Elias das Neves Freire

Aplicação da Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica na Resolução de Problemas em Nível de Ensino Médio

Mossoró - RN, Brasil

23 de abril de 2014

Elias das Neves Freire

Aplicação da Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica na Resolução de Problemas em Nível de Ensino Médio

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:

Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Co-orientador:

Odaci Fernandes de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mossoró - RN, Brasil

23 de abril de 2014

Dissertação de Projeto Final de Mestrado em Matemática sob o título *"Aplicação da Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica na Resolução de Problemas em Nível de Ensino Médio"*, defendida por Elias das Neves Freire e aprovada em 23 de abril de 2014, em Mossoró, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia
Orientador

Prof. Ms. Odaci Fernades Oliveira
Co-Orientador

Prof. Dr. Odacir Almeida Neves
UFERSA

Prof. Django Jesus Dantas
EMPARN

Resumo

FREIRE, Elias das Neves. Aplicação da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica na resolução de problemas em nível de Ensino Médio. 2014. 38f. Dissertação (Mestrado em Matemática, Programa PROFMAT)− Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA), Mossoró − RN , 2014.

As desigualdades das médias são ferramentas que podem ser utilizadas para solucionar problemas de matemática que fazem parte do conteúdo programático do Ensino Médio. Muitos alunos, neste nível escolar, sentem uma certa dificuldade ao tentar resolver tais problemas. Neste trabalho, foi utilizada a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica como método alternativo para resolução dos referidos problemas. A metodologia usada neste trabalho constou de uma aula expositiva e prática, utilizando uma amostra de alunos de nível médio das turmas dos cursos técnicos de Edificações e Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFRN) − Campus Mossoró. Na parte expositiva da aula, os alunos tiveram determinado intervalo de tempo para resolver cinco problemas da maneira mais conveniente e, na parte prática, foram propostos mais cinco problemas para que os alunos resolvessem usando a ferramenta estudada. Os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios, tendo a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica se mostrado poderosa como ferramenta na resolução dos problemas acima referidos, além de fornecer soluções rápidas e concisas.

Palavras-chaves: educação, desigualdades, médias aritmética e geométrica.

Abstract

FREIRE, Elias das Neves. Use of the inequality between the arithmetic and geometric means in solving problems at the level of Upper Secondary Education. 2014. 38f. Dissertation (Master in Mathematics, PROFMAT program) – Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA), Mossoró–RN, 2014.

Inequalities of means are tools that can be used in solving some mathematical problems which are part of the teaching contents at the level of the Upper Secondary Education ('Ensino Médio'). Many students, at this grade level, experience some difficulty in trying to solve such problems. In this work, it was utilized the inequality between the arithmetic and geometric means as an alternate method for solving such problems. The methodology used in this study consisted of a lecture followed by an immediate segment for practicing, using a sample of the Upper Secondary Education level students from both the Buildings and Electrotechnics technical courses of the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFRN) – Campus Mossoró.During the lecture, the students had a certain time interval to solve five problems through any method they choose and, in the segment reserved for practicing, the students were asked to solve further five problems using the method worked out in the lecture. The students responded satisfactorily, and the inequality between the arithmetic and geometric means came out as a powerful tool in solving the proposed problems, providing a way to quick and concise solutions.

Keywords: education, inequalities, arithmetic e geometric means.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais cruciais de minha vida acadêmica, no sentido de compreender a importância da elevação do conhecimento científico para o meu profissionalismo.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Antônio Ronaldo Gomes Garcia, pela paciência na orientação e incentivo, que tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos demais conselheiros da banca examinadora, professores Odaci Fernandes de Oliveira, Odacir Almeida Neves e Django Jesus Dantas, pelas contribuições dadas em prol do aprimoramento deste trabalho.

Aos professores da UFERSA, Elmer Rolando Llanos Villarreal, Glauber Henrique de Sousa Nunes, Hailson Alves Ferreira, Mauricio Zuluaga Martinez, Stefeson Bezerra de Melo e Walter Martins Rodrigues, por acreditarem na importância deste trabalho para o meu desenvolvimento científico.

Aos alunos de Edificações e Eletrotécnica que participaram da aula expositiva e prática, importante etapa da realização deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas professores do IFRN, em especial Adriano Jorge, Alberton Fagno, Aleksandre, Rildo, Robson e Sidney, que me incentivaram seguir em frente na busca de mais um aprimoramento currícular acadêmico.

Aos meus amigos e colegas professores do DME-UERN, principalmente Amorim, Ana Shirley, Assis, Braz, Derilson, Ênio, Jeovanizélio, Laudelino, Otoniel, Rafael e Rivaldo, pelo incentivo e compreensão durante minha jornada acadêmica.

À minha amiga D. Lúcia Garcia, por entender o meu comportamento em certos momentos de minha vida, e ao meu amigo Djair Azevedo, pelo incentivo maciço para a realização desse trabalho.

Aos meus irmãos, aos quais tenho enorme carinho e admiração, pelo apoio sempre presente.

Aos meus primos e amigos especiais, que sempre torceram pelo meu engrandecimento acadêmico.

À minha querida esposa Vanúbia, por acreditar sempre na minha capacidade de vencer obstáculos.

À minha sogra, que sempre procurou me entender nos momentos mais difíceis.

Aos irmãos de minha esposa, bem como às suas esposas, pela força que sempre me passaram para finalizar esse trabalho.

Aos meus filhos Maria Luzia e Pedro Henrique, que sempre têm estado ao meu lado nos momentos de alegria e dificuldade.

Ao meu pai e à minha mãe, *in memoriam*, que sempre incentivaram os filhos a crescer no ramo da educação.

Sumário

Introdução

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre."

Paulo Freire

Sabemos que determinados problemas de matemática são grandes desafios para quem tenta resolvê-los. Como exemplo disto pode ser citado o problema contido no livro de Lima (2013: p.155) — que é normalmente resolvido por meio do uso de função quadrática —, o qual tem o seguinte enunciado: "Cavar um buraco retangular de $1m$ de largura de modo que o volume cavado seja $300m^3$. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar as dimensões do buraco de modo que seu custo seja mínimo".

Desse fato surgiu a ideia de colocarmos em prática, no Ensino Médio, um conteúdo trabalhado na disciplina Matemática Discreta (MA$-$12), no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional $-$ PROFMAT, polo Ufersa. Este conteúdo, desigualdades das médias, tem várias aplicações em outros tópicos da Matemática. Diante desta grande utilidade, veremos como este conteúdo se comporta em problemas em nível de Ensino Médio.

Assim, o tema abordado neste trabalho foi a aplicação da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica à resolução de problemas de matemática, visando a responder a seguinte pergunta: "É a desigualdade das médias uma ferramenta aproriada para solucionar problemas em nível de Ensino Médio?".

1 Um pouco de História

1.1 Fatos históricos sobre três médias

Arquitas de Tarento (428–347 a.C) foi um Filósofo, Cientista, Estratego, Estadista e Astrónomo Grego, considerado o mais ilustre dos matemáticos pitagóricos. Acredita-se ter sido discípulo de Filolau de Crotona e amigo de Platão, tendo fundido a Mecânica Matemática e influenciado Euclides. Acredita-se também que foi o primeiro a usar o cubo em Geometria e a restringir as Matemáticas às disciplinas técnicas como Geometria, Aritmética, Astronomia e Acústica. Embora inúmeras obras sobre Mecânica e Geometria lhe sejam atribuídas, restaram apenas fragmentos cuja preocupação central é a Matemática e a Música.

Arquitas definiu que existiam três tipos de médias: um número é a média aritmética de dois outros quando o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excesso do segundo para o terceiro; a média geométrica quando a proporção do segundo para o terceiro é igual a proporção do primeiro para o segundo; e a média harmônica quando a quantidade que o primeiro excede o segundo em relação ao primeiro é igual à quantidade que o segundo excede o terceiro em relação a este. Tais conceitos referem-se às médias pitagóricas, não representando, portanto, os conceitos atuais destas médias.

1.2 Dois problemas antigos

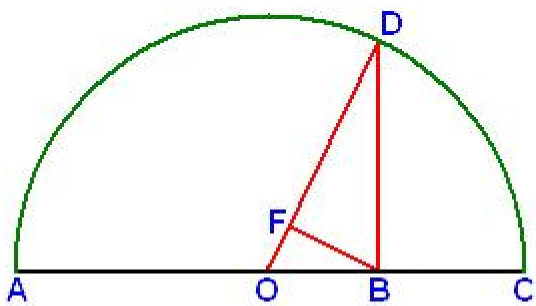
1.2.1 Problema proposto por Euclides

O problema proposto por Euclides sobre otimização no Livro VI tem o seguinte enunciado: “De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?". De momento, todos estão convidados a resolvê-lo da forma mais apropriada. Uma solução para um problema similar a este é fornecida usando nossa ferramenta de estudo (v. problema 5, item 4.5.3, p.24).

É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura Escola de Matemática de Alexandria, da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na Escola Platônica de Atenas. Muitos anos mais tarde, ao comparar Euclides com Apolônio, de maneira desfavorável a este último, Pappus de Alexandria elogiou Euclides por sua modéstia e consideração para com os outros. Proclo, um filósofo neoplatoniano, enriqueceu seu Sumário Eudemiano com a história frequentemente repetida da resposta de Euclides à indagação de Ptolomeu sobre se não haveria um caminho mais curto para o conhecimento geométrico: “Não há estradas reais na geometria”, teria dito o mestre. Mas conta-se a mesma história, contada pelo filósofo macedônico Stobaeus, segundo a qual, Euclides, indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista, ordenou a seu escravo que desse ao aluno uma moeda “para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo” (EVES 2004, p.167).

1.2.2 Problema proposto por Pappus

No livro III da coleção Matemática de Pappus, encontramos o enunciado (ilustrado na figura abaixo): “Tome B no segmento AC, B diferente do ponto médio O de AC. Erga a perpendicular a AC por B, cortando a semicircunferência sobre AC em D e seja F o pé da perpendicular tirada de B sobre OD. Mostre que OD, BD e FD representam respectivamente as médias aritmética, geométrica e harmônica dos segmentos AB e BC e mostre que, se $AB \neq BC$, então média aritmética>média geométrica>média harmônica.



Os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio prolongaram por algum tempo o uso da tradição geométrica grega, mas esta foi aos poucos esquecida, e os novos desenvolvimentos limitaram-se à astronomia, à trigonometria e à álgebra. Então, perto do final do século III d.C, cerca de 500 anos depois de Apolônio, surgiria um outro grande geômetra, Pappus, que se empenhou em reacender o interesse por aquela tradição. Pappus Escreveu comentários sobre os Elementos de Euclides e a obra Almagesto e Planisfério de Ptolomeu, mas quase tudo que sabemos sobre isto é resultado dos escritos de comentadores que se seguiram. O trabalho realmente grande de Pappus é a sua Coleção Matemática, uma combinação de guia da geometria da época, comentários, numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Dos oito livros que compunham a obra, perderam-se o primeiro e parte do segundo. A julgar pelo que remanesceu, o livro II ocupa-se de um método desenvolvido por Apolônio, o qual trata da escrita de números grandes e operações com estes. O livro III contém quatro partes: as duas primeiras lidam com a teoria das médias, com atenção especial ao problema da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados; a terceira com algumas desigualdades num triângulo; e a quarta com a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera dada (EVES 2004, p. 210).

2 Desigualdades Numéricas

Neste capítulo veremos algumas desigualdades numéricas que em certas situações são muito importantes para o desenvolvimento do nosso tema em estudo. A desigualdade principal (e, de certa forma, a única!) no campo dos números reais é a desigualdade $x^2 \geq 0$, não havendo qualquer dúvida em relação a esta afirmação. Outras desigualdades, bem conhecidas e úteis, seguem dela. Entre estas encontram-se as desigualdades entre as médias aritmética, geométrica e harmônica (esta última não será vista nesse trabalho).

2.1 Ordem nos números reais

Geralmente, denotamos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e por P o conjunto dos números reais positivos.

Uma propriedade muito importante dos números reais é que eles possuem uma ordem. A ordem dos números reais nos permite comparar dois números e decidir qual deles é maior ou se são iguais. Suponhamos que o sistema de números reais contém um conjunto P, que vamos chamar o conjunto de números positivos, que, em símbolos, corresponde a: $x > 0$, se $x \in P$. Também assumamos as seguintes propriedades:

— Propriedade 1

Cada número real x possui uma e apenas uma das seguintes condições:

1. $x \in P$ $(x > 0)$
2. $x \notin P$ $(x \leq 0)$

— Propriedade 2

Se x, $y \in P$, então $x + y \in P$. $(x > 0, y > 0 \Longrightarrow x + y > 0)$.

— Propriedade 3

Se x, $y \in P$, então $xy \in P$. $(x > 0, y > 0 \Longrightarrow xy > 0)$.

Se tomarmos a linha real como a representação geométrica dos números reais, estamos nos referindo a uma linha direcionada onde o número 0 foi localizado servindo para dividir a reta real em duas partes, onde os números positivos estão localizados à direita do 0.

Como consequência disto, a relação $a > b$ é verdadeira se $a - b \in P$. Da mesma forma, $a < b$ se $b - a \in P$. Logo, $a < b$ é equivalente a $b > a$. Todavia, se $a < b$ ou $a = b$, escrevemos simplesmente $a \leq b$ ou $b \geq a$.

2.2 A função quadrática

Uma desigualdade muito útil para os números reais é $x^2 \geq 0$, válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Esta desigualdade pode ser utilizada para deduzir outras desigualdades. Em particular, podemos usá-la para encontrar o máximo ou mínimo da função quadrática $ax^2 + 2bx + c$. Um exemplo comum consiste em provar que, se $a > 0$, a função $ax^2 + 2bx + c$ terá o seu mínimo em $x = -\dfrac{b}{a}$ e o seu valor mínimo é dado por $c - \dfrac{b^2}{a}$. De fato,

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Sendo $\left(x + \dfrac{b}{a}\right)^2 \geq 0$, o valor mínimo desta expressão é zero quando, $x = -\dfrac{b}{a}$. Assim, o valor mínimo da função $ax^2 + 2bx + c$ é $c - \dfrac{b^2}{a}$.

Se $a < 0$, a função $ax^2 + 2bx + c$ terá um máximo em $x = -\dfrac{b}{a}$ e seu valor máximo será dado por $c - \dfrac{b^2}{a}$. De fato, visto que $ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{a}$ e desde que $a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)^2 \leq 0$ (porque $a < 0$), o maior valor desta última expressão é zero. Assim, a função $ax^2 + 2bx + c$ é sempre menor do que ou igual a $c - \dfrac{b^2}{a}$ e assume este valor no ponto $x = -\dfrac{b}{a}$.

Outro exemplo: mostre que se x, y são números positivos com $x + y = 2a$, então o produto xy é máximo quando $x = y = a$.

Solução

Se $x+y=2a$, então $y=\dfrac{1}{x}$. Assim, $xy=x(2a-x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$. Como esta última expressão é do tipo $ax^2+2bx+c$, temos que ela assume um máximo em $x=a$. portanto, $x=y=a$.

2.3 A desigualdade fundamental

Para n números reais positivos a_1, a_2, ..., a_n, definimos sua média aritmética como o número $A_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ e a média geométrica como o número $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

A primeira desigualdade, que consideramos de importância fundamental em problemas de otimização, é a desigualdade entre a média aritmética e a média geomética de dois ou mais números positivos, que é expressa como

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2},\ \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3},\ ...,\ \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Além disso, a igualdade entre estas médias ocorre se, e somente se, $a_1=a_2=...=a_n$.

Demonstração para o caso $n=2$

Para provar a desigualdade no caso $n=2$, só precisamos observar que

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2} &= \frac{a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}}{2}\\ &= \frac{\left(\sqrt{a_1}\right)^2+\left(\sqrt{a_2}\right)^2-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}}{2}\\ &= \frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0;\end{aligned}$$

a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\sqrt{a_1}=\sqrt{a_2}$, isto é, quando $a_1=a_2$.

Demonstração para o caso $n=4$

Para provar este caso, aplicamos o resultado anterior aos números $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ e $\dfrac{a_3+a_4}{2}$, obtendo

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\quad\geq\quad\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)},$$

ou seja,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \quad \geq \quad \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)},$$

a igualdade só sendo obtida quando $\frac{a_1+a_2}{2}$ e $\frac{a_3+a_4}{2}$ forem iguais entre si. Aplicando agora duas vezes a desigualdade no caso $n=2$, primeiramente para a_1 e a_2, e posteriormente para a_3 e a_4, obtemos

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_3+a_4}{2}} \quad \geq \quad \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

a igualdade sendo obtida apenas quando $a_1=a_2$ e $a_3=a_4$. Portanto,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \quad \geq \quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

a igualdade só sendo obtida quando $a_1=a_2$, $a_3=a_4$ e $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_3+a_4}{2}$, isto é, quando $a_1=a_2=a_3=a_4$.

Demonstração para o caso $n=3$

Sejam a_1, a_2 e a_3 números positivos e seja A sua média aritmética. Logo,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+A}{4} \quad = \quad \frac{3A+A}{4} = A.$$

Aplicando a desigualdade das médias no caso $n=4$ aos números a_1, a_2, a_3 e A, obtemos

$$A = \frac{a_1+a_2+a_3+A}{4} \quad \geq \quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3A}.$$

Assim, $A^4 \geq a_1a_2a_3A$, $A^3 \geq a_1a_2a_3$, $A \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} = G$, a igualdade só se verificando quando $a_1=a_2=a_3$.

Se desejássemos provar a desigualdade para cinco números positivos a_1,a_2, a_3, a_4 e a_5, aplicaríamos a desigualdade aos 8 números a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, A, A e A, onde A é a média aritmética dos números a_1,a_2, a_3, a_4 e a_5. O mesmo raciocínio pode mostrar que, se a desigualdade é verdadeira para $n=k$, então ela é também verdadeira para todo $n<k$.

Demonstração para o caso $n=k$

Agora vamos mostrar que vale a desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Façamos a prova em dois passos.

Primeiramente, provemos por indução que a desigualdade desejada é verdadeira sempre que n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Para tanto, temos de verificar o caso inicial $n = 2$ (o que já fizemos), formular a hipótese de indução (para $n = 2^j$, digamos) e executar o passo de indução (deduzir o caso $n = 2^{J+1}$ a partir do caso $n = 2^j$). Mas desde que $2^{j+1} = 2.2^j$, basta supormos que a desigualdade seja verdadeira para qualquer inteiro $k > 1$, com a igualdade ocorrendo se, é só se, os k números forem todos iguais, e deduzir a partir daí que ela também será verdadeira para qualquer $2k$ números positivos, com igualdade novamente se, e só se, todos os números forem iguais. Para estabelecer este fato, consideremos os $2k$ inteiros positivos a_1, a_2, ..., a_{2k}. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k} a_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{k+j}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}\right) \\
&\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} a_{2k}}.
\end{aligned}$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, devemos ter

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} = \sqrt[k]{a_1 ... a_k},$$

$$\frac{a_{k+1} ... + a_{2k}}{k} \geq \sqrt[n]{a_{k+1} ... a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 ... a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}}{2} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 ... a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, devemos ter, por hipótese, que $a_1 = ... = a_k$ e $a_{k+1} = ... = a_{2k}$. Por fim, a última igualdade ocorre se, e só se, $\sqrt[k]{a_1 ... a_k} = \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implica em termos $a_1 = ... = a_k = a_{k+1} = ... = a_{2k}$. É também evidente que, se os números forem todos iguais, então a igualdade ocorre. Logo, por indução, temos que a nossa desigualdade é verdadeira, com a condição para a igualdade dada no enunciado, sempre que n for uma potência de 2.

Provemos agora, por indução forte, que a desigualdade é sempre verdadeira, ocorrendo a igualdade se, e só se, os números forem todos iguais. Para tanto, seja $n > 1$ natural e a_1, a_2, ..., a_n reais positivos dados. Tomemos agora $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > n$. Aplicando a desigualdade entre as médias aos n números $a_1, a_2, ..., a_n$, juntamente com $2^k - n$ cópias do número $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ (totalizando $n + (2^k - n) = 2^k$ números), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a_1 ... + a_n + \left(2^k - n\right) a}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_1 ... a_n . a^{2^k - n}} \\ &= \sqrt[2^k]{a^n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^{2^k}} = a. \end{aligned}$$

A partir daí, segue que $a_1 + a_2 + ... + a_n + (2^k - n)a \geq 2^k a$ ou, ainda,

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Para haver igualdade, segue da primeira parte que $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$.

2.4 Uma desigualdade útil

Tratemos agora de duas identidades algébricas muito utéis que são deduzidas considerando um fator especial de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Seja P o polinômio cúbico denotado por $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$, que tem a, b e c como zeros. Ao substituirmos a, b, c no polinômio, obtemos

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ac)a - abc = 0,$$

$$b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ac)b - abc = 0$$

e

$$c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ac)c - abc = 0.$$

Somando-se membro a membro essas três equações e fazendo manipulação algébrica, obtemos

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

Logo, se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Observemos também que a expressão $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ pode ser escrita como

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right].$$

Deste modo, obtemos uma outra expressão equivalente a $a^3+b^3+c^3-3abc$, ou seja,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right].$$

Esta nova versão conduz a uma determinada prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de três variáveis. A partir da última identidade, é claro que, se a, b, c são números positivos, então $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

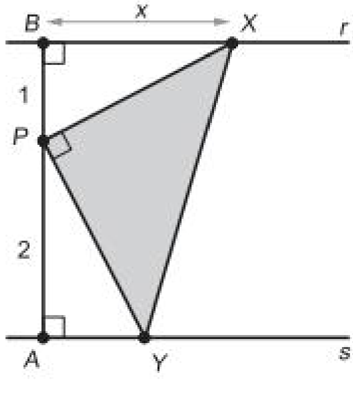
3 Metodologia Aplicada

3.1 Considerações Iniciais

Dois problemas, que citaremos adiante, nortearam o surgimento da ideia de utilizar a desigualdade das médias como ferramenta alternativa para a resolução de alguns problemas que são comumente solucionados através de outros métodos, assim antevendo sua aplicação em competições olímpicas e preparação para cursos de nível superior.

Eis os problemas:

— Problema 1. Na figura abaixo (fonte: OBMEP 2012), as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, neste segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P. Considerando a figura acima,



explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes, determine a área do triângulo XPY em função de x, determine para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$, o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor desta área.

— Problema 2. Para a e b reais positivos, prove que $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2$ e determine a condição para que ocorra a igualdade (MUNIZ NETO 2013, p.173).

A metodologia utilizada neste trabalho foi uma aula expositiva e prática sobre o uso de desigualdade das médias na resolução de problemas de matemática em nível de Ensino Médio envolvendo assuntos tais como geometria plana e espacial, funções, logaritmos e desigualdades.

3.2 Perfil da turma

Nossa prática sobre o conteúdo citado foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) – Campus Mossoró. A turma de alunos escolhida para o experimento foi formada por alunos de nível médio dos cursos técnicos em Edificações e Eletrotécnica.

3.3 Dados da turma

Os dados acerca do grupo de alunos que participaram da prática encontram-se no quadro abaixo.

Alunos por curso de origem				
	Número de alunos/sexo			
Curso	masculino	feminino	total	%
Edificações	3	7	10	71,43
Eletrotécnica	4	0	4	28,37
Total	7	7	14	100,00

Com base no quadro acima, podemos observar a superioridade numérica dos alunos de Edificações. Tal superioridade deveu-se ao fato de a prática estar prevista para os alunos de Edificações apenas. No entanto, alguns alunos de Eletrotécnica manifestaram o desejo de também participar, o que foi salutar, pois, assim os sexos concorreram em percentuais iguais

3.4 A Aula Expositiva

O conteúdo proposto foi trabalhado em uma aula de 50 minutos. Vale salientar que, antes desta aula, os alunos foram convidados a resolver cinco problemas da maneira que achassem conveniente. Terminada esta tarefa, foi dado início à aula, durante a qual ministrou-se o conteúdo referente a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Em seguida ao término da exposição do referido conteúdo, os problemas propostos antes do início da aula foram resolvidos utilizando o método recém-exposto. E logo em seguida foram propostos aos alunos mais cinco problemas (v. item 4.5.1) para que os resolvessem durante um determinado período de tempo, mas usando o método recém-trabalhado.

3.5 A Aula Prática

3.5.1 Enunciado dos problemas propostos

1. Encontre o valor mínimo da função $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (MUNIZ NETO 2012, p.30).
2. Dispomos de uma folha de aço de $2m$ por $3m$ e queremos construir com a mesma uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa? (MUNIZ NETO 2013, p.173).
3. Mostre que a desigualdade $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2$ é verdadeira (LOPES 1999, p.47).
4. Para x, y e z reais positivos, mostre que $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$ (FOMIM, QENKIN e ITENBERG 1996, p.192).
5. Dentre todos os retângulos de perímetro $20cm$, determine o de área máxima.

3.5.2 Resultados

A tarefa realizada pelos alunos no tocante às soluções dos problemas propostos (item 4.5.1) culminou com os resultados mostrados no quadro seguinte.

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Sem resposta
Problema 1	13	1	0
Problema 2	0	0	14
Problema 3	10	3	1
Problema 4	12	2	0
Problema 5	14	0	0

3.5.3 Breve comentário sobre cada problema

Neste tópico, teceremos um breve comentário sobre cada um dos problemas propostos (item 4.5.1), incluindo uma resolução sem o uso da desigualdade das médias e a resolução utilizando tal desigualdade.

- **Problema** 1. Este problema, apesar da sua essência não está presente nos conteúdos do Ensino Médio, foi bem aceito pela maioria dos alunos. Segundo os dados computados no item 4.5.2, podemos notar que aproximadamente 93% dos alunos conseguiram acertar a questão, enquanto apenas um aluno não conseguiu resolvê-lo corretamente.

Solução esperada

Sejam os números positivos x e $\frac{1}{x}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x+\frac{1}{x}}{2} &\geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{f(x)}{2} \geq 1,$$

ou seja,

$$f(x) \geq 2.$$

Logo, o valor mínimo que a função f assume é 2.

Uma solução sem o uso da desigualdade estudada

A desigualdade $x+\frac{1}{x} \geq 2$ é equivalente a $x+\frac{1}{x}-2 \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x}-2 &= \frac{x^2+1-2x}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

sendo igual a 0 se, e somente se, $x = 1$.

- **Problema** 2. Cem por cento dos alunos não conseguiram resolvê-lo, o que provocou as seguintes perguntas: “Que motivo levou todos os alunos a não conseguirem resolver o problema?” e “Foi o conteúdo ministrado insuficiente para dar suporte à resolução ou faltou outra ferramenta?”; perguntas que estão respondidas sob o tópico Considerações Finais.

Solução esperada

Sendo x o comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto da folha, a caixa tem as dimensões $2-2x$, $3-2x$ e x. Escolhendo os números reais positivos a, b e c tais que $a(2-2x)+b(3-2x)+cx$ independa de x e $a(2-2x)=b(3-2x)=cx$. Agora, aplicando a desigualdade das médias a fim de maximizar o volume da caixa, chegaremos à resposta procurada que é $x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{6}$.

Uma solução sem o uso da desigualdade estudada

Este problema pode também ser resolvido através de cálculo diferencial e integral. Vejamos:

Sendo V o volume da caixa e $2-2x$, $3-2x$ e x suas dimensões, obtemos $V=(2-2x)(3-2x)x$. Agora, derivando V em relação a x, obtemos $V'=12x^2-20x+6$. Assim, ao fazermos $V'=0$ e estudarmos o sinal de V', encontramos que o ponto de máximo é $x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{6}$.

- **Problema** 3. Este problema teve um percentual de acertos correspondente a $71,43\%$. Apesar de este problema está relacionado com o conteúdo do Ensino Médio, alguns alunos não foram exitosos em sua resolução. Isto mostra que a falta de domínio de determinados conhecimentos básicos ou suplementares, faz com que o aluno não consiga resolver um determinado problema, mesmo tendo aprendido a manipular uma nova técnica de resolução.

Solução esperada

Sejam os reais positivos $\frac{1}{\log_2 \pi}$ e $\frac{1}{\log_\pi 2}$. Aplicando a desigualdade das médias vista neste trabalho, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}}{2} &\geq \sqrt{\frac{1}{\log_2 \pi}.\frac{1}{\log_\pi 2}} \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{\log_2 \pi}.\log_2 \pi} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\log_2 \pi}$ e $\frac{1}{\log_\pi 2}$ são positivos, verificamos que $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$.

Uma solução sem o uso da desigualdade estudada

A desigualdade $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$ pode ser escrita como $\frac{1}{\log_2 \pi}+\log_2 \pi-2>0$, de onde provém o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}-2 &= \frac{1}{\log_2 \pi}+\log_2 \pi-2 \\ &= \frac{1+(\log_2 \pi)^2-2\log_2 \pi}{\log_2 \pi} \\ &= \frac{(\log_2 \pi-1)^2}{\log_2 \pi} \\ &> 0. \end{aligned}$$

- **Problema** 4. Este problema, apesar de seu conteúdo não está inserido no Ensino Médio, foi bem aceito pela turma ($85,71\%$ de acertos). Isto mostra-se positivo no que se refere ao aprendizado do conteúdo ministrado na prática.

Solução esperada

Sendo x, y e z números reais positivos, podemos aplicar a desigualdade das médias entre dois quaisquer destes números e obtermos

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y},$$

$$\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{x.z}$$

e

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{y.z}.$$

Agora, multiplicando membro a membro estas três desigualdades, obtemos

$$\frac{x+y}{2}.\frac{x+z}{2}.\frac{y+z}{2} \quad \geq \quad \sqrt{x.y}.\sqrt{x.z}\sqrt{y.z}$$

ou ainda

$$\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{8} \quad \geq \quad \sqrt{x^2.y^2.z^2},$$

daí obtendo

$$(x+y)(x+z)(y+z) \quad \geq \quad 8xyz.$$

Uma solução sem o uso da desigualdade estudada

Uma outra forma de resolver este problema é usar a idéia de que

$$\left(\sqrt{xy}-\sqrt{xz}\right)^2+\left(\sqrt{xz}-\sqrt{yz}\right)^2+\left(\sqrt{yz}-\sqrt{xy}\right)^2 \quad \geq \quad 0$$

e fazer manipulações algébricas para chegar a à desigualdade desejada.

- **Problema** 5. Este problema, que pode ser resolvido usando os conhecimentos de Ensino Médio apenas, a ferramenta estudada ou até mesmo conteúdos de Ensino Superior, teve 100% de acertos, isto é, o contrário da porcentagem obtida com o problema 2.

Solução esperada

Sendo x e y as dimensões do retângulo e A a sua área, temos que $2x+2y=20$ e $A=xy$. Agora, aplicando a desigualdade das médias para os números x e y, obtemos

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

ou ainda

$$\frac{10}{2} \geq \sqrt{A},$$

adivindo daí

$$5 \geq \sqrt{A},$$

que fornece

$$A \leq 25,$$

significando que a área máxima procurada é igual 25 unidades de área.

Uma solução sem o uso da desigualdade estudada

Sendo x e y as dimensões do retângulo e A sua área dada por $A = x.y$. Sabendo que $x + y = 10$, temos que $y = 10 - x$. Substituindo o valor de y em $A = x.y$, a área desse retângulo passa a ser uma função quadrática na variável x, isto é,

$$A = 10x - x^2.$$

Como esta função admite um máximo em $x = 5$, o valor máximo da área procurada será 25 unidades de área.

4 Considerações Finais

Inicialmente, façamos uma reflexão sobre o que diz os PCNs com relação ao sentido do aprendizado na área.

> "A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos." (BERGER et al.,s.d.).

Do texto acima, depreendemos que o aluno em nível de Ensino Médio já têm ou deveria ter certa maturidade para aprender um novo conteúdo. Esta assunção mostrou-se verdadeira ao aplicarmos uma nova metodologia para resolução de problemas não inclusos no conteúdo do Ensino Médio, pois o tema abordado (desigualdades entre as médias aritmética e geométrica) foi satisfatoriamente utilizado pelos alunos-amostra na resolução dos problemas propostos como prática-teste intentada como avaliação de aprendizagem no tocante ao conteúdo recém-ministrado.

Durante a avaliação dos resultados obtidos, pudemos perceber que a desigualdade das médias é uma ferramenta alternativa eficaz para solucionar muitos problemas que aparentam ser de resolução inatingível em termos de Ensino Médio.

Um dos problemas propostos na prática-teste deixou de ser resolvido por todos os alunos da amostra. Uma justificativa para a ocorrência deste fato é o desconhecimento por parte do alunado acerca de determinados conteúdos, embora constantes da grade de matemática do Ensino Médio, ou por falta de contato com tais conteúdos ou por esquecimento em virtude de não terem sido trabalhados a contento.

Em virtude disso, propomos a seguir uma estratégia que auxiliará o aluno a resolver problemas parecidos com aquele que não foi resolvido na prática-teste (problema 2, item 4.5.1).

A estratégia de Substituição

Substituição é uma estratégia útil para resolver os problemas de desigualdade. Ao fazermos uma substituição adequada, podemos, por exemplo, alterar um pouco os termos difíceis da desigualdade, simplificar expressões ou reduzir termos.

Uma sugestão útil para os problemas que contêm uma condição adicional na hipótese é a utilização de tal condição para simplificar o problema.

Vejamos os exemplos abaixo, nos quais a estratégia é simplificar através da eliminação de denominadores:

— Exemplo 1

Se a, b e c são números reais positivos menores que 1, com $a+b+c=2$, então

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)\geq 8.$$

Solução

Considerando $1-a=x$, $1-b=y$ e $1-c=z$, e por adição destas expressões, obtemos $x+y+z=3-(a+b+c)=1$, $a=1-x=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Daí, a desigualdade, depois de realizadas as substituições, torna-se equivalente a

$$\left(\frac{y+z}{x}\right)\left(\frac{x+z}{y}\right)\left(\frac{x+y}{z}\right)\geq 8,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 8xyz,$$

que é fácil de ser provada.

— Exemplo 2

Se a, b e c são números reais positivos, prove que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

Solução

Considerando $\frac{a}{b} = x$, $\frac{b}{c} = y$ e $\frac{c}{a} = z$, o lado esquerdo da desigualdade passa a ser mais simples, isto é, $x + y + z$. Trabalhemos agora o lado direito da desigualdade.

O primeiro elemento da soma é alterado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{c+a}{c+b} &= \frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}} \\ &= \frac{1+\frac{a}{b}\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}} \\ &= \frac{1+xy}{1+y} \\ &= x + \frac{1-x}{1+y}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\frac{a+b}{a+c} = y + \frac{1-y}{1+z}$$

e

$$\frac{b+c}{b+a} = z + \frac{1-z}{1+x}.$$

Agora, a desigualdade original é equivalente a

$$\frac{x-1}{1+y} + \frac{y-1}{1+z} + \frac{z-1}{1+x} \geq 0,$$

com a condição adicional $xyz = 1$.

Essa última desigualdade pode ser reescrita como

$$(x^2-1)(z+1) + (y^2-1)(x+1) + (z^2-1)(y+1) \geq 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$x^2z + y^2x + z^2y + x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z + 3.$$

Agora, para provarmos essa última desigualdade, basta notarmos que

$$\begin{aligned}x^2z + y^2x + z^2y &\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} \\ &\geq 3xyz \\ &\geq 3 \quad (i)\end{aligned}$$

e

$$x^2+y^2+z^2 \geq x+y+z. \quad (ii)$$

Somando as desigualdades (i) e (ii), membro a membro, obtemos

$$x^2z+y^2x+z^2y+x^2+y^2+z^2 \geq x+y+z+3.$$

Esta estratégia de mudança de variável para resolver problemas com nível bem avançado, ajuda o alunado a enxergar uma saída de resolução mais clara e objetiva.

Sugerimos, para trabalhos futuros, o estudo da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica como ferramenta para provar determinadas desigualdades numéricas que surgem no Ensino Superior.

Referências Bibliográficas

[1] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática.4. ed. São Paulo: Unicamp, 2004. 844 p.

[2] FOMIN, Dmitri; QENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. Círculos matemáticos: a experiência russa. Rio de Janeiro: Impa, 1996. 292 p.

[3] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. 1. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 289 p.

[4] LOPES, Luís. Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas. Rio de Janeiro: Interciência, 1999. 133 p.

[5] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à análise. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 331 p.

[6] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 235 p.

[7] OBMEP, – Provas e Soluções de Todas as Edições. Disponível em `http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n3-2012.pdf`; acesso em 29.03.2014.

[8] BERGER FILHO, Ruy Leite; PEREIRA, Avelino Romero Simões; MAIA, Eny Marisa. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC, [s.d.]. Disponível em `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf`; acesso em 10.02.2014.