UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

O Uso de Desigualdades na Resolução de Problemas

Alessandro Monteiro de Menezes

MANAUS
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Alessandro Monteiro de Menezes

O Uso de Desigualdades na Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2014

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

M775u

Monteiro de Menezes, Alessandro
O uso de desigualdades na resolução de problemas / Alessandro Monteiro de Menezes. 2014
85 f.: il.; A4 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Desigualdades Matemáticas. 2. Máximos e Mínimos. 3. Problemas de Olimpíadas. 4. Cálculo de Limites. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

ALESSANDRO MONTEIRO DE MENEZES

O USO DE DESIGUALDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 15 de Setembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Raul Rabello Mesquita
Membro

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me incluir em Seus sonhos e planos, por permitir que eu o conhecesse verdadeiramente e por me conceder mais essa vitória.

A minha mãe, Maria do Rosário da Silva Monteiro, que, pela busca excessiva do bem de seus filhos lutou e sofreu para criar-nos e educar-nos, tornando-se crucial para que eu percebesse a necessidade de estudar de verdade e, com isso, poder retribuir uma pequena fração de tudo que ela já fez por mim.

A minha avó (*in memoriam*), Marcelina da Silva Monteiro, por tudo que me ensinou, pela experiência de vida que me passou e por ter me ajudado em muitos momentos difíceis da vida enquanto Deus a permitiu estar aqui.

Ao meu tio, Joaquim Monteiro Filho, por ter pago a taxa da minha inscrição no vestibular em 2005, valor que não tínhamos, e me possibilitou a chance de ingressar na universidade.

A minha esposa, Ivete Arruda Monteiro, por ter aparecido na minha vida em um momento em que eu estava ficando sem forças para sonhar, por ter investido espiritualmente em mim com seus notáveis conhecimentos cristãos e experiência de vida e me fazer escrever uma lista de sonhos em 2008, ajudando-me a dar os primeiros passos, depois de priorizar uma vida com Cristo, para conquistar cada um deles.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, por sempre acreditar em meu potencial, pela paciência em me conduzir ao longo de cada dúvida que surgiu neste trabalho, pela liberdade e ajuda que me deu na escolha do tema e por seus comentários e sugestões que foram inestimáveis.

Ao Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, por ter sido meu orientador e formador na graduação durante três anos do programa PIBIC; programa que me deu uma sólida formação e amadurecimento em Matemática nas áreas de Análise Real e Aplicações, Álgebra Linear e Aplicações, Álgebra Pura e Geometria Euclidiana Plana, agregando conhecimentos que favoreceram imensamente para que eu pudesse passar sem dificuldades nas nove disciplinas cursadas no PROFMAT.

Ao Professor Dr. Raul Rabello Mesquita, pela forma como conduziu, na graduação, as disciplinas: Estruturas Algébricas, Geometria I e Geometria II, pois isso foi um dos "clicks" para adquirir o amadurecimento necessário a fim de ingressar no mestrado acadêmico ainda durante a graduação.

Ao CNPQ e à CAPES por um somatório de cinco anos de bolsas de estudos.

Por último, mas não menos importante, a todos os meus professores de graduação nos anos de 2008 a 2009, pois foram quatro períodos espetaculares. Ao meu amigo Fábio Costa, e a todas as pessoas que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Somente Deus é a solução

Nossas vidas poderiam ser comparadas a uma grande equação na qual todos os dias tentamos encontrar pequenas e grandes raízes. O fato é que a equação que se compara à nossa vida hoje, pode ter um grau a mais ou a menos amanhã, e somos pequenos demais para sempre sabermos extrair as raízes corretas. Poderíamos passar a vida inteira encontrando soluções que só favorecem a nós mesmos, pois achamos que a equação é nossa e podemos solucioná-la sempre do nosso próprio jeito. No entanto, não fomos nós quem a criamos. Quem criou, já criou sabendo todas as raízes e implicações. Quem criou já sabia que por causa das nossas decisões, o grau ou a quantidade de raízes, falsas ou verdadeiras, poderia aumentar ou diminuir a cada dia. Quem criou sabe de forma perfeita a melhor solução para cada implicação de sua equação. Não sei qual é a sua situação hoje, talvez você esteja a dias tentando encontrar raízes de onde é impossível extrair. Talvez você esteja encontrando as raízes de um outro conjunto universo, muito longe do universo de Deus. Talvez você esteja tão vazio que a sua equação no momento é de grau zero. Não importa em que incógnita, grau ou coeficientes você esteja, não importa a sua situação, Deus tem uma solução perfeita de hoje em diante para a sua equação. Entregue sua vida de uma vez por todas a Deus, pois Ele é o único que pode preencher o que está faltando em você. A solução da sua, da minha e de todas equações do mundo todo é do tamanho de Deus. Só Ele é capaz de resolver. Ele tem as verdadeiras respostas para cada um de nós, mas precisamos pertencer totalmente a Ele. Entregue-se a Deus e tudo estará resolvido pois Ele já lhe criou com as respostas.(Alessandro Monteiro - 12/01/2013).

RESUMO

As Desigualdades Matemáticas, que quase não são abordadas no Ensino Fundamental e Médio mas que podem ser muitas vezes até mais importantes que as igualdades, são de extrema importância para vários ramos da Matemática, tais como Álgebra, Trigonometria, Geometria e Análise, e constituem-se também ferramentas muito poderosas para a resolução de problemas de olimpíadas, demonstração de desigualdades geométricas, cálculo de máximos e mínimos e cálculo de limites. Neste trabalho são apresentadas de forma clara e concisa algumas desigualdades matemáticas que não precisam de estudos avançados na área para serem compreendidas. Uma mente com algum treinamento para o raciocínio lógico-matemático, um breve conhecimento da matemática formal, de álgebra e geometria plana são totalmente suficientes. São apresentadas e demonstradas: A Desigualdade Triangular, Desigualdade das Médias, Desigualdade de Bernoulli, Desigualdade Cauchy - Schwarz, Desigualdade do Rearranjo, Desigualdade de Tchebishev, Desigualdade de Jensen, Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder, Desigualdade de Minkowski e a Desigualdade de Schür. Ao final do trabalho, aproveitamos algumas destas desigualdades para definir o número de Euler e mostrar a divergência da série harmônica. Selecionamos, também, alguns problemas que estudantes do ensino básico ficam inibidos de solucioná-los por não conhecer tais desigualdades e que só aprendem a resolver com o conhecimento de Derivadas quando chegam no ensino superior. Entre eles, encontram-se questões de olimpíadas internacionais, problemas de otimização e como encontrar a equação da reta tangente a uma elipse através da Desigualdade das Médias e de Cauchy.

Palavras-chave: Desigualdades Matemáticas, Máximos e Mínimos, Problemas de Olimpíadas, Cálculo de Limites.

ABSTRACT

The mathematical inequalities, which are almost not discussed in elementary and high school, but that can be even more important than the equalities, are extremely important to several parts of Mathematics, such as algebra, trigonometry, geometry and analysis, and also constitute very powerful tools to the resolution of Olympiad problems, demonstration of geometrical inequalities, maximum and minimum calculation and limit calculation. This paper presents, in a clear and concise way, some of the mathematical inequalities that do not require advanced studies in the area to be understood. A mind with some training in math logical thinking, a superficial knowledge of formal mathematics, algebra and plane geometry are enough. The paper presents and demonstrates: the Triangle Inequality, Inequality of Arithmetic and Geometric Means, Bernoulli's Inequality, Cauchy-Schwarz Inequality, Rearrangement Inequality, Chebyshev's Inequality, Jensen's Inequality, Young's Inequality, Hölder's Inequality, Minkowski Inequality and Schür's inequality. At the end of this paper, we take some of these inequalities to define the Euler's constant and to show the harmonic series divergence. We also selected some problems that primary education students are inhibited to solve for not knowing such inequalities and who only learn how to solve them with the learning of Derivative in higher level education. There can be found, among them, international Olympiad questions, optimization problems and how to find the equation of tangent line to an ellipse through the Inequality of Arithmetic and Geometric Means and the Cauchy-Schwarz Inequality.

Keywords: Mathematical Inequalities, Maxima and Minima, Olympiad Problems, Limits Calculation.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
P	Conjunto dos números reais positivos.
$\|x\|$	Valor absoluto de x.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
MQ	Média Quadrática.
MA	Média Aritmética.
MG	Média Geométrica.
MH	Média Harmônica.
$\sum_{i=1}^{n}$	Somatório variando de 1 a n.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
sen θ	Seno do ângulo θ.
cos θ	Cosseno do ângulo θ.
S	Área de um Triângulo.
$2\,p$	Perímetro.
$\ln x$	Logarítmo natural de x.
$\lim x_n$	Limite de x_n com n tendendo ao infinito.
$max\,\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$	Maior elemento de $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.
$min\,\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$	Menor elemento de $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentamos algumas desigualdades matemáticas e suas aplicações, tema que é muito amplo e também muito importante para vários ramos da Matemática e áreas afins. A escolha do tema teve como principal objetivo contribuir com alunos e professores do ensino fundamental e médio devido à existência de pouco material disponível sobre o assunto, principalmente em língua portuguesa.

Ele foi dividido em três capítulos. No primeiro, falamos sobre algumas desigualdades básicas, começando pela Relação de Ordem nos Números Reais e terminando com uma apresentação geométrica da Desigualdade das Médias. No segundo, é apresentada de uma maneira mais formal e algébrica a Desigualdade das Médias e sua generalização, seguida de outras Desigualdades muito importantes, a Desigualdade de Bernoulli, Desigualdade Cauchy - Schwarz, Desigualdade do Rearranjo, Desigualdade de Tchebishev, Desigualdade de Jensen, Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder, Desigualdade de Minkowski e a Desigualdade de Schür. E finalmente, no último capítulo, apresentamos algumas aplicações destas desigualdades como poderosas ferramentas no cálculo de máximos e mínimos, problemas de olimpíadas, desigualdades geométricas e cálculo de limites, incluindo, neste último tópico, a definição do número e, mais conhecido como Número de Euler e uma demonstração da divergência da Série Harmônica.

Capítulo 1

Desigualdades Básicas

1.1 Relações de Ordem nos Números Reais

Uma importante propriedade dos números reais é que ele tem uma ordem que nos permite comparar dois números reais e decidir qual deles é maior, ou se são iguais. Isso porque $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Assim, sendo $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$, três propriedades devem ser satisfeitas:

Axioma 1.1. *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe um subconjunto $P \subset \mathbb{R}$, e ocorre exatamente uma das três alternativas:*

i) $x = 0$,

ii) $x \in P\,(x > 0)$,

iii) $-x \in P\,(-x > 0)$.

Esse conjunto P é chamado *conjunto dos números reais positivos* e denotado por $\mathbb{R}_+$. E valem as seguintes propriedades:

1) A soma de dois elementos positivos é sempre positiva, ou seja,

$$x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \Longrightarrow \quad x + y \in \mathbb{R}_+$$

(Isto é: $x > 0$, $y > 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y > 0$)

2) O produto de dois elementos positivos é sempre positivo, isto é,

$$x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$$

(Em símbolos : $x > 0, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$)

Indicando-se com $\mathbb{R}_-$ o conjunto dos números negativos de $\mathbb{R}$, ou seja, os elementos $-x$, onde $x \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}\,.$$

Agora, dados $x,\, y\, \in\, \mathbb{R}$, podemos definir a relação "x é maior que y" (simbolicamente: $x > y$), da seguinte maneira:

$$x > y \quad \Longleftrightarrow \quad (x - y) \in \mathbb{R}_+.$$

Analogamente, a relação "x é menor que y" (simbolicamente: $x < y$) é definida assim

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad (y - x) \in \mathbb{R}_+.$$

Propriedade 1.1. *Sejam $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, as seguintes desigualdades são sempre verdadeiras:*

i) Ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades: $x = y,$ ou $x < y$ ou $x > y$

ii) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$

iii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

iv) $x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$ e $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$

v) $x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0$

vi) $x < 0, y > 0 \Rightarrow xy < 0$

vii) $x < y, w < z \Rightarrow x + w < y + z$

viii) $x < y \Rightarrow -y < -x$

ix) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0$

x) $x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < 0$

xi) $x > 0, y > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{y} > 0$

xii) $0 < x < y, 0 < w < z \Rightarrow xw < yz$

xiii) $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

xiv) $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$

xv) $x > 0, y > 0$ e $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$

Demonstração das quatro primeiras e da última propriedade:

Demonstração. i) **(Tricotomia)**

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Ou $y - x = 0$, ou $y - x \in P$, ou $y - x \in -P$ (isto é, $x - y \in P$). Logo, temos as seguintes possibilidades:

$$x = y, \text{ ou } x < y \text{ ou } x > y$$

que se excluem mutualmente pela proposição 2.1.

ii) **(Transitividade)**

Se $x < y$ e $y < z$ então podemos afirmar que $y - x \in P$ e $z - y \in P$. Pela proposição 2.2, temos que $(y - x) + (z - y) \in P$, isto é, $z - x \in P$. Logo, $x < z$.

iii) **(Monotonicidade da Adição)**

Se $x < y$ então $y - x \in P$. Mas,

$$(y + z) - (x + z) = y - x \in P$$

O que significa que $x + z < y + z$.

iv) **(Monotonicidade da Multiplicação)**

Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in P$ e $z \in P$. Assim, temos, pela proposição 2.3, que $(y - x) \cdot z \in P$, ou seja, $(y \cdot z - x \cdot z) \in P$, o que implica em $x \cdot z < y \cdot z$. Caso contrário, se $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in P$ e $-z \in P$. Desta forma, novamente pela proposição 2.3, temos que $(y - x) \cdot (-z) \in P$, isto é $(x \cdot z - y \cdot z) \in P$, o que implica em $x \cdot z > y \cdot z$.

xv) Se $x > 0, y > 0$ e $x^2 < y^2$ então $x + y \in P$ e $y^2 - x^2 \in P$. Como $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$, então $y - x \in P$. Logo, $x < y$.

□

1.2 Valor Absoluto

Definição 1.1. *O valor absoluto de um número real x é denotado por $|x|$, e é definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente $|x|$ é distância do número x até a origem. E $|x - y|$ é a distância entre os números x e y.

Propriedade 1.2. *Sejam x, a e b números reais, é sempre verdade que:*

i) $|x| \geq 0$*, com igualdade quando* $x = 0$.

ii) $|-x| = |x|$.

iii) $x \leq |x|$.

iii) $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$.

iv) $|x|^2 = x^2$.

v) $|ab| = |a||b|$.

vi) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

1.3 Desigualdade Triangular

A desigualdade triangular afirma que para qualquer par de números a e b,

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se $ab \geq 0$.

Demonstração. (1)

Como ambos os lados da desigualdade são positivos, então pelo item (xv) da propriedade 2.1 basta mostrarmos que $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$.

Vejamos:

$$
\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2+2ab+b^2 \\
&= |a|^2+2ab+|b|^2 \\
&\leq |a|^2+2|ab|+|b|^2, \ pois \ ab \leq |ab| \\
&= |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \\
&= (|a|+|b|)^2 .
\end{aligned}
$$

Ou seja, $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$. No caso de ser $ab \geq 0$ teremos $ab = |ab| = |a||b|$. Logo, ocorrerá igualdade.

(2) Temos que

$$
\begin{cases} |a| \geq a \\ |b| \geq b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |a| \geq -a \\ |b| \geq -b \end{cases}
$$

Assim, por adição obtemos que

$$
\begin{cases} |a|+|b| \geq a+b, \\ |a|+|b| \geq -(a+b) . \end{cases}
$$

Mas isso implica, pelo item (iii) da propriedade 2.2, que $|a|+|b| \geq |a+b|$. E se for $ab \geq 0$, então podemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$ ou $a \leq 0$ e $b \leq 0$. No primeiro caso teremos consequentemente que $|a| = a$, $|b| = b$ e $|a+b| = a+b$, ou seja, ocorrerá a igualdade. O segundo caso implicará que $|a| = -a$, $|b| = -b$ e $|a+b| = -(a+b)$, ou seja, também teremos igualdade. Portanto, $|a+b| \leq |a|+|b|$, com igualdade se, e somente se, $ab \geq 0$.

$\square$

A forma geral da Desigualdade Triangular para n números reais $a_1, a_2, ..., a_n$, é

$$
|a_1+a_2+...+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+...+|a_n|
$$

e sua demonstração pode ser feita usando indução sobre n.

Teorema 1.1. *Sejam x,y e z números reais arbitrários, é sempre válido que:*

i) $|x|-|y| \leq ||x|-|y|| \leq |x-y|$;

ii) $|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$;

iii) $|x+y+z|+|x|+|y|+|z| \geq |x+y|+|x+z|+|y+z|$.

Demonstração. (i). Se $|x| \geq |y|$ então $||x| - |y|| = |x| - |y|$. Caso contrário, se $|x| < |y|$ então $||x| - |y|| > |x| - |y|$. Logo, sempre é válido que $|x| - |y| \leq ||x| - |y||$. Pela Desigualdade Triangular, temos $|x| = |(x - y) + y| \leq |(x - y)| + |y|$, ou seja $|x| - |y| \leq |x - y|$. Temos também $|y| = |(y - x) + x| \leq |(y - x)| + |x|$, o que resulta em $|y| - |x| \leq |y - x|$. Como $|x - y| = |y - x|$ então $|y| - |x| \leq |x - y|$, isto é, $|x| - |y| \geq -(|x - y|)$. Assim temos $-(|x - y|) \leq |x| - |y| \leq |x - y|$. Logo, pelo item (iii) da propriedade 2.5, podemos concluir que $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Portanto, para quaisquer números reais x, y e z, sempre é verdade que $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(ii). Como $x - z = (x - y) + (y - z)$, então pela Desigualdade Triangular temos que $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |(x - y)| + |(y - z)|$.

(iii). Se x, y ou z for igual a zero, a desigualdade segue. Vamos então assumir que $|x| \geq |y| \geq |z| > 0$. Temos, pelo item (vi) da proposição 2.5, que

$$\begin{aligned} & \frac{|x + y + z| + |x| + |y| + |z| - |x + y| - |x + z| - |y + z|}{|x|} \\ = \quad & \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| + 1 + \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|1 + \frac{y}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left|1 + \frac{z}{x}\right| \end{aligned}$$

Como $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$ e $\left|\frac{z}{x}\right| \leq 1$, então $\left|1 + \frac{y}{x}\right| = 1 + \frac{y}{x}$ e $\left|1 + \frac{z}{x}\right| = 1 + \frac{z}{x}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} & \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| + 1 + \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|1 + \frac{y}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left|1 + \frac{z}{x}\right| \\ = \quad & \left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) + \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \end{aligned}$$

Mas, $\left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \geq \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)$ e $\left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| \geq \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right|$. Logo,

$$\left|1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| - \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) + \left|\frac{y}{x}\right| + \left|\frac{z}{x}\right| - \left|\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right| \geq 0.$$

E disso segue que $|x + y + z| + |x| + |y| + |z| - |x + y| - |x + z| - |y + z| \geq 0$.

Ou seja,

$$|x + y + z| + |x| + |y| + |z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|.$$

$\square$

1.4 A Função Quadrática

A Função Quadrática cuja lei de formação é

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{onde} \;\; a \neq 0, b, c \in \mathbb{R},$$

pode apresentar-se também sob a forma

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \;\text{ onde }\; \Delta = b^2 - 4ac$$

Pois,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

E com essa forma fica mais acessível falar sobre máximos e mínimos desta função. O valor mínimo ou máximo, da função quadrática é o menor ou maior, respectivamente, valor possível que f pode assumir quando fazemos x percorrer o conjunto dos números reais.

Sendo $a > 0$, podemos notar que quanto menor for o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, menor também será o valor de f. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então seu valor mínimo é zero e isso ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$. Similarmente, quando $a < 0$ o valor máximo de f é obtido para $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemplo 1.1. *Se x, y são números positivos com $x + y = 2a$, então o produto xy é máximo quando $x = y = a$.*

Se $x + y = 2a$, então $y = 2a - x$. Assim, $xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2$ e tem valor máximo quando $x = a$, ou seja, $x = y = a$.

Exemplo 1.2. *Na figura abaixo ABCD é um retângulo inscrito dentro do círculo de raio* r*. Encontre as dimensões que nos dão a maior área possível do retângulo ABCD.*

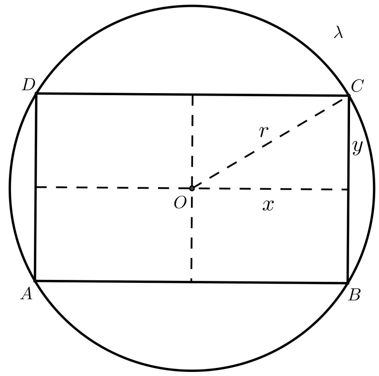

Figura 1.1: Retângulo inscrito no círculo λ

Como a área do retângulo é $A = 2x \cdot 2y = 4xy$ e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, então temos também que

$$A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Podemos, sem muita dificuldade, nos convencermos de que as dimensões, que nos dão o valor máximo de A, são as mesmas que nos dão o valor máximo de A^2. Assim, temos

$$f(x) = A^2 = 16r^2x^2 - 16x^4 = -16\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 + 4r^4.$$

E disso temos também que A^2 é máximo quando $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Como $y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, logo as dimensões pedidas são de um quadrado de lado $r\sqrt{2}$.

1.5 Uma Desigualdade Fundamental

A primeira desigualdade que consideraremos, fundamental para a resolução de problemas, é a desigualdade entre a Média Aritmética (MA) e a Média Geométrica (MG) de dois números não negativos a e b que é dada por

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

com igualdade se, e somente se, $a = b$.

Os números $\dfrac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$ são chamados de Média Aritmética e Média Geométrica de a e b, respectivamente. E para demonstrarmos esta desigualdade basta notarmos que

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$$

com igualdade quando $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, ou seja, $a=b$.

Observação 1.1. *A demonstração desta desigualdade também pode ser feita usando propriedades geométricas. Vejamos:*

Considere o semicírculo construído abaixo com $a = BD$, $b = DC$ e diâmetro $BC = a+b$.

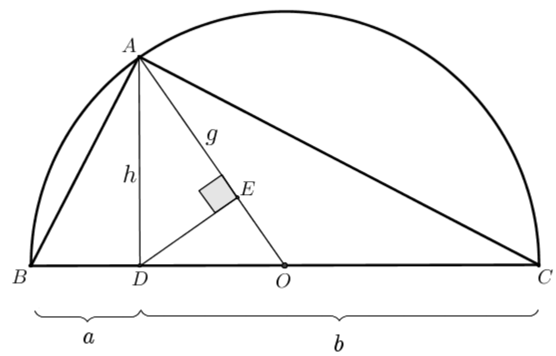

Figura 1.2: Triângulo inscrito

Seja A o ponto onde a perpendicular a $\overline{BC}$ em D intercepta este semicírculo, com $AD = h$. Seja também E o ponto de encontro da projeção perpendicular de $\overline{OD}$ sobre o raio $\overline{AO}$ e a e b as projeções de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$, respectivamente. Como os triângulos ABD e CAD são semelhantes, pois ambos são retos em D e os ângulos $C\widehat{A}D$ e $A\widehat{B}D$ são congruentes, então

$$\frac{h}{b}=\frac{a}{h}\Rightarrow h=\sqrt{ab}.$$

Como os triângulos AOD e ADE também são semelhantes, pois são retos em D e E e são congruentes os ângulos $A\widehat{O}D$ e $A\widehat{D}E$, então

$$\frac{g}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}\Rightarrow g=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Mas, $g\leq h\leq \dfrac{a+b}{2}$. Logo,

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$$

A igualdade ocorrerá quando o ponto O coincidir com o ponto D. Ou seja, quando $a=b$.
Nota: O número $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ é chamado de Média Harmônica (MH) entre a e b.

Capítulo 2

Desigualdades Numéricas

Apresentaremos a partir daqui, usando ideias simples e alguns passos lógicos, resultados sobre desigualdades de rara elegância e muito importantes para vários ramos da Matemática.

2.1 Desigualdade das Médias

2.1.1 Com duas e três variáveis

Veremos agora as desigualdades Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática, muito utilizadas na resolução de problemas.

Teorema 2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Os números*

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad MA = \frac{a+b}{2}, \quad MG = \sqrt{ab} \quad e \quad MH = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

são chamados respectivamente de médias, quadrática, aritmética, geométrica e harmônica dos números a e b, e é válido que

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Ocorrendo igualdade se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que $MQ \geq MA$.

Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$ temos que

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad 2(a^2+b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2(a^2+b^2)}{4} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorrerá se, e somente se, $a - b = 0$, ou seja, $a = b$.

Temos também que

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $MA \geq MG$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, isto é, $a = b$.
Finalmente provaremos que $MG \geq MH$. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.
\end{aligned}$$

Com igualdade se, e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, isto é, $a = b$. $\square$

Da mesma forma, para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, podemos definir respectivamente de médias, quadrática, aritmética, geométrica e harmônica dos números a, b e c, os números:

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}, \qquad MA = \frac{a+b+c}{2}, \qquad MG = \sqrt{abc} \qquad \text{e} \qquad MH = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

E de forma similar ao Teorema 3.1 temos, para três variáveis, o Teorema abaixo:

Teorema 2.2. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *tais que*

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \qquad MA = \frac{a+b+c}{3}, \qquad MG = \sqrt[3]{abc} \qquad e \qquad MH = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Então

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Ocorrendo igualdade se, e somente se, $a = b = c$.

Faremos somente a demonstração da parte $MA \geq MG$, mas faremos de uma forma especial. Vejamos:

Demonstração. A fim de remover a raiz cúbica, façamos

$$a = x^3, \qquad b = y^3, \qquad c = z^3.$$

Assim, precisamos mostrar que

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz.$$

Ou seja,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0.$$

Sendo

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right) = x^3+y^3+z^3-3xyz, \tag{2.1}$$

o que pode facilmente ser verificado fazendo a multiplicação dos termos do primeiro membro, e como a, b, c são não negativos, então $x+y+z$ também é. E desta forma, é suficiente mostrarmos que

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geq 0.$$

Mas, como é válido que

$$(x-y)^2 \geq 0, \qquad (x-z)^2 \geq 0, \qquad (y-z)^2 \geq 0.$$

Ou seja,

$$x^2+y^2 \geq 2xy, \qquad x^2+z^2 \geq 2xz, \qquad y^2+z^2 \geq 2yz.$$

Então, somando-se estas três desigualdades, membro a membro, obtemos:

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 2\left(xy+xz+yz\right).$$

Logo, $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geq 0$, como queríamos. E a igualdade ocorrerá se, e somente se, $(x-y)^2=0$, $(x-z)^2=0$, e $(y-z)^2=0$, o que equivale a $x=y=z$. Isto é,

$$a=b=c.$$

$\square$

Observação 2.1. *Existem outras maneiras de verificar a validade da desigualdade* (2.1).

Usando Fatorações:

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz \\
&= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz \\
&= (x+y+z)^3-3(x+y)z(x+y+z)-3xy(x+y)-3xyz \\
&= (x+y+z)^3-3(x+y)z(x+y+z)-3xy(x+y+z) \\
&= (x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(x+y)z-3xy\right] \\
&= (x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3xz-3yz-3xy\right] \\
&= (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right).
\end{aligned}$$

Usando Determinantes:

Como um determinante não se altera se substituímos uma linha com sua soma por duas outras, então

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x+y+z) & (x+y+z) & (x+y+z) \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right).$$

A desigualdade entre as médias também é válida para um número arbitrário de variáveis e existem dezenas de formas de fazer esta demonstração. Nossa demonstração está baseada no lema apresentado e demonstrado logo abaixo. Vale ressaltar que a desigualdade entre as médias é de extrema importância para demonstrar outras desigualdades mais complicadas e também para encontrar máximos e mínimos de expressões.

Lema 2.1. *Se* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são números reais positivos tais que* $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$*, então*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n.$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Demonstração. Vamos provar isso por indução sobre n. Vejamos:

Para $n = 1$, a desigualdade é verdadeira pois se $a_1 = 1$ então $a_1 \geq 1$. Se $n = 2$ então $a_1 a_2 = 1$, e como $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$, uma vez que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, então temos também que $a_1 + a_2 \geq 2$. Suponhamos que a desigualdade seja válida para $n = k$, isto é, para números reais arbitrários e positivos $a_1, a_2, ..., a_k$ tais que $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$ seja válido que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq k,$$

com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$.
Vamos mostrar que ela também é válida para $n = k + 1$. Sendo os números reais arbitrários e positivos $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ tais que $a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} = 1$, temos dois casos a considerar:

i) Se todos os números forem iguais, ou seja, se $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$, então teremos $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} = 1$, pois por hipótese estamos supondo que $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$. E neste caso a desigualdade é claramente satisfeita.

ii) Se nem todos os números forem iguais, como não podemos ter todos os números menores que 1 e nem maiores que 1, uma vez que o produto deles é igual a 1, então existirá entre eles um que é menor 1 e outro que é maior que 1. Assim, supondo sem perda de generalidade que $a_1 < 1$ e $a_2 > 1$. Pela hipótese de indução, se para a sequência de k termos $a_1 a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}$ acontecer que $(a_1 a_2) \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = 1$ então,

$$a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geq k,$$

onde ocorre igualdade se, e somente se, $a_1 a_2 = a_3 = \cdots = a_k = a_{k+1}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + 1 + a_1 a_2 - 1 - a_1 a_2 \\
&= a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + 1 + a_2 - a_1 a_2 - 1 + a_1 \\
&= a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + 1 + (a_2 - 1)(1 - a_1) \\
&\geq k + 1 + (a_2 - 1)(1 - a_1) \\
&> k + 1, \ \ pois \ \ (a_2 - 1) > 0 \ e \ (1 - a_1) > 0.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorrerá se, e somente se, $a_1 a_2 = a_3 = \cdots = a_k = a_{k+1} = 1$ e $(a_2 - 1)(1 - a_1) = 0$, ou seja, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_k = a_{k+1} = 1$. Logo, devido ao princípio de indução matemática, temos a demonstração desejada.

□

2.1.2 Generalização

Teorema 2.3. ***(Desigualdade das Médias)***. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Os números*

$$MQ = \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{n}}, \quad MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

$$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad e \quad MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

são chamados respectivamente de médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica dos números $a_1, a_2, ..., a_n$, e é válido que

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que $MA \geq MG$, isto é,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Seja $MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Temos,

$$1 = \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}{MG} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{MG} \cdot \frac{a_2}{MG} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{MG}}.$$

Mas isso implica que $\frac{a_1}{MG} \cdot \frac{a_2}{MG} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{MG} = 1$. Logo, pelo lema demonstrado acima, temos que

$$\frac{a_1}{MG} + \frac{a_2}{MG} + \cdots + \frac{a_n}{MG} \geq n.$$

Ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Com igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{MG} = \frac{a_2}{MG} = \cdots = \frac{a_n}{MG}$, isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Mostraremos agora que $MG \geq MH$, ou seja

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Por $MA \geq MG$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} &\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

A igualdade ocorrerá se, e somente se, $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \cdots = \dfrac{1}{a_n}$, ou seja, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Por último, para mostrarmos que $MQ \geq MA$ usaremos que

$$(a_i - a_j)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a_ia_j \leq a_i^2 + a_j^2.$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} (MA)^2 = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 &= \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n}{n^2} \\ &\leq \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+(a_1^2+a_2^2)+(a_1^2+a_3^2)+\cdots+(a_{n-1}^2+a_n^2)}{n^2} \\ &= \frac{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{n^2} \\ &= \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \\ &= (MQ)^2. \end{aligned}$$

Logo, $MQ \geq MA$ e a igualdade ocorrerá se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Portanto, para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ é sempre válido que

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

E, além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$\square$

2.2 Desigualdade de Bernoulli

Teorema 2.4. ***(Desigualdade Generalizada de Bernoulli)*** *Sejam x_i, $i = 1, 2, ..., n$, números reais com o mesmo sinal, maiores que -1. Então temos que*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{2.2}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n. Para $n = 1$ temos que $1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Suponhamos que para $n = k$, e números arbitrários x_i, maiores que -1, $i = 1, 2, ..., k$, com o mesmo sinal, a desigualdade seja válida, ou seja

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots x_k. \tag{2.3}$$

Para $n = k + 1$, e $x_i > -1$, $i = 1, 2, ..., k, k + 1$, arbitrários de mesmo sinal, temos que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 0. \tag{2.4}$$

Mas, por (2.3) e (2.4) temos também que

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade é válida para $n = k + 1$, o que completa a demonstração. □

Corolário 2.1. ***(Desigualdade de Bernoulli)*** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$. Então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Demonstração. Fazendo $x = x_1 = x_2 = ... = x_n$ na desigualdade (3.1), obtemos

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

□

Uma outra forma de demonstrarmos esta desigualdade é notando que se $0 < a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 1$, então

$$na^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Visto que

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} = b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1} \geq a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

Basta tomarmos $b = 1 + x$ e $a = 1$, pois

$$\begin{aligned} na^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b - a} \quad &\Rightarrow \quad n1^{n-1} \leq \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} \\ &\Leftrightarrow \quad n \leq \frac{(1+x)^n - 1}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad (1+x)^n \geq 1 + nx. \end{aligned}$$

Note ainda que o fato de ser $b > 0$, implica também em $x > -1$ e $x \neq 0$, pois $a \neq b$, o que faz a demonstração ser completa.

Observação 2.2. *Este corolário (Desigualdade de Bernoulli para $n \in \mathbb{N}$) pode ainda ser demonstrado pela desigualdade $MA \geq MG$, e também por derivadas.*

Os próximos dois corolários são extensões do corolário 3.1 (Bernoulli).

Corolário 2.2. *Seja $x > -1$ e $r \geq 1$, $r \in \mathbb{Q}$. Então*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Demonstração. Seja $r = \dfrac{m}{n}$, onde $mdc(m, n) = 1$. Como $r \geq 1$, então temos que $m > n$. Fazendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + rx$ e $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 1$. Temos:

Se $1 + rx \leq 0$, então não há o que fazer. Assim, supondo que $1 + rx > 0$ e usando que $MA \geq MG$ temos que

$$\begin{aligned} 1 + x &= \frac{mx + m}{m} = \frac{rnx + m}{m} = \frac{n + rnx + m - n}{m} = \frac{n(1 + rx) + m - n}{m} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m} \\ &= \sqrt[m]{(1 + rx)^n} = (1 + rx)^{\frac{n}{m}} = (1 + rx)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Mas isso equivale a dizer que $(1+x)^r \geq 1 + rx$, o que queríamos demonstrar. □

Corolário 2.3. *Seja $x > -1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $0 < \alpha < 1$, então*

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x,$$

e, se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, então

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x,$$

onde a igualdade ocorrerá se, e somente se, $x = 0$.

Demonstração. Suponhamos que α seja um número racional tal que $0 < \alpha < 1$. Assim, tomando-se $\alpha = \dfrac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos e $1 \leq m < n$, teremos, pela hipótese de ser $1 + x > 0$ e também pela desigualdade $MA - MG$, que

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\
&= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdot \ldots \cdot(1+x)}_{m} \cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{n-m}} \\
&\leq \frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+\cdots+1}{n} \\
&= \frac{m(1+x)+n-m}{n} \\
&= \frac{n+mx}{n} \\
&= 1+\frac{m}{n}x \\
&= 1+\alpha x.
\end{aligned}$$

Assim, $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, e a igualdade ocorrerá quando todos os fatores da desigualdade forem iguais, ou seja, $(1+x) = 1$, $x = 0$.

Com isso demonstramos a primeira parte da desigualdade para o caso de α ser um número racional. Suponhamos agora que α seja irracional e que $0 < \alpha < 1$. Como o conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$, então deve existir uma sequência $r_n = (r_1, r_2, ..., r_n, ...)$ de números racionais com $0 < r_n < 1$ tal que $\lim r_n = \alpha$. Desta forma, pelo que foi demonstrado anteriormente para expoentes racionais, temos que

$$(1+x)^{r_n} \leq 1 + r_n x, \;\; x \geq -1, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

E com isso, teremos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= \lim\,(1+x)^{r_n} \\
&\leq \lim\,(1+r_n x) \\
&= 1+\alpha x
\end{aligned}$$

Com isso, vamos agora mostrar que para valores irracionais de α, onde $0 < \alpha < 1$ e $x \neq 0$, acontece que $(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x$, ou seja, se $x \neq 0$ então não ocorre igualdade. Para isso, tomemos um número racional r tal que $\alpha < r < 1$. Como $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$, então, pelo que já foi demonstrado, temos que

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \leq 1 + \frac{\alpha}{r}x.$$

O que implica em

$$(1+x)^{\alpha} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{r}x\right)^{r}.$$

E sendo $x \neq 0$, temos ainda que $\left(1+\dfrac{\alpha}{r}x\right)^r < 1 + r\dfrac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x$, ou seja,

$$(1+x)^\alpha < 1+\alpha x.$$

Assim, o teorema fica demonstrado para o caso em que $x \geq -1 \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < 1$. Vamos mostrar agora sua validade para o segundo caso. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, se $1+\alpha x < 0$, então temos claramente a desigualdade satisfeita, uma vez que o primeiro membro é não-negativo enquanto, o segundo é negativo. Se, porém, $1+\alpha x \geq 0$, ou seja, $\alpha x \geq -1$, teremos: Se $\alpha > 1$, então pelo que foi demonstramos na primeira parte, será válido que

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}\alpha x = 1+x.$$

Ou seja,

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x,$$

onde a igualdade ocorrerá para $x = 0$.

E se for $\alpha < 0$. Se $1+\alpha x < 0$, então a desigualdade é evidente. Se $1+\alpha x \geq 0$, então tomando-se um número positivo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $-\dfrac{\alpha}{n} < 1$, novamente pelo que foi demonstrado na primeira parte do teorema teremos

$$\begin{aligned} & (1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}x \\ \Leftrightarrow \quad & (1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \\ \Leftrightarrow \quad & (1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq 1 + \frac{\alpha}{n}x, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade deve-se ao fato de $\dfrac{\alpha^2}{n^2}x^2 > 0$. Pois,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{n^2}x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad & -\frac{\alpha^2}{n^2}x^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}x^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}x\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n}x. \end{aligned}$$

Logo, sabendo-se que $(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq 1 + \dfrac{\alpha}{n}x$, elevando-se a n ambos os membros e usando o corolário 3.1, obteremos que

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\geq \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^n \\ &\geq 1+n\frac{\alpha}{n}x \\ &= 1+\alpha x.\end{aligned}$$

Notemos que a igualdade ocorrerá se, e somente se, $x = 0$, e isso completa a demonstração do teorema.

□

2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A Desigualdade de Cauchy - Schwarz é uma das mais importantes e utilizadas em toda a Matemática. Ela tem muitas generalizações, entre elas destacamos a desigualdade de Hölder, apresentada um pouco mais à frente.

Teorema 2.5. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Então temos que*

$$\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2,$$

i.e.

$({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$. *A igualdade ocorre se, e somente se, as sequências $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ são proporcionais, i.e.* $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Considere o trinômio $(a_ix-b_i)^2$. Como $(a_ix-b_i)^2 \geq 0$ então $\displaystyle\sum_{i=1}^n (a_ix-b_i)^2 \geq 0$. Mas,

$$\sum_{i=1}^n (a_ix-b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2) = x^2\sum_{i=1}^n a_i^2 - 2x\sum_{i=1}^n a_ib_i + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Assim, para esse trinômio ser não-negativo para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o discriminante não pode ser positivo. Ou seja,

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0.$$

E isso implica em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

a desigualdade desejada. A igualdade ocorre se e somente se $a_i x - b_i = 0$, com $i = 1, 2, ..., n$, ou seja,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

□

Observação 2.3. *Se fizermos $b_1 = b_2 = \cdots b_n = 1$ encontramos a desigualdade $MA \geq MG$.*

Corolário 2.4. *Sejam a, b, x, y números reais com $x, y > 0$. Então temos que*

$$(1) \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (2) \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Demonstração. (1) Partindo do princípio que $(ay - bx)^2 \geq 0$ para todo a, b, x, y reais . Temos a desigualdade satisfeita, pois

$$\begin{aligned}
(ay-bx)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \\
&\Leftrightarrow \quad a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy \\
&\Leftrightarrow \quad a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq xy(a+b)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a^2y + b^2x}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorrerá se $ay = bx$, ou seja, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Uma outra demonstração seria notar que $(a+b)^2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \dfrac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right)^2$ e que pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x+y).$$

(2) Aplicando duas vezes a desigualdade (1) demonstrada acima, temos

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} &\geq \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.\end{aligned}$$

Com igualdade se, e somente se, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

□

Corolário 2.5. *Sejam* $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ *números reais tais que* $b_1, b_2, ..., b_n > 0$. *Então*

i) $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$,

ii) $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$,

iii) $\frac{a_1}{b_1^2}+\frac{a_2}{b_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n^2} \geq \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)^2$.

Com igualdades se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

Demonstração.

i) (*Por indução sobre* n). Esta desigualdade é uma generalização do corolário anterior. Para $n = 1$, temos claramente desigualdade satisfeita. Suponhamos que para números reais arbitrários $a_1, a_2, ..., a_k; b_1, b_2, ..., b_k$ com $b_1, b_2, ..., b_k > 0$, seja válido que

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_k^2}{b_k} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_k}. \tag{2.5}$$

Ou seja, a desigualdade seja válida para $n = k$.
Temos,

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_k^2}{b_k}+\frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_k}+\frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}}$$

Pelo resultado (1) do corolário 3.2, temos também que

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_k}+\frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}}$$

Logo,

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}.$$

Isto é, a desigualdade também é válida para $n = k+1$. Portanto, é sempre válida para $n \in \mathbb{N}$. Com igualdade se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Vale relatar que, com esta desigualdade, podemos fazer outra demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, pois

$$\begin{aligned} {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 &= \frac{{a_1}^2{b_1}^2}{{b_1}^2} + \frac{{a_2}^2{b_2}^2}{{b_2}^2} + \cdots + \frac{{a_n}^2{b_n}^2}{{b_n}^2} \\ &\geq \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2}{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2}. \end{aligned}$$

E isso implica diretamente que

$$({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

ii) Por (i) temos

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1^2}{a_1b_1} + \frac{a_2^2}{a_2b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_nb_n} \\ &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}. \end{aligned}$$

iii) Também é uma consequência direta de i), pois

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n^2} &= \frac{\frac{a_1^2}{b_1^2}}{a_1} + \frac{\frac{a_2^2}{b_2^2}}{a_2} + \cdots + \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2}}{a_n} \\ &\geq \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.4. *Estas três desigualdades também são chamadas de Desigualdades de Cauchy-Schwarz na forma Engel.*

Corolário 2.6. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Então*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}.$$

Demonstração. (*Por indução sobre* n). Para $n = 1$ não há o que demonstrar. Para $n = 2$ a desigualdade é válida, pois pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned}
(a_1^2+b_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2) &\geq (a_1a_2+b_1b_2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq (a_1a_2+b_1b_2) \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq 2a_1a_2+2b_1b_2 \\
\Leftrightarrow\ & a_1^2+b_1^2+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}+a_2^2+b_2^2 \geq a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+b_1^2+2b_1b_2+b_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right)^2 \geq (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}.
\end{aligned}$$

Supondo a desigualdade válida para $n = k$, ou seja,

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_k^2+b_k^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2}.$$

Para $n = k+1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_k^2+b_k^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2} \\
&\geq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2} \\
&\geq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^2+(b_1+b_2+\cdots+b_{k+1})^2}
\end{aligned}$$

E isso completa a demonstração.

□

2.4 Desigualdade do Rearranjo

A Desigualdade do Rearranjo tem muitas aplicações e a partir dela podemos provar algumas desigualdades famosas, tais como a Desigualdade das Médias $MA - MG$, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Nesbitt e a Desigualdade de Tchebyshev, apresentadas em sua sequência e que serão demonstradas.

Teorema 2.6. ***(Desigualdade do Rearranjo)*** *Sejam* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *e* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ *coleções de números reais. Para qualquer reordenação* $(a_1', a_2', ..., a_n')$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, temos que*

$$\begin{aligned}
a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n &\geq a_1'b_1+a_2'b_2+\cdots+a_n'b_n && (2.6) \\
&\geq a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n. && (2.7)
\end{aligned}$$

Além disso, as igualdades em (2.6) e (2.7) ocorrerão respectivamente se, e somente se, $(a_1', a_2', ..., a_n') = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *e* $(a_1', a_2', ..., a_n') = (a_n, a_{n-1}, ..., a_1)$.

Demonstração. Seja $S = a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n$. Como existem finitas $(n!)$ reordenações de $(a_1', a_2', ..., a_n')$, então uma delas torna S máxima. Suponhamos que seja $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a reordenação que torna S máxima, provaremos que $(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Para isso, basta mostrarmos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Sendo assim, suponha que existam índices $r < s$, $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq s \leq n$, tais que $x_r > x_s$. Multiplicando-se x_r por a_s e x_s por a_r, a variação de S será de

$$a_r x_s + a_s x_r - (a_r x_r + a_s x_s).$$

Ou seja,

$$(a_r - a_s)(x_s - x_r).$$

Mas $(a_r - a_s)(x_s - x_r) > 0$, e isso implica que S aumenta, o que contraria o fato de ser $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a reordenação que torna S máxima. Assim, temos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e disto resulta que $(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Portanto, o maior valor possível para S é $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, ou seja,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1'b_1 + a_2'b_2 + \cdots + a_n'b_n.$$

De forma similar prova-se que o valor mínimo de S é $a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n$, o que completará a demonstração. □

Corolário 2.7. *Para qualquer reordenação* $(a_1', a_2', ..., a_n')$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, segue que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1' + a_2a_2' + \cdots + a_na_n'.$$

Demonstração. É uma consequência direta do teorema, pois basta fazer na desigualdade (2.6), $a_i = b_i$ para todo índice i, $(1 \leq i \leq n)$. □

Corolário 2.8. *Para qualquer reordenação* $(a_1', a_2', ..., a_n')$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, segue que*

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Demonstração. Também é consequência direta. Pois, tomando-se na desigualdade (2.6),

$$b_i = \frac{1}{a_i}$$

para todo índice i, com $1 \leq i \leq n$, obtemos a desigualdade desejada. □

2.5 Desigualdade de Tchebishev

Teorema 2.7. ***(Desigualdade de Tchebishev)*** *Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Então temos que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

isto é,

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$. *Com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.*

Demonstração. (1) (*Usando a Desigualdade do Rearranjo*). Aplicando a desigualdade do rearranjo várias vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,\\
\cdots \qquad & \cdots \qquad \cdots\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1},
\end{aligned}$$

Adicionando-se membro a membro todas estas desigualdades obtemos, portanto,

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Onde a igualdade ocorrerá se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

□

Demonstração. (2) Pela hipótese de ser $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ podemos notar que para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ temos que $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$, ou seja,

$$a_ib_i + a_jb_j \geq a_ib_j + a_jb_i.$$

Com isso, ganhamos que

$$
\begin{array}{rcl}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) & = & a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + \cdots + a_1b_n \\
& + & a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_2b_n \\
& + & a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_3b_4 + \cdots + a_3b_n \\
& + & a_4b_1 + a_4b_2 + a_4b_3 + a_4b_4 + \cdots + a_4b_n \\
& \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& + & a_nb_1 + a_nb_2 + a_nb_3 + a_nb_4 + \cdots + a_nb_n \\
& \leq & a_1b_1 \\
& + & a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2 \\
& + & a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_3b_3 \\
& + & a_1b_1 + a_4b_4 + a_2b_2 + a_4b_4 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_4b_4 \\
& \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& + & a_1b_1 + a_nb_n + a_2b_2 + a_nb_n + a_3b_3 + a_nb_n + ... + a_nb_n \\
& = & n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{array}
$$

Ocorrerá igualdade se, e somente se, ocorrer igualdade na desigualdade $(a_i-a_j)(b_i-b_j) \geq 0$, isto é,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ ou } b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

□

Observação 2.5. *A Desigualdade de Tchebishev também é verdadeira para o caso de termos* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *e* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$*. Porém se for* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *e* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ *(e vice-versa), então teremos*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Vamos agora dar a definição de Função Convexa e em seguida apresentar mais duas belas desigualdades, a Desigualdade de Jensen e a Desigualdade de Young, muito úteis na resolução de problemas de olimpíadas.

Função Convexa

Definição 2.1. *(Função Convexa). Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é chamada convexa no intervalo $I = [a,b]$ se para todos $x, y \in I$ e todo $t \in [0,1]$ tivermos*

$$f\left((1-t)\,x + ty\right) \leq (1-t)\, f\left(x\right) + tf\left(y\right).$$

Geometricamente, o significado desta desigualdade é que o gráfico de f entre os pontos x e y está abaixo do segmento que une os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

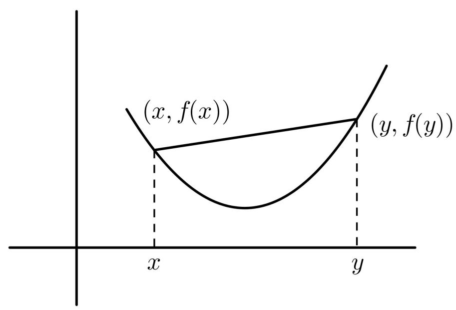

Figura 2.1: Função Convexa

Propriedade 2.1. *Se f é convexa em $[a,b]$, então para todos $x, y \in [a,b]$, temos que*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(x\right) + f\left(y\right)\right).$$

Demonstração. Fazendo $t = \dfrac{1}{2}$ na definição temos a desigualdade desejada, pois

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}y\right) \\ &\leq \left(1-\frac{1}{2}\right)f\left(x\right) + \frac{1}{2}f\left(y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f\left(x\right) + f\left(y\right)\right). \end{aligned}$$

□

Observação 2.6. *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita côncava se, e somente se,*

$$f\left((1-t)\,x + ty\right) \geq (1-t)\, f\left(x\right) + tf\left(y\right) \quad \textit{para todo} \;\; t \in [0,1] \;\; \textit{e} \;\; a \leq x < y \leq b.$$

Exemplo 2.1. *A função exponencial $f(x) = e^x$ é convexa em $\mathbb{R}$. Pois, dado $t \in [0,1]$. Multiplicando-se a desigualdade $e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y$ por $e^{-ty-(1-t)x}$, obtemos que*

$$e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y \Leftrightarrow 1 \leq te^{(1-t)(y-x)} + (1-t)e^{-t(y-x)}. \quad (2.8)$$

Agora, como é válido que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então temos

$$e^{(1-t)(y-x)} \geq 1 + (1-t)(y-x) \quad \textit{e} \quad e^{-t(y-x)} \geq 1 - t(y-x)$$

Mas isso implica em

$$\begin{aligned} te^{(1-t)(y-x)} + (1-t)e^{-t(y-x)} &\geq t(1 + (1-t)(y-x)) + (1-t)(1 - t(y-x)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, por (2.8) temos que a função definida por $f(x) = e^x$ é convexa em $\mathbb{R}$.

Observação 2.7. *Uma maneira de verificar a validade da igualdade $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é notando que o gráfico de $f(x) = e^x$ fica acima do gráfico de $g(x) = 1 + x$, ocorrendo interseção somente no ponto $(0,1)$, o que faz com que ocorra igualdade no ponto $x = 0$. Outra, seria provando que $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ para todos os valores reais de x. Para isso, note que $f'(x) = e^x - 1 = 0$ quando $x = 0$. Assim, $x = 0$ é o único valor crítico para $f(x)$. Sendo $f'(x) = e^x$ contínua e também positiva em $x = 0$, pelo Teste da Derivada da Segunda temos que $f(x)$ tem um mínimo local em $x = 0$, e este é também mínimo global por haver um único ponto crítico. Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo global de $f(x)$, implicando em $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ para todo x real, ou seja, $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.2. *A função logarítmica definida por $f(x) = \ln x$ é côncava em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Usando o fato de que a função exponencial é convexa, veja exemplo anterior, temos que

$$\begin{aligned} e^{(1-t)\cdot\ln x + t\cdot\ln y} &\leq (1-t)\cdot e^{\ln x} + t\cdot e^{\ln y} \\ &= (1-t)\cdot x + t\cdot y \\ &= e^{\ln((1-t)\cdot x + t\cdot y)}. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\ln((1-t)\cdot x + t\cdot y) \geq (1-t)\cdot\ln x + t\cdot\ln y.$$

Portanto, a função logarítmica definida por $f(x) = \ln x$ é côncava. □

2.6 Desigualdade de Jensen

Teorema 2.8. ***(Desigualdade de Jensen).*** *Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo (a,b). Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ números reais tais que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = 1$. Então para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ temos*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

i.é.

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Demonstração. Faremos a prova desta desigualdade por indução sobre n. Para $n = 1$, a desigualdade é válida, pois temos $\alpha_1 = 1$ e sendo $f(x_1) = f(x_1)$ temos também que $f(\alpha_1 x_1) = \alpha_1 f(x_1)$. O caso $n = 2$ é também válido de acordo com a *definição 3.1*. Suponhamos agora que para um certo $k > 1$ e todos $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, tenhamos

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_k f(x_k).$$

Seja $n = k+1$ e consideremos agora $x_1, x_2, ..., x_{k+1} \in (a,b)$, e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+1} \in [0,1]$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k+1} = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_1 \quad & +\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1} \\
= \quad & (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1} \\
= \quad & (1-\alpha_{k+1}) \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} x_k \right) + \alpha_{k+1} x_{k+1}.
\end{aligned}$$

Definamos

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} \quad \text{e} \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k.$$

Temos que $y \in (a,b)$ pois, como $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$, então

$$\begin{aligned}
& \beta_1 a + \beta_2 a + \cdots \beta_k a < \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \beta_k x_k < \beta_1 b + \beta_2 b + \cdots \beta_k b \\
\Leftrightarrow \quad & a\,(\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_k) < \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \beta_k x_k < b\,(\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_k) \\
\Leftrightarrow \quad & a \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} \right) < \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \beta_k x_k < b \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & a \left(\frac{1-\alpha_{k+1}}{1-\alpha_{k+1}} \right) < \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \beta_k x_k < b \left(\frac{1-\alpha_{k+1}}{1-\alpha_{k+1}} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & a < y < b.
\end{aligned}$$

Assim, já que f é convexa, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f\left(\left(1-\alpha_{k+1}\right) y + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) &(2.9)\\ &\leq \left(1-\alpha_{k+1}\right) f(y) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). &(2.10)\end{aligned}$$

Como $\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_k = 1$ temos também que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)\\ &\leq \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + \cdots + \beta_k f(x_k)\\ &= \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} f(x_k).\end{aligned}$$

Juntando-se esta última desigualdade com a desigualdade (2.10), obtemos a *Desigualdade de Jensen*.

□

Observação 2.8. *Se a função for côncava então a* Desigualdade de Jensen *inverterá, ou seja,*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

2.7 Desigualdade de Young

Teorema 2.9. ***(Desigualdade de Young)**. Sejam a, b números reais positivos. Se p, $q > 0$ satisfazem a condição $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.*

Demonstração. Fazendo $x = p \cdot \ln a$ e $y = q \cdot \ln b$. Como $f(x) = e^x$ é convexa, veja exemplo (2.1), então temos que

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}} \leq \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\ln a + \ln b} \leq \frac{e^{p\ln a}}{p} + \frac{e^{q\ln b}}{q}\\ &\Leftrightarrow \quad e^{\ln ab} \leq \frac{e^{\ln a^p}}{p} + \frac{e^{\ln b^q}}{q}\\ &\Leftrightarrow \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$, ou seja, se, e somente se, $a^p = b^q$. □

2.8 Desigualdade de Hölder

Usaremos agora a Desigualdade de Young para mostrar uma das Desigualdades mais úteis para a Análise, a Desigualdade de Hölder e em seguida usaremos esta desigualdade para demonstrar outra desigualdade famosa, a Desigualdade de Minkowski.

Teorema 2.10. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ números reais positivos e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$.

Demonstração. Façamos $a = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}}$ e $b = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Pela *Desigualdade de Young* temos que

$$ab = \frac{a_i b_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)}$$

Variando esta desigualdade para cada $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{a_1 b_1}{(\sum_{i=1}^n a_1^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_1^q)^{1/q}} & \leq & \dfrac{1}{p} \dfrac{a_1^p}{(\sum_{i=1}^n a_1^p)} + \dfrac{1}{q} \dfrac{b_1^q}{(\sum_{i=1}^n b_1^q)} \\
\dfrac{a_2 b_2}{(\sum_{i=1}^n a_2^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_2^q)^{1/q}} & \leq & \dfrac{1}{p} \dfrac{a_2^p}{(\sum_{i=1}^n a_2^p)} + \dfrac{1}{q} \dfrac{b_2^q}{(\sum_{i=1}^n b_2^q)} \\
 & \cdots & \\
\dfrac{a_n b_n}{(\sum_{i=1}^n a_n^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_n^q)^{1/q}} & \leq & \dfrac{1}{p} \dfrac{a_n^p}{(\sum_{i=1}^n a_n^p)} + \dfrac{1}{q} \dfrac{b_n^q}{(\sum_{i=1}^n b_n^q)}
\end{array}$$

Somando-as membro a membro, obtemos também que

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Onde, claramente, a igualdade ocorrerá se, e somente se, $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$. □

Observação 2.9. *Fazendo-se $p = q = 2$ na* Desigualdade de Hölder *obtemos a* Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

2.9 Desigualdade de Minkowski

Teorema 2.11. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ números reais positivos e $p > 1$, então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Primeiramente podemos notar que

$$(a_i+b_i)^p = (a_i+b_i)\left(a_i+b_i\right)^{p-1} = a_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1} + b_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}a_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1}. \tag{2.11}$$

Escolhendo-se para $p > 1$ um número $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e aplicando a *Desigualdade de Hölder*, obtemos para cada termo do lado direito da desigualdade (2.11) que

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\left(a_i+b_i\right)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Desde modo, temos também que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Notando-se que $q(p-1) = p$, temos portanto que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

2.10 Desigualdade de Schür

Teorema 2.12. ***(Desigualdade de Schür)*** *Sejam os números reais $a, b, c \geq 0$ e $n \in \mathbb{R}$. Então temos que*

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0,$$

com igualdade se, e somente se, $a = b = c$ ou $a = b$ e $c = 0$ (ou permutações).

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a \geq b \geq c$. Vamos separar em casos:
$Caso\ 1$: Se $n > 0$, então temos

$$c^n \geq 0 \ \text{ e } \ (c-a)(c-b) \geq 0.$$

E isso implica que

$$c^n(c-a)(c-b) \geq 0. \tag{2.12}$$

Como temos também que $a - c \geq b - c$ e $a^n \geq b^n$, pois estamos supondo que $a \geq b$, então

$$a^n(a-c) \geq b^n(b-c).$$

Mas,

$$\begin{aligned} & a^n(a-c) \geq b^n(b-c) \\ \Leftrightarrow\ & a^n(a-c)(a-b) \geq b^n(b-c)(a-b) \\ \Leftrightarrow\ & a^n(a-b)(a-c) \geq -b^n(b-a)(b-c) \\ \Leftrightarrow\ & a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-a)(b-c) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, por isso e por (2.12), temos

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0.$$

$Caso\ 2$: Se $n \leq 0$, teremos

$$a^n \geq 0 \ \text{ e } \ (a-b)(a-c) \geq 0.$$

Implicando em

$$a^n(a-b)(a-c) \geq 0. \tag{2.13}$$

E, por ocorrer que $(a-c) \geq (a-b)$ e $c^n \geq b^n$, pois estamos supondo $b \geq c$, temos também que

$$c^n(a-c) \geq b^n(a-b).$$

Ora, mas isso implica também em

$$b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} & c^n(a-c) \geq b^n(a-b) \\ \Leftrightarrow \quad & c^n(c-a) \leq b^n(b-a) \\ \Leftrightarrow \quad & c^n(c-a)(b-c) \leq b^n(b-a)(b-c) \\ \Leftrightarrow \quad & b^n(b-a)(b-c) \geq -c^n(c-a)(c-b) \\ \Leftrightarrow \quad & b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade (2.13) e por esta última, temos

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Portanto, pelos resultados provados nos casos 1 e 2, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{R}$. E a igualdade ocorrerá se, e somente se, $a = b = c$ ou $a = b$ e $c = 0$ (ou permutações).

□

Corolário 2.9. *Se a, b, c são números reais positivos, então são válidas as desigualdades:*

(i) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$.

(ii) $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

(iii) *Se* $a + b + c = 1$, *então* $9abc + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$.

Demonstração. Para o caso (i) basta fazer $n = 1$ na *desigualdade de Schür.* Pois,

$$\begin{aligned} & a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a^3 - ca^2 - a^2b + abc + b^3 - b^2c - ab^2 + abc + c^3 - bc^2 - c^2a + abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a). \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Algumas Aplicações de Desigualdades

3.1 Cálculo de Máximos e Mínimos

Nesta seção, vamos tratar mostrar a importância das desigualdades demonstradas no capítulo anterior na maximização e minimização de problemas. Vamos aplicar algumas delas e mostrar como é acessível e fascinante usá-las em vários tipos de problemas de otimização.

Aplicação 1. *Seja $x > 0$ um número real. Qual o valor mínimo de $x^2 + \dfrac{1}{x}$?*

Solução: 1. *Primeiramente note que*

$$x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}.$$

Agora aplicando a desigualdade $MA - MG$, obtemos

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Logo, o valor mínimo da expressão é $3\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Aplicação 2. *Para todos os valores das variáveis a, b, c, d, reais positivas, qual é o menor valor da expressão*

$$E = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\,?$$

Solução: 2. *Aplicando a desigualdade $MA - MG$, obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} &\geq \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, o valor mínimo de E é igual 4, e isso ocorre quando $a = b = c = d$.

Aplicação 3. *(Paralelepípedo de Área Máxima). Prove que entre todos os paralelepípedos de área total fixada o de maior volume é o cubo.*

Demonstração. Seja o paralelepípedo abaixo de dimensões a,b e c.Temos:

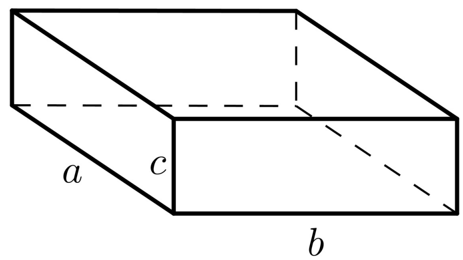

Figura 3.1: Paralelepípedo

Seu volume é dado por

$$V = abc.$$

E sua área superficial é

$$S = 2ab + 2ac + 2bc.$$

Assim, pela desigualdade entre as médias $MA - MG$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{ab+ac+bc}{3} &\geq \sqrt[3]{(ab)\,(ac)\,(bc)} \\ &= (abc)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Donde, a igualdade ocorre se, e somente se, $ab = ac = bc$. Ou seja, $a = b = c$. Desta forma, temos

$$\frac{\left(\frac{S}{2}\right)}{3} \geq (abc)^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad V \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Logo, o maior volume possível é $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ e isso ocorre quando $a = b = c$. $\square$

Aplicação 4. *(Cilindro de Área Mínima). Prove que o cilindro circular reto de volume V fixado, que tem a menor área de superfície é aquele cujo diâmetro é igual à sua altura.*

Demonstração. Seja o cilindro abaixo de Volume V, área superficial S, raio da base r e altura h.

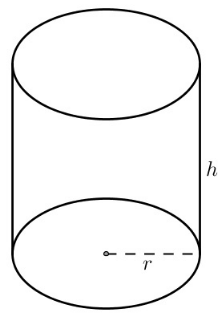

Figura 3.2: Cilindro de volume fixo

Temos que

$$S = 2\pi\left(r^2 + rh\right) \quad e \quad V = \pi r^2 h.$$

Assim, temos também que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right) \\ &= 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right). \end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade $MA - MG$, obtemos

$$\left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{V}{2\pi r} \cdot \frac{V}{2\pi r}} = 3 \cdot \left(\frac{V^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Logo, $S_{min} = 6\pi\left(\frac{V^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. E isso ocorre quando $r^2 = \frac{V}{2\pi r}$, ou seja, $V = 2\pi r^3$. Mas isso implica que $2\pi r^3 = \pi r^2 h$. Portanto, a área mínima ocorre quando

$$2r = h.$$

□

Aplicação 5. *(Triângulo de Área Máxima). Prove que entre todos os triângulos de lados a, b e c com perímetro fixo $p = a + b + c$, o de maior área é o triângulo equilátero.*

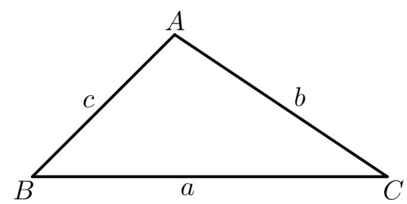

Figura 3.3: Triângulo de Área Máxima

Demonstração. Seja o triângulo acima de lados a, b e c e área S. Temos, pela fórmula de Herón, que

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Temos ainda, aplicando-se a Desigualdade $MA - MG$, que

$$\frac{\left(\frac{p}{2} - a\right) + \left(\frac{p}{2} - b\right) + \left(\frac{p}{2} - c\right)}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right) &\leq \frac{\left(\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c\right)^3}{27} \\ &= \frac{(p/2)^3}{27}.\end{aligned}$$

Desta forma, teremos então

$$S \leq \sqrt{\frac{p}{2} \cdot \frac{(p/2)^3}{27}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Portanto, a área máxima é $S = \dfrac{p^2}{12\sqrt{3}}$, a qual é atingida quando

$$\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c \;\Rightarrow\; a = b = c.$$

E isso implica que a área máxima ocorre quando o triângulo é equilátero, o que queríamos provar.

□

Aplicação 6. *(Equação da Reta Tangente a Uma Elipse). Prove que a equação da reta tangente a uma elipse da forma* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *em um ponto* (x_1, y_1) *é dada por*

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

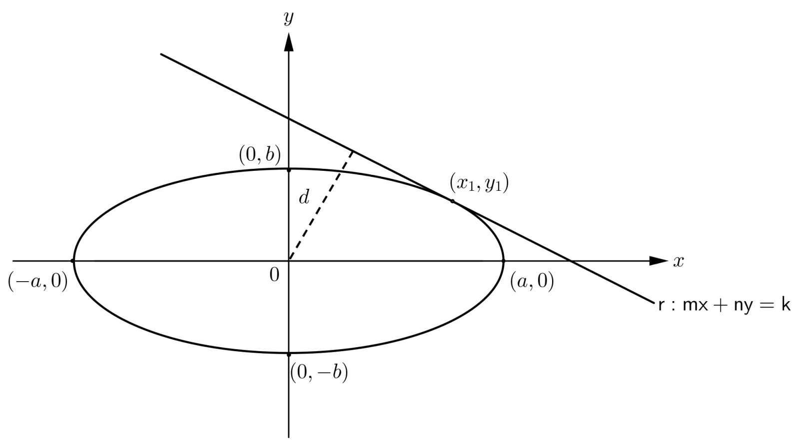

Figura 3.4: Elipse com reta tangente

Demonstração. Suponha que a elipse da figura acima seja dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e seja (x_1, y_1) o ponto de tangência da reta $r : mx + ny = k$, onde m e n são fixos com $m^2 + n^2 \neq 0$, e k uma constante real. Como o ponto (x_1, y_1) pertence a elipse então

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, como (x_1, y_1) também é um ponto da reta tangente então

$$mx_1 + ny_1 = k.$$

Como queremos que a reta r seja uma reta tangente, então sua distância d à origem deve ser máxima. Donde sabemos que

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{|mx_1 + ny_1|}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Precisamos então saber sob quais condições d é máximo. Para isso, aplicando-se a Desigualdade de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} d = \frac{|mx_1 + ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}} &= \frac{\left|(am)\,\dfrac{x_1}{a} + (bn)\,\dfrac{y_1}{b}\right|}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ &\leq \left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $d_{max} = \left(\dfrac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}$ e isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{x_1/a}{am} = \frac{y_1/b}{bn} = c,$$

onde c é uma constante de proporcionalidade. Mas isso implica que

$$m = \frac{cx_1}{a^2} \quad e \quad n = \frac{cy_1}{b^2}.$$

Logo, temos

$$\left(\frac{cx_1}{a^2}\right)x + \left(\frac{cy_1}{b^2}\right)y = k.$$

Ou seja,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{k}{c}.$$

Mas, como (x_1, y_1) pertence à elipse, então $\dfrac{k}{c} = 1$, e disso concluímos que a equação da reta tangente procurada é

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

□

3.2 Problemas de Olimpíadas

Aplicação 7. $(IMO, 1995)$ *Sejam a, b e c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Demonstração. Pelo corolário (3.4) do Teorema (4.5), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(a+c)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \\
&\geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)^2 \cdot \frac{1}{2(ab+bc+ca)} \\
&= \frac{ab+bc+ca}{2(abc)} \\
&= \frac{ab+bc+ca}{2}.
\end{aligned}$$

Usando agora a Desigualdade entre as médias $MA - MG$ com três variáveis temos também que

$$\begin{aligned}
\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} &\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(ab \cdot bc \cdot ca)}}{2} \\
&\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} \\
&\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}, \quad pois \quad abc = 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

□

Aplicação 8. *(Rússia, adaptada). Mostre que*

$$5^{2014} + 6^{2014} < 7^{2014}.$$

Demonstração. Como $5^{2014} + 6^{2014} < 2 \cdot 6^{2014}$, então basta mostrarmos que $2 \cdot 6^{2014} < 7^{2014}$. Pela Desigualdade de Bernoulli, podemos escrever que

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{2014} = \left(1+\frac{1}{6}\right)^{2014} \geq 1+\frac{2014}{6} > 2.$$

Mas isso implica que $2 \cdot 6^{2014} < 7^{2014}$. Portanto, $5^{2014} + 6^{2014} < 7^{2014}$. $\square$

Aplicação 9. *(OME, 2008). Sejam a,b,c três números positivos de soma igual a 1. Demonstre que*

$$a^{a^2+2ac} \cdot b^{b^2+2ab} \cdot c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

Demonstração. Por ser $a+b+c=1$ então temos que

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = 1.$$

Temos também

$$\left(a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} + 2ab \cdot \frac{1}{b} + 2bc \cdot \frac{1}{c} + 2ac \cdot \frac{1}{a}\right) = 3.$$

Mas isso implica que

$$\ln\left(a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} + 2ab \cdot \frac{1}{b} + 2bc \cdot \frac{1}{c} + 2ac \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln 3.$$

Assim, aplicando-se a Desigualdade de Jensen para a função $f(x) = \ln x$, que é côncava em seu domínio para $x > 0$, como foi demonstrado no exemplo 3.2, temos:

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln\left(a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} + 2ab \cdot \frac{1}{b} + 2bc \cdot \frac{1}{c} + 2ac \cdot \frac{1}{a}\right) \\
&\geq a^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{b}\right) + c^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{c}\right) + 2ac \cdot \ln\left(\frac{1}{a}\right) + 2ab \cdot \ln\left(\frac{1}{b}\right) + 2bc \cdot \ln\left(\frac{1}{c}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2} + \ln\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2} + \ln\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2} + \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{2ac} + \ln\left(\frac{1}{b}\right)^{2ab} + \ln\left(\frac{1}{c}\right)^{2bc} \\
&= \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ac} + \ln\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab} + \ln\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \\
&= \ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ac} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc}\right].
\end{aligned}$$

Mas disso temos, por ser $f(x) = \ln x$ injetiva, que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ac} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \leq 3.$$

Ou seja,

$$a^{a^2+2ac} \cdot b^{b^2+2ab} \cdot c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

$\square$

Aplicação 10. *(Iran, 1998). Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$. Prove que*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq max\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right\}.$$

Demonstração. Seja $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ e $S_i = S - x_i^3$, para $1 \leq i \leq 4$. Temos:

$$\begin{aligned} S = \frac{4S - S}{3} &= \frac{4S - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)}{3} \\ &= \frac{(S - x_1^3) + (S - x_2^3) + (S - x_3^3) + (S - x_4^3)}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4\right). \end{aligned}$$

Usando agora a Desigualdade $MA - MG$ obtemos

$$\frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{3}\left(x_2^3 + x_3^3 + x_4^3\right) \geq \sqrt[3]{x_2^3 \cdot x_3^3 \cdot x_4^3} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{1}{x_1}.$$

E prosseguindo de forma análoga é possível obter também que

$$\frac{1}{3}S_2 \geq \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{3}S_3 \geq \frac{1}{x_3} \quad e \quad \frac{1}{3}S_4 \geq \frac{1}{x_4}.$$

Logo, temos que

$$S \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}. \tag{3.1}$$

Por outro lado, se usarmos a Desigualdade de Tchebyshev obtemos

$$4\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3\right) \geq \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) \cdot \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right).$$

Mas, novamente pela Desigualdade $MA - MG$ também é válido que

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} \geq \sqrt[4]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = 1.$$

Ou seja,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 4.$$

E isso implica diretamente em

$$S \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \tag{3.2}$$

Portanto, pelos resultados (3.1) e (3.2), temos que

$$S \geq max\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right\}.$$

□

Aplicação 11. *(APMO, 2003). Sejam a, b e c os lados de um triângulo, com $a + b + c = 1$ e $n \geq 2$ um inteiro. Prove que*

$$\sqrt[n]{(a^n + b^n)} + \sqrt[n]{(b^n + c^n)} + \sqrt[n]{(c^n + a^n)} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Demonstração. Como a, b e c são lados de um triângulo então existem números positivos x, y, z tais que $a = x + y,\ b = y + z$ e $c = x + z$. De fato, basta tomarmos $x = \dfrac{a + c - b}{2}$, $y = \dfrac{a + b - c}{2}$ e $z = \dfrac{b + c - a}{2}$. E com isso obtemos facilmente que $x + y + z = \dfrac{1}{2}$. Assim, usando a Desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = [(x + y)^n + (y + z)^n]^{\frac{1}{n}} &\leq (x^n + z^n)^{\frac{1}{n}} + (2y^n)^{\frac{1}{n}} \\
&< ((x + z)^n)^{\frac{1}{n}} + y\sqrt[n]{2} \\
&= c + y\sqrt[n]{2}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < c + y\sqrt[n]{2}.$$

Prosseguindo de modo análogo, podemos obter

$$\sqrt[n]{b^n + c^n} < a + z\sqrt[n]{2} \quad e \quad \sqrt[n]{c^n + a^n} < b + x\sqrt[n]{2}.$$

Portanto,

$$\sqrt[n]{(a^n + b^n)} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < a + b + c + \sqrt[n]{2}\,(x + y + z) = 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

□

Aplicação 12. *(Desigualdade de Nesbitt). Mostre que para todo a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, é válido que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Demonstração.

1) (Pela Desigualdade do Rearranjo). Sem perda de generalidade assumiremos que $a \leq b \leq c$. Assim, temos que $a+b \leq c+a \leq b+c$, o que implica

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Aplicando duas vezes a Desigualdade do Rearranjo, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

Adicionando-se estas duas inequações ganhamos que

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b}\right) = 3$$

Logo,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2) (Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Fazendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{b+c}, \quad a_2 = \sqrt{c+a}, \qquad a_3 = \sqrt{a+b} \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{b+c}}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{c+a}}, \quad e \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Temos:

$$((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
& 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9 \\
\Leftrightarrow \quad & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Com igualdade se, e somente se, $(b+c)^2=(c+a)^2=(a+b)^2$. Ou seja, $a=b=c$.

(3) (Pela Desigualdade $MA \geq$ MH). Sejam os números positivos $a+b$, $c+a$ e $a+b$. Temos,

$$
\begin{aligned}
& \frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}} \\
\Leftrightarrow \quad & 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9.
\end{aligned}
$$

E a partir daí segue da mesma forma como na demonstração anterior. □

3.3 Desigualdades Geométricas

Aplicação 13. *Demonstre que*

$$S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6},$$

onde a, b, c são os lados de um triângulo e S, sua área.

Demonstração. Sabemos que $S = \dfrac{ab \cdot sen\theta}{2}$, onde θ é o ângulo entre os lados a e b. Como é válido que $\operatorname{sen}\theta \leq 1$, temos também que $S \leq \dfrac{ab}{2}$. Pela desigualdade MG-MQ temos ainda que $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Assim,

$$S \leq \frac{a^2+b^2}{4}.$$

E de forma análoga podemos obter que

$$S \leq \frac{a^2+c^2}{4} \quad \text{e} \quad S \leq \frac{b^2+c^2}{4}.$$

Logo, adicionando-se membro a membro estas três últimas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned}3S &\leq \frac{a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2}{4}\\ &= \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

□

Aplicação 14. *(Desigualdade de Euler). Prove que $R \geq 2r$, onde R e r são respectivamente, o raio do círculo circunscrito e inscrito a um triângulo.*

Demonstração. Considere um triângulo de área S, semi-perímetro p e lados a, b, c opostos, respectivamente, aos vértices A, B e C. Aplicando a desigualdade $MA - MG$ para os números reais positivos $p-b$ e $p-c$, temos que

$$(p-b)+(p-c) \geq 2\sqrt{(p-b)\cdot(p-c)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}(p-b)+(p-c) &= \frac{a+b+c}{2}-b+\frac{a+b+c}{2}-c\\ &= \frac{a+c-b}{2}+\frac{a+b-c}{2}\\ &= a.\end{aligned}$$

Assim,

$$a \geq 2\sqrt{(p-b)\cdot(p-c)}.$$

De forma análoga podemos obter também que

$$b \geq 2\sqrt{(p-a)\cdot(p-c)} \quad \text{e} \quad c \geq 2\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)}.$$

Multiplicando-se os lados, esquerdo e direito, destas três desigualdades obtemos

$$abc \geq 8\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right).$$

Como sabemos que $4RS = abc$, $\dfrac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$ e também $S = pr$, então temos que

$$\begin{aligned} & abc \geq 8\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) \\ \Leftrightarrow \quad & 4RS \geq 8\frac{S^2}{p} \\ \Leftrightarrow \quad & 4RS \geq 8\frac{S}{p}\cdot S \\ \Leftrightarrow \quad & 4RS \geq 8rS \\ \Leftrightarrow \quad & R \geq 2r. \end{aligned}$$

□

Aplicação 15. *Seja ΔABC um triângulo de baricentro G. Denotando-se por g_a, g_b, g_c as distâncias de G aos lados a,b e c, respectivamente, mostre que se r é o raio da circunferência inscrita, então:*

i) $g_a \geq \dfrac{2r}{3}, g_b \geq \dfrac{2r}{3}, g_c \geq \dfrac{2r}{3}$

ii) $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

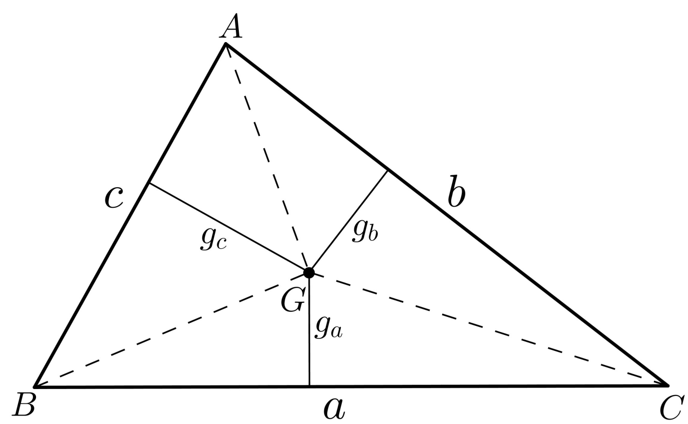

Figura 3.5: Δ ABC de baricentro G

Demonstração. (i) Seja a figura acima. Sabemos que ao unir o ponto G aos vértices A,B,C obtemos três triângulos de mesma área: ΔAGB, de base c e altura g_c, ΔAGC de base b e altura g_b e ΔBGC de base a e altura g_a.

Assim, sendo S a área do triângulo ΔABC temos que

$$\frac{a\cdot g_a}{2} = \frac{b\cdot g_b}{2} = \frac{c\cdot g_c}{2} = \frac{S}{3}.$$

Ou seja,

$$a\cdot g_a = b\cdot g_b = c\cdot g_c = \frac{2S}{3}.$$

Como também sabemos que $S = \dfrac{(a+b+c)}{2} \cdot r$, onde r é o raio da circunferência inscrita, então

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{a+b+c}{a} \cdot \frac{r}{3} \\ g_b &= \frac{a+b+c}{b} \cdot \frac{r}{3} \\ g_c &= \frac{a+b+c}{c} \cdot \frac{r}{3} \end{aligned}$$

E, por ser $b + c \geq a$ (Desigualdade Triangular), temos

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{a} &= 1 + \frac{b+c}{a} \\ &\geq 1 + \frac{a}{a} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$g_a \geq \frac{2r}{3}.$$

Usando as outras duas desigualdades triangulares mostra-se de forma análoga que

$$g_b \geq \frac{2r}{3} \quad \text{e} \quad g_c \geq \frac{2r}{3}.$$

(ii) Pela Desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{g_a + g_b + g_c}{3} &\geq \frac{3}{\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c}} \\ &= \frac{3}{\frac{3a}{(a+b+c)r} + \frac{3b}{(a+b+c)r} + \frac{3c}{(a+b+c)r}} \\ &= \frac{3}{\left(\frac{3}{r}\right)} = r. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

□

Aplicação 16. *Demonstre que para um triângulo de área S e lados a, b, c é válido que*

$$S \leq \frac{(a+b+c)^2}{16}.$$

Demonstração. Como sabemos que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ onde p é o semi-perímetro de um triângulo de lados a, b, c, então pela desigualdade $MA - MG$, temos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{S} &= \sqrt[4]{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)} \\
&\leq \frac{p+\left(p-a\right)+\left(p-b\right)+\left(p-c\right)}{4} \\
&= \frac{4p-\left(a+b+c\right)}{4} \\
&= \frac{2\left(a+b+c\right)-\left(a+b+c\right)}{4} \\
&= \frac{a+b+c}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, sendo $\sqrt{S} = \dfrac{a+b+c}{4}$, temos a desigualdade desejada, pois basta elevar ambos os membros ao quadrado. □

Aplicação 17. *Prove que para todo paralelepípedo reto de arestas a, b, c e diagonal d, se cumpre a desigualdade*

$$a+b+c \leq d\sqrt{3}.$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned}
\left(a+b+c\right)^2 &= \left(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c\right)^2 \\
&\leq \left(1^2+1^2+1^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right) \\
&= 3\left(a^2+b^2+c^2\right).
\end{aligned}$$

Como sabemos que para todo paralelepípedo reto de diagonal d é válido que $d^2 = a^2+b^2+c^2$, então

$$\left(a+b+c\right)^2 \leq 3d^2 \Rightarrow a+b+c \leq d\sqrt{3}.$$

□

Aplicação 18. *Prove que para todo triângulo retângulo é válido que*

$$h \leq \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot r,$$

onde h é a altura, a é a hipotenusa e r é o raio da circunferência inscrita no triângulo.

Demonstração. Sejam a, b, c respectivamente, a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
\left(a+b\right)^2 &= \left(1\cdot a+1\cdot b\right)^2 \\
&\leq \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right) = 2c^2.
\end{aligned}$$

Mas isso implica em

$$a+b \leq \sqrt{2}c.$$

Sendo S a área do triângulo, sabemos que

$$S = \frac{c \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r.$$

Logo, podemos deduzir

$$\begin{aligned} h = \frac{2S}{c} &= \frac{a+b+c}{c} \cdot r \\ &\leq \frac{\sqrt{2} \cdot c + c}{c} \cdot r \\ &= \left(\sqrt{2}+1\right) \cdot r. \end{aligned}$$

□

Aplicação 19. *Demonstre que*

$$h_a + h_b + h_c \geq 9 \cdot r,$$

onde h_a, h_b e h_c são as alturas de um triângulo qualquer e r é o raio da circunferência inscrita nele.

Demonstração. Primeiramente note que é válida a igualdade

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

pois sabemos que a área S de um triângulo de lados a, b, c pode ser dada pelas fórmulas

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = pr,$$

onde p é o semi-perímetro do triângulo. E, disso temos

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Agora, usando a desigualdade $MA - MG$ e $MH - MG$, podemos escrever

$$h_a + h_b + h_c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{h_a \cdot h_b \cdot h_c} \quad \text{e} \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{h_a \cdot h_b \cdot h_c}}.$$

De onde podemos obter

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 9.$$

Portanto,

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

□

Aplicação 20. *Se S é a área de um quadrilátero inscrito em uma circunferência e p, seu semi-perímetro. Mostre que*

$$S \leq \frac{p^2}{4}.$$

Demonstração. Seja um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Como podemos expressar sua área S por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

onde a, b, c, d são os lados do quadrilátero, então podemos deduzir através da desigualdade $MA - MG$ que

$$\begin{aligned}
\sqrt{S} &= \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\
&\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4} \\
&= \frac{4p-(a+b+c+d)}{4} \\
&= \frac{4p-2p}{4} \\
&= \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S \leq \frac{p^2}{4}.$$

□

Aplicação 21. *Seja S a área de um triângulo de lados a, b, c. Mostre que:*

i) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$

ii) $\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{S}$

iii) $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2}\right) \geq 12.$

Demonstração. (i) Pela desigualdade entre as médias $MQ-MG$ para duas variáveis temos que $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Temos também que a área S de um triângulo pode ser dada por $S = \dfrac{ab \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$, onde θ é o ângulo entre os lados a e b e, pela Lei dos Cossenos, é válida ainda a igualdade: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta$. Então,

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta \\
&= 2\left(a^2 + b^2 - ab \cdot \cos\theta\right) \\
&\geq 2\left(2ab - ab \cdot \cos\theta\right) \\
&= 2ab \cdot (2 - \cos\theta) \\
&= \frac{4S}{\operatorname{sen}\theta} \cdot (2 - \cos\theta).
\end{aligned}$$

Com isso, para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que

$$\frac{(2-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta} \geq \sqrt{3}.$$

Vejamos:

Como é verdade que $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, então

$$\begin{array}{rl} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} \cdot \cos\theta \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{(2-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta} \geq \sqrt{3}. \end{array}$$

Portanto, a desigualdade (i) é válida.

(ii) Por trigonometria temos

$$h_a = b \cdot \operatorname{sen} C \quad e \quad h_b = a \cdot \operatorname{sen} C.$$

E isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} &= \frac{1}{b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 C} + \frac{1}{a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 C} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 C} \\ &= \frac{a^2+b^2}{4S^2}, \end{aligned}$$

pois a área pode ser dada por $S = \frac{ab \cdot \operatorname{sen} C}{2}$.

De forma análoga, podemos obter

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{a^2+c^2}{4S^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{b^2+c^2}{4S^2}.$$

Assim, adicionando-se esses três resultados, obtemos

$$2\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right) = \frac{2 \cdot (a^2+b^2+c^2)}{4S^2}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{4S^2}.$$

Finalmente, pelo que foi provado em (i), temos

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{S}.$$

Para provar o item (iii) basta multiplicar membro a membro as desigualdades provadas em (i) e (ii).

□

3.4 Cálculo de Limites

3.4.1 O Número e

O número e desempenha um papel muito importante em Matemática, ele é considerado uma das constantes mais ubíquas na Análise Matemática. Vamos fazer a demonstração de alguns resultados e em seguida defini-lo. Vejamos:

Aplicação 22. *Mostre que para quaisquer valores de a e b $(a \neq b)$ é válida a igualdade*

$$\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} < \frac{a + nb}{n+1}.$$

Demonstração. Pela desigualdade $MA - MG$ temos que

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{a \cdot b^n} &= \sqrt[n+1]{a \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}} \\ &< \frac{a + \overbrace{b + b + \cdots + b}^{n}}{n+1} \\ &= \frac{a + nb}{n+1}. \end{aligned}$$

E isso é o que queríamos mostrar. □

Aplicação 23. *Prove que a medida que n aumenta, também aumentam as sequências*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad e \quad z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

ou seja,

$$x_n < x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad e \quad z_n < z_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Demonstração. Fazendo $a = 1$ e $b = 1 + \dfrac{1}{n}$ na desigualdade provada acima, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &< \frac{1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)+1}{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ou seja,

$$x_n < x_{n+1}.$$

A segunda desigualdade demonstra-se de forma similar, basta fazer $a = 1$ e $b = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. □

Aplicação 24. *Prove que* $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ *decresce a medida que* n *aumenta, ou seja,*

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z_{n+1}}. \end{aligned}$$

Logo, como z_n aumenta à medida que n aumenta, então resulta que y_n decresce quando o mesmo acontece. □

Pelo que foi demonstrado nestas duas últimas aplicações temos que

$$\begin{aligned} x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right) = 2 < x_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2,25 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n < \cdots , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 3,375 > y_3 > y_4 > \cdots > y_n > \cdots . \end{aligned}$$

E disso temos também que

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Assim, x_n satisfaz as seguintes condições:

i) x_n cresce monotonamente à medida que n aumenta;

ii) x_n é limitada, pois $2 < x_n < 4$.

Como sabemos que toda sequência monótona e limitada é convergente, então x_n é convergente. O limite de x_n é representado pela letra e, ou seja,

$$e = \lim x_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Assim, temos que

$$e > x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.3}$$

e também que $e < 3$.

De fato, a medida que n aumenta temos que x_n também aumenta e tende a e, logo $x_n < \lim x_n = e$ e,

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2,985984.$$

Donde podemos concluir

$$e = \lim x_n \leq 2,985984 < 3.$$

O número e desempenha um importante papel em Matemática. Ele é um número irracional usado, por exemplo, como base de logaritmos denominados logaritmos naturais. As variantes do nome do número incluem: número de Napier, constante de Néper, número neperiano, e número exponencial, etc. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir da constante. Supõe-se que a tabela foi escrita por William Oughtred. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli em 1690 na tentativa de encontrar um valor para $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e hoje já é conhecido com mais de um trilhão de casas decimais. Temos

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995...$$

Note que temos também

$$\begin{aligned} \lim y_n &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

E isso implica em

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e, \tag{3.4}$$

pois foi demonstrado que y_n decresce à medida que n cresce.

Logo,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.5}$$

Note ainda que se aplicarmos o logaritmo de base e nesta última desigualdade obtemos

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{3.6}$$

Pois,

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad & \Leftrightarrow \quad n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad n < \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < (n+1) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Aplicação 25. *Encontre* $\lim z_n$*, onde*

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1+\frac{1}{2}, \\
z_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \\
z_3 &= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}, \\
&\cdots \\
z_n &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Tomando-se $n-1$ no lugar de n no lado esquerdo da desigualdade do problema anterior temos:

$$
\frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).
$$

Por este resultado e pela outra parte da desigualdade demonstrada anteriormente, resulta que

$$
\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{n}{n-1}\right). \tag{3.7}
$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &< \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{n}{n-1}\right), \\
\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) &< \frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \\
\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) &< \frac{1}{n+2} < \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right), \\
&\cdots \\
\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) &< \frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Somando-se estas desigualdades membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n+1)}{n(n+1)(n+2)\cdots 2n}\right)\\
&<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\left(\frac{n(n+1)(n+2)\cdots 2n}{(n-1)n(n+1)\cdots(2n-1)}\right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\left(\frac{2n}{n-1}\right).$$

Como

i) $\lim\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)=\lim\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=\ln 2;$

ii) $\lim\ln\left(\dfrac{2n}{n-1}\right)=\lim\ln\left(2+\dfrac{2}{n-1}\right)=\ln 2.$

Então, pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim z_n=\ln 2.$$

□

Aplicação 26. *Calcule* $\lim x_n$, *onde*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,\\
x_2 &= 1-\frac{1}{2},\\
x_3 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\\
&\cdots\\
x_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Note que:

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Pelo problema anterior temos que

$$x_{2n} = z_n - \frac{1}{n}.$$

E,

$$\lim x_{2n} = \lim \left(z_n - \frac{1}{n} \right) = \lim z_n - \lim \frac{1}{n} = \ln 2 - 0 = \ln 2.$$

Note ainda que

$$x_{2n+1} = x_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

e também,

$$\lim x_{2n+1} = \lim \left(x_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \lim x_{2n} + \lim \frac{1}{2n+1} = \ln 2 + 0 = \ln 2.$$

Logo,

$$\lim x_n = \ln 2.$$

$\square$

Aplicação 27. *Sendo* $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$*, onde* k *é um número inteiro positivo, mostre que*

$$\lim x_n = \ln k.$$

Demonstração. Seja k um número inteiro positivo. Variando o valor de n na desigualdade (3.7) podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{n}{n-1}\right), \\
\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \\
\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) < \frac{1}{n+2} < \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right), \\
\cdots \\
\ln\left(\frac{kn}{kn-1}\right) < \frac{1}{kn-1} < \ln\left(\frac{kn-1}{kn-2}\right), \\
\ln\left(\frac{kn+1}{kn}\right) < \frac{1}{kn} < \ln\left(\frac{kn}{kn-1}\right).
\end{aligned}$$

Somando-se essas desigualdades, encontramos

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot kn\cdot(kn+1)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(kn-1)\cdot kn}\right) &< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn-1}+\frac{1}{kn}\\ &< \ln\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(kn-1)\cdot kn}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(kn-2)\cdot(kn-1)}\right).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\ln\left(\frac{kn+1}{n}\right) < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn-1}+\frac{1}{kn} < \ln\left(\frac{kn}{n-1}\right).$$

Como

i) $\lim\ln\left(\dfrac{kn+1}{n}\right) = \lim\ln\left(k+\dfrac{1}{n}\right) = \ln k$

ii) $\lim\ln\left(\dfrac{kn}{n-1}\right) = \lim\ln\left(k+\dfrac{k}{n-1}\right) = \ln k,$

então pelo Teorema do Confronto podemos concluir que

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right) = \lim\ln\left(k+\frac{1}{n}\right) = \ln k.$$

□

Aplicação 28. *Sendo*

$$x_n = 1+2^p+3^p+\cdots+n^p.$$

Mostre que

$$\lim\frac{x_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},\ \ p>0.$$

Demonstração. Primeiramente vamos fazer a demonstração do lema abaixo, e em seguida provaremos o resultado do limite pedido.

Lema 3.1. *Para todo $p>0$ é válido que*

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < 1+2^p+3^p+\cdots+n^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}.$$

Demonstração. Sendo $p>0$, temos que $p+1>1$. Assim, pela Desigualdade de Bernoulli, temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+p} > 1+\frac{1+p}{n} \qquad \text{e} \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1+p} > 1-\frac{1+p}{n}.$$

Donde, multiplicando-se estas desigualdades por n^{1+p}, obtemos

$$(n+1)^{p+1} > n^{p+1} + n^p\,(p+1) \qquad \text{e} \qquad (n-1)^{p+1} > n^{p+1} - n^p\,(p+1)\,.$$

Isolando-se n^p nestas duas desigualdades, obtemos ainda que

$$\frac{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}{p+1} < n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1}.$$

Com isso, para $n = 1, 2, 3, ..., n$, podemos escrever as desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{p+1} < & 1 & < \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, \\ \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1} < & 2^p & < \dfrac{3^{p+1}-2^{p+1}}{p+1}, \\ & \cdots & \\ \dfrac{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}{p+1} < & n^p & < \dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}. \end{array}$$

Donde, somando-se todas, obtemos

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < 1 + 2^p + 3^p + \cdots + n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1} < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}.$$

□

Vamos agora retomar a demonstração da *aplicação 28*. Dividindo-se a desigualdade demonstrada no lema acima por n^{p+1}, obtemos

$$\frac{1}{1+p} < \frac{1 + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1}.$$

Como temos:

i) $\lim \dfrac{1}{1+p} = \dfrac{1}{1+p}$

ii) $\lim \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1} = \dfrac{1}{1+p}$

Então, pelo Teorema do Confronto, podemos afirmar que

$$\lim \frac{x_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

□

Aplicação 29. *(Série Harmônica). Prove que a série*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

é divergente.

Demonstração. Por (3.6), temos que

$$\frac{1}{n}>\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Com isso, para $n=1,2,3,...,n$, podemos escrever as desigualdades:

$$\begin{aligned}
1 &> \ln\left(\frac{2}{1}\right),\\
\frac{1}{2} &> \ln\left(\frac{3}{2}\right),\\
\frac{1}{3} &> \ln\left(\frac{4}{3}\right),\\
&\cdots\\
\frac{1}{n} &> \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Somando-se estas desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned}
x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} &> \ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= \ln\left(\frac{2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}\right)\\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Mas isso implica que

$$\lim x_n\geq\lim\ln(n+1)=\infty.$$

E isso prova que a Série Harmônica diverge. $\square$

Observação 3.1. *A demonstração de que esta série diverge foi feita pela primeira vez por Oresme. E se fôssemos capazes de somar cada termo dela em um segundo de tempo, ao final de* 1 *século, o valor da soma chegaria a pouco mais de* 22*, de acordo com [17].*

Aplicação 30. *Demonstre que a série*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

converge para todo $p>1$.

Demonstração. Seja a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,\\
x_2 &= 1+\frac{1}{2^p},\\
x_3 &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p},\\
x_4 &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p},\\
&\cdots\\
x_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}
\end{aligned}$$

É fácil notar que

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n < \cdots$$

Ou seja, temos uma sucessão de números, monótona crescente. Para a série dada ser convergente, o limite da sucessão das somas parciais deve existir e ser finito. Com isso, precisamos mostrar que além de monótona, temos também que a sucessão dos números x_n é limitada. Vejamos:

Tomando-se

$$y_{2n} = 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}.$$

Observe que

$$y_{2n} = 1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n-2)^p-(2n-1)^p}\right)-\frac{1}{(2n)^p}.$$

E mais, sem dificuldades percebe-se que $y_{2n} < 1$, pois o resultado de todos os parenteses é positivo.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
y_{2n} &= 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\\
&= \left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\
&\quad -2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\
&\quad -\frac{2}{2^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\cdots+\frac{1}{n^p}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^p} x_n.$$

Por ser $x_{2n} > x_n \quad$ e $\quad y_{2n} < 1$, podemos escrever que

$$1 > y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^p} x_n > x_n - \frac{2}{2^p} x_n = \left(\frac{2^p - 2}{2^p} \right) x_n.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{2^p - 2}{2^p} \right) x_n < 1 \quad \Rightarrow \quad x_n < \frac{2^p}{2^p - 2}.$$

E isso completa a demonstração, pois x_n é limitada, sempre que $p > 1$. $\square$

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho podemos apreciar algumas demonstrações matemáticas, além da motivações geométricas para estas, de diversas desigualdades matemáticas e algumas de suas aplicações. Devido ao fato do tema ser muito extenso e com diversos graus de dificuldade, a escolha de motivações das desigualdades demonstradas e utilizadas teve como guia a ubiquidade de suas aplicações e a proximidade com o ensino fundamental e médio, assim como o começo dos cursos de graduação em Matemática. Este trabalho tenta, dessa forma, contribuir para os diversos níveis de ensino agregando-se à pouca bibliografia existente na área no nosso país em Língua Portuguesa.

Referências Bibliográficas

[1] BECKENBACH, E.; BELLMAN, R. *An Introduction to Inequalities*. New Haven: The Mathematical Association of American, 1975.

[2] CVETKOVSKI, Z. *Inequalities*: Theorems, Techniques and Selected Problems. Berlin: Springer, 2012.

[3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*: geometria plana, v.9, 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.

[4] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*: geometria espacial, v.10, 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.

[5] GARBI, G. Usando determinantes para fatorar. *Revista do Professor de Matemática*, n.41. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

[6] GOMES, C. A.; GOMES, J. M. *Tópicos de Matemática Elementar*: Produtos Notáveis, Fatorações e Desigualdades, v.1. Fortaleza: VestSeller, 2010.

[7] HEFEZ, A. *Programa de Iniciação Científica da OBMEP*: Indução Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[8] KAZARINOFF, M. D. *Geometric Inequalities*. New Haven: The Mathematical Association of American, 1975.

[9] KOROVKIN, P. P. *Lecciones Populares de Matemáticas*: Desigualdades. Tradução de Carlos Vega. Moscú: Editorial MIR, 1976. Original russo.

[10] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, v.1, 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

[11] LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio*, v.l, 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] LIMA, E. L. *Análise Real*: Funções de Uma Variável, v.1, 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[13] LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio*, v.2, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] MANFRINO, R. B.; ORTEGA, J. A. G.; DELGADO, R. V. *Inequalities*: A Mathematical Olympiad Approach. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.

[15] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar*: Introdução à Análise, v.3. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática*: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[17] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM, 2008. Edição Especial.

[18] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM, v.2, 2009. Edição Especial.

[19] RIBENBOIM, P. *Funções, Limites e Continuidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[20] STEELE, J. M. *The Cauchy-Schwarz master class*: an introduction to the art of mathematical inequalities. New York: Cambridge University Press, 2008.

[21] SUPRÚN, V. P. *Matemática para Estudiantes Preuniversitarios*: métodos no estándares para la resolución de ecuaciones y desigualdades. España: Krasand, 2011.

Apêndice A

Enunciados e demonstrações de teoremas auxiliares

A.1 Densidade do Conjunto $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$

Primeiramente vamos mostrar a Propriedade Arquimediana dos números reais, em seguida iremos demonstrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, e por último mostraremos que o conjunto $\mathbb{I}$ também é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema. (Propriedade Arquimediana) Para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$.

Demonstração. Por contradição. Suponhamos que este resultado seja falso. Então $\mathbb{N}$ é limitado superiormente por r, e consequentemente existe $c = \sup \mathbb{N}$. Assim, $c - 1$ não é cota superior para $\mathbb{N}$, e desta forma deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c - 1$. Mas, $n + 1 \in \mathbb{N}$ e $n + 1 > c$. O que é uma contradição, uma vez que c é cota superior para $\mathbb{N}$. $\square$

Teorema. (Densidade dos Racionais) Se $a < b$ em $\mathbb{R}$, então $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $b - a > 0$. Pela Propriedade Arquimediana, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{b-a}$, ou seja, $\dfrac{1}{n} < b - a$. Consideremos o conjunto $A = \left\{\dfrac{m}{n}; m \in \mathbb{N}\right\}$, um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Afirmamos que $A \cap (a, b) \neq \emptyset$. Para isso, assuma o contrário, assim deve existir m_1, o maior dos valores naturais, tal que $\dfrac{m_1}{n} < a$. O que implica $\dfrac{m_1 + 1}{n} > b$. Mas disso temos que

$$b - a < \frac{m_1 + 1}{n} - \frac{m_1}{n} = \frac{1}{n} < b - a,$$

uma contradição. Logo, $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. $\square$

Teorema A.1. *(Densidade dos Irracionais) Se $a < b$ em $\mathbb{R}$, então $(a, b) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Se $a < b$, então $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Assim, deve existir $r \in \mathbb{Q}$ de maneira que $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < r < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Ou seja, $a < r \cdot \sqrt{2} < b$. E isto completa a demonstração, já que $r \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{I}$. $\square$

A.2 Teorema de Bolzano - Weirstrass

Teorema A.2. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Consideraremos (x_n) não decrescente, pois para os outros casos segue-se de forma análoga. Assim, temos

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq K,$$

para um certo $k > 0$. Como o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ é limitado, então ele possui uma menor cota superior $c = \sup X$. Provaremos que $\lim x_n = c$. Vejamos: Seja $\epsilon > 0$ um real qualquer. Como $c - \epsilon$ não é mais cota superior de X, então deve existir um $x_{n_0} \in X$ tal que $x_{n_0} > c - \epsilon$. Mas, por (x_n) ser não decrescente temos

$$x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq \cdots ,$$

e com isso temos também que $x_n > c - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. E ainda,

$$c - \epsilon < x_n \leq c < c + \epsilon.$$

E isso equivale a dizer que

$$\lim x_n = c.$$

□

A.3 Teorema do Confronto

Teorema A.3. *Sejam* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim x_n = \lim y_n = c$ *então* $\lim z_n = c$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ um número real qualquer. Como $\lim x_n = \lim y_n = c$, então devem existir $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

i) $n > n_1 \Rightarrow c - \epsilon < x_n < c + \epsilon$;

ii) $n > n_2 \Rightarrow c - \epsilon < y_n < c + \epsilon$.

Tomando-se $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$, temos que

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} c - \epsilon < x_n < c + \epsilon \\ c - \epsilon < y_n < c + \epsilon. \end{cases}$$

E também,

$$c - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < c + \epsilon.$$

Portanto, $\lim z_n = c$. □