem-se $\text{sen}(B) = \dfrac{b}{a}$ e $\text{sen}(C) = \dfrac{c}{a}$ .

Para determinar, por exemplo, a medida do ângulo B, conhecidos os valores do cateto oposto e da hipotenusa, basta calcular o arco seno do valor encontrado para o seno do ângulo. Assim, o giro da tartaruga para a direita deverá ser de $180 - \text{arc sen}\dfrac{b}{a}$, para a determinação do ângulo interno B.

A seguir temos os comando necessários para se desenhar um triângulo retângulo:

$$pd300$$

$$pd180 - arcsen0.8$$

$$pf500$$

$$pd180 - arcsen0.6$$

$$pf400$$

E tem-se o seguinte triângulo formado:

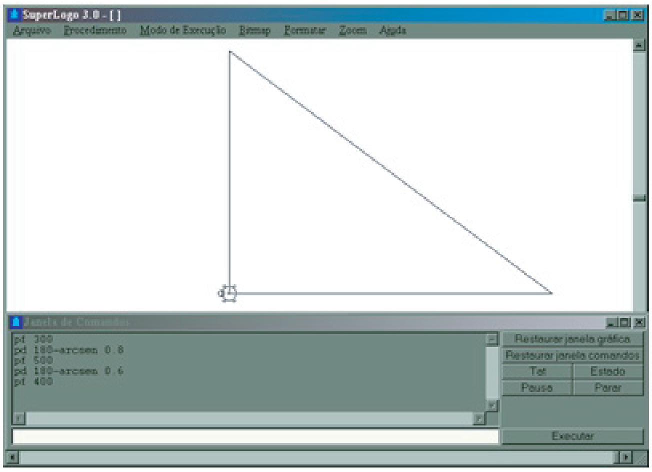



Figura 3.11: Tela do SuperLogo

### 3.3.2 O Teorema de Pitágoras por meio do Wingeom

O Wingeom é um *software* matemático de fácil manipulação, que permite ao aluno visualizar diferentes objetos da geometria a partir de sua própria construção.

Esse *software* encontra-se disponível gratuitamente na página eletrônica:

http://math.exeter.edu/rparris.

Demonstração a partir da área do pentágono considerada como figura básica:

- Clicar no menu "janela" e selecionar a opção "2-dim", será criada uma janela gráfica. Clicar em "Unidades-Aleatório-Triângulo retângulo" e um triângulo retângulo qualquer será construído.
- Clicar em "Unidades-Polígono-Anexar-Regular", para anexar polígonos aos lados do triângulo retângulo.
- Quando clicar em "Regular" aparecerá uma janela na qual deve-se digitar "5" na caixa "polígono regular com ... lados" e digitar a lista "$BC$, $AC$, $CB$" na caixa "aos lados" e clicar em "Anexar".
- Seguindo os procedimentos vamos provar que a área do pentágono $ADEFB$ é igual a soma das áreas dos pentágonos $BJKLC$ e $CGHIA$. Como indicado na figura abaixo:

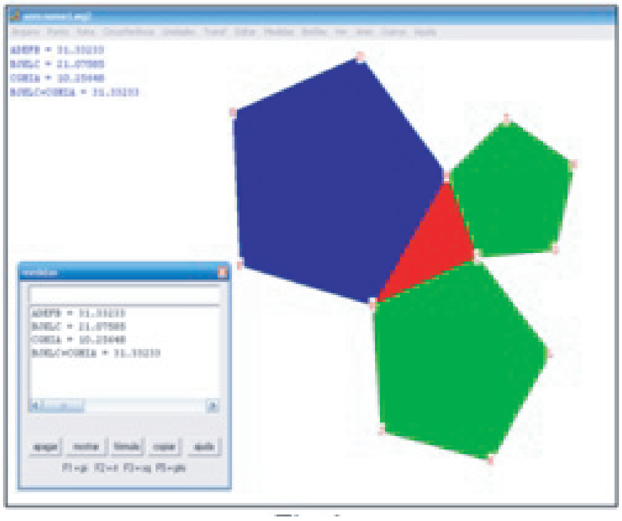


Figura 3.12: Resultado no wingeon

- A partir dos valores encontrados para as áreas no *software*, pode-se provar o Teorema de Pitágoras: $ADEFB = BJKLC + CGHIA$

  $31,33233 = 21,07585 + 10,25648$

- Tomando a fórmula convencional para o cálculo da área do pentágono que é $A = \frac{5l^2}{4} cot \frac{\pi}{5}$, pode-se demonstrar a relação $a^2 = b^2 + c^2$ do Teorema de Pitágoras, sendo $a$, a hipotenusa, $b$ e $c$, os demais catetos. A área do pentágono que está sobre a hipotenusa $A_1 = \frac{5a^2}{4} \cot \frac{\pi}{5}$ vale a soma das áreas dos pentágonos que estão sobre os catetos $A_2 = \frac{5b^2}{4} \cot \frac{\pi}{5}$ e $A_3 = \frac{5c^2}{4} \cot \frac{\pi}{5}$, isto é,

$$\frac{5a^2}{4} \cot \frac{\pi}{5} = \frac{5b^2}{4} \cot \frac{\pi}{5} + \frac{5c^2}{4} \cot \frac{\pi}{5}$$
$$\iff \frac{5}{4} \cot \frac{\pi}{5}(a^2) = \frac{5}{4} cot \frac{\pi}{5}(b^2 + c^2) \iff a^2 = b^2 + c^2.$$

### 3.3.3 Teorema de Pitágoras através do GeoGebra

O GeoGebra é um *software* livre que reúne geometria, álgebra e cálculo. É um sistema que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificados dinamicamente.

Por outro lado, pode-se também inserir equações e coordenadas diretamente utilizando a janela de comandos. Assim, o GeoGebra pode trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos e permite determinar derivadas e integrais de funções, além de oferecer um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos. Qualquer pessoa pode obter este forte aliado do ensino de Matemática através do seguinte endereço eletrônico:

http://www.geogebra.org/cms/

Esta atividade proposta trabalha o conceito de equivalência de área entre figuras planas, visto que tal idéia é a base do raciocínio utilizado em algumas das clássicas demonstrações do Teorema de Pitágoras e evidenciam a utilização de programas de Geometria Dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de Matemática básica.

O objetivo da atividade é visualizar e demonstrar o Teorema de Pitágoras através da construção de um quebra-cabeça composto por cinco peças a saber: quatro triângulos retângulos congruentes de catetos $a$ e $b$ e hipotenusa $c$. Montar com estas peças, utilizando movimentos de rotação e translação, um quadrado maior de lado igual a soma dos catetos, para concluir o resultado.

Os passos de 1 a 12 são dedicados à construção de um triângulo retângulo de catetos pré-definidos.

**Passo 1:** No menu **Exibir**, selecione a opção **Malha** e desabilite as opções **Eixo** e **Janela de álgebra**.

**Passo 2:** Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento. Em seguida, digite a letra **a**, o GeoGebra irá rotular o segmento criado com o nome **a**. Repita este procedimento e crie outro segmento com o nome de **b**. Os segmentos criados podem ter medidas quaisquer. (Sugestão: Use os pontos da malha para facilitar a construção)

**Passo 3:** Selecione a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), clique sobre um ponto qualquer da malha (centro da circunferência) e o GeoGebra irá pedir para que você forneça o raio, basta digitar a letra correspondente a um dos segmentos que foram nomeados pelo programa, por exemplo, digite a.

**Passo 4:** Clique na janela 1, selecione **ponteiro** , clique sobre o centro da circunferência e em seguida, digite a letra **O**, nomeando assim, este ponto.

**Passo 5:** Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento ligando o ponto **O** até um ponto da circunferência, que chamaremos de **A**.

**Passo 6:** Clique com o botão direito do mouse sobre o centro da circunferência e selecione a opção **Propriedades**, em seguida escolha a janela **cor** e mude a cor do ponto para vermelho através da paleta de cores.

**Passo 7:** Clique na janela 4, selecione a opção **Reta perpendicular**, clique sobre o ponto**A** e em seguida sobre o segmento **OA** . Construímos assim, uma reta perpendicular ao segmento **OA** passando pelo ponto **A** .

**Passo 8:** Usando a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), construa uma circunferência com centro**A** e raio **b**.

**Passo 9:** Clique na janela 2, selecione a opção **Intersecção de dois objetos** e clique sobre o círculo do passo 9 e sobre a reta perpendicular do passo 8. Encontraremos dois pontos na intersecção destes objetos, escolha um deles, clique com o botão direito do mouse sobre o mesmo, escolha a opção **Renomear** e altere o nome do ponto para **B**.

**Passo 10:** Clique na janela 3, selecione a opção **Polígono** e clique em seqüência sobre os pontos **O** (ponto inicial), **A**, **B** e novamente no ponto **O** (ponto final). Assim, cria-se um triângulo retângulo cujos catetos possuem medidas **a** e **b**.

**Passo 11:** Esconda todas as construções auxiliares, inclusive o ponto **B**, para isto, clique sobre as figuras com o botão direito do mouse e desabilite a opção **exibir objeto**. Deixe apenas o polígono visível.

**Passo 12:** Use o ponto **A** para rotacionar o triângulo e o ponto **O** para transladá-lo.

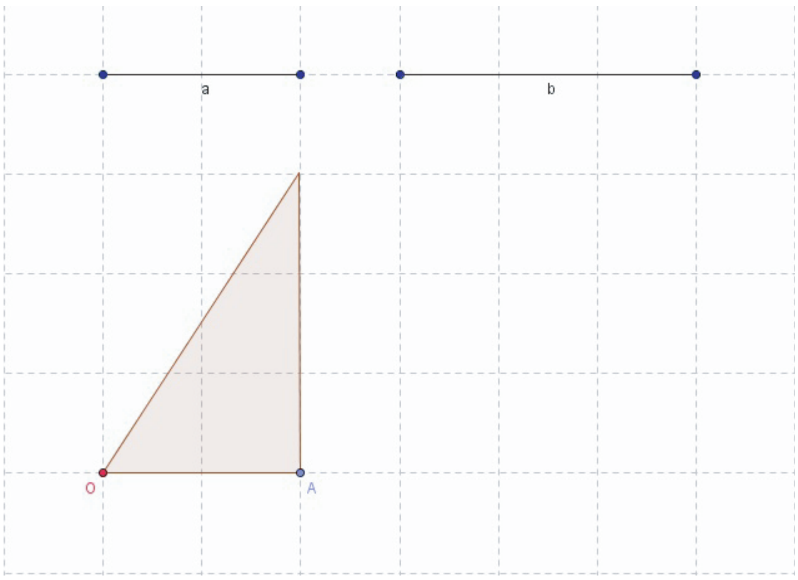



Figura 3.13: Triângulo formado

**Passo 13:** Repita o procedimento de modo a obter ao todo, quatro triângulos retângulos idênticos (catetos a e b).

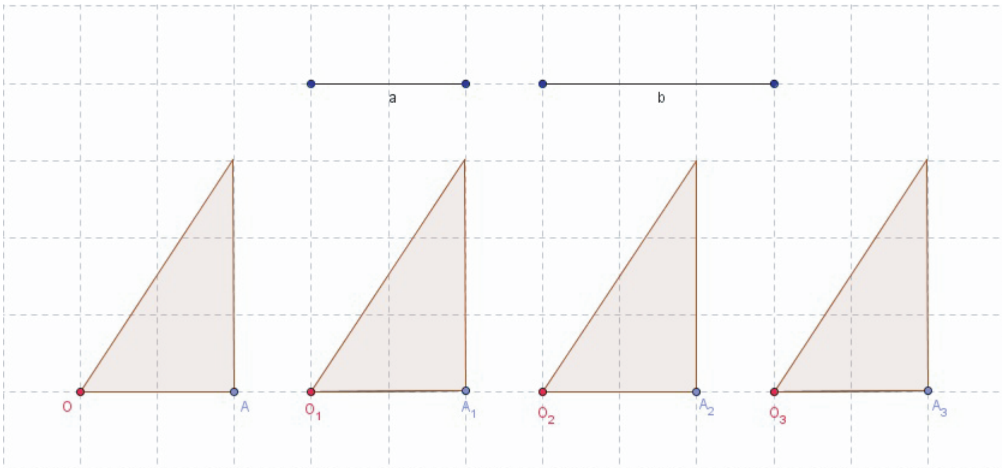



Figura 3.14: Triângulos retângulos congruentes

**Passo 14:** Com o botão direito do mouse, clique sobre a hipotenusa de um dos triângulos, selecione a opção **Renomear** e chame-a de **c**.

**Passo 15:** Utilizando as opções **Círculo dados centro e raio** (janela 5) e **Reta perpendicular** (janela 4), construa um quadrado cujo lado tem medida **c**, obtendo a figura abaixo.

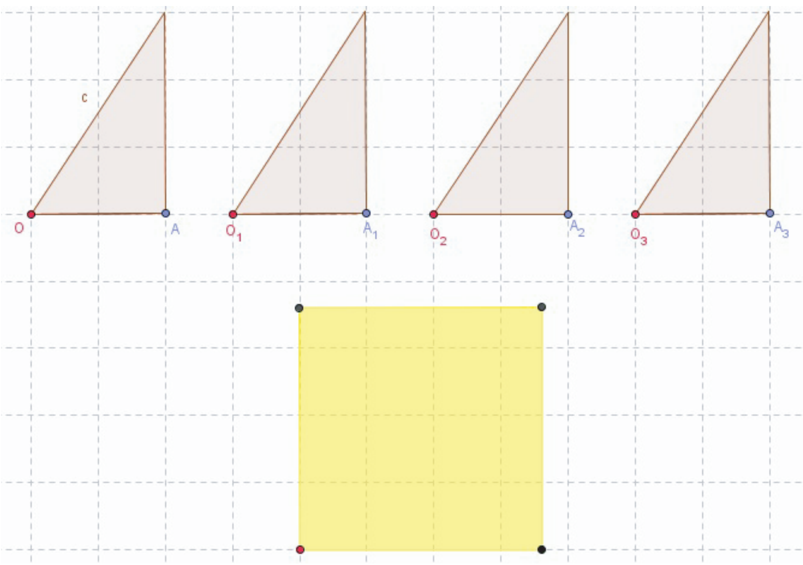



Figura 3.15: Quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo

**Passo 16:** Movimentando os triângulos de modo a encaixar as hipotenusas nos lados do quadrado obtém-se a próxima figura.

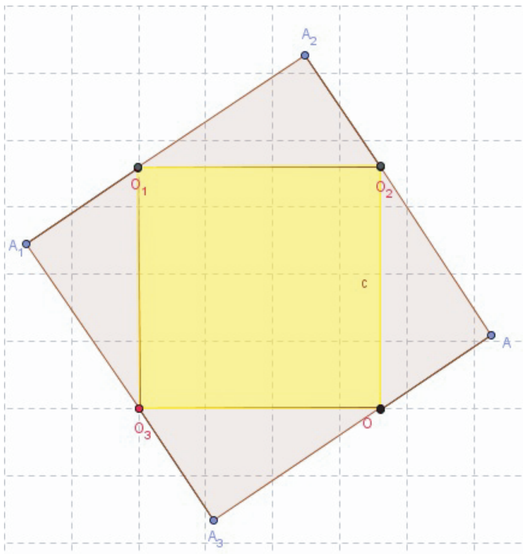



Figura 3.16: Quadrado de lado a +b

Desta forma, obtemos um quadrado de lado $(a + b)$ e cuja área é $A = (a + b)^2$.

Por outro lado, a figura é composta por um quadrado de lado $c$ e por quatro triângulos retângulos de catetos $a$ e $b$, logo, sua área também pode ser expressa por:

$$A = c^2 + 4\frac{ab}{2}.$$

De acordo com as observações feitas nesta atividade, percebemos que:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \Longleftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Logo, $a^2 + b^2 = c^2$, que é o Teorema de Pitágoras.

### 3.3.4 Demonstração de Perigal feita no GeoGebra

Perigal foi um matemático amador, que atribui a si mesmo, como sendo a maior e mais importante obra de sua vida, a dissecação do quadrado para provar a veracidade do Teorema de Pitágoras, fato que ele descobriu por acaso, pois na verdade ele estava na ocasião, tentando descobrir a solução para a quadratura do círculo.

Sua prova consta da divisão em partes menores do quadrado maior de forma que reorganizadas formam os quadriláteros menores. Esta foi a ideia de Pitágoras. Mas Perigal teve a preocupação de fazer as suas dissecações olhando os casos em que os catetos tem a mesma medida e quando têm medidas diferentes.

O objetivo da atividade a seguir é realizar uma verificação do Teorema de Pitágoras a partir da construção de um quebra-cabeças, composto por cinco peças: quatro quadriláteros obtidos da partição de um quadrado de lado **b** e um quadrado de lado **c**, onde **b** e **c** são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo ($b > c$) e **a** é a medida de sua hipotenusa.

Com movimentos de translação será montado um quadrado maior, de lado **a**. O resultado será concluído explorando o conceito de equivalência de áreas entre figuras planas. Este princípio é a base de demonstrações clássicas do Teorema de Pitágoras mencionadas anteriormente, dentre elas a demonstração de Perigal (1801-1898), que será apresentada a seguir.

Os nove primeiros passos referem-se à construção de um triângulo retângulo, a partir do qual serão construídos os quadrados e o Quebra-Cabeça de Perigal.

**Passo 1:** Na janela Disposições (à direita da tela, ver figura 3.17), clique em Geometria. Assim, serão automaticamente desabilitados Eixo e Janela de Álgebra. Clique no ícone referente à Malha (segundo ícone, abaixo da barra de ferramentas, à esquerda) para exibir a malha. Assim, a construção será executada numa janela como a da Figura 3.17.

**Passo 2:** Clique no terceiro ícone da barra de ferramentas, selecione a opção Segmento Definido por Dois Pontos, e construa dois segmentos. Em seguida, identifique cada um deles como $b$ e $c$. Para isto, clique na seta do primeiro ícone da barra de ferramentas (ponteiro), clique com o botão direito do mouse sobre cada segmento e habilite a opção Exibir Rótulo. Use a opção Renomear para identificar as medidas dos segmentos, que posteriormente serão as medidas dos catetos do triângulo retângulo. Sugestão: use os pontos da malha como referência para a construção dos segmentos e considere $b > c$.

**Passo 3:** Selecione no sexto ícone da barra de ferramentas a opção **Círculo dados Centro e Raio**. Escolha um ponto qualquer na malha para centro do círculo e forneça a medida $b$ para o raio.

**Passo 4:** Clique no primeiro ícone, selecione o **ponteiro**, clique, como o botão direito do mouse sobre o centro da circunferência e identifique este ponto por $C$.

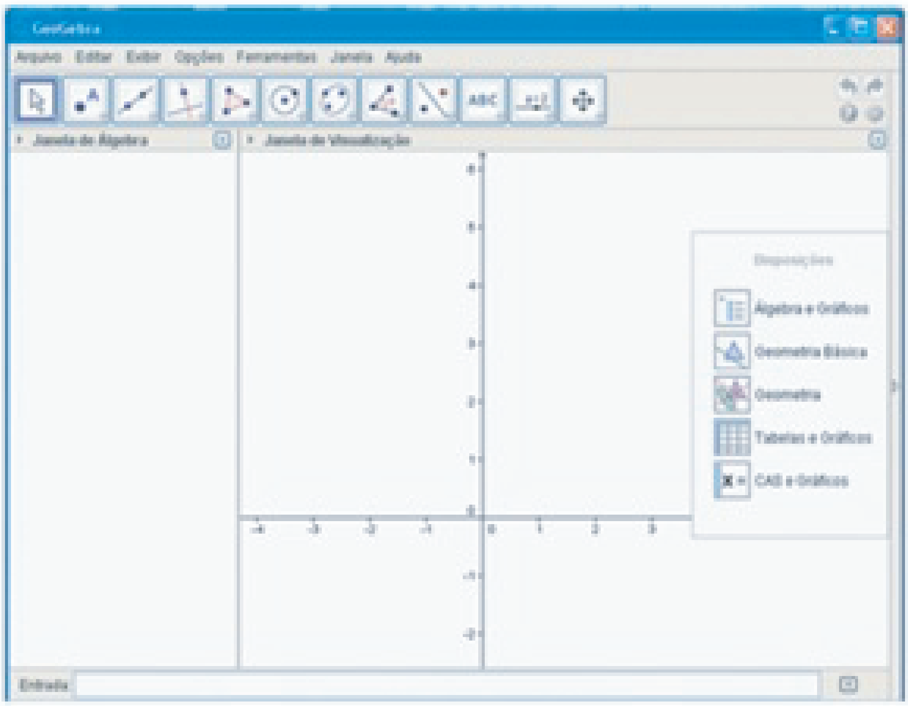



Figura 3.17: Tela no GeoGebra onde será feita a construção

**Passo 5:** Escolha o item **Segmento Definido por Dois Pontos** e construa um segmento ligando o ponto $O$ até um ponto da circunferência e chame-o de $A$.

**Passo 6:** Construa uma reta perpendicular ao segmento $OA$ passando pelo ponto $A$, selecionando a opção **Reta Perpendicular**, no quarto ícone da barra de ferramentas, clicando sobre o ponto $A$ e em seguida sobre o segmento $AC$.

**Passo 7:** Construa uma circunferência com centro em $A$ e raio $c$, usando a opção **Círculo Dados Centro e Raio**.

**Passo 8:** Selecione a opção **Intersecção de Dois Objetos**, no segundo ícone e clique sobre a circunferência do passo anterior e sobre a reta perpendicular. Escolha um dos dois pontos encontrados e nomeie-o como $B$.

**Passo 9:** No quinto ícone, escolha a opção **Polígonos** e clique sequencialmente sobre os pontos $C, A$ e $B$ e novamente em $C$. Assim, obtém-se o triângulo retângulo de catetos medindo $b$ e $c$ como mostra a Figura 3.18.

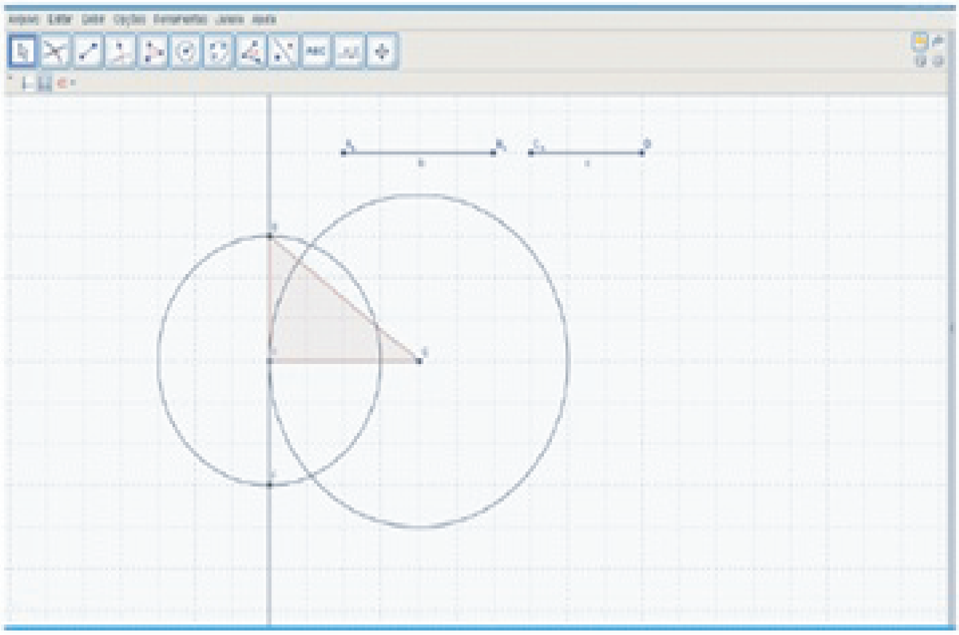


Figura 3.18: Triângulo retângulo obtido

**Passo 10:** A partir desse ponto, o objetivo é trabalhar apenas com o triângulo retângulo. Assim esconda as construções auxiliares, clicando sobre os objetos com o botão direito do mouse e desmarcando a opção **Exibir Objeto**.

**Passo 11:** Sobre cada lado do triângulo retângulo, construa um quadrado. Para isso, selecione a opção **Polígono Regular**, no quinto ícone, clique nos pontos $C$ e $A$, nesta ordem e mantenha 4 na janela que se abre. Repita este procedimento para os outros lados do triângulo, clicando ordenadamente em $A$ e $B$ e em $B$ e $C$. Desabilite a opção **Malha**.

Os passos 12 a 17 referem-se à partição do quadrado referente ao maior cateto do triângulo retângulo, para a obtenção das peças do quebra-cabeça.

**Passo 12:** Encontre o centro do quadrado $ACHG$. Para isso, trace os segmentos $AH$ e $CG$ (diagonais do quadrado), determine sua intersecção e esconda os segmentos traçados (execute procedimentos análogos aqueles descritos nos passos 2, 8 e 10). O ponto $M$ é o ponto procurado.

**Passo 13:** Trace por $M$ uma reta paralela à hipotenusa do triângulo retângulo, escolhendo no quarto ícone a opção **Reta Paralela**. Clique no ponto $M$ e em seguida no segmento $BC$.

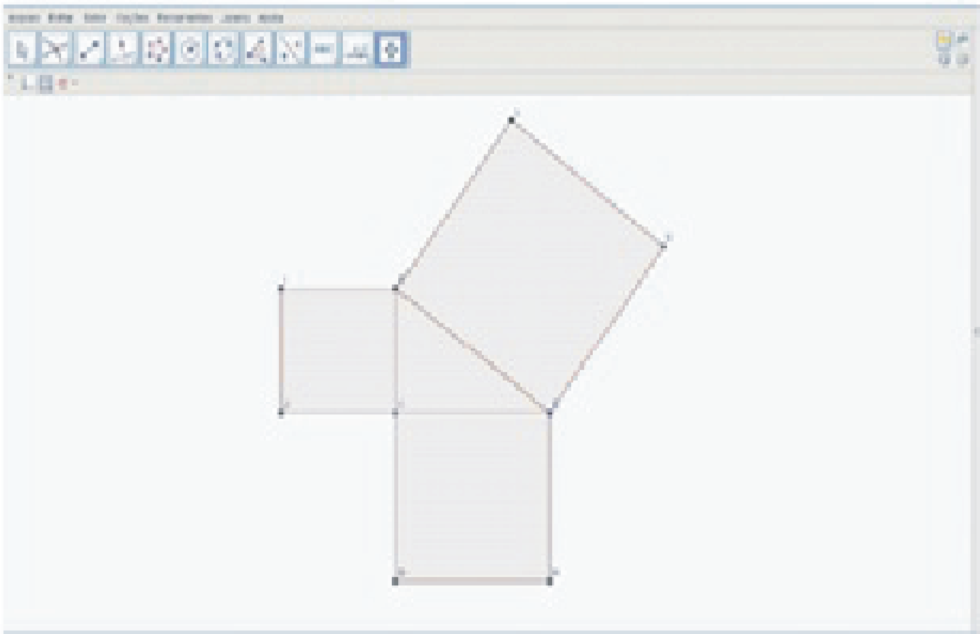


Figura 3.19: Passos 10 e 11

**Passo 14:** Trace por $M$ uma reta perpendicular à hipotenusa do triângulo retângulo, escolhendo agora a opção **Reta Perpendicular**, no quarto ícone. Clique novamente em $M$ e na hipotenusa $BC$.

**Passo 15:** Defina os pontos de intersecção das retas descritas acima com os lados do quadrado $ACHG$. Para isso, repita o procedimento descrito no passo 8.

**Passo 16:** Escolha a opção **Polígonos** e determine todos os polígonos definidos por estes pontos sobre os lados do quadrado $ACHG$ e pela intersecção entre as duas retas.

**Passo 17:** Esconda as retas traçadas nos passos 13 e 14 (passo 10) e todos os pontos da figura, clicando com o botão direito do mouse sobre cada ponto e desmarcando a opção **Exibir Objeto**.

**Passo 18:** Habilite a Janela de Álgebra, clicando em Exibir. Observe que na lista de Quadriláteros, eles estão numerados de 2 a 8, numa referência aos três quadrados e aos quadriláteros obtidos da partição do quadrado $ACHG$ (pol5, pol6, pol7, pol8). Clique em Polígono Rígido, no ícone referente a polígonos. Em seguida, clique sobre cada um dos polígonos numerados de 5 a 8 e sobre o polígono 3, na Janela Gráfica. Selecione o ponteiro e posicione cada peça sobre o polígono de origem. Novamente, esconda os pontos, desmarcando a opção Exibir Objeto (passo 17).

**Passo 19:** Agora é hora de colorir as peças. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre cada polígono numerado de 9 a 13 (peças do quebra-cabeça). Em Propriedades, escolha uma cor para cada polígono entre as opções de cores na paleta. Sugestão: use duas cores diferentes, uma para as quatro peças congruentes, obtidas da divisão do quadrado de lado $b$ e uma cor para o quadrado de lado $c$.

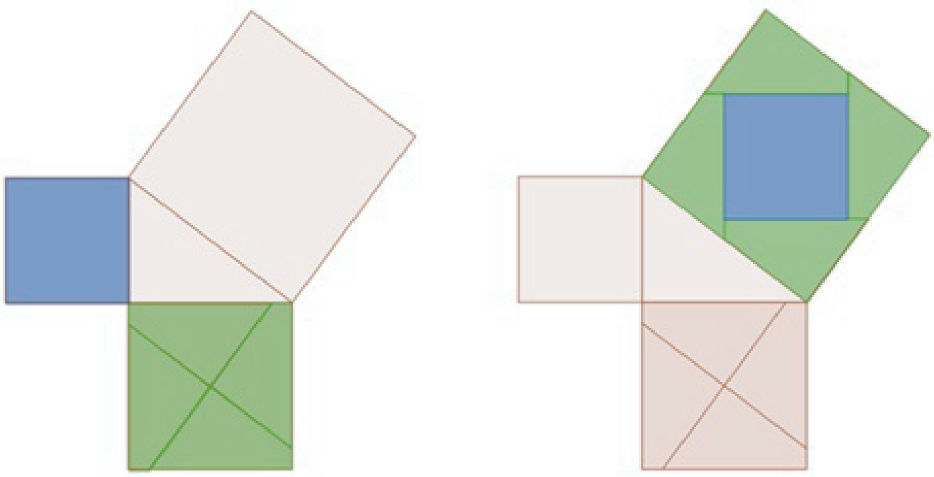


Figura 3.20: A demonstração de Perigal no GeoGebra

**Passo 20:** Finalmente, com movimentos simples de translação, mova todas as peças coloridas, com o ponteiro, para a região do quadrado construído sobre a hipotenusa, encaixando-as de modo a verificar a equivalência entre as áreas das cinco peças coloridas e da área do quadrado de lado a, construído sobre a hipotenusa. E assim se demonstra o Teorema de Pitágoras através de Perigal.

## 3.4 Oficinas Matemáticas para demonstrar o Teorema de Pitágoras

Serão apresentadas a seguir algumas atividades que poderão ser desenvolvidas em sala de aula, sempre com o auxílio do professor. É necessário que primeiro se faça uma análise com os estudantes sobre o Teorema que se quer provar. A maioria das atividades se baseiam na decomposição de figuras e comprovação através de áreas. Algumas destas atividades se transformam em quebra-cabeças divertidos.

Pode-se utilizar estas demonstrações para fazer uma revisão de alguns conceitos matemáticos tais como: semelhança e congruência de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo e construção com régua e compasso.

Após todos os participantes conseguirem montar uma solução para o quebra-cabeça proposto, chega-se ao momento da formalização: os critérios de corte das peças serão caracterizados e a demonstração de que elas se encaixam perfeitamente para dar a solução do problema proposto também será apresentada. Ao final de cada atividade, os participantes serão convidados a identificar os objetivos, as conclusões, quais conteúdos matemáticos foram abordados e quais são os pré-requisitos necessários para que eles utilizem estas atividades em suas salas de aula.

### 3.4.1 ATIVIDADE 1

#### Origami e o Teorema de Pitágoras

Utilize uma folha quadrada e siga as instruções até o final (obs: não recortar) para fazer uma demonstração simples do Teorema de Pitágoras, conforme as instruções.

1. Numa folha quadrada, dobre e desdobre as duas diagonais e mediatrizes. Depois, dobre dois triângulos (cantos) para trás.
2. O triângulo $x$ é um triângulo retângulo. Após as dobras, foram construídos dois quadrados sobre os catetos $b$ e $c$ desse triângulo. Antes de dobrar os outros dois cantos para trás, note que cada quadrado (amarelo) pode ser decomposto em dois triângulos exatamente iguais ao triângulo $x$.

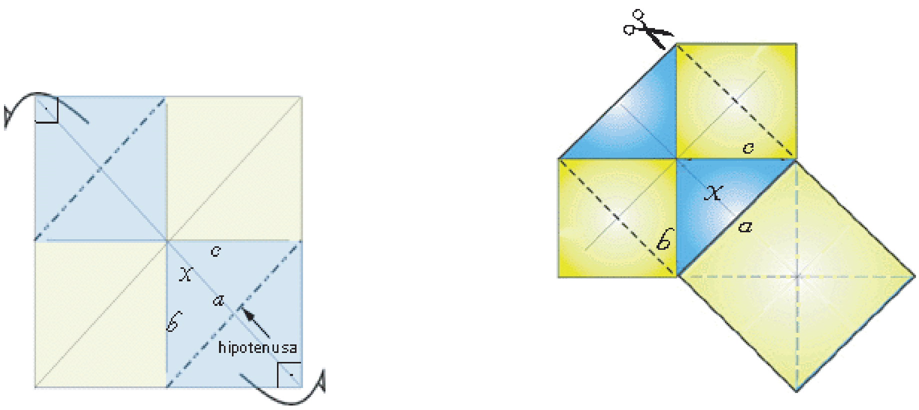



Figura 3.21: Passos 1 e 2

3. Se recortarmos e transportarmos esses quatro triângulos (amarelos) para a hipotenusa $a$ do triângulo $x$, produziremos um quadrado com lados iguais a ela.

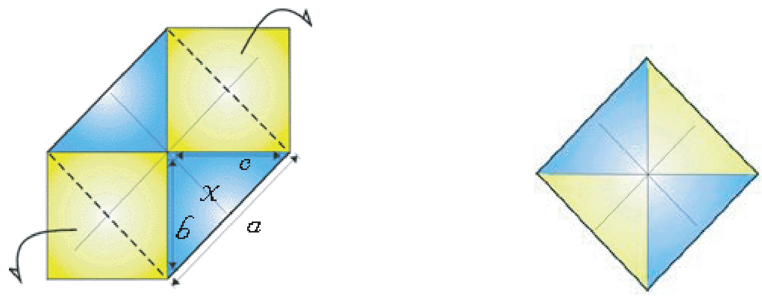



Figura 3.22: Transportando os triângulos amarelos e o quadrado obtido

No caso do origami, evitamos o recorte e, ao dobrar os dois últimos cantos para trás, produzimos um quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo $x$.

Portanto, podemos afirmar que $b^2 + c^2 = a^2$.

### 3.4.2 ATIVIDADE 2

Na figura 3.23 temos um triângulo retângulo e os três quadrados construídos sobre os seus lados e abaixo uma ilustração de como podemos recortar os dois quadrados construídos sobre os catetos (um em 4 peças e o outro em apenas uma peça) de modo que estas cinco peças podem ser perfeitamente encaixadas sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa.

**Parte 1:** Recortar a figura da próxima página em 5 peças e tentar arranja-las para formar um quadrado.

**Parte 2:** Na figura utilizada na Parte 1 desta atividade, as linhas pontilhadas já estavam desenhadas. Identifique qual deve ser o critério para desenha-las que permite que este quebra-cabeça tenha solução.

**Parte 3:** Identifique de que maneira este quebra-cabeça pode fornecer uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

**Parte 4:** Agora é a hora de justificar este "quebra-cabeça". Demonstre que realmente as cinco peças da figura acima podem ser encaixadas de tal forma que elas formam um quadrado.

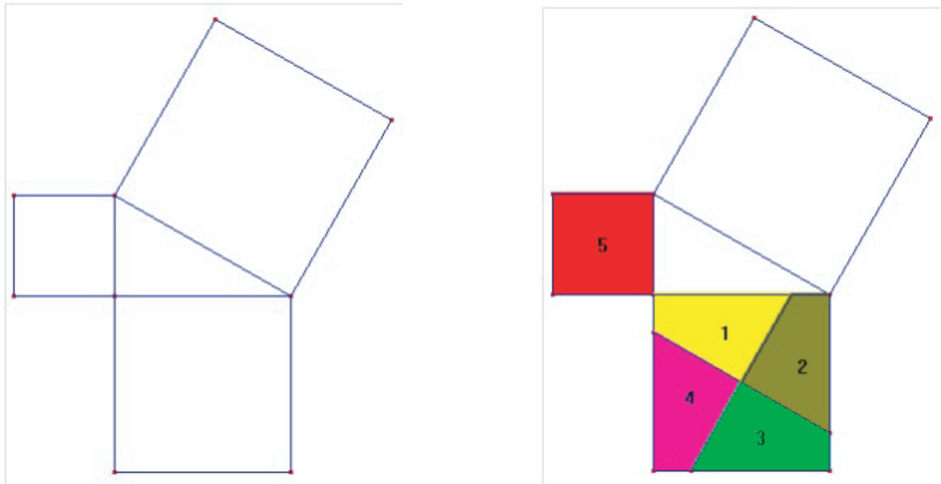



Figura 3.23: Desenho completo e um modelo de divisão

Na página seguinte, figura 3.24, está o molde necessário para realizar esta atividade.

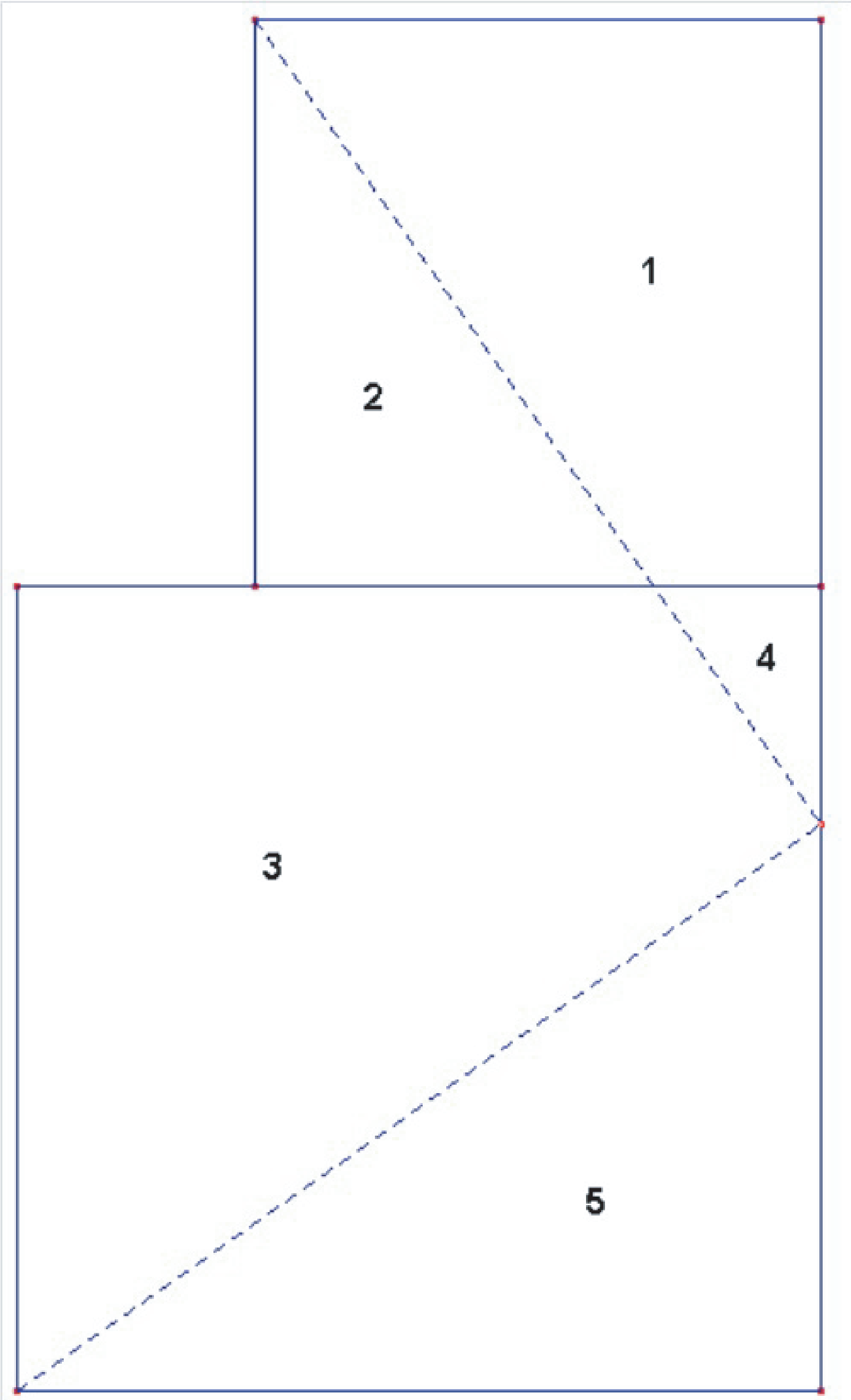



Figura 3.24: Molde para atividade 2

### 3.4.3 ATIVIDADE 3

Para realizar esta atividade você deverá construir um jogo do tipo quebra-cabeça.

Material necessário: três folhas de papel-cartão ou emborrachado fino (com cerca de 3mm de espessura) de cores diferentes, cola em bastão.

Procedimento: imprima o molde fornecido na figura 3.25.

Sobre uma das folhas de papel-cartão ou emborrachado, desenhe um triângulo retângulo escaleno. Considerando a medida do cateto menor desse triângulo, desenhe, sobre uma das outras folhas, dois quadrados com os lados desse tamanho.

A seguir, considerando a medida do cateto maior do triângulo retângulo, trace, na terceira folha, dois quadrados com os lados desse tamanho.

Recorte todas as figuras desenhadas sobre as folhas e as do desenho impresso.

Sobre o lado não colorido de cada peça de papel-cartão, ou de emborrachado, cole a correspondente de papel quadriculado obtida a partir do desenho.

Com estas peças você tem um jogo do tipo de um quebra-cabeça, cujo verso apresenta uma rede quadriculada.

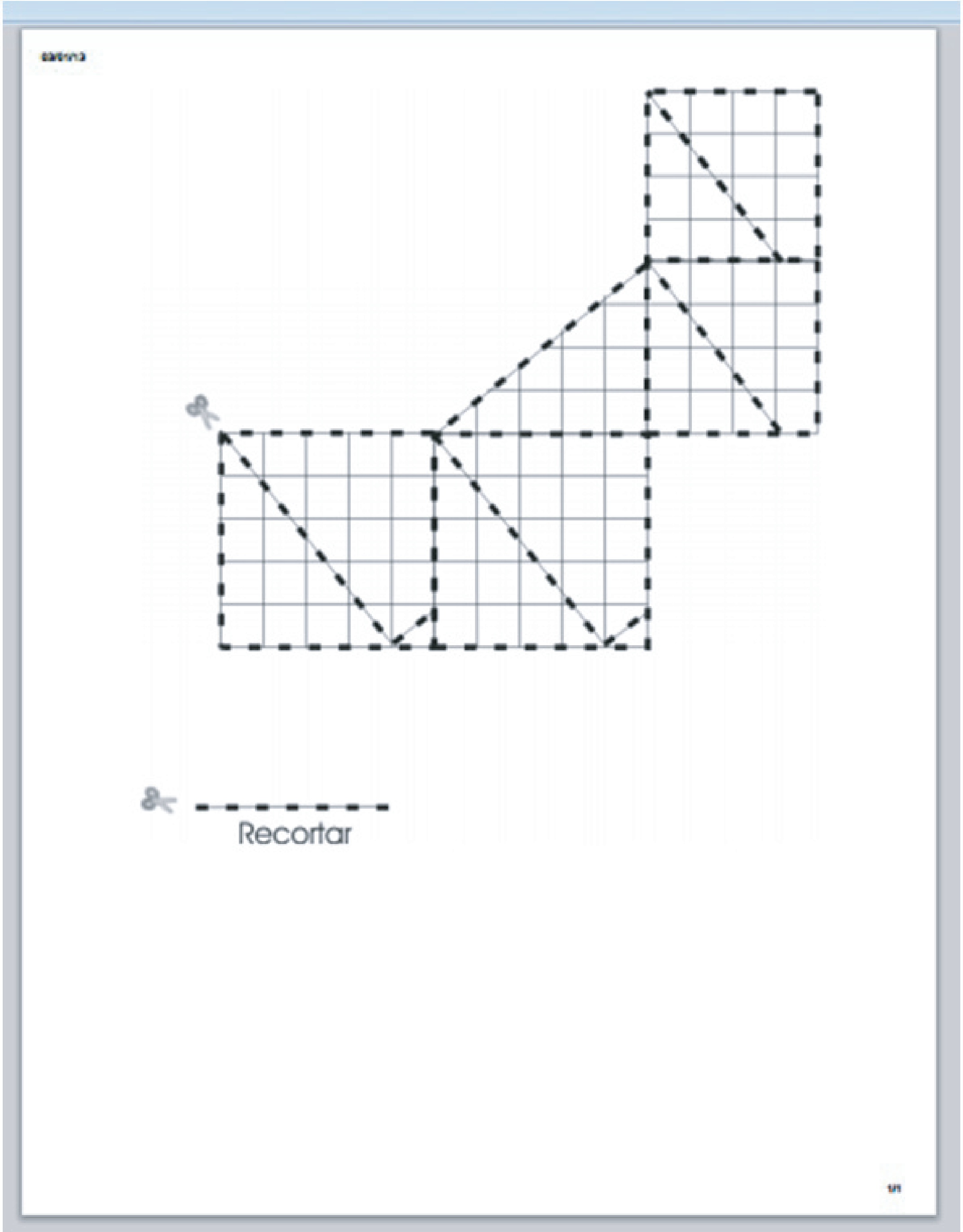



Figura 3.25: Molde para atividade 3

Dando continuidade à construção.

**a)** Com duas peças do jogo da mesma cor e de formas diferentes, uma com a de um trapézio e a outra triangular, monte uma representação de um quadrado.

**b)** Com três peças de uma outra cor, sendo duas triangulares de tamanhos diferentes e uma quadrilátera, monte um outro quadrado.

**c)** Com as peças restantes, com exceção da triangular cuja cor é diferente das demais, monte um outro quadrado, cujo o lado seja igual ao maior lado da peça quadrilátera grande.

**d)** Justaponha os três quadrados construídos com as peças aos lados da triangular cuja cor é diferente das demais (observe que ela tem a forma de um triângulo retângulo).

A resposta esperada da montagem é a seguinte:

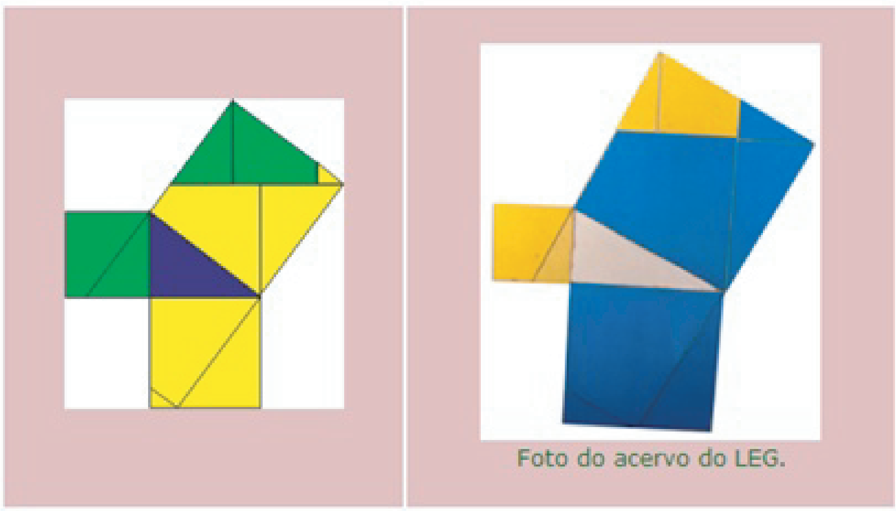



Figura 3.26: Montagem final

LEG: Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense

### 3.4.4 ATIVIDADE 4

**Descobrindo a Generalização do Teorema de Pitágoras com o Tangram Pitagórico com Polígonos Quaisquer**

Material necessário: três folhas de papel-cartão ou emborrachado fino (com cerca de 3 mm de espessura) de cores diferentes, papel quadriculado (com quadrado de 0,5 mm de lado) e cola.

Procedimentos:

Sobre uma das folhas de papel-cartão ou emborrachado, desenhe um triângulo retângulo escaleno. Recorte-o.

Sobre uma das outras folhas, desenhe um quadrado de lado com medida igual à do cateto menor desse triângulo. Divida esse quadrado ao meio, obtendo dois retângulos iguais. Recorte e os divida, ao longo de uma de suas diagonais. Agora, sobre a terceira folha de papel-cartão, desenhe um quadrado de lado com medida igual à do cateto maior do triângulo retângulo escaleno original. Divida esse quadrado ao meio, segundo um segmento perpendicular a um dos lados, obtendo dois retângulos iguais.

Recorte-os e os divida ao longo de uma de suas diagonais.

Com essas peças você tem um jogo do tipo de um quebra-cabeça.

Repita esse procedimento e cole as novas peças obtidas sobre papel quadriculado.

Agora que você já construiu o material, volte para a atividade.

A resposta esperada após a montagem será:

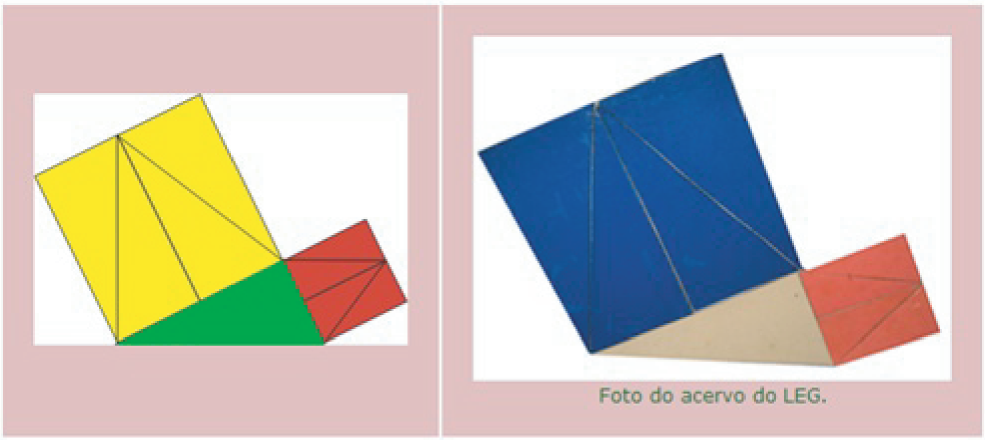



Figura 3.27: Montagem final

Na próxima página está a figura que deverá ser impressa para auxiliar na montagem.

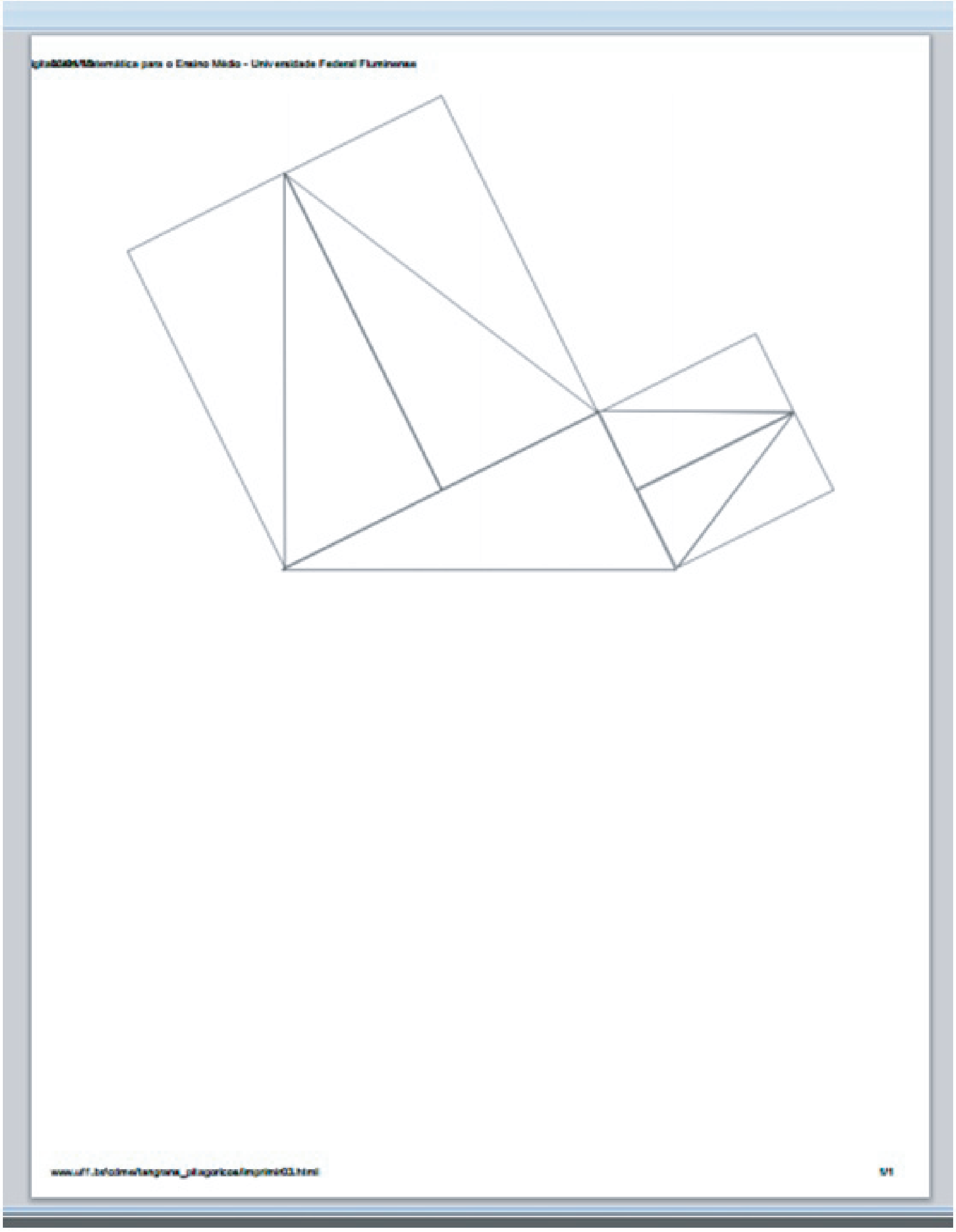


Figura 3.28: Molde para atividade 4

## OUTRAS QUESTÕES PARA SEREM EXPLORADAS COM O MATERIAL DESTA ATIVIDADE

**a)** Com duas peças de uma mesma cor tente construir formas retangulares. É possível construir figuras com forma de paralelogramos? E de triângulos isósceles?

**b)** Com quatro peças de duas cores diferentes construa formas retangulares. É possível construir formas de paralelogramos? E de triângulos isósceles?

**c)** Utilizando todas as peças do jogo, com exceção da triangular cuja cor é diferente das demais, construa três figuras que tenham a mesma forma e tente justapô-las aos lados dessa peça triangular.

**d)** Utilizando todas as peças, verifique se é possível estabelecer com uma outra forma de polígono (como de triângulo isósceles, ou de retângulo ou de paralelogramo) uma relação como aquela obtida com os Jogos Pitagóricos com Quadrados e com Triângulos.

Verifique se é possível estabelecer uma relação entre as áreas das figuras construídas e justapostas aos lados de um triângulo retângulo, como a obtida para os quadrados e triângulos.

### Algumas Construções Possíveis

A seguir, encontram-se desenhadas três possíveis construções com as peças desse jogo.

Perceba que as peças justapostas aos lados do triângulo retângulo possuem a mesma forma geométrica, ou seja, elas representam figuras semelhantes, cuja soma das áreas encontram-se na mesma relação observada nos jogos pitagóricos com quadrados e com triângulos.

Observe algumas configurações para solução, nas quais as figuras maiores justapostas às hipotenusas são formadas pelos quatro triângulos retângulos.

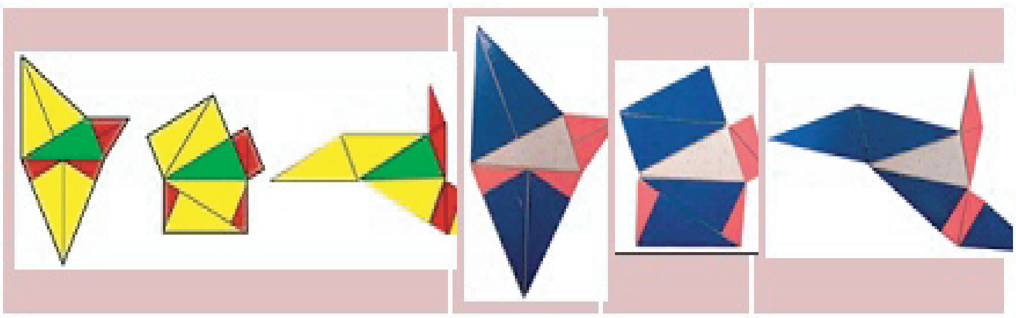


Figura 3.29: Algumas construções possíveis

### 3.4.5 ATIVIDADE 5

Na figura 3.30 à esquerda a área amarela somada com a área azul é igual à área verde.

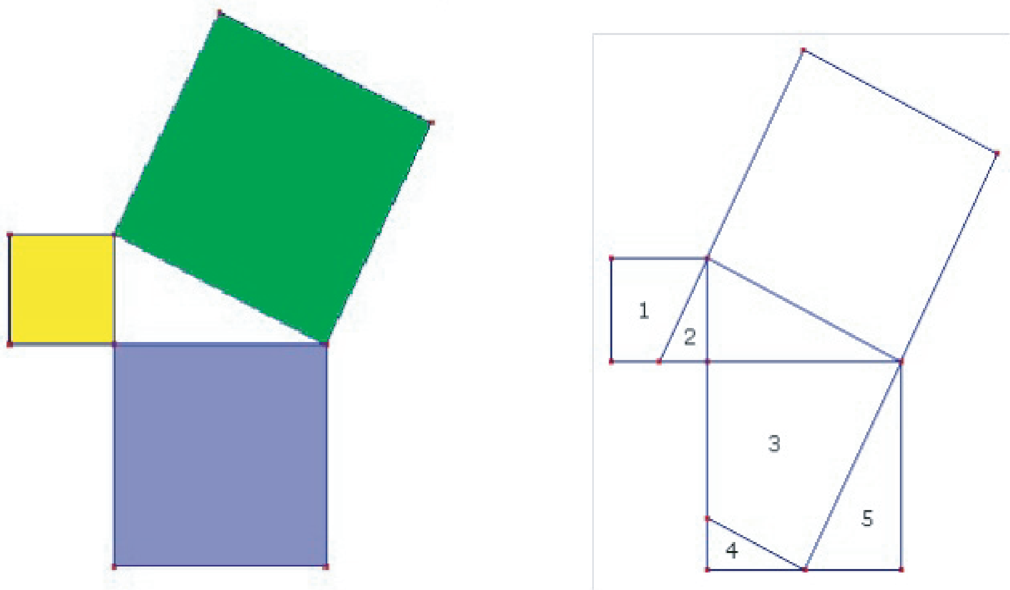



Figura 3.30: Áreas correspondentes e uma divisão possível dos quadrados

Uma outra maneira de experimentar este fato é mostrar que é possível dividir os dois quadrados construídos sobre aos catetos de um triângulo retângulo em algumas peças que podem ser reorganizadas para formar o quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo.

A figura 3.30 à direita mostra uma maneira de dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 peças que podem ser perfeitamente encaixadas sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo.

**Parte 1:** Recortar as 5 peças da figura da próxima página e tentar encaixá-las sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo do centro da figura.

**Parte 2:** Depois de resolver este quebra-cabeça, procure justificar formalmente sua solução, mostrando que as peças se encaixam perfeitamente sobre o quadrado maior. Para isto é importante que as propriedades das linhas de corte dos quadrados construídos sobre os catetos sejam identificadas.

Na página seguinte está o molde necessário para esta atividade.

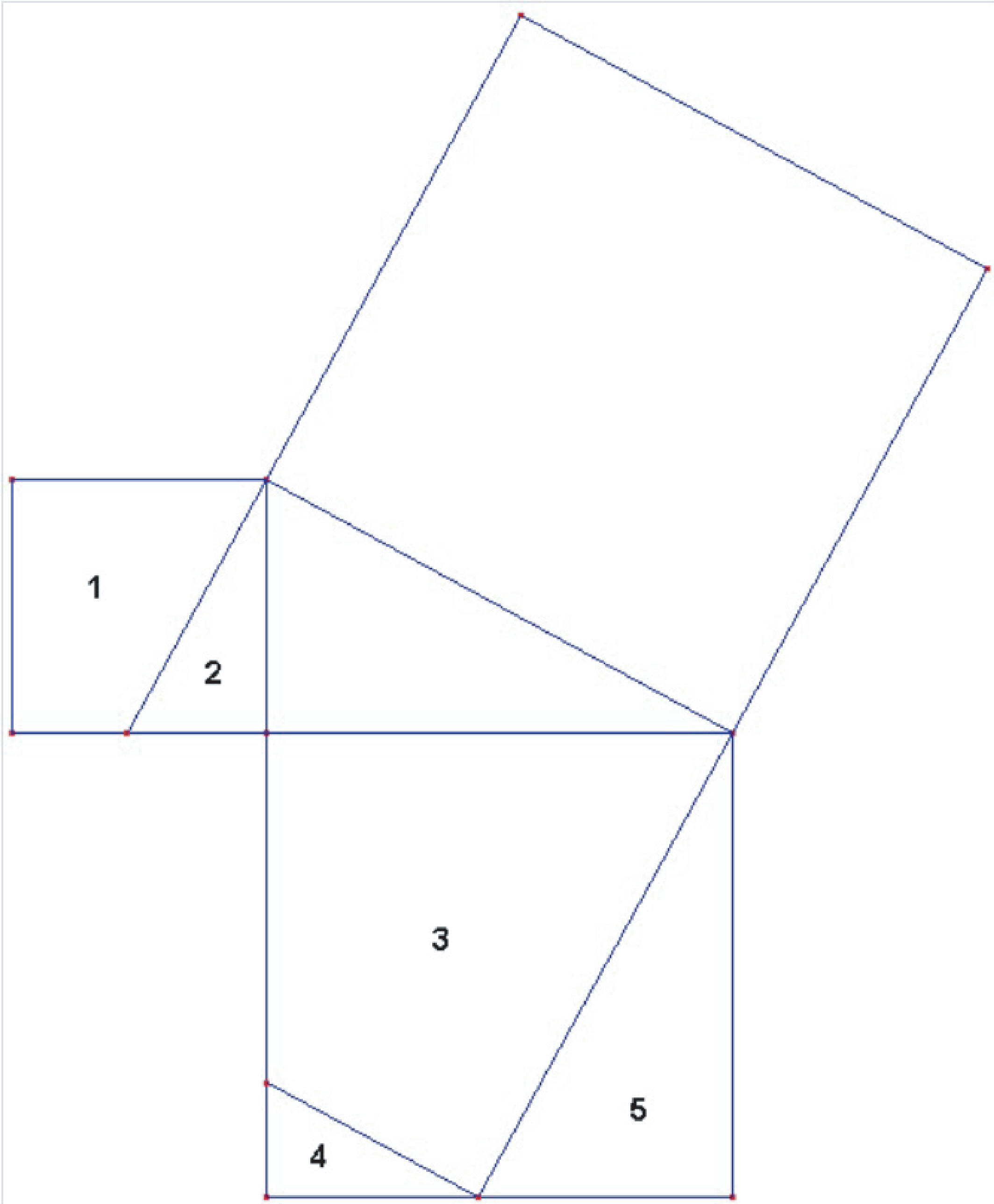



Figura 3.31: Molde para a atividade 5

# Capítulo 4

# Cartilha Pitagórica

Neste capítulo apresentamos algumas atividades interessantes mostrando o uso do Teorema de Pitágoras e são dadas algumas sugestões para serem aproveitadas pelos professores de forma que a aula se torne mais atrativa e alcance com mais eficiência o objetivo esperado.

As referências deste capítulo são:

Matemática Multimídia - UNICAMP, http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061

As figuras foram retiradas das seguintes páginas eletrônicas:

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061

http://denifazendocomarte.blogspot.com.br/2011/03/teorema-de-pitagoras-e-o-origami.html

http://www.uff.br/cdme/tangrans_pitagoricos_eletronico/index.html

http://planosdeaulas.blogspot.com.br/2009/02/planos-de-aula-de-matematica-para-o.html

## 4.1 O Teorema de Pitágoras e o Origami

- Objetivos:

    1. Aprofundar alguns conceitos de figuras geométricas.

    2. Ter um primeiro contato com o teorema de Pitágoras.

- Série a ser aplicada: 7ª série/ 8º ano do Ensino Fundamental.

- Material utilizado: uma folha quadrada de papel cartão ou cartolina.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.
- Atividade realizada individualmente.
- Conteúdos explorados: figuras semelhantes e Teorema de Pitágoras.

### 4.1.1 Antes da Execução

O professor irá fazer um breve comentário sobre o Teorema de Pitágoras, sabendo que este conteúdo, de acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), somente será abordado mais profundamente no 9º ano. Esta atividade poderá ser executada quando a turma estiver trabalhando os conceitos de figuras geométricas.

Tempo estimado: 20 minutos.

### 4.1.2 Durante a Execução

É necessário que o professor faça a atividade junto com seus alunos, para que eles possam entender melhor cada passo a ser executado.

Tempo estimado: 30 minutos.

### 4.1.3 Após a Execução

Este é o momento do professor fazer a análise do resultado com seus alunos. É muito importante que eles possam fazer uma relação entre o conteúdo e a atividade proposta, sem a impressão de que fizeram apenas algumas dobraduras.

Tempo estimado: 20 minutos.

Após toda a análise feita em conjunto, o professor poderá pedir aos alunos que façam agora uma relação, por escrito, do que fizeram com o Teorema visto pela primeira vez.

#### Realização da Atividade

Utilize uma folha quadrada e siga as instruções até o final (obs: não recortar) para fazer uma demonstração simples do Teorema de Pitágoras, conforme as instruções.

1. Numa folha quadrada, dobre e desdobre as duas diagonais e mediatrizes. Depois, dobre dois triângulos (cantos) para trás.

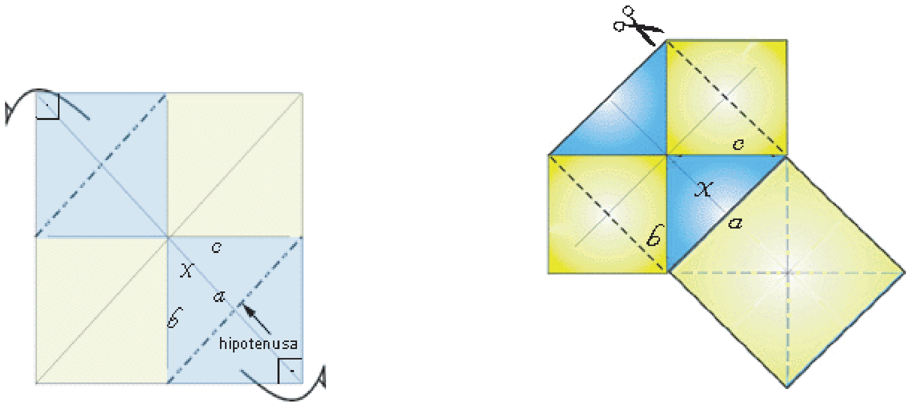



Figura 4.1: Passos 1 e 2

2. O triângulo $x$ é um triângulo retângulo. Após as dobras, foram construídos dois quadrados sobre os catetos $b$ e $c$ desse triângulo. Antes de dobrar os outros dois cantos para trás, note que cada quadrado (amarelo) pode ser decomposto em dois triângulos exatamente iguais ao triângulo $x$.

3. Se recortarmos e transportarmos esses quatro triângulos (amarelos) para a hipotenusa $a$ do triângulo $x$, produziremos um quadrado com lados iguais a ela.

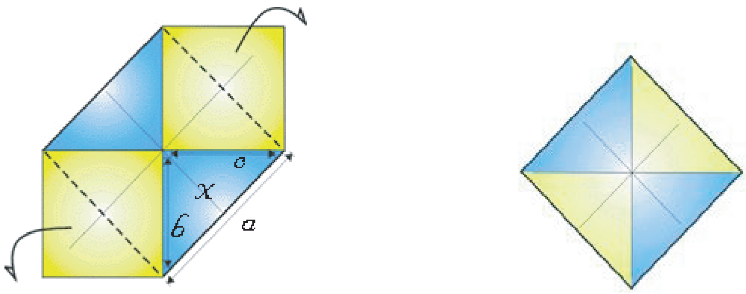



Figura 4.2: Transportando os triângulos amarelos e o quadrado obtido

No caso do origami, evitamos o recorte e , ao dobrar os dois últimos cantos para trás, produzimos um quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo $x$.

Portanto, podemos afirmar que: $b^2 + c^2 = a^2$.

## 4.2 Pitágoras através do Geogebra

- Objetivos:

  1. Visualizar e demonstrar o teorema de Pitágoras através da construção de um quebra-cabeça.
  2. Trabalhar o conceito de equivalência de área entre figuras planas.
  3. Valorizar o uso da geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de matemática básica.

- Série a ser aplicada: 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental.
- Material utilizado: computadores que possuam instalado o *software* de geometria dinâmica, Geogebra.
- Tempo estimado: 3 aulas de 50 minutos.
- Atividade realizada em dupla, ou de acordo com a quantidade de computadores disponíveis na escola.
- Conteúdos explorados : áreas de figuras planas e Teorema de Pitágoras

### 4.2.1 Antes da Execução

O professor irá fazer um breve comentário sobre o *software* de geometria dinâmica que será utilizado nesta atividade. Se houver mais tempo disponível é bom que os alunos sejam levados ao laboratório de informática da escola para que eles primeiro se familiarizem com o uso deste software.

Tempo estimado: 30 minutos.

### 4.2.2 Durante a Execução

Para que a atividade seja visível a todos seria bom que o professor fizesse o uso de um instrumento que auxilie a visualização, como, por exemplo, um *data show*. Também se faz necessário que os computadores estejam todos com o *software* já instalado. É interessante que exista sempre o auxílio e o estímulo do professor às duplas, fazendo com que o aluno que apresenta mais facilidade ajude o seu parceiro.

Tempo estimado: 50 minutos.

### 4.2.3 Após a Execução

Este é o momento do professor fazer a análise do resultado com seus alunos. É muito importante que eles possam fazer uma relação entre o conteúdo e a atividade proposta, sem a impressão de que apenas saíram de sala para usar os computadores.

Uma atividade com uso de geometria dinâmica é ideal que os alunos façam as devidas comparações com o trabalho de seus colegas. Quando aparecerem trabalhos diferentes é essencial a intervenção do professor junto à dupla, para que eles possam entender e fazer a correção necessária.

Tempo estimado : 30 minutos.

#### Realização da Atividade

Os passos de 1 a 12 são dedicados à construção de um triângulo retângulo de catetos pré-definidos.

**Passo 1:** No menu **Exibir**, selecione a opção **Malha** e desabilite as opções **Eixo** e **Janela de álgebra**.

**Passo 2:** Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento. Em seguida, digite a letra **a**, o GeoGebra rotulará o segmento criado com o nome **a**. Repita este procedimento e crie outro segmento com o nome de **b**. Os segmentos criados podem ter medidas quaisquer. (Sugestão: Use os pontos da malha para facilitar a construção)

**Passo 3:** Selecione a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), clique sobre um ponto qualquer da malha (centro da circunferência) e o GeoGebra pedirá para você fornecer o raio. Basta digitar a letra correspondente a um dos segmentos que foram nomeados pelo programa, por exemplo, digite a.

**Passo 4:** Clique na janela 1, selecione **ponteiro**, clique sobre o centro da circunferência e, em seguida, digite a letra **O**, nomeando assim, este ponto.

**Passo 5:** Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento ligando o ponto **O** até um ponto da circunferência, que chamaremos de **A**.

**Passo 6:** Clique com o botão direito do mouse sobre o centro da circunferência e selecione a opção **Propriedades**, em seguida escolha a janela **cor** e mude a cor do ponto para vermelho através da paleta de cores.

**Passo 7:** Clique na janela 4, selecione a opção **Reta perpendicular**, clique sobre o ponto**A** e em seguida sobre o segmento**OA** . Construímos assim, uma reta perpendicular ao segmento **OA** passando pelo ponto **A** .

**Passo 8:** Usando a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), construa uma circunferência com centro**A** e raio **b**.

**Passo 9:** Clique na janela 2, selecione a opção **Intersecção de dois objetos** e clique sobre o círculo do passo 9 e sobre a reta perpendicular do passo 8. Encontraremos dois pontos na intersecção destes objetos. Escolha um deles, clique com o botão direito do mouse sobre o mesmo, escolha a opção **Renomear** e altere o nome do ponto para **B**.

**Passo 10:** Clique na janela 3, selecione a opção **Polígono** e clique em seqüência sobre os pontos **O** (ponto inicial), **A**,**B** e novamente no ponto **O** (ponto final). Assim, cria-se um triângulo retângulo cujos catetos possuem medidas **a** e **b**.

**Passo 11:** Esconda todas as construções auxiliares, inclusive o ponto B. Para isto, clique sobre as figuras com o botão direito do mouse e desabilite a opção **exibir objeto**. Deixe apenas o polígono visível.

**Passo 12:** Use o ponto **A** para rotacionar o triângulo e o ponto **O** para transladá-lo.

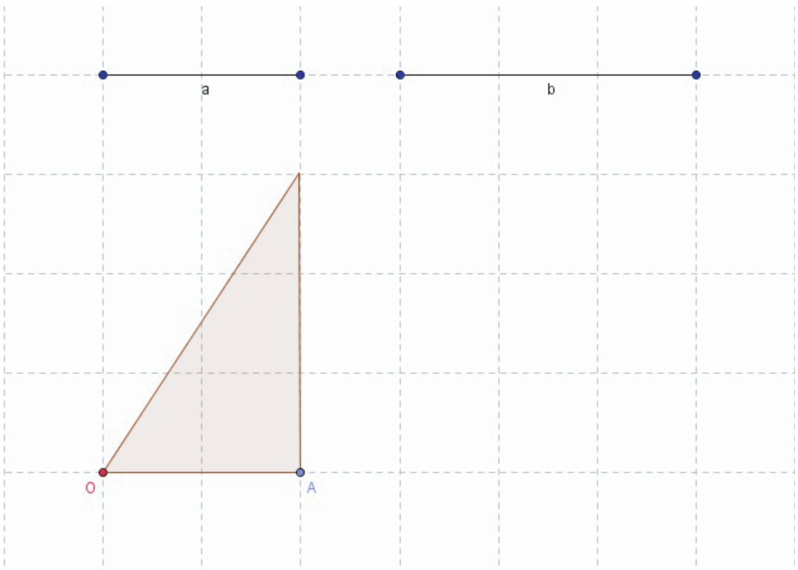



Figura 4.3: Triângulo formado

**Passo 13:** Repita o procedimento de modo a obter ao todo, quatro triângulos retângulos idênticos (catetos a e b).

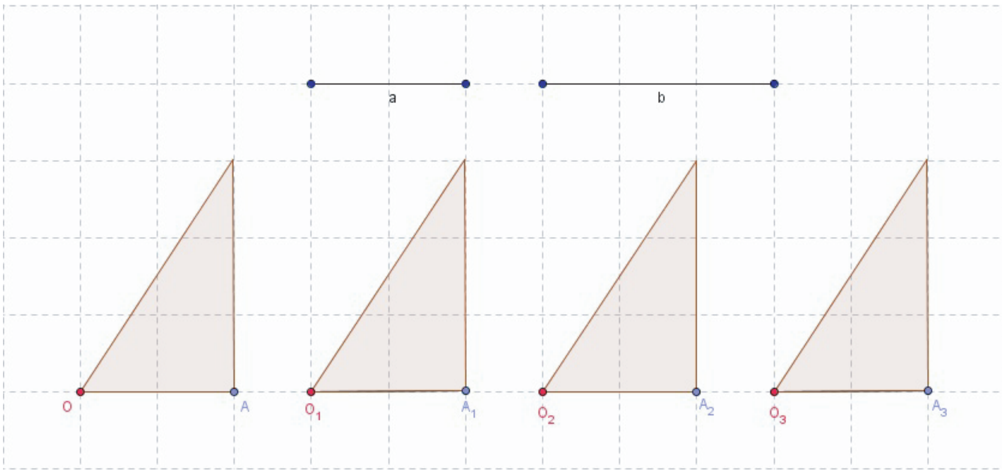



Figura 4.4: Triângulos retângulos congruentes

**Passo 14:** Com o botão direito do mouse, clique sobre a hipotenusa de um dos triângulos, selecione a opção **Renomear** e chame-a de **c**.

**Passo 15:** Utilizando as opções **Círculo dados centro e raio** (janela 5) e **Reta perpendicular** (janela 4), construa um quadrado cujo lado tem medida **c**, obtendo a figura abaixo.

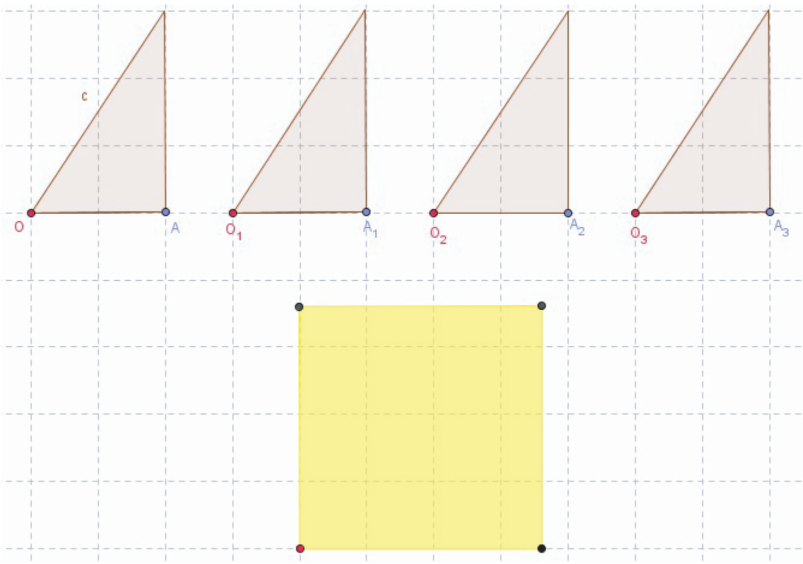



Figura 4.5: Quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo

**Passo 16:** Movimentando os triângulos de modo a encaixar as hipotenusas nos lados do quadrado obtém-se a próxima figura .

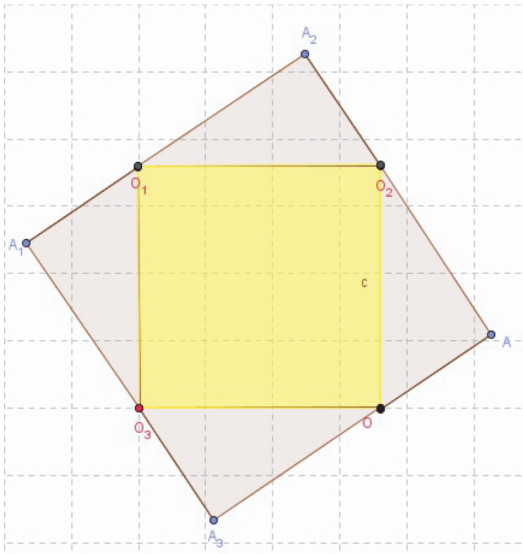



Figura 4.6: Quadrado de lado a +b

Desta forma, obtemos um quadrado de lado $a + b$ e cuja área é $A = (a + b)^2$.

Por outro lado, a figura é composta por um quadrado de lado $c$ e por quatro triângulos retângulos de catetos $a$ e $b$, logo sua área também pode ser expressa por: $A = c^2 + 4\frac{ab}{2}$

De acordo com as observações feitas nesta atividade, percebemos que:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Logo, $a^2 + b^2 = c^2$, que é o Teorema de Pitágoras.

## 4.3 Teorema de Pitágoras através de algumas Relações Métricas

- Objetivos:

  1. Desenvolver habilidades manuais.
  2. Demonstrar algebricamente um resultado através da análise de uma figura.
  3. Fixar o conceito de figuras semelhantes.

- Série a ser aplicada: 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental.
- Material utilizado: lápis e papel.
- Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.
- Atividade realizada individualmente.
- Conteúdos explorados: figuras semelhantes, Teorema de Pitágoras e relações métricas no triângulo retângulo.

### 4.3.1 Antes da Execução

O professor deverá instruir a turma sobre o uso correto dos materiais que serão necessários para o desenho. Sempre havendo estímulo àqueles que dizem não ter habilidade em desenhar.

Tempo estimado: 10 minutos.

### 4.3.2 Durante a Execução

Trabalhar com desenhos geométricos requer atenção e dedicação dos alunos. É sempre importante a participação do professor. Enquanto os alunos fazem o seu desenho, o professor também deverá fazer o mesmo no quadro expositivo de sua sala de aula.

Neste momento, sugere-se o uso de monitoria entre os alunos.

Tempo estimado: 40 minutos.

### 4.3.3 Após a Execução

Este é o momento do professor fazer a análise do resultado com seus alunos. Com esta atividade o aluno passa a sentir que ele é capaz de construir conceitos sem a necessidade de decorar uma relação métrica sem o entendimento que é essencial.

Após o término desta atividade o professor pode pedir aos alunos como fixação que acessem a página

http://www.uff.br/cdme/tangran_spitagoricos_eletronico/jogo02/aluno02.html

e realizem um jogo eletrônico disponível e depois compartilhem da experiência em sala com os colegas.

Tempo estimado: 50 minutos.

**Realização da Atividade**

**a)** Utilizando somente lápis e papel, desenhe um triângulo retângulo escaleno $ABC$, com um ângulo de $90°$ em $A$ e trace a altura relativa ao lado $CB$ passando pelo vértice $A$. Chame de $D$ o pé desta altura.

**b)** Tomando cada lado do triângulo $ABC$ como hipotenusa, desenhe três triângulos retângulos $ABE$, $ACF$ e $BCH$ congruentes a $ABD$, $ACD$ e $ABC$, respectivamente. Observe a figura abaixo.

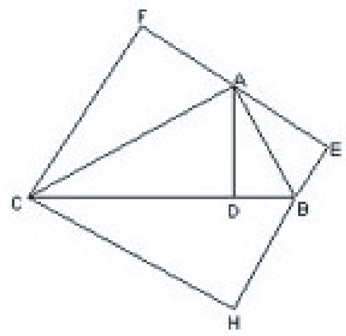



Figura 4.7: Triângulo $\triangle ABC$ e congruentes

**c)** Que relações você pode concluir sobre as áreas desses triângulos?

Se você não conseguiu nenhuma conclusão, acompanhe o desenvolvimento apresentado a seguir.

**d)** Observe que os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ são retângulos.

Como $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ e $\widehat{B} + B\widehat{A}D = 90°$, então $B\widehat{A}D = \widehat{C}$. Daí, ângulo $D\widehat{A}C + \widehat{C} = 90°$ e então, $D\widehat{A}C = \widehat{B}$.

O que você pode afirmar sobre os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$?

**e)** Perceba que os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CDA$ têm a mesma forma e, por isso, são figuras semelhantes ao $\triangle ABC$.

Nomeando partes do triângulo $\triangle ABC$ de acordo com a figura a seguir, faremos algumas observações.

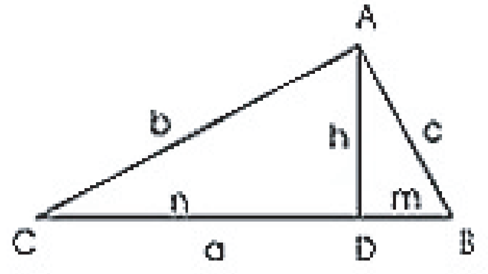



Figura 4.8: Partes do triângulo $\triangle ABC$

- Da semelhança que associa $A$ a $C$; $B$ a $A$ e $D$ a $D$, tem-se $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n}$, donde $h^2 = mn$;
- Da semelhança que associa $A$ a $C$; $B$ a $B$ e $D$ a $A$, tem-se $\dfrac{m}{c} = \dfrac{c}{a}$;
- Da semelhança que associa $C$ a $A$; $D$ a $B$ e $A$ a $C$ tem-se $\dfrac{n}{b} = \dfrac{b}{a}$.

Como consequência dessas duas últimas relações observe que

$$am = c^2 \quad \text{e} \quad an = b^2 \Longrightarrow a(m+n) = b^2 + c^2,$$

ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

## 4.4 Trio Pitagórico

- Objetivos:
  1. Conhecer o trabalho de alguns geômetras gregos.
  2. Rever algumas propriedades de números inteiros.
  3. Rever o Teorema de Pitágoras.
  4. Promover algumas demonstrações.
  5. Aprofundar alguns conceitos de figuras geométricas.
- Série a ser aplicada: 1º ano do Ensino Médio
- Material utilizado: caderno e pesquisas de informações na internet.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.
- Atividade realizada individualmente.
- Conteúdos explorados: História da Matemática, figuras semelhantes e Teorema de Pitágoras.

### 4.4.1 Antes da Execução

O professor deverá fazer um breve comentário sobre o Trio pitagórico. Dizer que está é a denominação para quaisquer três números inteiros que representam as medidas, de mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo. Euclides (século 3º a.C) mostrou através dos *Elementos* que há infinitos trios pitagóricos.

Tempo estimado: 15 minutos.

### 4.4.2 Durante a Execução

Durante a pesquisa o professor sempre deve estar presente, ajudando ao seu aluno a decidir qual site é mais seguro, de melhor conteúdo e mais acessível aos seus conhecimentos.

Tempo estimado: 40 minutos.

### 4.4.3 Após a Execução

Este é o momento do professor fazer a análise do resultado das pesquisas com seus alunos.

#### Realização da atividade

1. Peça ao alunos uma pequena linha do tempo da geometria, na qual deve constar Tales de Mileto, Euclides de Mégara, Eudoxo de Cnido e Pitágoras de Samos, com breves dados biográficos dos mesmos.

   Esta atividade é interessante para que fique claro os conhecimentos e descobertas de cada um, em determinados pontos da evolução humana;

2. Peça aos alunos uma das muitas demonstração do Teorema de Pitágoras;

3. Leia para eles a demonstração de Euclides para o fato de haver um número infinito de trios pitagóricos. A prova de Euclides começa com a observação de que a diferença entre dois quadrados sucessivos é sempre um número ímpar. Em outras palavras, cada um dos infinitos números ímpares pode ser somado a um quadrado perfeito para criar outro quadrado perfeito. Alguns desses números ímpares podem ser quadrados perfeitos, mas uma fração de infinitos números também é infinita. Portanto, existe uma infinidade de números ímpares ao quadrado que pode ser somada a um quadrado perfeito para criar outro quadrado. Existe, assim, um número infinito de trios pitagóricos (adaptação do livro *"O Último Teorema de Fermat"*, Ed. Record, de *Simon Singh.*)

4. Proponha depois a seguinte questão: um trio pitagórico pode ser gerado da seguinte forma:

   - Escolher dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
   - Calcular a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujo numerador e denominador representam, respectivamente, as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
   - Calcular a hipotenusa, usando o Teorema de Pitágoras.

5. Utilizando os procedimentos descritos, calcule as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números pares 4 e 6. Em seguida considere $x$ um número inteiro maior do que 1 e que $(x-1)$ e $(x+1)$ representam dois pares ou dois ímpares consecutivos. Demonstre que esses dois números geram um trio pitagórico.

Outro modo de calcular trios pitagóricos:

Escolha dois números primos entre si $u$ e $v$, $u > v$. Um trio pitagórico $x$, $y$, $z$, se obtém a partir de $u$ e $v$ assim: $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$

**Responda:** Por que isso dá certo?

# Conclusão

Neste trabalho, reafirmamos a importância do Teorema de Pitágoras, desde sua história, suas diversas demonstrações, suas aplicações e a maneira que podemos utilizá-lo no ensino de Geometria e de Matemática em geral.

O trabalho aqui desenvolvido, seja nas propostas de oficinas que podem ser feitas a partir deste teorema e ou no uso de variados *softwares*, também comprova a importância do Teorema de Pitágoras na Matemática.

Pitágoras afirmava que uma coisa é o *conhecimento* e outra é a *sabedoria*. O *conhecimento* provém daquilo que as pessoas nos falam e os livros nos ensinam, enquanto que a *sabedoria* provém da análise inteligente daquilo que as pessoas nos falam e os livros nos ensinam.

É essa sabedoria que levará o leitor a analisar o conteúdo deste trabalho em bases puramente Pitagóricas, ou seja:

*Não creias em tudo,*
*nem de tudo duvides,*
*pois a luz da verdade*
*brilha e reside na justa medida,*
*e no meio-termo.*

A sequência natural deste trabalho é a elaboração da *Cartilha do Teorema de Pitágoras* contendo os conteúdos dos capítulos 3 e 4, com roteiros de aulas envolvendo diversas demonstrações, aplicações de *softwares* e oficinas. Esta cartilha deverá ser submetida à publicação e divulgada eletronicamente de maneira que possa servir de apoio a professores na abordagem deste teorema tão fascinante.

# Referências Bibliográficas


[1] F. Araújo, *Teorema de Pitágoras: mais que uma relação entre áreas.* **5º Encontro da RPM**, Salvador, UFBA, 2011.

[2] E. Batschelet, *Introdução à Matemática para Biocientistas.* **Editora Interciência**, Salvador, UFBA, 1978.

[3] I. V. Bastian, *O Teorema de Pitágoras.* **Dissertação de Mestrado em Educação Matemática**, PUC-SP, 2000.

[4] C. B. Boyer, *História da Matemática.* **Editora Edgar Blücher Ltda**, 2ª edição, São Paulo, 1996.

[5] A. B. Coelho, *Teorema de Pitágoras: Qual a sua Importância para o Ensino das Ciências da Natureza?.* **Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica**, Universidade do Grande Rio, 2010.

[6] C. B. Conte, *Pitágoras - Ciência e Magia na antiga Grécia.* **Editora Madras,** 4ª edição, São Paulo, 2010.

[7] *Pythagorean Theorem*, http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

[8] H. Eves, *Introdução à História da Matemática.* **Editora da UNICAMP,** Tradução Hygino H. Domingues, 3ª edição, Campinas, 2002.

[9] A. B. Krische, *De societatis a Pythagora in urbe Crotoniatarum scopo politico commentatio.* **Typis Dieterichianis,** Göttingen, 1830.

[10] J. Oliver, *Pythagoras' Theorem: an alternative.* **The Mathematical Gazette,** p. 117, 1997.

[11] E. Loomis, *The Pythagorean Proposition.* **Publication of the National Council of Teachers,**, 2nd printing 1972.

[12] S. C. Marques, *A descoberta do Teorema de Pitágoras.* **Editora Livraria da Física**, 1ª edição, São Paulo, 2011.

[13] *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio.* **Matemática Multimídia**, UNICAMP, http://m3.ime.unicamp.br/

[14] J. A. Oliveira, *Teorema de Pitágoras.* **Monografia do Curso de Especialização em Matemática**, UFMG, 2008.

[15] *Portal do Professor* **Ministério da Educação**, http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html

[16] I. Rohde, *Estudando o Teorema de Pitágoras.* **Trabalho da Disciplina: Midias Digitais**, UFGRS, 2011.

[17] *Revista do Professor de Matemática.* **SBM**, desde 1982, www.rpm.org.br/

[18] J. J. B. Silva *Eram realmente pitagóricos os homens e as mulheres catalogados por Jâmblico em sua obra "Vida de Pitágoras"?.* **Tese de Doutorado em Educação**, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

[19] J. C. Sparks, *The Pythagorean Theorem - Crown Jewel of Mathematics.* **Author House**, 2008.

[20] P. Strathern, *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.* **Jorge Zahar Editor,** Tradução Marcus Penchel, Rio de Janeiro , 1998.

[21] E. Wagner, *O Teorema de Pitágoras e Áreas.* **Apostila da OBMEP**, 2009.

# Apêndice - Relatos de Experiência

O Teorema de Pitágoras, de acordo com o PCN (Parâmetros Curriculares Nacional), está inserido no 9° ano, antiga 8ª série do Ensino Fundamental. Porém, como trabalho com o Ensino Médio, sempre me deparo com alunos sem nenhuma ideia formada sobre este Teorema. Alguns sabem recitar a fórmula, mas não entendem sua utilização e uma minoria entende e sabe aplicá-la.

No último ano, 2012, trabalhei com turmas do ensino médio e propus aos alunos um desafio.

Primeiro fiz um questionamento oral com as turmas, tentando analisar o nível de conhecimento deles sobre o teorema. Obtive algumas respostas, como:

- Fessora, não lembro nada do ano que passou!
- Acho que é aquele negócio do triângulo que tem uns nomes bem esquisitos, né?
- Eu sei que fala dos catetos, mas nunca entendi bem isso.
- Eu sabia de cor a fórmula!
- Uai, se a gente precisar é só olhar no livro de novo.

E como essas, várias outras respostas que têm o mesmo significado.

Assim, após esses relatos, disse a eles que iríamos parar com as aulas de matemática como eles tinham costume e que agora eu iria dar uma aula de História.

Como era de se esperar as reações foram diversas! Algumas do tipo:

- Isso não vai dar certo. Onde já se viu, misturar Matemática com História?
- Que beleza, vamos parar de fazer contas!
- Sério fessora, e vai ser assim sempre?

E outras observações mais, típicas de alunos, quando algo novo os assusta.

Contei às turmas a história de Pitágoras: quem foi, os mitos que o cercam, sua escola e suas descobertas. Depois pedi aos alunos, que em casa, assistissem ao vídeo: O Barato de Pitágoras encontrado no endereço eletrônico

http://www.youtube.com/watch?v=NQjxroaxY8o

Na aula seguinte fizemos uma discussão sobre o vídeo. Ouvi os seguintes comentários:

- Eu não sabia que existia vídeo de matemática.
- Quando comecei a assistir, lembrei da minha professora que mandava a gente decorar a fórmula, igualzinho a do vídeo.
- Eu gostei muito da parte que mostra onde tem triângulos na vida da gente. Nunca tinha parado para reparar isso.
- Agora fiquei curiosa e queria saber mais.

Pegando carona neste último comentário, que apareceu em todas as turmas, claro que com palavras diferentes, eu fui ao quadro e comecei a expor o teorema. Fizemos primeiro uma recordação do que é um triângulo retângulo. Os nomes e maneira de localizar cada lado deste triângulo. Depois demonstrei a fórmula através da decomposição de áreas feita com um triângulo de lados 3, 4 e 5cm.

Após feita essa recordação, pois são alunos do ensino médio que já tiveram contato com o teorema, eu contei a eles que existe um livro com 370 demonstrações diferentes do teorema.

Neste momento lancei um desafio às turmas: que eles trouxessem maneiras diferentes de demonstrar o teorema. Eles deveriam se dividir em equipes. Deixei que eles decidissem a quantidade de alunos por equipe. Foi dada uma semana de prazo para pesquisarem e trazerem o material para confecção em sala.

Figura A1: Alunos confeccionando o material

Figura A2: O teorema demonstrado com bolinhas de gude.

Figura A3: Equipe mostrando a colocação de quadrados menores, de mesma área, em cada quadrado proveniente dos catetos.

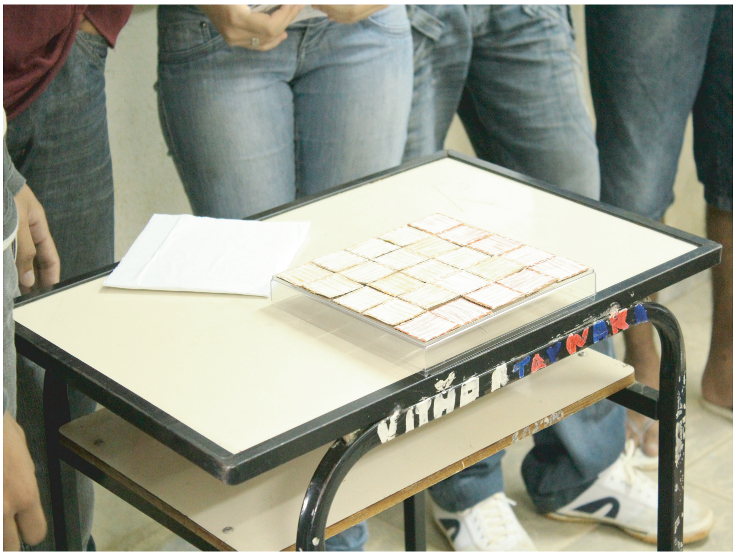


Figura A4: A mesma equipe mostrada anteriormente colocando todos os quadradinhos menores no quadrado maior, proveniente da hipotenusa.


Figura A5: Equipe apresentando o teorema com caixas de madeira e arroz.

Música apresentada por uma das equipes.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Autoras: Jéssica Barbosa e Paolla Boechat

**Refrão**

Uma matéria importante

Quero relembrar

Teorema de Pitágoras

Vamos te ensinar

A Vanessa ensinou

Que não é qualquer triângulo

Só se pode aplicar

Num triângulo retângulo

O lado maior hipotenusa vai chamar

E os dois menores

Catetos, olhem lá

**Refrão**

Preste atenção

Não é só decorar

A soma do quadrado dos catetos

Hipotenusa vai formar

Maravilhado com o seu conhecimento

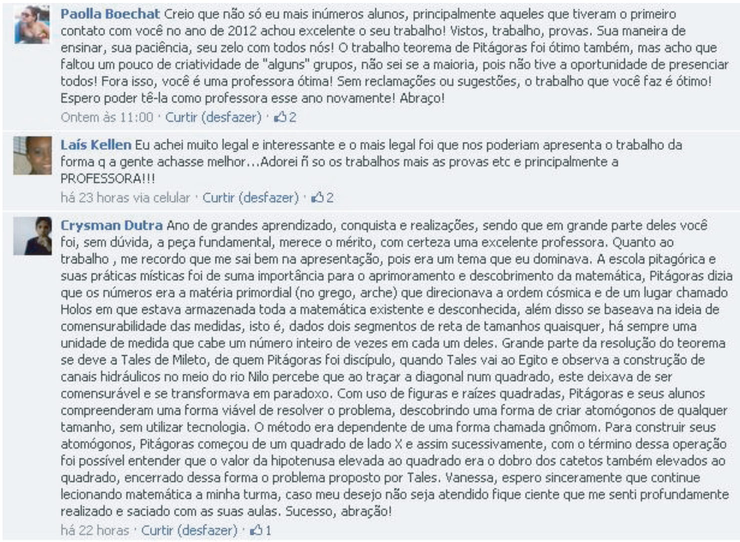
100 bois aos deuses matou em agradecimento

**Refrão**

Nós professores muitas vezes duvidamos da capacidade de nossos alunos. Um trabalho como este serve para mostrar o quanto estamos equivocados. Os alunos ao se depararem com um desafio se sentem motivados a vencê-lo e, para isso, são capazes de mostrar suas habilidades de diversas maneiras.

Após o encerramento das atividades pedi aos alunos que falassem sobre essa experiência. Isso seria feito através de um meio de comunicação muito utilizado por eles. Todos os que quiseram, mandaram seu depoimento através de uma rede social conhecida: o *facebook*.

Abaixo estão alguns destes relatos na íntegra.



**Paolla Boechat** Creio que não só eu mais inúmeros alunos, principalmente aqueles que tiveram o primeiro contato com você no ano de 2012 achou excelente o seu trabalho! Vistos, trabalho, provas. Sua maneira de ensinar, sua paciência, seu zelo com todos nós! O trabalho teorema de Pitágoras foi ótimo também, mas acho que faltou um pouco de criatividade de "alguns" grupos, não sei se a maioria, pois não tive a oportunidade de presenciar todos! Fora isso, você é uma professora ótima! Sem reclamações ou sugestões, o trabalho que você faz é ótimo! Espero poder tê-la como professora esse ano novamente! Abraço!
Ontem às 11:00 · Curtir (desfazer) · 2

**Laís Kellen** Eu achei muito legal e interessante e o mais legal foi que nos poderiam apresenta o trabalho da forma q a gente achasse melhor...Adorei ñ so os trabalhos mais as provas etc e principalmente a PROFESSORA!!!
há 23 horas via celular · Curtir (desfazer) · 2

**Crysman Dutra** Ano de grandes aprendizado, conquista e realizações, sendo que em grande parte deles você foi, sem dúvida, a peça fundamental, merece o mérito, com certeza uma excelente professora. Quanto ao trabalho , me recordo que me sai bem na apresentação, pois era um tema que eu dominava. A escola pitagórica e suas práticas místicas foi de suma importância para o aprimoramento e descobrimento da matemática, Pitágoras dizia que os números era a matéria primordial (no grego, arche) que direcionava a ordem cósmica e de um lugar chamado Holos em que estava armazenada toda a matemática existente e desconhecida, além disso se baseava na ideia de comensurabilidade das medidas, isto é, dados dois segmentos de reta de tamanhos quaisquer, há sempre uma unidade de medida que cabe um número inteiro de vezes em cada um deles. Grande parte da resolução do teorema se deve a Tales de Mileto, de quem Pitágoras foi discípulo, quando Tales vai ao Egito e observa a construção de canais hidráulicos no meio do rio Nilo percebe que ao traçar a diagonal num quadrado, este deixava de ser comensurável e se transformava em paradoxo. Com uso de figuras e raízes quadradas, Pitágoras e seus alunos compreenderam uma forma viável de resolver o problema, descobrindo uma forma de criar atomógonos de qualquer tamanho, sem utilizar tecnologia. O método era dependente de uma forma chamada gnômom. Para construir seus atomógonos, Pitágoras começou de um quadrado de lado X e assim sucessivamente, com o término dessa operação foi possível entender que o valor da hipotenusa elevada ao quadrado era o dobro dos catetos também elevados ao quadrado, encerrado dessa forma o problema proposto por Tales. Vanessa, espero sinceramente que continue lecionando matemática a minha turma, caso meu desejo não seja atendido fique ciente que me senti profundamente realizado e saciado com as suas aulas. Sucesso, abração!
há 22 horas · Curtir (desfazer) · 1

Figura A6: Relatos dos alunos.

**Hélcio Vitor** Nossa, o trabalho foi demais! Eu sempre ouvia falar do conceito do teorema mas nunca tinha compreendido o porquê. O pessoal da sala se dedicou mesmo pra fazer e tenho certeza de que todos aprenderam! Sem contar a parte da história do Pitágoras e da Escola dele, top demais demais demais!! Valeu Vanessa, você é uma das melhores professoras que eu tive
há 21 horas · Curtir (desfazer) · 1

**Leonnardo Vaz** · Amigos de André Araújo e 32 outros
Gostei como os outros ai em cima ja escreveram ! voce deu oportunidades pra quem ainda na nao tinha alcançado a média e ... ee esse trabalho foi com o que essas pessoas se envolvesse de uma forma tao grande pra conseguir essses pontos! isso mostra a Profissional que vc é! cope tente em tudo o que faz!Muito obrigado por tudo titia ! kkkik
há 21 horas · Editado · Curtir (desfazer) · 1

**Lucas Deyvesson** o trabalho foi muito legal onde alem de compreender mais como funciona o teorema nos podemos expressar uma forma que gente quisesse sobre o teorema.....porque a forma mais legal de aprender do que na pratica tbm......valeu Vanessa ,obrigado por tudo.........
há 19 horas · Curtir (desfazer) · 1

**Luciely Elorrany** Bom, Vanessa o trabalho pra mim foi incrivel porque muitos (assim como eu) nao sabia realmente o que era o teorema, como foi criado e pra que servia e acho que com sua explicaçao e a pesquisa que tivemos que fazer para aprofundar o tema mostrou o quanto o teorema era util (coisa que nao sabiamos ate entao)... As apresentaçoes foram otimas fazendo com que muitos realmente se esforçassem para aprender e depois poder ensinar o teorema e mostrar de uma maneira diferente de como usa-lo. Sinceramente achei muito boa a ideia e lhe dou os Parabens pelo merito, tenho certeza que foi de extrema importancia a todos!
há 18 horas via celular · Curtir (desfazer) · 2

**Jéssica Barbosa** O trabalho foi muito bom, todos se dedicaram bastante, inclusive o meu grupo. O que posso dizer é que esse trabalho me ajudou a abrir os olhos, reparar que o Teorema de Pitágoras pode ser aplicado na maioria das coisas que vemos no dia-a-dia. Espero que nesse ano possa vir muito mais trabalhos, cada vez mais desafiadores e que despertem o interesse da turma, assim como esse. Meus parabéns pelo seu trabalho e muito obrigada por passar parte do seu conhecimento a todos nós alunos.
há 17 horas · Curtir (desfazer) · 2

Figura A7: Relatos dos alunos.

Agradeço a todos os alunos da E. E. Sinval Rodrigues Coelho do município de Governador Valadares-MG, que participaram ativamente desta atividade proposta.

Sem o empenho de vocês não seria possível obtermos resultados tão interessantes.