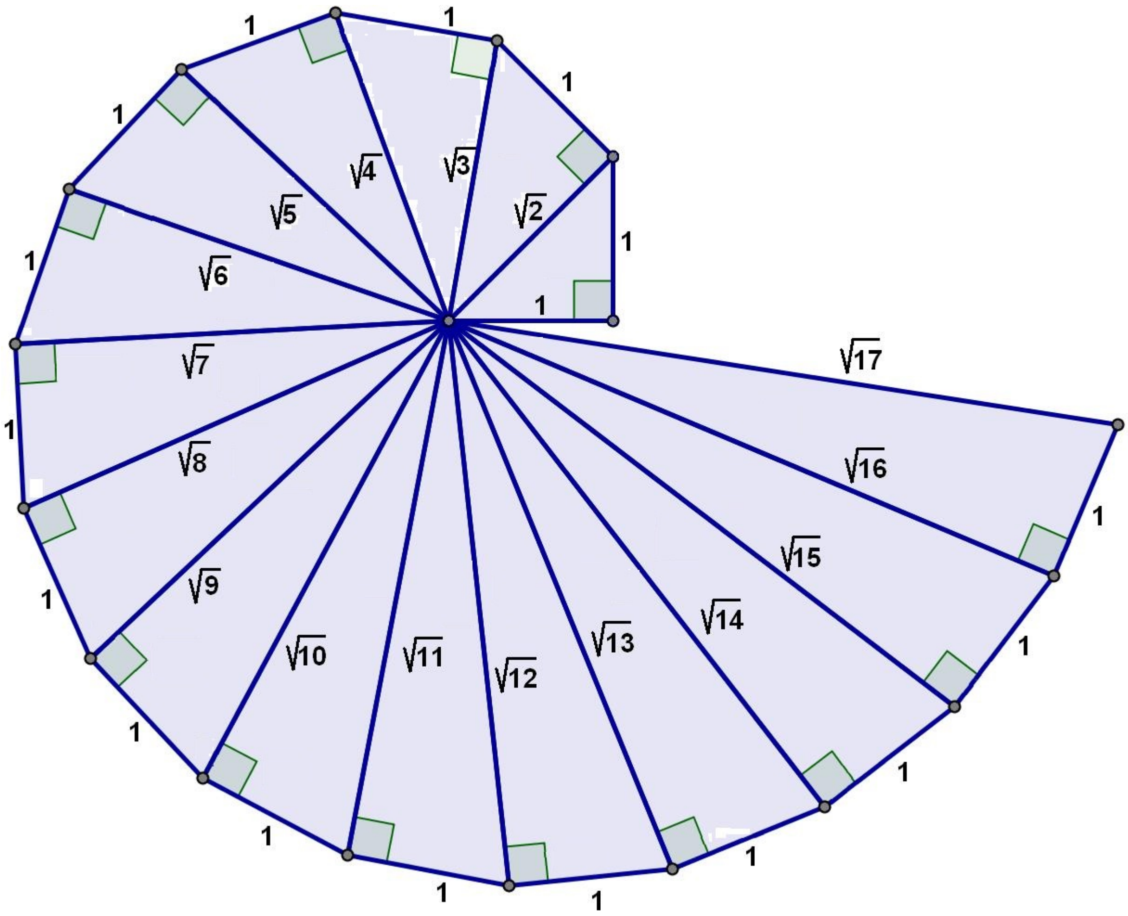
Cálculo no Ensino Médio: Números Reais

Orlando da Silva Junior



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT - SBM - IMPA

Cálculo no Ensino Médio: Números Reais

Orlando da Silva Junior

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
IMPA - PROFMAT - SBM

Orientador: Doutor Marcelo Vianna
Coorientador: Doutor Victor Giraldo

Rio de Janeiro

2014

EPÍGRAFE

"Se você encontrar um caminho sem obstáculos, ele provavelmente não leva a lugar nenhum.".

(Frank Clark)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço aos meus orientadores Marcelo Viana e Victor Giraldo que de forma muito paciente me ajudaram na escrita deste trabalho.

Agradeço aos meu amigos, Fábio Brito, Bruno Vianna e Luis Amorim, do Colégio Pedro II, que me incentivaram e me apoiaram para concluir este trabalho.

Agradeço ao meu irmão Filipe Iório que sempre esteve junto a mim, diretamente me auxiliando na confecção deste trabalho.

Agradeço a minha mãe por ter me gerado e por ter me dado tanto amor.

DEDICATORIA

Dedico este trabalho a meu magnânimo irmão Filipe Iório que foi, é e sempre será o meu maior amigo.

RESUMO

Na busca de elaborar atividades para inserir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, nos deparamos com conteúdos já apresentados nesse nível de ensino, que abordam muito superficialmente o conceito de limite, mais precisamente referem-se às idéias de infinito e infinitésimos. Com isso, resolvemos elaborar atividades que abordem e aprofundem esses conceitos, utilizando novas tecnologias e possibilitando ainda ao discente, o contato com uma nova simbologia. Inicialmente elaboramos uma pesquisa qualitativa cujo objetivo era de sondar o conhecimento dos alunos, sobre os conceitos de Infinito e Infinitésimos. Essa sondagem ocorreu por meio da aplicação um questionário que apresentava questões abertas sobre esses conceitos. Apoiados nas conclusões desse questionário, elaboramos atividades para aprofundar o conhecimento dos alunos sobre Infinito e infinitésimos além de abordar os conceitos de limites laterais e no infinito em gráfico de funções polinomiais ou trigonométricas.

Na estrutura básica de todo Cálculo e toda Matemática do Ensino Médio e Fundamental está o conceito de número real. Não obstante, na trajetória como professores deste segmento, nossa experiência diz que alunos entram e saem da escola, sem uma compreensão adequada do importante conceito de número real. Na verdade, sabemos que há muitos problemas que envolvem o ensino deste tema, mas talvez o principal seja a abordagem. Esta tem sido feita pelos professores de maneira rápida e superficial, escondendo as principais idéias sobre os reais e, principalmente, os seus problemas, impedindo assim, que os alunos compreendam o que é mais importante no estudo da Matemática: o seu conceito.

Palavras-Chave: Infinito, Limite de Funções, Área de Círculo e Cálculo.

Sumário

Introdução

A Educação Básica brasileira vem sofrendo mudanças ao longo do tempo. Muitas dessas mudanças foram desencadeadas por políticas públicas que priorizam o desenvolvimento social, cultural e tecnológico brasileiro. Segundo a minha interpretação e do site educarparacrescer.abril.com.br a criação de Parâmetros Curriculares Nacionais regulamentado em 1996 pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB), serviu para unificar o ensino em todo país, respeitando as diferenças culturais e sociais de cada Estado. Porém, apesar das mudanças serem em diversos âmbitos, até os anos 2000 ainda não se discutia uma nova reformulação dos componentes curriculares de matemática ao fim do Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Médio. Segundo o artigo 22 da LDB, a seguir

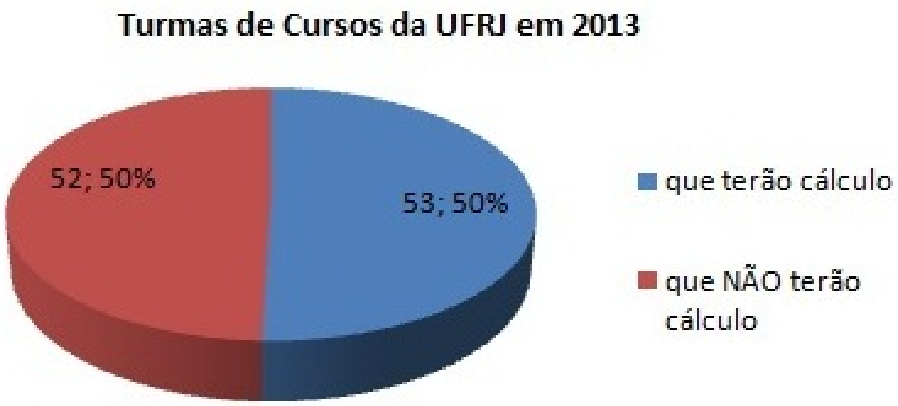
> "Art 22. A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores."

Uma das funções do Ensino Médio é fazer a ponte entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior, oferecendo aos discentes, um embasamento real e fidedigno aos componentes curriculares da maioria dos Cursos Superiores.

A falta de uma preparação adequada para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, para os alunos que vão cursar carreiras que têm esta disciplina, deixa uma lacuna para a maioria dos futuros graduandos. Por exemplo, um pequeno estudo realizado por este autor, que conferiu dois documentos, sobre as condições de acesso à Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2013. Foram analizados o quadro de vagas oferecidas e a grade curricular de cada curso oferecido pela UFRJ em 2013. Com isso constatamos que:

- das 4 745 vagas oferecidas pela UFRJ 2 366, destinam-se a turmas que terão Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso
- E das 105 turmas previstas 53 delas terão aulas de Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso

Segue o gráfico abaixo:



Dados obitdos em:
LINK: Grades Curriculares e LINK: Edital 225 SiSu [1]

Além disso, não propomos inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar os estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que tem o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina.

Baseados nesses objetivos, elaboramos um projeto que vai ao encontro da atual situação político-econômica do nosso país, onde a carência de profissionais na área de exatas, faz com que importemos conhecimento científico ao invés de produzirmos. E, assim, este quadro serviu de motivação para o nosso estudo, que esperamos poder contribuir nas discussões do Programa Ensino Médio Inovador- ProEMI, instituído pelo MEC através da Portaria nº 971, de 9 de outubro de 2009, integra as ações do

[1] Acessados em 11 de fevereiro de 2013.

Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE, como estratégia do Governo Federal para induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio.

Maiores informações, podem ser obtidas através do: LINK: ProEMI[2]

Por que números reais?

Na estrutura básica de todo Cálculo e toda Matemática do Ensino Médio e Fundamental está o conceito de número real. Não obstante, na trajetória como professores deste segmento, nossa experiência diz que alunos entram e saem da escola, sem uma compreensão adequada do importante conceito de número real. Na verdade, sabemos que há muitos problemas que envolvem o ensino deste tema, mas talvez o principal seja a abordagem. Esta tem sido feita pelos professores de maneira rápida e superficial, escondendo as principais idéias sobre os reais e, principalmente, os seus problemas, impedindo assim, que os alunos compreendam o que é mais importante no estudo da Matemática: o seu conceito.

A abordagem dos números reais no ensino médio ocorre de modo superficial, e muitas vezes confuso. O estudo deste tema se limita a exemplos numéricos e pictogramas que deterioram as bases da construção desse conjunto.

A enorme abstração necessária para comparar e separar o conjunto do números reais dos outros conjuntos estudados anteriormente dificulta, em muito, o entendimento parcial dessa questão, pois a maioria dos elementos que o diferencia dos outros conjuntos, não podem ser representados graficamente.

Baseando-se na longa experiência que temos como docentes do Ensino Médio, temos a impressão de que a abstração associada aos números reais está no cerne da sua definição e, por isso mesmo, afasta o professor de qualquer análise mais teórica sobre o tema.

[2]Acessado em 11 de fevereiro de 2013.

Atualmente, o aluno sai do ensino médio sem uma idéia clara da representação decimal de um número irracional e do significado desta representação. Assim, o discente não consegue localizar esse número na reta real, não vê sentido na notação que o representa e, apesar de não ser o objetivo final do ensino médio, o discente não será capaz de comparar as dimensões entre os conjuntos dos números racionais e irracionais.

Deste modo, nosso objetivo é a busca por uma apresentação dos números reais que possa ser desenvolvida no ensino médio, dando ênfase nas diferenças entre racionais e irracionais mas, principalmente, que deixe claros os problemas embutidos neste enfoque.

No capítulo 1, apresentamos, em uma brevíssima exposição histórica de dois importantes matemáticos, Cantor e Dedekind, que muito contribuíram para a formulação teórica moderna do conceito de número real. Em seguida, exploramos alguns dos diversos problemas encontrados na sala de aula que dificultam a compreensão deste conceito e o trabalho de qualquer professor de matemática.

No capítulo 2, exploramos a ideia de que números representam medidas discutindo os conceitos matemáticos envolvidos por trás do ato de medir. Exploramos também a idéia de que qualquer medição empírica possui erros, e a correlação desse fato com os números reais. Abordamos ainda a necessidade da existência dos números reais sob o ponto de vista concreto, já que aproximamos por irracionais qualquer medida que aferimos.

No capítulo 3, propomos e discutimos uma abordagem para esse tema, voltada para o ensino médio, cujo enfoque é a exploração do máximo de conceitos, levando em consideração a baixa maturidade matemática dos alunos nesta faixa escolar.

No capítulo 4, propomos e discutimos algumas possíveis soluções para a apresentação dos números reais no Ensino Médio, assim como dicas e sugestões para trabalho com esse importante tema.

No capítulo 5, , trabalhamos uma forma de definir o conjunto dos números reais através das sequências de Cauchy formadas por números racionais. Este capítulo se destina ao professor e não ao aluno regular do Ensino Médio, visto que aborda conceitos oriundos da graduação em Matemática.

E, finalmente, no capítulo 6, , fazemos nossas considerações finais sobre o assunto, expondo os nós que acreditamos termos tratado no trabalho, contribuindo para sua discussão, mas que ainda não estão desatados ou frouxos, e que precisam ser discutidos, revistos e estudados.

Capítulo 1

Problematização

1.1 Na história

Foi durante o processo de contar coleções finitas de objetos que surgem os números naturais, mas a necessidade da vida diária nos mostrou a importância da medição de várias quantidades (comprimento, peso, tempo etc), e para isso os naturais não eram suficientes. Foi dessa necessidade que os povos antigos começaram a trabalhar com frações e, muito tempo depois, à definição de número racional.

Já no século IV a.C. os gregos percebem que até mesmo as razões entre números naturais são insuficientes para medir, a incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, como diagonal de um quadrado de lado unitário. Segundo Howard Eves [2], matemático especializado em história da matemática, Platão diz que, mais tarde, Teodoro de Cirene (c. 425 a.C.) mostra que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}e\sqrt{17}$, também são irracionais. Mas a irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi demonstrada oficialmente por Aristóteles (384-322 a.C.), essa demonstração encontra-se posteriormente nesse trabalho. Vale ressaltar que Howard Eves [2] acredita que o $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ pode ter sido o primeiro número a ser considerado irracional a famosa razão áurea representada em várias construções gregas e aparente em alguns fenômenos naturais.

Fora a irracionalidade de π e e (constante neperiana) que foram demostradas posteriormente, temos o magistral tratamento das proporções incomensuráveis, formulado por Eudoxo, aparece no quinto livro do Elementos de Euclides, e essencialmente, tem paralelos com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind.[2]

Com avanço do Cálculo no século XIX, Dirichlet (iminente matemático alemão, a quem se atribui a moderna definição formal de função) percebeu que nem toda função pode ser integrada, e em seu artigo sobre a representação de uma função arbitrária entre limites dados por convergência de séries trigonométricas, publicado em 1829, dá um exemplo: $f(x) = \{0$, se x é racional e 1, se x é irracional $\}$. Dirichlet mostrou também que essa função não pode ser representada por funções analíticas nem por série de Fourier e é descontínua em todos os pontos. E, intuitivamente, se integrar uma função é calcular a área sob o seu gráfico, a função proposta por Dirichlet não possui integral no sentido clássico, pois sendo descontínua em todos os pontos, ela não pode definir uma área. Esta função sinalizava para a comunidade matemática da época que a sua plena compreensão dependia do modo como os racionais e irracionais estavam distribuídos sobre a reta numérica.

Depois da estranha função sugerida por Dirichlet, a proliferação de exemplos de funções patológicas despertaram matemáticos de todo mundo para revisar a definição de função. Weiertrass (ilustre matemático alemão e professor na Universidade de Berlim), na época, construiu um famoso exemplo desses "monstros"como se dizia no meio, que desafiava o senso comum da época. Assim, em 1872, Weiertrass apresentou à Academia de Ciências de Berlim um exemplo de função contínua e não derivável em nenhum ponto, contrariando a intuição de toda comunidade matemática.

A partir daí, diversos exemplos contraintuitivos de funções apareceram, sendo Riemann o responsável pela criação de algumas delas, que surgiram ao longo de seu estudo sobre integração. Du Bois-Reymond, outro matemático alemão do período, também descobriu funções bizarras, originadas da investigação das séries trigonométricas, como uma função que é continua mas não pode ser desenvolvida em séries de Fourier. A partir desse momento, era necessário o esforço dos matemáticos da época, para se melhor compreender o conceito de função, pois antes estas surgiam de problemas concretos, como os de natureza física, mas agora vinham do interior da Matemática; sinalizando uma tendência crescente de se estabelecer as definições sobre bases abstratas, independentes da intuição sensível e da percepção geométrica.

[12]

Em 1858, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), matemático e professor da escola Politécnica de Zurique, enquanto preparava as notas de aula do seu curso de Cálculo, teve a sua atenção voltada para uma pergunta que há tempos incomodava os matemáticos: o que há na reta geométrica contínua que a distingue dos números racionais? Dedekind percebeu que o conjunto dos números racionais podia ser estendido de modo a formar um continuum de números reais por meio do conceito de "corte" definido por ele. Somente em 1872, Dedekind publicou sua teoria dos números irracionais na sua obra "Continuidade e Números Irracionais", encerrando de uma vez o problema que existia a respeito das medidas irracionais e o conceito de mensurabilidade. Dedekind tentava compreender como se dava a construção dos números irracionais a partir dos racionais, através do conceito de limite. Dedekind acreditava que este conceito deveria ser fundamentado e desenvolvido apenas através da aritmética aplicada aos princípios da análise infinitesimal, para ser bastante rigoroso.

O escopo deste trabalho realizado por Dedekind inspirou diversos matemáticos na época, em particular George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), que estudava uma forma de "contar" o infinito. Cantor, foi o primeiro a perceber que os infinitos não são todos iguais e têm tamanhos diferentes. Primeiramente, Cantor mostrou que o "menor" infinito é o da contagem, do conjunto dos números naturais, IN, e que este têm o mesmo tamanho do conjunto dos inteiros e até mesmo do conjunto dos racionais Q, apesar de um conter o outro. Assim, Cantor mostrou que nem sempre a parte é menor que o todo! Cantor separou os tipos de infinitos em infinito enumerável e infinito não-enumerável, exemplificando o conjunto dos racionais como enumerável e o conjunto dos reais como não-enumerável, se utilizando do método da diagonal para demonstrar esse fato, a famosa diagonal de Cantor. É atribuído a Cantor o rótulo de ter sido o primeiro matemático a utilizar R como o símbolo para o conjunto dos números reais.

É através da pesquisa e do desenvolvimento que modificamos o nosso dia a dia, e principalmente, o nosso modo de encarar o mundo. De certa forma, a dramática revolução industrial e tecnológica, que possui como base a evolução da pesquisa no século XIX, deve muito à construção do conjuntos dos números reais, pois através do seu estudo diversas áreas foram beneficiadas e novos conceitos puderam ser produzidos.[1]

1.2 Dificuldades

"No processo pedagógico, a dualidade discreto/contínuo é completamente ignorada desde os níveis mais elementares do ensino de matemática. A conseqüência disso mais imediata é o hiato estabelecido entre a aritmética e a geometria, com o sacrifício da primeira." (Rezende, 2003). [10]

Neste capítulo identificamos alguns dos problemas que surgem quando necessitamos utilizar o conceito de número real dentro da escola. A falta de uma definição mais simples, a representação decimal infinita e a existência de diferentes tipos de infinitos são apenas alguns dos obstáculos que devemos vencer para construir de modo rigoroso e eficiente o conceito de número real.[7]

De minha experiência como professor de ensino médio, quando abordamos números reais em nossa sala de aula, enfrentamos diversas dificuldades na construção desse conceito. Dentre as quais destacamos:

1. Conceituação: a dificuldade em definir de forma precisa e simples a ideia de número real.

2. Localização: a dificuldade de localizar números reais na reta comparando o seu valor numérico com o de outro número real. Por exemplo, quem é maior 7π, $8e$ ou $\sqrt{471}$?

3. Representação: a dificuldade de ensinar a ideia de número real, visto que ele não possui uma forma de representação genérica usada na escola além da numeração posicional, como por exemplo, os números racionais que podem ser representados como $\frac{p}{q}$, onde p e $q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$.

4. Existência Empírica: quando fazemos medições empíricas, usamos aproximações racionais de representação decimal finita. E assim como todo número é um conceito teórico, os irracionais também o são.

5. Os Infinitos: a dificuldade de explorar com o aluno o conceito de um infinito diferente daquele abordado através dos número naturais, ou seja, explorar um infinito que não é enumerável. A diferença conceitual entre esses tipos diferentes de infinitos poderia ser mais explorada no contexto escolar.

Optamos por abordar construtivamente os números reais na sala de aula do ensino médio, parece-me melhor, trabalhar individualmente os principais bloqueios epistemológicos, existentes nas dificuldades supracitadas, e assim o farei nas próximas páginas:

1.2.1 Conceituação

> “Se os naturais são os números usados para contar, os reais são os números usados para medir.”

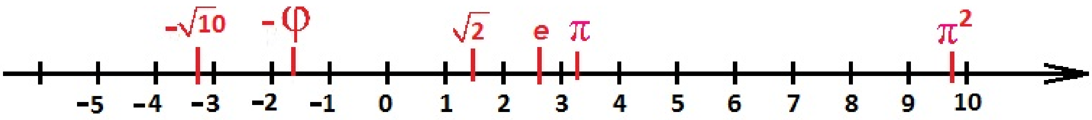
O número real é descrito em vários livros didáticos adotados no ensino médio como, por exemplo, nos volumes únicos: *Matemática Acontece - Ensino Médio, de Bruno Benetti, Editora do Brasil*; *Trama Matemática - Princípios e Novas Práticas no Ensino Médio, de Márcio Barreto, Editora PAPIRUS* e *Eja - Educação de Jovens e Adultos - Matemática - Ensino Médio, de Marcondes Dos Santos e Carlos Alberto, Editora Ática*; como os números que “completam” a reta, ou seja, admite-se de início que a reta numérica, que é apenas um elemento de representação, possui números que não são racionais. E é comum abordar em sala de aula, o conjunto dos números reais como uma mera extensão do conjunto dos números racionais, e, assim, os alunos são levados a um grave engano, pois, parece que as propriedades desse novo conjunto numérico são semelhantes às do conjunto anterior. Neste contexto, o número real aparece como um objeto que utilizamos para “completar as lacunas” que os racionais deixam quando dispomos os números em uma reta contínua. E, reciprocamente, cada número não-racional, tem representação única na reta e é um número real, por definição. Assim, professores e alunos ficam aprisionados numa definição circular de número real. Devemos fugir dessas armadilhas vazias do ensino que visam simplificar a Matemática, mas que em nada acrescentam na compreensão de seus conceitos, sem dar espaço para a curiosidade, confunde mais a cabeça do aluno, impedindo-o, portanto, de procurar outras fontes de conhecimento.[3]

1.2.2 Localização

Os números irracionais ensinados na escola são aqueles obtidos através de raízes, senos, cossenos, tangentes e logaritmos "inexatos"(não racionais), como, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sin 8$, $\cos 9$, $\tan 10$, $\log 3$ etc (e como são poucas as operações presentes nas aulas de matemática e são feitas sobre o conjunto dos racionais que é enumerável (como mostraremos mais tarde!), concluímos portanto que os irracionais daí obtidos formam um subconjunto enumerável). Como todos os irracionais têm representação infinita, sua localização na reta deve ser aproximada, e portanto, haveria necessidade de se ensinar métodos de aproximação, o que, lamentavelmente, não é feito. Os motivos, por que não são ensinados, são variados, e aqui destacaremos três: primeiro porque não consta no programa tradicional do ensino médio; segundo, porque acredita-se que os melhores métodos de aproximação se utilizam de ferramentas do cálculo que também não está neste programa; e terceiro, porque no contexto do ensino básico, muitos professores desconhecem métodos simples de aproximação que poderiam ser apresentados aos alunos usando apenas uma calculadora de bolso, ou por "princípios"da sua formação, são contra o uso de recursos eletrônicos em sala de aula.

Além disso, alguns irracionais são "definidos" de um modo misterioso para o aluno, como, por exemplo, os números $\pi = 3,1415926535...$ ou $e = 2,718281828...$. Isso sugere a ideia de que cada nova casa decimal aparece aleatoriamente, e desta forma, impossibilita sua localização e precisão.

REPRESENTAÇÃO NA RETA REAL

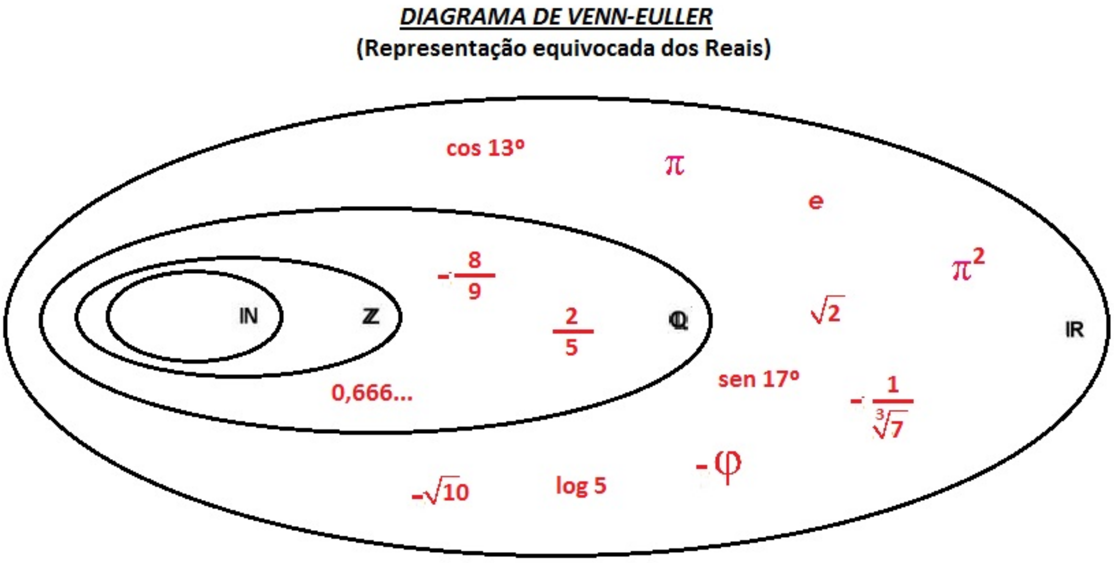


$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ **Número áureo**

Ainda que o aluno soubesse como encontrar qualquer uma das infinitas casas decimais de um dado número irracional, ele não acreditaria ser possível representá-lo na reta, pois sua infinitude de casas decimais não-periódicas dá um caráter de aproximação, e portanto de imprecisão desse número irracional. Ou seja, falta ao aluno o conceito de que qualquer número real pode ser aproximado, tão bem quanto se queira, por uma sequência de racionais e de que qualquer número possui uma representação decimal infinita, algumas periódicas (racionais) e outras não-periódicas (irracionais).

A localização de um número irracional na reta real depende, primeiramente, do aluno estar familiarizado com a representação e localização de um número racional decimal, inicialmente de representação finita e depois infinita. Como na escola não se apresenta uma representação genérica para os números irracionais, além da expansão decimal, o aluno, para localizá-los na reta real, se vê obrigado a descobrir casa por casa decimal, conforme a sua necessidade no momento. Assim, o ideal é que o aluno saiba decidir qual é aproximação decimal mais adequada para cada irracional em questão, levando em conta o número de casas que pretende exibir e sua necessidade no momento. Daí, a importância da apresentação de métodos de aproximação decimal no ensino básico.

1.2.3 Representação



O gráfico acima é apresentado rotineiramente por professores a seus alunos para ilustrar a cadeia de inclusões dos conjuntos numéricos mais comuns na escola básica. Mas há nele um erro conceitual, pois o conjunto dos números reais parece ser um "múltiplo"do conjunto dos números racionais.

Como a maioria dos números irracionais existentes são conhecidos na matemática apenas por meio de sua representação decimal, que é infinita, o estudo da natureza destes números é um desafio puramente intelectual. Assim, para verificar a irracionalidade de um número, teremos que analisar suas características e propriedades particulares, sem a disponibilidade de procedimentos rotineiros ou genéticos. A simples tarefa de estimar (que consiste em formar um juízo aproximado relativamente a um valor, um cálculo, uma quantia, um peso, uma medida, etc.) o valor de um número, que com os racionais já era complexa, agora se torna um desafio intelectual que pode ser tão difícil quanto decidirmos.

O aluno já conhecedor do conjunto dos números racionais é comunicado pelo seu professor que existe um conjunto mais abrangente que contém o anterior e será chamado de conjunto dos números reais, cujos elementos têm múltiplas formas, não possuindo uma representação genérica além da numeração posicional. Porém, as limitações de representação para o número real, nada tem a ver com a falta de uma definição precisa para esses números; e portanto, não há qualquer dúvida sobre o conceito de número real. Assim, para investigar esses números necessita-se desenvolver raciocínio abstrato e organização para conhecer ou confirmar suas características.

Apesar dos números irracionais possuírem uma representação de numeração posicional infinita e não periódica, a partir de consistentes desenvolvimentos matemáticos, os números irracionais podem ser aproximados por números racionais, e, muitas vezes, apresentamos os números reais através da sua expansão decimal. Por exemplo:

$$\sqrt{3} = 1,7320508... = 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{100000} + \frac{8}{10000000} + ...$$

1.2.4 Existência Empírica

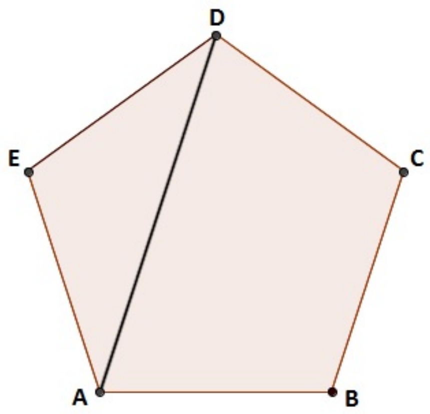
Explicar para o aluno a necessidade de saber que existe um número, não inteiro, que não tem representação decimal finita, que não tem representação como fração, chamado número irracional, cuja representação é decimal infinita e não-periódica, mas que sempre pode ser substituído (aproximado) por um número racional, é uma tarefa, no mínimo, árdua. É de fato um convite à exploração de mais um conjunto numérico abstrato que surge, através da descoberta de novos elementos e suas propriedades. Uma aventura intelectual matemática disfarçada de exercício de raciocínio lógico.

Precisamos fazer exemplificações, operações e aproximações com os mais variados tipos de números reais, presentes na escola básica. Pois é através dessa experiência prática que o aluno intelectualmente se aproxima das características e propriedades dos diferentes números reais.

Os conceitos vistos na construção dos reais devem se encaixar nesta definição procurada e dar precisão e consistência ao conteúdo estudado, características fundamentais para a matemática. Daí a importância do desenvolvimento deste raciocínio, que independe dos saberes conteudistas, e que o aluno carregará consigo durante toda vida.

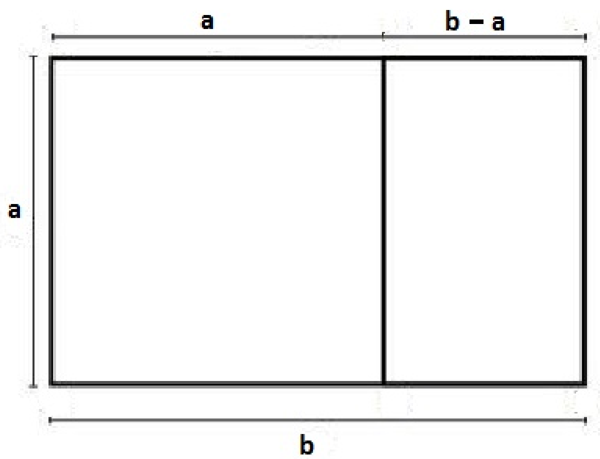
Abaixo temos duas figuras geométricas diretamente relacionadas com um importante número irracional da matemática, o número de ouro (φ). E isto nos serve de exemplo de como números irracionais podem aparecer tanto na geometria da escola quanto em medidas do nosso cotidiano.

A razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular é o valor conhecido como número áureo φ, que aparece na figura aproximado por três casas decimais.



$$\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \cong 1,618$$

RETÂNGULO ÁUREO



$$\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \iff \frac{a}{b} = \frac{1}{\varphi}$$

1.2.5 Os Infinitos

Ao longo da escola é ensinado que o conjunto dos números naturais e dos números inteiros é infinito e, qualquer conjunto que contenha estes, como por exemplo o dos números racionais, também será infinito (pois um conjunto finito não pode conter outro infinito). Os infinitos elementos do conjunto dos naturais ou dos inteiros podem ser listados, mas os infinitos elementos do conjunto dos reais são de tal forma que não podem. E isso separa os infinitos em pelo menos dois tipos: infinito enumerável e infinito não-enumerável (ou infinito contínuo).

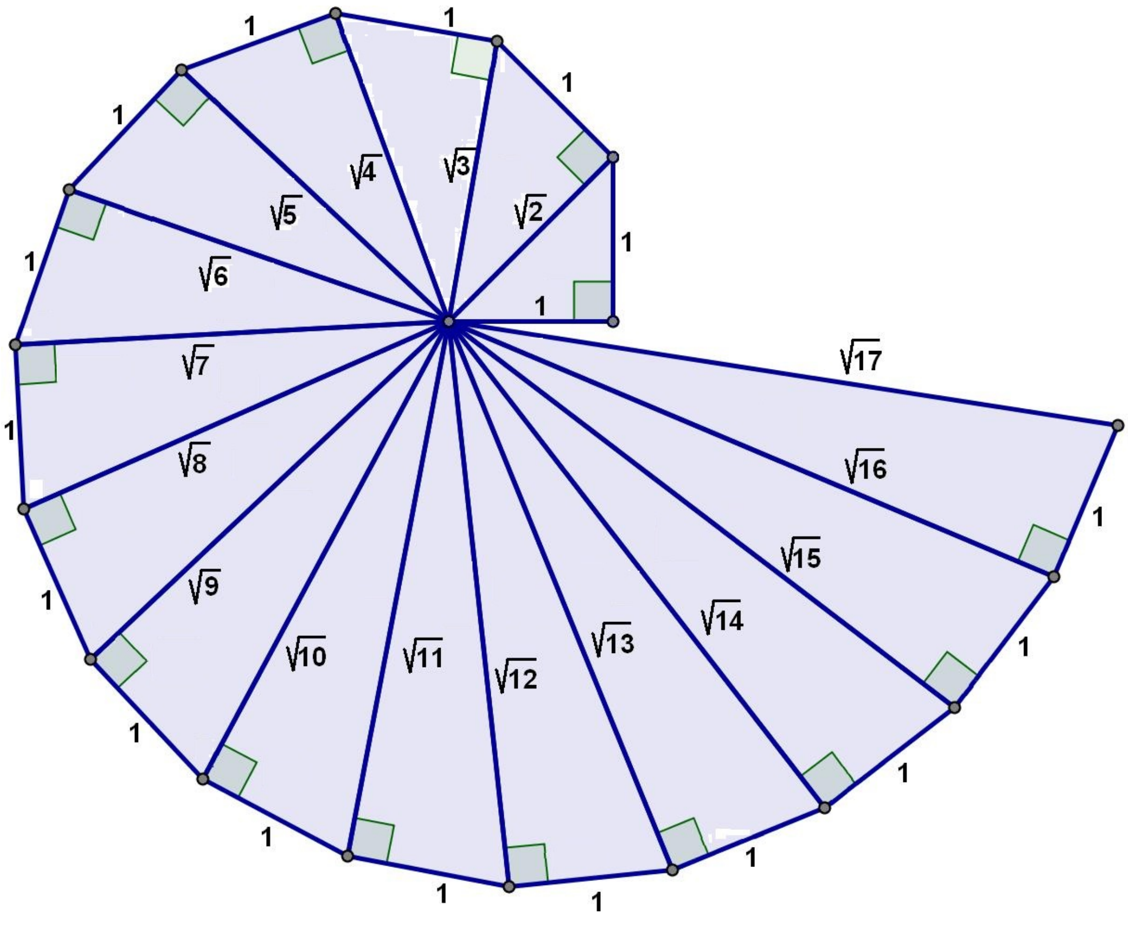
Entre quaisquer dois racionais existe pelo menos um racional (o conjunto dos números racionais é denso!), portanto, entre seus elementos não existe uma enumeração que preserve a ordem. Apesar disso, os elementos do conjunto dos números racionais podem ser listados! O conjunto dos racionais representa um infinito enumerável! Isso não só não é óbvio de maneira geral, como para o aluno parece impossível aceitar a possibilidade de comparar infinitos ou, sequer, conceber a existência de um infinito não-contável. Porém, sabemos das dificuldades para compreenderem esta ideia tão abstrata e, por isso mesmo, sabemos também que nem todos entenderão e que isto é apenas um conhecimento a mais, e não um ponto fundamental para a compreensão dos números reais.

No próximo capítulo, abordaremos o conceito de medida visando criar uma base para construirmos o conceito de número real através da incapacidade dos números racionais em medir, de modo exato, estruturas elementares, como, por exemplo, a diagonal de uma quadrado cujo lado seja mensurável.

Capítulo 2

Medida

O que significa medir?



O desenho acima ilustra que podemos obter por construção geométrica uma infinidade de irracionais, como por exemplo, as raízes quadradas de qualquer inteiro positivo.

Medir é comparar as quantidades de uma determinada grandeza com outra quantidade da mesma grandeza, prévia e arbitrariamente estabelecida, definida como unidade padrão, Assim, a medida de uma das grandezas é a resposta de quantas vezes a unidade cabe (sendo que o valor da medida pode não corresponder a um número inteiro) no objeto a ser medido.

"O ato de medir compreende a três etapas distintas: a escolha da unidade; a comparação com a unidade; a expressão do resultado dessa comparação por um número." (CARAÇA, 1989) [3]

Abordagem do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) como razão entre medidas inteiras

Segundo Caraça (1989):

> Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais ou campo racional - que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários; estes são, de fato, os números novos.
> As vantagens obtidas pela sua criação aparecem desde já como sendo as seguintes:
> 1ª – É possível exprimir sempre a medida dum segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz que a medida é o número 2/5.
> 2ª – A divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo numero racionais m/n - o quociente de 2 por 5 é o número racional fracionário 2/5, o quociente de 10 por 5 é o número racional inteiro (10/5) = 2. (figura 1)
>
> (CARAÇA, 1989, p. 36 - 37)

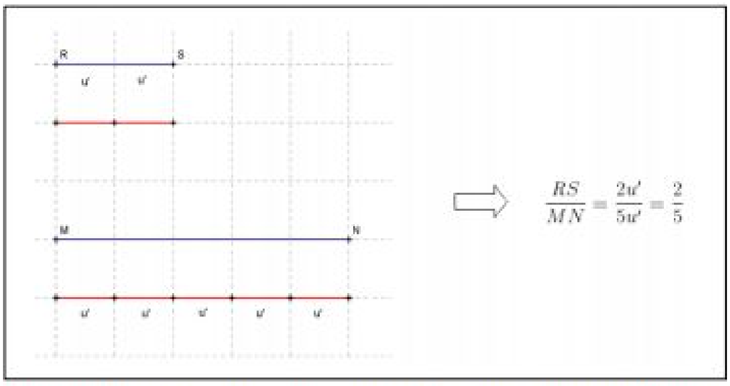


Figura 1 – Construção do número racional: para medirmos um segmento MN, tomando o segmento RS como unidade, devemos considerar uma subunidade para que a medição possa ser efetivada

[3]

Construção de um número racional: Dadas duas medidas da mesma grandeza, segmento $\overline{AB}$ e segmento $\overline{CD}$, precisamos escolhemos uma unidade u de medida de tal modo que ambos segmentos sejam múltiplos dessa, suponha $\overline{AB} = m.u$ e $\overline{CD} = n.u$, com m e $n \in \mathbb{N}$.

Porém, queremos saber quantas vezes o comprimento $\overline{CD}$ cabe no comprimento $\overline{AB}$. Assim, comparamos os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ entre si, tomando, por exemplo, o segmento $\overline{CD}$ como unidade, representamos como a razão:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m.u}{n.u} = \frac{m}{n}$$

Dois segmentos quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos comensuráveis, quando existe uma mesma unidade de medida u que aplicada a ambos resulta em números inteiros. Por exemplo, $\overline{AB} = m.u$ e $\overline{CD} = n.u$, sendo m e n números inteiros positivos, então, o número $\frac{m}{n}$ é a razão entre as medidas desses dois segmentos e é um número racional.

Do mesmo modo, dois segmentos L_1 e L_2, são ditos *incomensuráveis*, quando não são múltiplos inteiros de uma unidade comum u, ou seja, não são *comensuráveis*. Isto é, para quaisquer m e n números inteiros positivos, temos $L_1 \neq m.u$ e $L_2 \neq n.u$ e, consequentemente, a razão entre eles, $\frac{L_1}{L_2}$, não é um número racional. [11]

Vamos dividir este capítulo que chamamos de "Medida" em três casos gerados da comparação entre segmentos:

1. O segmento é múltiplo inteiro da unidade (a medida é natural!).

   Seja u a unidade padrão arbitrariamente escolhida de comprimento determinado e tomemos uma medida L_1. Dizemos que L_1 é múltiplo inteiro da unidade quando existe um número natural n tal que $L_1 = n.u$.

2. Um dos segmentos é múltiplo inteiro de uma subdivisão do outro (a medida é racional não inteira!).

Sejam dois comprimentos L_1 e L_2, com $L_1 > L_2$, sem perda de generalidade, e com a unidade padrão u de comprimento determinado e escolhida de tal forma que, esta caiba dentro de L_1 um número inteiro de vezes e de L_2 um outro número inteiro de vezes. Ou seja, $L_1 = p.u$ e $L_2 = q.u$, sendo p e q naturais. Assim, temos $L_1 = p.u$ e $L_2 = q.u$ sendo p e q números naturais e portanto, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{p.u}{q.u} = \frac{p}{q}$. Então, definiremos que dois segmentos L_1 e L_2 são ditos *comensuráveis* quando a razão entre eles, $\frac{L_1}{L_2}$, é um número racional $\frac{p}{q}$.

3. Não existe subdivisão dos segmentos que caiba um número inteiro de vezes no outro (a medida é irracional!).

Sejam dois comprimentos L_1 e L_2, sem perda de generalidade, com $L_1 > L_2$, são tais que: não existe unidade padrão, u, racional, de comprimento determinado, que caiba um número inteiro de vezes, p, em L_1 e outro número inteiro, p, de vezes em L_2. Ou seja, dados os comprimentos L_1 e L_2, não existem p e q naturais, tais que $L_1 = p.u$ e $L_2 = q.u$, para qualquer que seja a unidade padrão de medida, u, escolhida.

Seja a razão entre L_1 e L_2, $\frac{L_1}{L_2}$, igual a $\sqrt{5}$. De fato, vamos mostrar que não existe u, tal que $L_1 = p.u$ e $L_2 = q.u$, e portanto, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{p.u}{q.u} = \frac{p}{q}$, com p e q naturais.

Suponhamos que $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$ seja um número racional. Então, $\sqrt{5}$ pode ser representado como $\frac{p}{q}$, com p e q sendo números naturais, primos entre si, $MDC(p,q) = 1$. Mas observe que: $\frac{p}{q} = \sqrt{5} \Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 5 \Rightarrow p^2 = 5.q^2$, e como p e q são primos entre si, temos que p^2 é múltiplo de 5 e portanto, p é múltiplo de 5. Assim, p pode ser escrito como $p = 5.r$ com r natural.

E segue que, $p^2 = 5.q^2 \Rightarrow (5.r)^2 = 5.q^2 \Rightarrow 25.r^2 = 5.q^2 \Rightarrow 5.r^2 = q^2$ e como p e q são primos entre si, temos que q^2 é múltiplo de 5 e portanto, q é múltiplo de 5. Ou seja, p e q são múltiplos de 5 e isto é uma contradição com a nossa suposição inicial que $MDC(p, q) = 1$.

Então, a razão entre os comprimentos L_1 e L_2, $\frac{L_1}{L_2}$, não é um número racional.

Agora, generalizaremos o resultado anterior, provando que a raiz quadrada de qualquer número primo p é sempre irracional.

Prova:

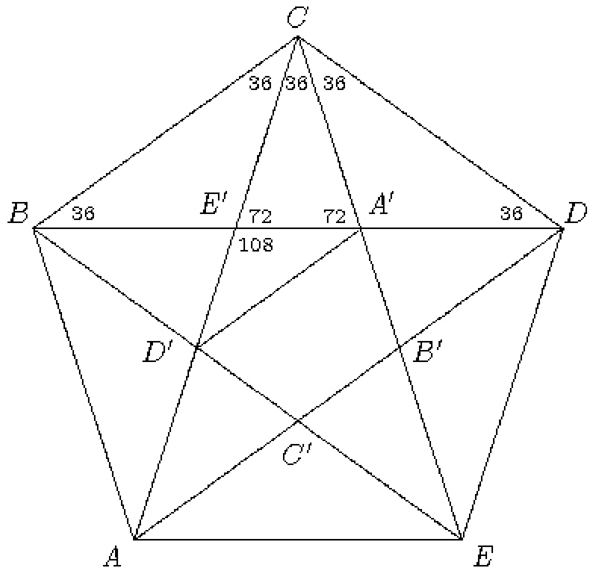
Suponhamos que $\sqrt{p}$ seja um número racional. Então, $\sqrt{p}$ pode ser representado como $\frac{m}{n}$, ou seja, $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, com m e n números naturais, primos entre si, $MDC(m, n) = 1$.

Mas observe que: $\frac{m}{n} = \sqrt{p} \Rightarrow (\frac{m}{n})^2 = (\sqrt{p})^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = p \Rightarrow m^2 = 5.n^2$, e como m e n são primos entre si, temos que m^2 é múltiplo de p com p primo e portanto, m é múltiplo de p. Assim, m pode ser escrito como $m = p.k$ com k natural.

E segue que, $m^2 = p.n^2 \Rightarrow (p.k)^2 = p.n^2 \Rightarrow p^2.k^2 = p.n^2 \Rightarrow p.k^2 = n^2$ e como m e n são primos entre si, temos que n^2 é múltiplo de p e portanto, n é múltiplo de p. Ou seja, m e n são múltiplos de p, mas isto é uma contradição com a nossa suposição inicial que $MDC(m, n) = 1$.

Logo, $\sqrt{p}$ com p primo, não é um número racional.

Por exemplo, num pentágono regular, a razão entre a medida da sua diagonal d e o seu lado l é um número irracional, conhecido como razão áurea, a saber, $\frac{d}{l} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Assim, dizemos que estes dois segmentos, d e l são incomensuráveis.



Vamos mostrar isso.

Vamos representar o lado do pentágono, segmento $\overline{BC}$, por l e a sua diagonal $\overline{AC}$ por d.

O segmento $\overline{BC}$ é congruente ao segmento $\overline{AB}$, pois são lados l do pentágono $\overline{ABCDE}$, que é regular.

Afirmamos que o segmento $\overline{AE'}$ também é congruente a l, pois o triângulo ABE' é isósceles, com ângulos da base iguais a 72^o e portanto, com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AE'}$ iguais.

De fato, afirmamos que o triângulo $\overline{ABC}$ é semelhante ao triângulo $\overline{BCE'}$, pois ambos são isósceles com ângulo obtuso medindo 108^o. Assim, por esta semelhança, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC} - \overline{AE'}} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}.$$

Do produto dos meios pelo produto dos extremos desta proporção temos:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \Rightarrow d.(d-l) = l.l \Rightarrow d^2 - l.d - l^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{-(-l) \pm \sqrt{(-l)^2 - 4.(1).(-l^2)}}{2.(1)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4.l^2}}{2} \Rightarrow d = \frac{l \pm \sqrt{5.l^2}}{2} \Rightarrow d = \frac{l \pm l.\sqrt{5}}{2} = \frac{l.(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{d}{l} \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ pois } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

E pelo exemplo anterior, sabemos que $\sqrt{5}$ é irracional e o número áureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ também o é.

De fato, suponhamos que $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ fosse racional, então:

$$p' \text{ e } q' \in N, \text{ tais que } \frac{p'}{q'} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow 2.\frac{p'}{q'} = \sqrt{5}+1 \Rightarrow 2.\frac{p'}{q'} - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{2p'-q'}{q'}$$

e como $(2p' - q')$ e q' são números naturais, temos que $\frac{2p'-q'}{q'} \in Q$ e portanto $\sqrt{5}$ é racional. Um absurdo, como já mostramos.

Assim, como o número áureo, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é irracional, temos que a diagonal e o lado de um pentágono regular são *incomensuráveis*.

Capítulo 3

Sala de Aula

No ensino da matemática, muitas vezes a quantidade, qualidade e profundidade do conteúdo e a ser estudado dificultam em muito este processo. Assim, acreditamos que para se melhorar a didática, uma ideia é dividir o conteúdo em tópicos relacionados entre si e se criar tarefas, sob a forma de atividades para sala de aula, com ordem gradativa e crescente de dificuldade, a fim de que o aluno para executá-las, tenha que fazer uma revisão e reflexão sobre o tópico abordado.

Uma vantagem inicial de se elaborar exercícios para os alunos sobre cada ponto do programa é saber após a execução quais tópicos foram melhor e pior compreendidos por estes. Porém, para que o curso de matemática do ensino básico forme um todo consistente é necessário que cada um dos roteiros de atividades estejam ligados com as dificuldades apontadas no Capítulo 1 (conceituação, localização, representação, existência empírica e os infinitos) e se associem entre si através de ideias e conceitos matemáticos.

Neste capítulo reunimos roteiros de atividades para a sala de aula que, de forma gradual, apresentem o conjunto dos números complexos desde a necessidade de sua existência até o aprofundamento de algumas de suas propriedades. Esperamos que esse capítulo sirva de inspiração para que professores possam criar atividades que empolguem e revelem para os seus alunos, cada vez mais, a beleza da matemática.

O Roteiro 1: "A medida da diagonal do cubo" , este roteiro tem como propostas: colocar o aluno pra trabalhar e obter na prática uma medida da diagonal do cubo cuja aresta meça 1 unidade. Em seguida, colocá-lo para aproximar o valor obtido, $\sqrt{3}$, por números racionais que sua representação decimal constitui uma dízima, aparentemente, não periódica. E finalmente, o aluno através de um estudo dirigido e comparativo (com a $\sqrt{2}$), deve observar que $\sqrt{3}$ não é um número racional, provando a sua irracionalidade. E assim, concluir que as grandezas diagonal e aresta de um cubo são incomensuráveis, pois sua razão é o irracional $\sqrt{3}$. Assim, este roteiro pretende ajudar o aluno na representação e localização de números irracionais que são duas dificuldades no ensino dos reais.

O Roteiro 2: “Você acha que 0,99999... é igual, maior ou menor que 1?”, tem como proposta, conhecer melhor dízimas periódicas e suas representações. Este roteiro pretende também mostrar a possibilidade de diferentes representações (que é uma das dificuldades apontadas neste texto) decimais para um mesmo número real (racional).

O Roteiro 3: “A enumerabilidade dos números racionais”, tem como propostas, construir com o aluno um método para contagem de um conjunto infinito e denso, quando possível. E convidando o aluno a discutir as diferentes representações fracionárias ou decimais (que é uma das dificuldades apontadas neste texto) para um mesmo número rqacional.

O Roteiro 4: “Os números racionais estão espalhados por toda parte ou os racionais são densos na reta real” tem como propostas, fazer o aluno perceber que além de infinito, os números racionais estão espalhados na reta toda de modo que qualquer “pedacinho” desta reta contenha infinitos destes números. ajudando com isso o aluno a compreender melhor a definição (que é uma das dificuldades apontadas) e a natureza dos números racionais, para em seguida iniciar a busca de um entendimento do que seriam os números não-racionais (irracionais).

O Roteiro 5: “Os números reais não podem ser contados” tem como propostas, primeiramente, abrir a discussão sobre qual a melhor definição de número irracional.

Cada um dos roteiros abaixo relacionados são compostos por dois elementos: a ficha técnica e escopo. O escopo representa o corpo central do roteiro, isto é, o conjunto formado pelos exercícios dispostos para os alunos, suas respostas, seus objetivos e os comentários pedagógicos feitos para o professor ao longo de todo o roteiro. A ficha técnica é formada de um conjunto de elementos técnicos úteis para que o professor possa utilizar o roteiro da forma mais eficiente possível. Os elementos da ficha técnica são:

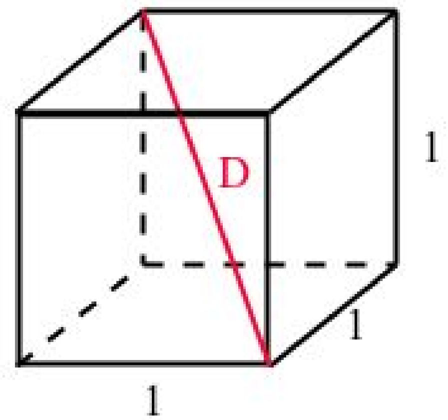
- A **duração prevista** está baseada em uma estimativa de tempo necessária para desenvolver completamente as atividades em sala de aula, e está intrinsecamente relacionada a dificuldade do roteiro.
- A **dificuldade** é dada através da seguinte escala: fácil, moderada e difícil.
- A **série recomendada** representa a série escolar na qual o aluno, em geral, já estudou todos os pré-requisitos solicitados pelo determinado roteiro, e portanto, representa a série mais adequada para se aplicar as atividades propostas.
- O **tema** é o assunto matemático abordado pelo determinado roteiro.
- Os **objetivos** são as metas que o roteiro se destina a alcançar no fim de sua aplicação. Ou seja, o conhecimento que se espera que o aluno detenha ao final das atividades propostas.
- Os **pré-requisitos** representam o conjunto de assuntos matemáticos sobre os quais os alunos devem demonstrar compreensão para conseguirem entender as atividades propostas pelo roteiro.
- O **material necessário** é físico (caneta e papel) e computacional (pelo menos uma calculadora de bolso) que será utilizado no decorrer do roteiro pelo professor ou aluno. Em geral, esse material é composto apenas pelas atividades descritas no roteiro, que poderão ser organizados em uma folha e distribuídos para os alunos.
- A **distribuição da classe** é uma sugestão de disposição dos alunos, individual ou em pequenos grupos, a fim de maximizar o diálogo entre eles e a perfeita compreensão do tema abordado no roteiro.

A descrição é a narrativa que dialoga com o professor explicando a sequência de atividades propostas e os seus objetivos pedagógicos.

3.1 Roteiro 1 - A medida da diagonal do cubo

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	100 minutos
Dificuldade:	Difícil
Série Recomendada:	2a Série do Ensino Médio
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Calcular o valor da diagonal de um cubo cuja aresta meça 1 unidade. Aproximar o valor da $\sqrt{3}$ por números racionais. Compreender que $\sqrt{3}$ não é um número racional e que sua representação decimal constitui uma dízima nao periódica.
Pre-requisitos:	Reconhecer os elementos que compõem um cubo. Teorema de Pitágoras. Visão Espacial. Conhecimento sobre dízima periódica.
Material necessário:	Folha com os exercícios e calculadora.
Distribuição da classe:	Turma organizada em grupos de três alunos, propiciando trabalho e colaborativo.

Nesse roteiro exploramos com o aluno o valor numérico da $\sqrt{3}$ utilizando a diagonal do cubo como exemplo prático de um segmento cuja medida seja esse valor.



Uma boa estratégia para começar essa ideia é perguntar qual é o maior segmento de reta que cabe dentro da sala de aula? Como o formato da própria sala de aula em geral, representa um paralelepípedo, este modelo passa a ser real e visível dentro da sala. Esperamos que os alunos reconheçam a diagonal, talvez não com esse nome, como sendo a resposta da pergunta acima.

1) Em uma folha de papel em branco construa um cubo de aresta 1 unidade.

2) Qual é o maior segmento de reta que cabe dentro desse cubo? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Deixe o seu aluno a vontade para conversar com o seu grupo sobre a resposta do ítem 2. Provavelmente, alguns alunos dirão que a diagonal da base ou dos lados é o maior segmento. É importante que eles reflitam e descubram que uma haste de madeira com o tamanho da diagonal não é suficientemente grande para completar a diagonal do cubo. Deste modo, devem concluir que a diagonal do cubo é o maior segmento de reta que cabe dentro do cubo.

3) O segmento que encontrou é maior ou menor que a diagonal da face do cubo? Qual é o valor da diagonal da face do cubo? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Com esta atividade o aluno deve perceber que a diagonal da base é a diagonal de um quadrado de lado medindo 1 unidade, e portanto mede $\sqrt{2}$. Contudo, esse não é o maior segmento que cabe dentro do cubo.

4) Qual é o valor da diagonal do cubo? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Nesse momento a sua interferência, professor, será fundamental. É provável que os alunos não consigam calcular o valor da diagonal do cubo utilizando o Teorema de Pitágoras. Depois de ter dado um tempo para que os alunos tentem e reflitam sozinhos, você deve ajuda-los a fazer essa conta. Primeiramente, medindo a diagonal de uma das faces do cubo e mostrando com canudos que esta diagonal e a aresta do cubo formam um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a diagonal do cubo. Depois deve-se fazer o desenho no quadro para se possa melhor visualizar o triângulo retângulo e, em seguida, concluir os cálculos aplicando o Teorema de Pitágoras.

O valor que esperamos que eles apresentem é $\sqrt{3}$.

5) Por definição, a raiz quadrada de 3 é o número positivo b tal que $b^2 = 3$. Você sabe dizer se o valor de b, $\sqrt{3}$, é maior ou menor que 1? Compare com 2. Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos concluam que $1 < b = \sqrt{3} < 2$.

6) Com o auxílio da calculadora encontre o valor dos quadrados dos seguintes números:

$(1,1)^2 = 1,21$	$(1,4)^2 =$	$(1,7)^2 =$
$(1,2)^2 =$	$(1,5)^2 =$	$(1,8)^2 =$
$(1,3)^2 =$	$(1,6)^2 =$	$(1,9)^2 =$

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos completem a tabela conforme abaixo:

$(1,1)^2 = 1,21$	$(1,4)^2 = 1,96$	$(1,7)^2 = 2,89$
$(1,2)^2 = 1,44$	$(1,5)^2 = 2,25$	$(1,8)^2 = 3,24$
$(1,3)^2 = 1,69$	$(1,6)^2 = 2,56$	$(1,9)^2 = 3,61$

7) Utilizando a tabela que construiu, conclua qual é a melhor aproximação, utilizando uma casa decimal, para o valor de b? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos concluam que $b \approx 1,7$. Note que o aluno pode achar que $1,8$ é uma aproximação melhor. Vale apena parar um pouco a aula e mostrar que o quadrado de $1,7$ aproxima mais a $\sqrt{3}$ do que o quadrado de $1,8$.

8) Agora, com auxílio da calculadora, verifique qual é a melhor aproximação, com duas casas decimais, para a $\sqrt{3}$? E com três casas decimais?

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos concluam que $b \cong 1,73$. E depois, $b \cong 1,732$.

9) Utilizando a calculadora mais uma vez, divida 2 por 3 e observe o número no visor da calculadora e anote em sua folha.

10) Esse número é formado por muitas casas decimais, todas iguais a 6, exceto a última que é 7. Por quê? Aparentemente, dizemos que $\frac{2}{3}$ forma uma dízima periódica. Qual é o período que observamos se repetir em $\frac{2}{3}$? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

11) Repita o mesmo que você fez em 9), calcule o valor de $\sqrt{3}$ e observe o visor da calculadora. O número gerado tem muitas casas decimais diferentes. Você consegue identificar algum período nesse número? A calculadora pode nos dar garantia sobre o período de uma dízima periódica? Experimente calcular $\frac{1}{17}$ e $\frac{1}{49}$. Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos concluam em 9) que $\frac{2}{3} = 0,666666666...$, em 10) que o período é 6, e em 11) que $\sqrt{3} = 1,7320508075688772935 2...$ é um número que a calculadora é incapaz de exibir o período. E, para os alunos, isto pode servir de motivação para a investigação se esse número tem ou não período, o que poderá conduzi-los a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{3}$.

12) Será que a representação decimal infinita da raiz quadrada de 3 é periódica?

Comentários para o Professor: Esperamos que o aluno conjecture que não é periódica, mas a exposição abaixo é necessária para que o aluno compreenda que de fato ela não é.

Exposição para o aluno:

Suponhamos que $\sqrt{3}$ seja periódica e chegaremos a um absurdo.

Então, suponhamos que $\sqrt{3}$, após n casas depois da vírgula (até o enésimo algarismo a_n), tenha um período P formado por m algarismos. Assim,

$$\sqrt{3} = 1,732...a_n PPP... = 1,732...a_n \overline{P}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3} = 1,732...a_n PPP... = \frac{1732...a_n}{10^n} + P\left(\frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} + \frac{1}{10^{n+3}} + ...\right)$$

E como o número $\frac{1732...a_n}{10^n}$ é racional, pois é uma divisão de dois inteiros positivos, o período P é um inteiro positivo e $G = \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} + \frac{1}{10^{n+3}} + ...$ é a soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo $\frac{1}{10^{n+1}}$ e razão $\frac{1}{10}$ que também sabemos ser racional; concluímos que $\sqrt{3}$ é uma soma de racionais e portanto é racional.

Então, $\sqrt{3}$ pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q números naturais, primos entre si, $MDC(p,q) = 1$. Mas observe que:

$\frac{p}{q} = \sqrt{3} \Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3.q^2$, e como p e q são primos entre si, temos que p^2 é múltiplo de 3 e portanto, p é múltiplo de 3. Assim, p pode ser escrito como $p = 3.r$ com r natural.

E segue que, $p^2 = 3.q^2 \Rightarrow (3.r)^2 = 3.q^2 \Rightarrow 9.r^2 = 3.q^2 \Rightarrow 3.r^2 = q^2$ e como p e q são primos entre si, temos que q^2 é múltiplo de 3 e portanto, q é múltiplo de 3. Ou seja, p e q são múltiplos de 3 e isto é uma contradição com a nossa suposição inicial que $MDC(p,q)=1$.

Exposição para o professor:

Nesta prova, utlilizamos a unicidade da decomposição em fatores primos.

Se a raiz de 3 for periódica, então ela pode ser escrita como:

$$\sqrt{3} = 1,\ \overbrace{a_1a_2a_3\ldots a_n}^{\text{parte não periódica}}\ \underbrace{b_1b_2b_3\ldots b_m}_{\text{parte periódica}}\ldots$$

sendo $a_i, b_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \forall i=1,\ldots,n$ e $j=1\ldots m$.

Logo,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n} + \frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+m}} + \frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+2m}} + \frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+3m}} + \cdots =$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n} + b_1b_2\ldots b_m(\underbrace{\frac{1}{10^{n+m}} + \frac{1}{10^{n+2m}} + \frac{1}{10^{n+3m}} + \cdots}_{\frac{1}{10^n \times \underbrace{999\ldots 9}_{m \text{ vezes}}}}) \in \mathbb{Q}$$

então concluiremos que $\sqrt{3}$ é racional.

Se $\sqrt{3}$ é racional então $\sqrt{3}$ pode ser representado como $\frac{p}{q}$ com p e q sendo números naturais, primos entre si e com $MDC(p,q)=1$. Mas observe que:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow p^2 \text{ é divisível por } 3$$

$$\Rightarrow p \text{ é divisível por } 3 \Rightarrow p \text{ é da forma } p = 3p_1$$

$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 = (3p_1)^2 = 9{p_1}^2 \Rightarrow q^2 = 9{p_1}^2$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ é divisível por } 3 \Rightarrow q \text{ é divisível por } 3$$

Logo, p e q são divisíveis por 3 e obviamente o $MDC(p,q) \neq 1$.

O que é uma contradição!

13) A partir disto, o que podemos concluir sobre o $\sqrt{3}$? E $\sqrt{5}$? E $\sqrt{7}$? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

14) E se fosse $\sqrt[3]{3}$? $\sqrt[3]{5}$? $\sqrt[5]{2}$? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

15) Será que isso ocorre para qualquer raiz? E a $\sqrt{4}$, $\sqrt{38}$? Você seria capaz de dizer qual raiz será racional e qual não será? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

Comentários para o Professor: Esperamos que os alunos concluam em 13) que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ não são racionais. Em 14), esperamos que ele estenda essa conclusão para outras raízes além das quadradas. E, finalmente, em 15) esperamos que ele conclua que qualquer raiz cujo valor não é um inteiro, também não é racional.

3.1.1 Ficha do Roteiro 1 para aplicar em sala de aula

1) Em uma folha de papel em branco construa um cubo de aresta 1 unidade.

2) Qual é o maior segmento de reta que cabe dentro desse cubo? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

3) O segmento que encontrou é maior ou menor que a diagonal da face do cubo? Qual é o valor dessa diagonal? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

4) Qual é o valor da diagonal do cubo? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

5) Por definição, a raiz quadrada de 3 é o número positivo b tal que $b^2 = 3$. Você sabe dizer se o valor de $b = \sqrt{3}$, é maior ou menor que 1? Compare com 2. Discuta com seus colegas e tire as suas conclusões.

6) Com o auxílio da calculadora encontre o valor dos quadrados dos seguintes números:

$(1,1)^2 = 1,21$	$(1,4)^2 =$	$(1,7)^2 =$
$(1,2)^2 =$	$(1,5)^2 =$	$(1,8)^2 =$
$(1,3)^2 =$	$(1,6)^2 =$	$(1,9)^2 =$

7) Utilizando a tabela que construiu, conclua qual é a melhor aproximação, utilizando uma casa decimal, para o valor de b? Discuta e dê sua conclusão.

8) Agora, com auxílio da calculadora, verifique qual é a melhor aproximação, com duas casas decimais, para a $\sqrt{3}$? E com três casas decimais?

9) Utilizando a calculadora mais uma vez, divida 2 por 3 e observe o número no visor da calculadora e anote em sua folha.

10) Esse número é formado por muitas casas decimais, todas iguais a 6, exceto a última que é 7. Por quê? Aparentemente, dizemos que $\frac{2}{3}$ forma uma dízima periódica. Qual é o período que observamos se repetir em $\frac{2}{3}$? Discuta com seus colegas as suas conclusões.

11) Repita o mesmo que você fez em 9), calcule o valor de $\sqrt{3}$ e observe o visor da calculadora. O número gerado tem muitas casas decimais diferentes. Você consegue identificar algum período nesse número? A calculadora pode nos dar garantia sobre o período de uma dízima periódica? Experimente calcular $\frac{1}{17}$ e $\frac{1}{49}$. Dê sua conclusão.

12) Será que a representação decimal infinita da raiz quadrada de 3 é periódica?

3.2 Roteiro 2 - Você acha que 0,99999... é igual, maior ou menor que 1?

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	50 minutos
Dificuldade:	Difícil
Série Recomendada:	9o Ano do Ensino Fundamental
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Conhecer melhor a representação decimal de dízimas periódicas.
Pre-requisitos:	Conhecimento do conjunto dos números racionais e sequências numéricas.
Material necessário:	Folha com os exercícios e calculadora.
Distribuição da classe:	Turma organizada em grupos de três alunos, propiciando trabalho e colaborativo.

Nesse roteiro exploramos com o aluno a dízima periódica especial, $0,999...$, relacionando-a com uma sequência de racionais, com a soma de seus termos e concluímos que esta dupla representação decimal.

Comentários para o Professor: Esperamos que o aluno manipule dízimas periódicas com período 9, e a partir de casos mais simples de decimais com representação finita, o aluno tenha condições para, no caso infinito, concluir que estas dízimas sempre possuem dupla representação decimal.

Exercícios

1.1) Escreva os 6 primeiros termos da sequência $0,9$; $0,99$; $0,999$; $0,9999$;

$0,99999$; $0,999999$;... como uma sequência de frações.

1.2) Calcule as somas abaixo como número decimal e como fração:

a) $0,9 + 0,09 =$

b) $0,9 + 0,09 + 0,009 =$

c) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 =$

d) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 =$

e) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + 0,000009 =$

1.3) Como seria a representação decimal da fração $\dfrac{\overbrace{999...9}^{\text{1000 algarismos 9}}}{\underbrace{1000...0}_{\text{1000 algarismos 0}}}$?

2.1) Multiplique a dízima $0,333...$ (escrita na representação decimal) por 3 e escreva o resultado. Faça passo a passo:

$(0,3).3 =$

$(0,33).3 =$

$(0,333).3 =$

....

$(0,333...).3 =$

2.2) Escreva a dízima $0,333...$ na forma de fração. Multiplique por 3. Dê o resultado.

2.3) Compare os resultados obtidos nos ítens 2.1) e 2.2). São iguais?

É correto afirmar que a dízima $0,999...$ é igual ao produto $3.0,333...$?

3.1) Calcule as subtrações abaixo:

$1 - 0,9 =$

$1 - 0,99 =$

$1 - 0,999 =$

$1 - 0,9999 =$

$1 - 0,99999 =$

$1 - 0,999999 =$

$\ldots$

$1 - 0,\underbrace{999...999}_{\text{100 vezes}} =$

Então, qual lhe parece a melhor aproximação para $1 - 0,999999...$ decimal infinito?

3.2) Supondo que $0,999... < 1$, escreva um número estritamente entre $0,999...$ e 1.

Comentários para o Professor:

Este roteiro 2 que acabamos de ver, foi aplicado em uma turma de primeiro ano do ensino médio do Colégio estadual Lélia Gonzales do bairro de Ramos (zona norte da cidade do Rio de Janeiro) no ano de 2013. As principais respostas obtidas dos alunos estão descritas a seguir.

3.3 Roteiro 2 - Você acha que 0,99999... é igual, maior ou menor que 1?

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	50 minutos
Dificuldade:	Difícil
Série Recomendada:	9o Ano do Ensino Fundamental
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Conhecer melhor a representação decimal de dízimas periódicas.
Pre-requisitos:	Conhecimento do conjunto dos números racionais e sequências numéricas.
Material necessário:	Folha com os exercícios e calculadora.
Distribuição da classe:	Turma organizada em grupos de três alunos, propiciando trabalho e colaborativo.

Exercícios

1.1) Escreva os 6 primeiros termos da sequência $0,9$; $0,99$; $0,999$; $0,9999$; $0,99999$; $0,999999$;... como uma sequência de frações.

Respostas dos alunos:

$\frac{10}{9}$; $\frac{100}{99}$; $\frac{1000}{999}$; $\frac{10000}{9999}$; $\frac{100000}{99999}$; $\frac{1000000}{999999}$.
$\frac{1}{9}$; $\frac{1}{99}$; $\frac{1}{999}$; $\frac{1}{9999}$; $\frac{1}{99999}$; $\frac{1}{999999}$.
$\frac{9}{10}$; $\frac{99}{100}$; $\frac{999}{1000}$; $\frac{9999}{10000}$; $\frac{99999}{100000}$; $\frac{999999}{1000000}$.

1.2) Calcule as somas abaixo como número decimal e como fração:

a) $0,9 + 0,09$ (Respostas dos alunos)= $9,9; 0,99; 0,18$.

b) $0,9 + 0,09 + 0,009$ (Respostas dos alunos)= $9,99; 0,27; 0,999$.

c) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009$
(Respostas dos alunos)= $9,999; 0,36; 0,9999$.

d) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009$
(Respostas dos alunos)= $9,9999; 0,45; 0,99999$.

e) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + 0,000009$
(Respostas dos alunos)= $9,99999; 0,54; 0,999999$.

1.3) Como seria a representação decimal da fração $\dfrac{\overbrace{999...9}^{\text{1000 algarismos 9}}}{\underbrace{1000...0}_{\text{1000 algarismos 0}}}$?

Respostas dos alunos = $9,999...9$(1000 algarismos 9); $0,999...$; $0,999...9$(1000 algarismos 9).

2.1) Multiplique a dízima $0,333...$ (escrita na representação decimal) por 3 e escreva o resultado. Faça passo a passo:

$(0,3).3$ (Respostas dos alunos) $= 3,3; 0,6; 0,9$.

$(0,33).3$ (Respostas dos alunos) $= 0,333; 3,33; 3,3; 0,99$.

$(0,333).3$ (Respostas dos alunos) $= 0,3333; 3,33; 3,3; 0,933; 0,999$.

....

$(0,333...).3$ (Respostas dos alunos) $= 3,333...; 0,333...; 0,9333...; 0,999; 0,999....$

2.2) Escreva a dízima $0,333...$ na forma de fração. Multiplique por 3. Dê o resultado.

Respostas dos alunos $= 0,333... = \frac{3}{10}; \frac{1}{6}; \frac{10}{6}; \frac{3}{9}; \frac{1}{3}$.

2.3) Compare os resultados obtidos nos ítens 2.1) e 2.2). São iguais?

Respostas dos alunos: Sim; não; talvez.

É correto afirmar que a dízima $0,999...$ é igual ao produto $3.0,333...$?

Respostas dos alunos: Sim; não; talvez.

3.1) Calcule as subtrações abaixo:

$1 - 0,9$ (Respostas dos alunos) $= 0,09; 1,9; 0,9; 0,10; 0,1.$

$1 - 0,99$ (Respostas dos alunos) $= 0,009; 1,0; 0,99; 0,1; 0,11; 0,01.$

$1 - 0,999$ (Respostas dos alunos) $= 0,999; 1,0; 0,1; 0,11; 0,111; 0,001.$

$1 - 0,9999$ (Respostas dos alunos) $= 0,999; 1,0; 0,1; 0,1111; 0,0001.$

$1 - 0,99999$ (Respostas dos alunos) $= 0,9999; 1,0; 0,1; 0,11111; 0,00001.$

$\dots$

$1 - 0,\underbrace{999...999}_{100 \text{ vezes}} =$

(Respostas dos alunos) $= 1,0; 0,111...1; 0,0000001; 0,000...1; 0,999...9$ com 100 algarismos 9.

Então, qual lhe parece a melhor aproximação para $1 - 0,999999...$ decimal infinito?

(Respostas dos alunos) $= 0,999999; 1,0; 0,111111...; 0,111111$; zero.

3.2) Supondo que $0,999... < 1$, escreva um número estritamente entre $0,999...$ e 1.

(Respostas dos alunos) $= 0,999999; 0,111; 0,111111...; 0,999...$; zero; não existe tal número.

3.3.1 Ficha do Roteiro 2 para aplicar em sala de aula

1.1) Escreva os 6 primeiros termos da sequência $0,9$; $0,99$; $0,999$; $0,9999$; $0,99999$; $0,999999$;... como uma sequência de frações.

1.2) Calcule as somas abaixo como número decimal e como fração:

a) $0,9 + 0,09 =$

b) $0,9 + 0,09 + 0,009 =$

c) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 =$

d) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 =$

e) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + 0,000009 =$

1.3) Como seria a representação decimal da fração $\dfrac{\overbrace{999...9}^{\text{1000 algarismos 9}}}{\underbrace{1000...0}_{\text{1000 algarismos 0}}}$?

2.1) Multiplique a dízima $0,333...$ (escrita na representação decimal) por 3 e escreva o resultado. Faça passo a passo:

$(0,3).3 =$

$(0,33).3 =$

$(0,333).3 =$

$(0,333...).3 =$

2.2) Escreva a dízima $0,333...$ como fração. Multiplique por 3 e dê o resultado.

2.3) Compare os resultados obtidos nos ítens 2.1) e 2.2). São iguais?

É correto afirmar que a dízima $0,999...$ é igual ao produto $3.0,333...$?

3.1) Calcule as subtrações abaixo:

$1 - 0,9 =$

$1 - 0,99 =$

$1 - 0,999 =$

$1 - 0,9999 =$

$1 - 0,99999 =$

$1 - 0,999999 =$

$1 - 0,\underbrace{999...999}_{\text{100 vezes}} =$

Então, qual lhe parece a melhor aproximação para $1 - 0,999...$(decimal infinito)?

3.2) Supondo $0,999... < 1$, escreva um número estritamente entre $0,999...$ e 1.

3.4 Roteiro 3 - A enumerabilidade dos números racionais

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	50 minutos
Dificuldade:	Média
Série Recomendada:	1a Série do Ensino Médio
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Construir na mente do aluno um método para contagem de um conjunto infinito e denso.
Pre-requisitos:	Bom conhecimento dos números racionais, bem como da sua representação e localização.
Material necessário:	Folha com os exercícios e calculadora.
Distribuição da classe:	Turma organizada em duplas, propiciando trabalho colaborativo.

Nesse roteiro exploramos com o aluno a representação decimal dos números racionais, sua transformação em fração e vice-versa, bem como suas propriedades operacionais.

Primeiramente, vamos entender o que é um conjunto contável (enumerável).

Dizemos que um conjunto X é *enumerável* se é possível escolhermos um elemento deste conjunto X para enumerarmos como o primeiro, a_1,e em seguida é possível escolhermos um outro elemento deste conjunto X para enumerarmos como o segundo, a_2, e em seguida é possível escolhermos um outro elemento deste conjunto X para enumerarmos como o terceiro, a_3, e assim, sucessivamente, conseguimos construir uma lista (sequência) de elementos de X,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

de forma que todos os elementos do conjunto X pertençam a esta lista, ou seja,

$$X \subset \{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}.$$

Nesse roteiro exploramos com o aluno métodos para contagens de conjuntos infinitos e até de conjuntos densos enumeráveis.

Antes de começar esta atividade vamos ver com a turma o vídeo a seguir que se chama “O Hotel de Hilbert”. Este vídeo tem o nome de um famoso paradoxo (declaração aparentemente verdadeira que contradiz a intuição comum) da matemática e nos convida a fazer uma reflexão sobre os infinitos. O vídeo pode ser encontrado no link abaixo:

$$http://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DVU$$

1) Observe a sequência as frações positivas com numerador igual ao número 1:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} ... .$$

Chamaremos o primeiro elemento desta sequência de $a_1 = \frac{1}{1}$.

Chamaremos o segundo elemento desta sequência de $a_2 = \frac{1}{2}$.

Chamaremos o terceiro elemento desta sequência de $a_3 = \frac{1}{3}$.

Chamaremos o quarto elemento desta sequência de $a_4 = \frac{1}{4}$.

1.1) Escreva os seis próximos termos $(a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ desta sequência.

$a_5 =$ $a_6 =$ $a_7 =$

$a_8 =$ $a_9 =$ $a_{10} =$

1.2) Após observar os 10 primeiros termos desta sequência, obtenha os termos a seguir, sem calcular os anteriores:

$a_{25} =$ $a_{99} =$ $a_{1000} =$ $a_n =$

1.3) O conjunto das frações positivas com numerador igual a 1, é enumerável? Justifique a sua resposta.

2.1)

a) Em uma linha, descreva o conjunto das frações positivas com numerador igual a 1; em outra linha, descreva o conjunto das frações positivas com numerador igual a 2; em outra linha, descreva o conjunto das frações positivas com numerador igual a 3; em outra linha, descreva o conjunto das frações positivas com numerador igual a 4; e assim, sucessivamente.

b) É possível ir contando os elementos pulando de linha em linha, de modo a não se esquecer de nenhum? O conjunto de todas as frações positivas é enumerável?

2.2) Observe com atenção a sequência abaixo:

$b_1 = \frac{1}{1}$,

$b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{2}{1}$,

$b_4 = \frac{1}{3}$, $b_5 = \frac{2}{2}$, $b_6 = \frac{3}{1}$,

$b_7 = \frac{1}{4}$, $b_8 = \frac{2}{3}$, $b_9 = \frac{3}{2}$, $b_{10} = \frac{4}{1}$,

$b_{11} = \frac{1}{5}$, $b_{12} = \frac{2}{4}$, $b_{13} = \frac{3}{3}$, $b_{14} = \frac{4}{2}$, $b_{15} = \frac{5}{1}$,

$\ldots$

O conjunto de todas as frações positivas é enumerável?

3) Se conseguimos enumerar as frações positivas, então podemos escrevê-las numa linha, numa linha infinita. Do mesmo modo, conseguimos escrever todas as frações negativas, numa segunda linha, infinita. Se temos dois conjuntos enumeráveis, pelo exercício 2) conseguimos enumerar esses dois conjuntos. Conclua, portanto, que o conjunto das frações é enumerável.

Comentários para o Professor: Esperamos que o aluno consiga separar o que é finito "muito grande" do que é infinito. Esperamos também do aluno o entendimento de que, além do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, existem conjuntos que apesar de infinitos, podem ser "listados". E são chamados conjuntos enumeráveis.

3.4.1 Ficha do Roteiro 3 para aplicar em sala de aula

1) Observe a sequência as frações positivas com numerador igual ao número 1:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots .$$

Chamaremos o primeiro elemento desta sequência de $a_1 = \frac{1}{1}$, o segundo elemento de $a_2 = \frac{1}{2}$, o terceiro de $a_3 = \frac{1}{3}$ e o quarto de $a_4 = \frac{1}{4}$.

1.1) Escreva os quatro próximos termos (a_5, a_6, a_7, a_8) desta sequência.

$a_5 =$ $a_6 =$ $a_7 =$ $a_8 =$

1.2) Após observar os oito primeiros termos desta sequência, obtenha os termos a seguir, sem calcular os anteriores:

$a_{12} =$ $a_{25} =$ $a_{99} =$ $a_n =$

1.3) O conjunto das frações positivas com numerador igual a 1, é enumerável? Justifique a sua resposta.

2.1)

a) Em uma linha, descreva as frações positivas com numerador igual a 1; em outra linha, descreva as frações positivas com numerador igual a 2; em outra, descreva as frações com numerador igual a 3; e assim, sucessivamente.

b) É possível ir contando os elementos pulando de linha em linha, de modo a não se esquecer de nenhum? O conjunto de todas as frações positivas é enumerável?

2.2) Observe com atenção a sequência abaixo:

$b_1 = \frac{1}{1}$,

$b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{2}{1}$,

$b_4 = \frac{1}{3}$, $b_5 = \frac{2}{2}$, $b_6 = \frac{3}{1}$,

$b_7 = \frac{1}{4}$, $b_8 = \frac{2}{3}$, $b_9 = \frac{3}{2}$, $b_{10} = \frac{4}{1}$,

$b_{11} = \frac{1}{5}$, $b_{12} = \frac{2}{4}$, $b_{13} = \frac{3}{3}$, $b_{14} = \frac{4}{2}$, $b_{15} = \frac{5}{1}$,

...

O conjunto de todas as frações positivas é enumerável?

3) Se conseguimos enumerar as frações positivas, então podemos escrevê-las numa linha, numa linha infinita. Do mesmo modo, conseguimos escrever todas as frações negativas, numa segunda linha, infinita. Se temos dois conjuntos enumeráveis, pelo exercício 2) conseguimos enumerar esses dois conjuntos. Conclua, portanto, que o conjunto das frações é enumerável.

3.5 Roteiro 4 - Os números racionais estão espalhados por toda parte ou os racionais são densos na reta real

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	100 minutos
Dificuldade:	Difícil
Série Recomendada:	9o Ano do Ensino Fundamental
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Fazer o aluno perceber que além de infinito, os números racionais estão espalhados por toda reta de modo que qualquer "pedacinho" desta reta contenha infinitos destes números.
Pre-requisitos:	Conhecer bem a construção do conjunto dos números racionais e a representação dos racionais como número decimal.
Material necessário:	Folha com os exercícios.
Distribuição da classe:	Turma organizada em grupos de quatro alunos, propiciando trabalho colaborativo.

Sem perda de generalidade, apenas para fixar ideias, vamos trabalhar nesta atividade com o intervalo fechado $[0,1]$ da reta.

1) Observe que escolhidas duas frações quaisquer em $[0,1]$, por exemplo, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{10}$, imediatamente, podemos obter um número racional entre estes dois, a partir da média aritmética dos mesmos:

$$\frac{\frac{5}{7}+\frac{3}{10}}{2}=\frac{\frac{50}{70}+\frac{21}{70}}{2}=\frac{\frac{71}{70}}{2}=\frac{71}{140} \text{ e } \frac{3}{10}<\frac{71}{140}<\frac{5}{7}$$

Agora, escolha duas frações da forma $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, que estejam no intervalo $[0,1]$.

Frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c, d, inteiros positivos, sendo $a < b, c < d$ e, sem perda de generalidade, suponhamos, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encontre a fração $\frac{p}{q}$, que é a média aritmética entre estas duas, ou seja, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

Lembrando que fração e número racional com representação decimal finita são o mesmo objeto matemático representado de formas diferentes, responda os itens 1.1) e 1.2) que são casos particulares do exercício 1).

1.1) Veja que escolhendo dois números racionais com representação decimal finita em $[0,1]$, por exemplo, $0,0812$ e $0,349$ imediatamente, podemos obter um número racional entre estes dois, a partir da média aritmética dos mesmos:

$$\frac{0,0812 + 0,349}{2} = \frac{0,4302}{2} = 0,2151 \text{ e } 0,0812 < 0,2151 < 0,349$$

Agora, escolha dois números números racionais com representação decimal finita, que estejam no intervalo $[0,1]$ e, a partir da média aritmética, encontre um decimal entre esses dois.

1.2) Assim, escolhendo dois números racionais com representação decimal infinita e periódica em $[0,1]$, por exemplo, $0,7444...$ e $0,0969696...$ Utilizando a média aritmética, podemos obter um decimal, número racional, entre eles. Porém, é melhor transformar esses números racionais decimais periódicos em números racionais fracionários (pois fazemos as operações fundamentais da aritmética com os números nesta forma):

$$0,7444... = \frac{74-7}{90} = \frac{67}{90} \text{ e } 0,0969696... = \frac{96}{990}$$

Então, a média aritmética entre esses números é dada por:

$$\frac{\frac{67}{90} + \frac{96}{990}}{2} = \frac{67.11 + 96}{990.2} = \frac{833}{1980} \text{ e } 0,0969696... < \frac{833}{1980} < 0,7444...$$

Agora, escolha dois racionais d_1 e d_2 de representação infinita e periódica (dois números racionais) e calcule um número d_3 que está entre esses dois, $d_1 < d_3 < d_2$. Utilizando este número que está no meio, calcule outros dois números decimais de representação infinita e periódica, d_4 e d_5, contidos entre os números dados, $d_1 < d_4 < d_3 < d_5 < d_2$.

2) Finalmente, se escolhermos 2 números decimais de representação infinita e não-periódica em $[0, 1]$, como por exemplo, $0,5320864...$ e $0,5320764...$, podemos encontrar um número racional entre esses dois. Basta compararmos casa a casa decimal entre esses dois números, para com isso, assim que acharmos uma diferença entre as casas decimais, podermos escolher o número procurado.

$$\begin{array}{c} 0,5\,3\,2\,0\,8\,6\,4\,... \\ 0,5\,3\,2\,0\,7\,6\,4\,... \end{array}$$

encontramos a diferença na quinta casa decimal, e formamos um dos possíveis números a partir daí,

$$0,53207777...$$

$$0,5320764... < 0,53207777... < 0,5320864...$$

3) Considere o intervalo $(0, 1)$.

a) Escolha três números deste intervalo: um de representação decimal finita, outro de representação decimal infinita e periódica e outro de representação decimal infinita e não periódica, todos com pelo menos 10 casas decimais. Por exemplo, $0,8244176503$, $0,3572461190...$ ou $0,1604738555...$.

b) Coloque os números escolhidos por você no ítem a) em ordem crescente, $x < y < z$, sendo x o menor dos números e z o maior dos números. Escreva agora um número, w, que esteja entre x e y, ou seja, $x < w < y$; e outro número e k que esteja entre y e z, ou seja, $y < k < z$.

c) Refletindo sobre os ítens a) e b), seria possível continuar o mesmo processo de ir obtendo novos números entre todos os outros números já obtidos? Os números obtidos são racionais ou irracionais?

c1) Se a resposta for não, explique com suas palavras o porquê?

c2) Se a resposta for sim, quem conclusão você pode tirar sobre os números reais a partir disso?

d) Escolha dois números decimais infinitos e não-periódicos, de preferência bem próximos, e depois, encontre um número racional entre esses dois números. Discuta esse exercício com seus colegas de grupo e se convença que sempre há um racional entre quaisquer dois reais.

Comentários para o Professor: Esperamos que o aluno consiga perceber que os racionais estão entre quaisquer números, ainda que estes estejam muito próximos. Em outras palavras, queremos que o aluno entenda que entre dois reais há infinitos racionais.

3.5.1 Ficha do Roteiro 4 para aplicar em sala de aula

1) Observe que escolhidas duas frações quaisquer em $[0, 1]$, por exemplo, $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{10}$, imediatamente, podemos obter um número racional entre estes dois, a partir da média aritmética dos mesmos:

$$\frac{\frac{5}{7}+\frac{3}{10}}{2}=\frac{\frac{50}{70}+\frac{21}{70}}{2}=\frac{\frac{71}{70}}{2}=\frac{71}{140} \text{ e } \frac{3}{10}<\frac{71}{140}<\frac{5}{7}$$

Agora, escolha duas frações da forma $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, que estejam no intervalo $[0, 1]$.

Frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com a, b, c, d, inteiros positivos, sendo $a < b, c < d$ e, sem perda de generalidade, suponhamos, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Encontre a fração $\frac{p}{q}$, que é a média aritmética entre estas duas, ou seja, $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

1.1) Veja que escolhendo dois números racionais com representação decimal finita em $[0, 1]$, por exemplo, $0,0812$ e $0,349$ imediatamente, podemos obter um número racional entre estes dois, a partir da média aritmética dos mesmos:

$$\frac{0,0812+0,349}{2}=\frac{0,4302}{2}=0,2151 \text{ e } 0,0812<0,2151<0,349$$

Agora, escolha dois números números racionais com representação decimal finita, que estejam no intervalo $[0, 1]$ e, a partir da média aritmética, encontre um decimal entre esses dois.

1.2) Assim, escolhendo dois números racionais com representação decimal infinita e periódica em $[0, 1]$, por exemplo, $0,7444...$ e $0,0969696...$ Utilizando a média aritmética, podemos obter um número decimal racional entre eles. Porém, é melhor transformar esses números racionais decimais periódicos em racionais fracionários (pois operamos melhor com os números nesta forma):

$$0,7444...=\frac{74-7}{90}=\frac{67}{90} \text{ e } 0,0969696...=\frac{96}{990}$$

Então, a média aritmética entre esses números é dada por:

$$\frac{\frac{67}{90}+\frac{96}{990}}{2}=\frac{67.11+96}{990.2}=\frac{833}{1980} \text{ e } 0,0969696...<\frac{833}{1980}<0,7444...$$

Agora, escolha dois racionais d_1 e d_2 de representação infinita e periódica (dois números racionais) e calcule um número d_3 que está entre esses dois, $d_1 < d_3 < d_2$. Utilizando este número que está no meio, calcule outros dois números decimais de representação infinita e periódica, d_4 e d_5, contidos entre os números dados, $d_1 < d_4 < d_3 < d_5 < d_2$.

2) Finalmente, se escolhermos 2 números decimais de representação infinita e não-periódica em $[0, 1]$, como por exemplo, $0,5320864...$ e $0,5320764...$, podemos encontrar um número racional entre esses dois. Basta compararmos casa a casa decimal entre esses dois números, para com isso, assim que acharmos uma diferença entre as casas decimais, podermos escolher o número procurado.

$$0,5\,3\,2\,0\,8\,6\,4\,...$$
$$0,5\,3\,2\,0\,7\,6\,4\,...$$

encontramos a diferença na quinta casa decimal, e formamos um dos possíveis números a partir daí, por exemplo, $0,53207777...$, e então:

$$0,5320764... < 0,53207777... < 0,5320864...$$

3) Considere o intervalo $(0, 1)$.

a) Escolha três números deste intervalo: um de representação decimal finita, outro de representação decimal infinita e periódica e outro de representação decimal infinita e não periódica, todos com pelo menos 10 casas decimais. Por exemplo, $0,8244176503$, $0,3572461190...$ ou $0,1604738555....$

b) Coloque os números escolhidos por você no ítem a) em ordem crescente, $x < y < z$, sendo x o menor dos números e z o maior dos números.

Escreva agora um número, w, que esteja entre x e y, ou seja, $x < w < y$; e outro número e k que esteja entre y e z, ou seja, $y < k < z$.

c) Refletindo sobre os ítens a) e b), seria possível continuar o mesmo processo de ir obtendo novos números entre todos os outros números já obtidos? Os números obtidos são racionais ou irracionais?

c1) Se a resposta for não, explique com suas palavras o porquê?

c2) Se a resposta for sim, quem conclusão você pode tirar sobre os números reais a partir disso?

d) Escolha dois números decimais infinitos e não-periódicos, de preferência bem próximos, e depois, encontre um número racional entre esses dois números. Discuta esse exercício com seus colegas de grupo e se convença que sempre há um racional entre quaisquer dois reais.

3.6 Roteiro 5 - Não podemos listar os números reais

Ficha Técnica	
Duração Prevista:	100 minutos
Dificuldade:	Difícil
Série Recomendada:	3o Ano do Ensino Médio
Tema:	Números Reais
Objetivos:	Fazer o aluno perceber que além de infinito, os números reais estão espalhados em toda reta, de modo que qualquer “pedacinho” desta, contenha infinitos números reai. E, também, compreender que a natureza deste infinito é diferente e “maior”que o infinito dos números racionais.
Pre-requisitos:	Conhecer bem a construção do conjunto dos números racionais e a definição de número irracional.
Material necessário:	Folha com os exercícios.
Distribuição da classe:	Turma organizada em grupos de quatro alunos, propiciando trabalho colaborativo.

Nesse roteiro, discutimos com os alunos se existem conjuntos “maiores” que os racionais (que são enumeráveis e densos!). E, em caso afirmativo, perguntamos se existe um método de enumerabilidade para seus elementos.Com isso, buscamos compreender mais um pouco da natureza dos reais e, em particular, dos irracionais.

Antes de começar esta atividade seria interessante ver o vídeo a seguir que se chama “Os infinitos de Cantor” :

$$http://www.youtube.com/watch?v=obhRCJj6m9o$$

Usaremos o mesmo argumento de diagonalização usado por Cantor para demonstrar que o conjunto do números reais é não-enumerável; porém, o argumento da diagonalização de Cantor, inicialmente, supõe ser possível contar os reais. Então, esta atividade estará diluída em inúmeros exercícios para que os alunos, paulatinamente, percebam o absurdo desta hipótese.

Para simplificar a prova, vamos tomar apenas os números reais do intervalo $(0,1)$. Primeiramente, vamos supor que é possível contar infinitamente todos os números reais do intervalo $(0,1)$ e chegaremos a um absurdo. Assim, o primeiro número desta contagem chamaremos de a_1, o segundo número chamaremos de a_2, o terceiro número chamaremos de a_3, o quarto de a_4, o quinto de a_5 etc. Só para exemplificar, vamos inventar 10 números decimais entre 0 e 1 de representação infinita, em que exibiremos apenas as 10 primeiras casas decimais:

$a_1 = 0,\mathbf{8}317240569...$

$a_2 = 0,5\mathbf{3}00197246...$

$a_3 = 0,06\mathbf{7}4389215...$

$a_4 = 0,197\mathbf{2}563204...$

$a_5 = 0,3841\mathbf{0}26597...$

$a_6 = 0,51091\mathbf{4}0835...$

$a_7 = 0,413207\mathbf{5}956...$

$a_8 = 0,9937838\mathbf{1}45...$

$a_9 = 0,08514972\mathbf{9}3...$

$a_{10} = 0,762302638\mathbf{6}...$

Repare que está destacado em negrito:

o primeiro algarismo depois da vírgula do primeiro número, **8**,

o segundo algarismo depois da vírgula do segundo número, **3**,

o terceiro algarismo depois da vírgula do terceiro número, **7**,

o quarto algarismo depois da vírgula do quarto número, **2**,

o quinto algarismo depois da vírgula do quinto número, **0**,

o sexto algarismo depois da vírgula do sexto número, **4**,

o sétimo algarismo depois da vírgula do sétimo número, **5**,

o oitavo algarismo depois da vírgula do oitavo número, **1**,

o nono algarismo depois da vírgula do nono número, **9**,

o décimo algarismo depois da vírgula do décimo número, **6**.

1) Escolha um número decimal entre 0 e 1 tal que depois da vírgula,
o primeiro algarismo seja diferente do **8**, que é o primeiro algarismo do a_1,
o segundo algarismo seja diferente do **3**, que é o segundo algarismo do a_2,
o terceiro algarismo seja diferente do **7**, que é o terceiro algarismo do a_3,
o quarto algarismo seja diferente do **2**, que é o quarto algarismo do a_4,
o quinto algarismo seja diferente do **0**, que é o quinto algarismo do a_5,
o sexto algarismo seja diferente do **4**, que é o sexto algarismo do a_6,
o sétimo algarismo seja diferente do **5**, que é o sétimo algarismo do a_7,
o oitavo algarismo seja diferente do **1**, que é o oitavo algarismo do a_8,
o nono algarismo seja diferente do **9**, que é o nono algarismo do a_9,
o décimo algarismo seja diferente do **6**, que é o décimo algarismo do a_{10}.

2) Escolha mais três outros números decimais entre 0 e 1, cumprindo todas as exigências do exercício 1).

3) Todos esses quatro números decimais são diferentes de qualquer um dos dez números da sequência do exemplificada $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$? Explique com suas palavras porque.

4) Agora suponha que conseguimos obter uma sequência infinita $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, ...)$ de números decimais entre 0 e 1 que contam infinitamente todos os reais desse intervalo. Então, por exemplo, escreveremos os primeiros termos desta sequência:

$b_1 = 0,\mathbf{2}602758395185139296 7405...$

$b_2 = 0,0\mathbf{7}83679567093289678 5393...$

$b_3 = 0,93\mathbf{4}1647698475948604 2551...$

$b_4 = 0,402\mathbf{8}472413463465948 3048...$

$b_5 = 0,1039\mathbf{5}48423829104906 9031...$

$b_6 = 0,85021\mathbf{0}9501048295937 5986...$

$b_7 = 0,763143\mathbf{6}690485694727 4110...$

$b_8 = 0,2374858\mathbf{9}29194737685 4848...$

$b_9 = 0,38593034\mathbf{1}1021028423 9195...$

E simbolizaremos

b_1', o primeiro algarismo após a vírgula do número b_1, ou seja, $b_1' = \mathbf{2}$,

b_2', o segundo algarismo após a vírgula do número b_2, ou seja, $b_2' = \mathbf{7}$,

b_3', o terceiro algarismo após a vírgula do número b_3, ou seja, $b_3' = \mathbf{4}$,

b_4', o quarto algarismo após a vírgula do número b_4, ou seja, $b_4' = \mathbf{8}$,

b_5', o quinto algarismo após a vírgula do número b_5, ou seja, $b_5' = \mathbf{5}$,

b_6', o sexto algarismo após a vírgula do número b_6, ou seja, $b_6' = \mathbf{0}$,

b_7', o sétimo algarismo após a vírgula do número b_7, ou seja, $b_7' = \mathbf{6}$,

b_8', o oitavo algarismo após a vírgula do número b_8, ou seja, $b_8' = \mathbf{9}$,

b_9', o nono algarismo após a vírgula do número b_9, ou seja, $b_9' = \mathbf{1}$,

e assim, b_n' é o enésimo algarismo após a vírgula do decimal b_n.

Vamos escolher o número $X = 0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9...$, sendo

$x_1 \neq b_1' = \mathbf{2}$ e portanto $X \neq b_1$,

$x_2 \neq b_2' = \mathbf{7}$ e portanto $X \neq b_2$,

$x_3 \neq b_3' = \mathbf{4}$ e portanto $X \neq b_3$,

$x_4 \neq b_4' = \mathbf{8}$ e portanto $X \neq b_4$,

$x_5 \neq b_5' = \mathbf{5}$ e portanto $X \neq b_5$,

$x_6 \neq b_6' = \mathbf{0}$ e portanto $X \neq b_6$,

$x_7 \neq b_7' = \mathbf{6}$ e portanto $X \neq b_7$,

$x_8 \neq b_8' = \mathbf{9}$ e portanto $X \neq b_8$,

$x_9 \neq b_9' = \mathbf{1}$ e portanto $X \neq b_9$,

....

$x_{1000} \neq b_{1000}'$ e portanto $X \neq b_{1000}$ assim,

$x_n \neq b_n'$ e portanto $X \neq b_n$ para todo $n \in N$.

Pergunta: O número decimal $X = 0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9...$, construído da forma descrita acima, pertence ao conjunto de TODAS as sequências decimais entre 0 e 1, ou seja, $X \in \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, ...\}$? Há algum absurdo nesta resposta? Explique com suas palavras o que está acontecendo.

3.6.1 Ficha do Roteiro 5 para aplicar em sala de aula

Usaremos o mesmo argumento de diagonalização usado por Cantor para demonstrar que o conjunto do números reais $\mathbb{R}$ é não-enumerável; porém, o argumento da diagonalização de Cantor, inicialmente, supõe ser possível contar os reais. Para simplificar a prova, vamos tomar apenas os números reais do intervalo $(0, 1)$. Primeiramente, vamos supor que é possível contar infinitamente todos os números reais do intervalo $(0, 1)$ e chegaremos a um absurdo.

1) Escolha um número decimal entre 0 e 1 tal que depois da vírgula,
o primeiro algarismo seja diferente do **8**, que é o primeiro algarismo do a_1,
o segundo algarismo seja diferente do **3**, que é o segundo algarismo do a_2,
o terceiro algarismo seja diferente do **7**, que é o terceiro algarismo do a_3,
o quarto algarismo seja diferente do **2**, que é o quarto algarismo do a_4,
o quinto algarismo seja diferente do **0**, que é o quinto algarismo do a_5,
o sexto algarismo seja diferente do **4**, que é o sexto algarismo do a_6,
o sétimo algarismo seja diferente do **5**, que é o sétimo algarismo do a_7,
o oitavo algarismo seja diferente do **1**, que é o oitavo algarismo do a_8,
o nono algarismo seja diferente do **9**, que é o nono algarismo do a_9,
o décimo algarismo seja diferente do **6**, que é o décimo algarismo do a_{10}.

2) Escolha mais três outros números decimais entre 0 e 1, cumprindo todas as exigências do exercício 1).

3) Todos esses quatro números decimais são diferentes de qualquer um dos dez números da sequência do exemplificada $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$? Explique com suas palavras porque.

4) Agora suponha que conseguimos obter uma sequência infinita $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, ...)$ de números decimais entre 0 e 1 que contam infinitamente todos os reais desse intervalo. Então, por exemplo, escreveremos os primeiros termos desta sequência:

$b_1 = 0,\mathbf{2}6027583951851392967405...$

$b_2 = 0,0\mathbf{7}836795670932896785393...$

$b_3 = 0,93\mathbf{4}164769847594860425 51...$

$b_4 = 0,402\mathbf{8}4724134634659483048...$

$b_5 = 0,1039\mathbf{5}484238291049069031...$

$b_6 = 0,85021\mathbf{0}95010482959375986...$

$b_7 = 0,763143\mathbf{6}6904856947274110...$

$b_8 = 0,2374858\mathbf{9}291947376854848...$

$b_9 = 0,38593034\mathbf{1}10210284239195...$

E simbolizaremos

b'_1, o primeiro algarismo após a vírgula do número b_1, ou seja, $b'_1 = \mathbf{2}$,

b'_2, o segundo algarismo após a vírgula do número b_2, ou seja, $b'_2 = \mathbf{7}$,

b'_3, o terceiro algarismo após a vírgula do número b_3, ou seja, $b'_3 = \mathbf{4}$,

b'_4, o quarto algarismo após a vírgula do número b_4, ou seja, $b'_4 = \mathbf{8}$,

b'_5, o quinto algarismo após a vírgula do número b_5, ou seja, $b'_5 = \mathbf{5}$,

b'_6, o sexto algarismo após a vírgula do número b_6, ou seja, $b'_6 = \mathbf{0}$,

b'_7, o sétimo algarismo após a vírgula do número b_7, ou seja, $b'_7 = \mathbf{6}$,

b'_8, o oitavo algarismo após a vírgula do número b_8, ou seja, $b'_8 = \mathbf{9}$,

b'_9, o nono algarismo após a vírgula do número b_9, ou seja, $b'_9 = \mathbf{1}$,

e assim, b'_n é o enésimo algarismo após a vírgula do decimal b_n.

Vamos escolher o número $X = 0,x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9...$, sendo

$x_1 \neq b'_1 = \mathbf{2}$ e portanto $X \neq b_1$,

$x_2 \neq b'_2 = \mathbf{7}$ e portanto $X \neq b_2$,

$x_3 \neq b'_3 = \mathbf{4}$ e portanto $X \neq b_3$,

$x_4 \neq b'_4 = \mathbf{8}$ e portanto $X \neq b_4$,

$x_5 \neq b'_5 = \mathbf{5}$ e portanto $X \neq b_5$,

$x_6 \neq b'_6 = \mathbf{0}$ e portanto $X \neq b_6$,

$x_7 \neq b'_7 = \mathbf{6}$ e portanto $X \neq b_7$,

$x_8 \neq b'_8 = \mathbf{9}$ e portanto $X \neq b_8$,

$x_9 \neq b'_9 = \mathbf{1}$ e portanto $X \neq b_9$,

....

$x_{1000} \neq b'_{1000}$ e portanto $X \neq b_{1000}$ assim,

$x_n \neq b'_n$ e portanto $X \neq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pergunta: O número decimal $X = 0,x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9...$, construído da forma descrita acima, pertence ao conjunto de TODAS as sequências decimais entre 0 e 1, ou seja, $X \in \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, ...\}$? Há algum absurdo nesta resposta? Explique com suas palavras o que está acontecendo.

Capítulo 4

Enfrentando os Problemas

Aqui, neste capítulo, vamos propor uma forma de abordagem dos números reais para sala de aula, mesmo sabendo que estamos muito longe de uma solução definitiva, mas que, ainda assim, acreditamos esta minimizar os problemas mais comuns já relacionados anteriormente.

No capítulo anterior, nós apresentamos uma série de atividades para serem desenvolvidas com os alunos sob a forma de roteiros. Aqui, do mesmo modo, apresentaremos as propostas, para enfrentar as várias questões que surgem desta abordagem, na forma de um roteiro de problemas. E, na medida do possível, tentando explicar como os roteiros das atividades do capítulo anterior nos ajuda nesta difícil tarefa.

4.1 Questão 1: Como apresentar os Reais?

Passo 1

Uma possível introdução para este assunto pode ser feita perguntando aos alunos o que é número e porque existem números diferentes. Nesta discussão, está embutida um pouco de história da matemática, pois a descoberta de cada tipo de número está situada num determinado período histórico com motivações próprias.

Por exemplo, na antiguidade, quando o primeiro cuidador de ovelhas, preocupado com o sumiço de alguma enquanto as pastoreava; resolve, antes da saída delas, associar cada ovelha a uma pedrinha, para no seu retorno pode conferir se chegaram tantas ovelhas quanto saíram, ilustra aí, a ideia de número natural usado até hoje para contar quantidades inteiras.

Passo 2

Depois, podemos falar dos números racionais, tão presentes no cotidiano (na medida de alturas e pesos, comprimentos, áreas e volumes ou nos preços das mais diversas mercadorias) quanto na matemática escolar (frações, números decimais finitos ou dízimas periódicas e não-periódicas), são números que surgem da necessidade de medir uma grandeza que não é múltiplo inteiro da unidade padrão.

Passo 3

Em seguida, falaremos dos inteiros, citando que no século VI, matemáticos indianos (sendo Brahmagupta, o principal deles) inventaram os números negativos quando tentavam formular um algoritmo para a resolução de equações quadráticas. E lembraremos também que no século $XVIII$, o Renascimento trouxe a expansão comercial, aumentando a circulação de dinheiro e os comerciantes eram obrigados a utilizar os símbolos $+$ e $-$ para expressar situações de lucro e prejuízo. E ainda, na era moderna utilizarmos os inteiros para medir de temperaturas, profundidades, rotações etc, destacando portanto a importância desses números.

Passo 4

O professor deve reconhecer que na vida cotidiana dos alunos os racionais são suficientes e, embora pareça estranho, os números racionais são insuficientes para calcular algumas medidas com a necessária precisão científica. E isto será exemplificado e discutido ao longo do ensino médio.

4.2 Questão 2: Como reconhecer os irracionais?

Passo 1

No ensino básico, sabemos que o conceito de número irracional nunca foi bem compreendido pelos alunos e nem pelos professores, devido as dificuldades intrínsecas da construção do significado desses números. Assim, os exemplos de números irracionais são sempre os mesmos: raízes quadradas ou cúbicas de números naturais que não são inteiras, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$ ou logarítmos decimais não racionais, como $\log_{10} 2, \log_{10} 3, \log_{10} 5$ ou seno, co-seno e tangente de arcos notáveis, como $\sin 60^o = \cos 30^o, \sin 45^o = \cos 45^o, \tan 30^o, \tan 60^o$ e os números de Euler e e π. E esses exemplos passam a impressão errada aos alunos de que os irracionais são listáveis, parecendo até haver menos irracionais que racionais. Precisamos avisá-los que apesar da dificuldade de explicitar outros irracionais e de operar com eles, podemos escolher uma dessas funções conhecidas, citadas acima, e aplicá-la no conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ que, como resultado, obteremos conjuntos tão "grandes" quanto o conjunto dos racionais, formado quase que exclusivamente por irracionais. Por exemplo: $\{\sin x | x \in \mathbb{Q}\}, \{\sqrt[3]{x} | x \in \mathbb{Q}\} ou \{\log_{10} x | x \in \mathbb{Q}^*_+\}$.

Passo 2

Por definição, um número irracional não pode ser representado por uma fração. Mas, sabemos que sempre podemos encontrar uma fração que esteja tão próxima dele quanto quisermos (pode ser menor que um milionésimo de milionésimo!), pois os racionais são ótimos para se fazer aproximações (pois são densos!). Contudo, essa fração nunca será igual ao número irracional. Portanto, se quisermos nos aproximar mais e mais deste número, teremos que procurar outra fração e depois mais outra e mais outra..., sucessivamente. Assim, a vantagem da expansão decimal é ser uma forma de representação que se aplica uniformemente a todos os números reais e, para obtê-la, é preciso recorrer à aproximações racionais para irracionais. E muitas dessas aproximações são bastante confiáveis, pois sabemos que existem formas rigorosas de controlar seus erros.

4.3 Questão 3: Quantos irracionais existem?

Passo 1

Depois de algumas aulas sobre a construção do conjunto dos números racionais, já é sabido que este é formado pelas frações, números decimais de representação finita e de representação infinita periódica, e também que o conjunto dos racionais é infinito e listável. Agora, precisamos convencê-los que os irracionais são infinitos também. Historicamente, os professores que ensinam matemática na escola básica, fogem das discussões sobre o "infinito", passando rapidamente pelas somas dos termos de um progressão geométrica infinita ou citando a regra prática que determina a frazão geratriz de uma dízima periódica, talvez porque faltem exemplos práticos sobre os dois tipos mais conhecidos de infinitos. Então, essa é uma excelente oportunidade de se apresentar exemplos e atividades para se fazer uma discussão desse tema com os alunos.

No roteiro 4 deste estudo ("Os números racionais estão espalhados por toda parte ou os racionais são densos na reta real") há uma atividade em que o aluno escolhe muitos números irracionais, a fim de que ele perceba as infinitas possibilidades que esta "criação" possui. Para isso, achamos que é mais adequado, pela simplicidade, utilizar a forma de representação decimal e posicional dos números reais.

Passo 2

Assim, falaremos para o aluno se imaginar com um dado numerado de 0 a 9, em que ele irá jogá-lo muitas vezes a fim de criar um decimal entre 0 e 1 e visualizar os 10 primeiros dígitos de um número real infinito, por exemplo: $0,8025116394...$, ou jogando o dado de novo, visualizar os 20 primeiros dígitos de um número real, por exemplo: $0,16943802515903659173...$, ou os 50 primeiros dígitos de outro, como por exemplo: $0,7693850291047585123905692669472953084092...$. A ideia é tentar fazer os alunos perceberem que assim como há infinitos racionais, também há infinitos irracionais, porém, temos que falar da dificuldade de comparar os infinitos desses dois conjuntos de natureza distintas.

4.4 Questão 4: Há tantos números irracionais quanto racionais?

Passo 1

Já sabemos que números racionais e números irracionais são infinitos. Então, devemos perguntar aos alunos, qual desses dois conjuntos infinitos tem mais elementos? Ou, qual desses dois infinitos é maior?

Passo 2

Primeiramente, devemos fazer os alunos perceberem que esta pergunta não tem resposta simples e só faz sentido comparar tamanho de infinitos, desenvolvendo com eles o conceito de enumerabilidade. Então, devemos propor uma atividade para comparar (enumerar) alguns conjuntos infinitos conhecidos. Por exemplo, o conjunto dos números Naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, ...$, o conjunto dos Ímpares $= \{1, 3, 5, 7, ...\}, b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7, ...$, o conjunto dos números Primos $= \{2,3,5,7,11,...\}, c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 5, c_4 = 7, ...$, o conjunto dos Quadrados Perfeitos $= \{0,1,4,9,16,...\}, d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 4, d_4 = 9, ...$, etc. E assim, fazendo o aluno perceber que embora os elementos desses conjuntos infinitos avancem mais rapidamente, a enumerabilidade "iguala" todos esses infinitos. E mais, podemos escolher vários (qualquer quantidade enumerável) desses conjuntos, uni-los formando um conjunto só, que ainda assim, este será enumerável. Por exemplo, fazendo a união destes 4 conjuntos infinitos acima temos: $\{0,1,2,3,4,...\}\bigcup\{1,3,5,7,...\}\bigcup\{2,3,5,7,11,...\}\bigcup\{0,1,4,9,16,...\} = \{a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 2, d_1 = 0\}\bigcup\{a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 3, d_2 = 1\}\bigcup\{a_3 = 2, b_3 = 5, c_3 = 5, d_3 = 4\}\bigcup\{a_4 = 3, b_4 = 7, c_4 = 7, d_4 = 9\}\bigcup\{a_5, b_5, c_5, d_5\}\bigcup\{a_6, b_6, c_6, d_6\}\bigcup ...$

Passo 3

Segundo, precisamos utilizar a atividade de enumerabilidade dos racionais, roteiro 3 do capítulo 4, contando para os alunos que grandes matemáticos da história, perceberam que há infinitos de diferentes qualidades. É preciso construir conceitualmente com os alunos a diferença de cardinalidade entre os racionais e os reais, para em seguida podermos discutir a possibilidade ou não de enumerabilidade dos irracionais. E assim, em outra aula, devemos realizar a difícil atividade, roteiro 5 do capítulo anterior, "não podemos contar os números reais", que mostra a impossibilidade de enumeração dos reais. Concluindo então, que isso só pode ser devido a não-enumerabilidade dos irracionais, porque se fossem enumeráveis, os reais também seriam, pois a união de dois conjuntos enumeráveis é também enumerável.

É preciso ensinar aos alunos a diferença de cardinalidade entre os racionais e os reais. No roteiros 5 ("Não podemos listar os números reais") e 3 ("A enumerabilidade dos números racionais") deste estudo, encontram-se duas atividades que podem ajudar nesta tarefa.

4.5 Questão 5: O número real é "real"?

Na verdade, sabemos que a construção dos racionais (que são números presentes no dia a dia!) já é teórica. O grande salto da criação dos irracionais para o completamento da reta é muito mais teórico ainda. Fato. Mas como seria possível passar dos racionais para os reais sem tentar descrever os irracionais? Então, como sugestão, pensamos que nós professores temos que dialogar com os alunos sobre os números que existem, pedindo que eles falem das diferenças entre "os números da escola" e os "números do seu dia-a-dia". E temos que abrir algumas discussões como por exemplo: por que existem números tão distintos até considerando apenas o seu cotidiano? Para que estudamos outros números no colégio? Há vantagens em se conhecer melhor, de forma mais profunda (abstrata), o número real?

Precisamos convencê-lo (o aluno), com uma franca discussão em cima de exemplos práticos, que estudar os reais é uma forma de desenvolver seu raciocínio lógico e com isto melhorar a sua capacidade intelectual. Estudar mais a fundo os reais é, em larga escala, estudar os irracionais (que apesar de estarem presentes em muitas medidas do nosso cotidiano, como a diagonal de um quadrado ou comprimento de um círculo ou no volume de uma esfera etc.) que em geral não têm fácil representação e que exige a compreensão de três conceitos matemáticos intuitivamente difíceis: incomensurabilidade, densidade e não-enumerabilidade. Além disso, estudar os reais ajuda o aluno a compreender melhor as diversas funções e seus respectivos gráficos, presentes em todos os conceitos fundamentais da matemática.

Por fim, nós acreditamos que mesmo os conceitos aparentemente simples, podem conter consequências de significados complexos, pois são a estrutura fundamental onde toda matemática está apoiada e que a beleza da Matemática está na curiosidade de buscar mais compreensões sobre estes.

Capítulo 5

Construção dos Reais como sequências de Racionais

Neste capítulo abordaremos uma forma de definir o conjunto dos números reais através das sequências de números racionais de Cauchy [8]. Deste modo, observamos que esta matéria está um pouco acima do nível do ensino médio regular e que o leitor, para continuar a leitura, deve estar familiarizado com as principais definições, propriedades e teoremas relacionados ao conceito de sequência e limite de sequência, tais como critérios de convergência, unicidade de limites, monotonicidade, sequências de Cauchy e etc. Todos estes conceitos podem ser revisitados pelo leitor em [8]

No curso de análise, estudamos que as sequências de números reais que são convergentes, só o são, se forem também sequências de Cauchy e vice-versa. Contudo, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ pode ser de Cauchy e não ser convergente em $\mathbb{Q}$.

Com efeito, considere $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como se pode verificar $a_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pois é uma potência finita de racionais da forma $\frac{n+1}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, pode se encontrar em [8], que $\lim a_n = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e$ é o limite fundamental e converge para o número $e = 2,71828....$ Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy(convergente, mas apenas em $\mathbb{R}$) em $\mathbb{Q}$ e o seu limite não pertence a $\mathbb{Q}$, pois é o número irracional e.

Desse modo, podemos obter os “números”de $\mathbb{R}$ através das sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

Para efeito de simplificação de notação utilizaremos (a_n) para representar uma sequência de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Começaremos definindo uma relação de equivalência no conjunto das sequências de números racionais.

Considere $R = \{(a_n); (a_n) \text{ sequência em } \mathbb{Q} \text{ de Cauchy}\}$.

Definição: Dizemos que $(a_n), (b_n) \in R$ são equivalentes se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Representaremos $(a_n) \sim (b_n)$.

Vamos mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência. Com efeito:

1. Reflexividade: $(a_n) \sim (a_n)$

   $(a_n) \sim (a_n) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(a_n - a_n) = 0$, óbvio, pois $(a_n - a_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Simetria: $(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow (b_n) \sim (a_n)$

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}(a_n - b_n) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} -(a_n - b_n) = -0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}(b_n - a_n) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (b_n) \sim (a_n)$$

3. Transitividade: $(a_n) \sim (b_n)$ e $(b_n) \sim (c_n) \Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n - b_n) \text{ e } (b_n) \sim (c_n) \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} (b_n - c_n)$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n - b_n + b_n - c_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} ((a_n - b_n) + (b_n - c_n)) =$$

$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n - b_n) + \lim_{n \longrightarrow \infty} (b_n - c_n) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n - b_n + b_n - c_n = 0) \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n - c_n) = 0 \Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$$

Assim, concluímos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Considere então $\mathbb{R} = \dfrac{R}{\sim}$, ou seja, $\mathbb{R}$ é formado pelas classes de equivalência do conjunto R pela relação $\sim$.

Em outras palavras,

$$\mathbb{R} = \{[a_n]; (a_n) \in R\}, \text{ onde } [a_n] = \{(b_n) \in R; (b_n) \sim (a_n)\}.$$

Note que, não podemos utilizar o fato de que toda sequência de Cauchy converge, pois estamos em $\mathbb{Q}$ e como $\mathbb{Q}$ não é completo, existem diversas (infinitas e não-enumeráveis!) sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem.

Vamos definir as operações em $\mathbb{R}$ de modo natural através das operações em $\mathbb{Q}$.

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$([a_n], [b_n]) \longmapsto [a_n] + [b_n]$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$([a_n], [b_n]) \longmapsto [a_n] \cdot [b_n]$

onde, $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$ e $[a_n] \cdot [b_n] = [a_n.b_n]$.

Precisamos mostrar que estas operações estão bem definidas.

Se $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ então (a_n) e (b_n) são sequências de Cauchy compostas por elementos racionais.

Defina $c_n = a_n + b_n \forall,\ n \in \mathbb{N}$.

Note que, (c_n) é uma sequência de racionais, pois c_n é a soma de dois racionais a_n e b_n.

Além disso, (c_n) é de Cauchy.

Com efeito, seja $\epsilon > 0$ qualquer, sabemos que $\exists n_1, n_2 \in N$ tais que se $n, m \geq n_1$ tem-se $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ e se $n, m \geq n_2$ tem-se $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}$, pois (a_n) e (b_n) são de Cauchy.

Logo, se $n, m \geq \max\{n_1, n_2\}$ tem-se

$$|c_n - c_m| = |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $\exists \bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$ tal que, $n, m \geq \bar{n}$ tem-se $|c_n - c_m| < \epsilon$.

$$\Rightarrow (c_n) \text{ é racional e é de Cauchy } \Rightarrow (c_n) \in R \Rightarrow [c_n] \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, a operação + está bem definida.

Analogamente, considere $c_n = a_n \cdot b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Note que, (c_n) é uma sequência de racionais, pois é formada pelo produto de dois racionais, a_n e b_n.

Além disso, (c_n) é de Cauchy.

Com efeito, seja $\epsilon > 0$ qualquer.

Como (a_n) e (b_n) são de Cauchy então (a_n) e (b_n) são limitadas.

Ou seja, $\exists M_1$ e $M_2 \in \mathbb{Q}$ tais que $a_n < M_1$ e $b_n < M_2, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \max_{n \in \mathbb{N}}\{a_n, b_n\} < \bar{M} = \max\{M_1, M_2\}.$$

Como (a_n) e (b_n) são de Cauchy, então $\exists n_1, n_2 \in N$ tais que se $n, m \geq n_1$, tem-se $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2\bar{M}}$ e se $n, m \geq n_2$, tem-se $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2\bar{M}}$.

Deste modo, se $n, m \geq \bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$ tem-se

$$|c_n - c_m| = |a_nb_n - a_mb_m| = |a_nb_n - a_mb_n + a_mb_n - a_mb_m| = |(a_n - a_m)b_n + a_m(b_n - b_m)| \leq$$

$$\leq |b_n||a_n - a_m| + |a_m||b_n - b_m| < \bar{M}|a_n - a_m| + \bar{M}|b_n - b_m| < \bar{M}.\frac{\epsilon}{2\bar{M}} + \bar{M}.\frac{\epsilon}{2\bar{M}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Portanto, se $n, m \geq \bar{n}$, tem-se $|c_n - c_m| < \epsilon$

$$\Rightarrow (c_n)_{n \in N} \text{ é racional e de Cauchy } \Rightarrow (c_n)_{n \in N} \in R \Rightarrow [c_n] \in \mathbb{R}.$$

Com isso, as funções $+$ e $\cdot$ estão bem definidas.

Para fins algébricos é importante que provemos que $\mathbb{R}$ é um corpo com as operações $+$ e $\cdot$. Vamos então verificar cada uma das propriedades necessárias em álgebra para que $\mathbb{R}$ seja um corpo.

1. Existência de elemento neutro para $+$

   Considere a sequência $(0)n \in N$. Note que, $(0)n \in N \in R \Rightarrow [0] \in \mathbb{R}$.

   Além disso, $[a_n] + [0] = [a_n + 0] = [a_n] = [0 + a_n], \forall [a_n] \in \mathbb{R}$.

2. Existência do Inverso para $+$

   Seja $[a_n] \in \mathbb{R}$ qualquer. Tome $b_n = -a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Note que, $(b_n)_{n \in N} \in R$, pois $(a_n)_{n \in N} \in R \Rightarrow [b_n] \in \mathbb{R}$.

   Além disso, $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n] = [a_n + (-a_n)] = [-a_n + a_n] = [0]$.

3. Comutatividade para $+$

   Sejam $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ quaisquer.

$$\Rightarrow [a_n] + [b_n] = [\underbrace{a_n + b_n}_{\in \mathbb{Q}}] = [\underbrace{b_n + a_n}_{\text{comutativa em } \mathbb{Q}}] = [b_n] + [a_n].$$

4. Associatividade para +

   Sejam $[a_n], [b_n], [c_n] \in \mathbb{R} \Rightarrow ([a_n]+[b_n])+[c_n] = [a_n+b_n]+[c_n] = [(a_n+b_n)+c_n] = [a_n+(b_n+c_n)] = [a_n]+[b_n+c_n] = [a_n]+([b_n]+[c_n])$, pois $((a_n+b_n)+c_n) \in \mathbb{Q}$ e $(a_n+(b_n+c_n)) \in Q$.

5. Distributiva do $\cdot$ em relação a +

   Sejam $[a_n], [b_n], [c_n] \in \mathbb{R} \Rightarrow ([a_n].([b_n]+[c_n]) = [a_n].[b_n+c_n] = [a_n.(b_n+c_n)] = [a_n.b_n+a_n.c_n] = [a_n.b_n]+[a_n.c_n] = [a_n].[b_n]+[a_n].[c_n]$, pois $(a_n.(b_n+c_n)) \in Q$.

6. Associativa do $\cdot$

   Sejam $[a_n], [b_n], [c_n] \in \mathbb{R}$ quaisquer $\Rightarrow ([a_n].[b_n]).[c_n] = [a_n.b_n].[c_n] = [(a_n.b_n).c_n] = [a_n.(b_n.c_n)] = [a_n].[b_n.c_n] = [a_n].([b_n].[c_n])$, pois $(a_n.b_n).c_n$ e $a_n.(b_n.c_n) \in Q$.

7. Comutatividade do $\cdot$

   Sejam $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ quaisquer $\Rightarrow [a_n].[b_n] = [a_n.b_n] = [b_n.a_n] = [b_n].[a_n]$, pois $a_n.b_n$ e $b_n.a_n \in Q$.

8. $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero

   Sejam $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ quaisquer, tal que $[a_n].[b_n] = [0] \Rightarrow [a_n.b_n] = [0] \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n.b_n - 0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = 0$.

Temos que provar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ou $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \exists\bar{\epsilon} > 0$ tal que $\forall \bar{n} \in N, \exists K_{\bar{n}} \geq \bar{n}$ tal que $\mid a_{K_{\bar{n}}} \mid \geq \bar{\epsilon}$.

Como (a_n) é de Cauchy, então para $\frac{\bar{\epsilon}}{2} > 0 \exists n_0 \in N$, tais que $\forall n, m \geq n_0$ tem-se $\mid a_n - a_m \mid < \frac{\bar{\epsilon}}{2} \Rightarrow \mid a_{K_{n_0}} - a_m \mid < \frac{\bar{\epsilon}}{2} \Rightarrow \mid a_{K_{n_0}} \mid - \mid a_m \mid < \mid a_{K_{n_0}} - a_m \mid < \frac{\bar{\epsilon}}{2} \Rightarrow \mid a_m \mid > \mid a_{K_{n_0}} \mid - \frac{\bar{\epsilon}}{2} \geq \bar{\epsilon} - \frac{\bar{\epsilon}}{2} = \frac{\bar{\epsilon}}{2} \Rightarrow \mid a_m \mid > \frac{\bar{\epsilon}}{2}, \forall m \geq n_0$ e $a_m \neq 0, \forall m \geq n_0$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$ então $\forall \epsilon > 0$ temos que $\exists n_\epsilon \in N$ tal que $\mid a_n.b_n - 0 \mid < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mid a_n.b_n < \epsilon, \mid \forall n \geq n_\epsilon$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tome $\epsilon^{'} = \frac{\bar{\epsilon}.\epsilon}{2} \Rightarrow \exists n_1 \in N$ tal que $\mid a_n.b_n \mid < \epsilon^{'}, \forall n \geq n_1$.

Considere $\bar{N} = \max\{n_1, n_0\}$. Se $n \geq \bar{N}$ tem-se $\mid a_n.b_n \mid = \mid a_n \mid . \mid b_n \mid < \epsilon^{'} \Rightarrow \mid b_n \mid < \frac{\epsilon^{'}}{a_n}, a_n \neq 0, \forall n \geq \bar{N} = \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow \mid b_n \mid < \frac{\bar{\epsilon}.\epsilon}{2}.\frac{1}{|a_n|} < \frac{\bar{\epsilon}.\epsilon}{2}.\frac{2}{\bar{\epsilon}} = \epsilon$, pois $\mid a_n \mid > \frac{\bar{\epsilon}}{2}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow [b_n] = [0]$.

9. Existência do elemento neutro para $\cdot$

Note que $(1)_{n\in N} \in \mathbb{R}, \Rightarrow [1] \in \mathbb{R}$.

Além disso, $\forall [a_n] \in \mathbb{R}$ tem-se $[a_n].[1] = [a_n.1] = [a_n] = [1.a_n] = [1].[a_n]$, pois $a_n.1$ e $1.a_n \in Q$.

10. Inverso Multiplicativo pata $\cdot$

Seja $[a_n] \in \mathbb{R}$ qualquer, tal que $[a_n] \neq [0]$.

Logo, $(a_n)_{n \in N}$ é se relaciona $\sim$ com $(o)_{n \in N}$.

Vamos provar que $\exists k \in N$ tal que $a_n \neq 0, \forall n \geq k$, por contradição.

Suponhamos por absurdo que, $\forall k \in N, \exists \bar{n} \geq k$ tal que $a_{\bar{n}} = 0$.

Como (a_n) é de Cauchy, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N$ tal que se $n, m \geq n_0$ tem-se $\mid a_n - a_m \mid < \epsilon$.

Como $(a_n) \in N \Rightarrow \exists \bar{n} \geq n_0$ tal que $a_{\bar{n}} = 0$. $\Rightarrow \mid a_{\bar{n}} - a_m \mid < \epsilon, \forall m \geq n_0 \Rightarrow \mid a_m - a_{\bar{n}} \mid < \epsilon, \forall m \geq n_0 \Rightarrow \mid a_m - 0 \mid < \epsilon, \forall m \geq n_0 \Rightarrow \mid a_m \mid < \epsilon, \forall m \geq n_0 \Rightarrow (a_n)$ convergente para $O \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow (a_n) \sim (0) \Rightarrow a_n \in [0] \Rightarrow [a_n] = [0]$.

Absurdo!

$\Rightarrow \exists k \in N$ tal que $a_n \neq 0, \forall n \geq k$.

Defina, $b_n = \frac{1}{a_n}, \forall n \in N$ se $a_n \neq 0$ e $b_n = 0$ se $a_n = 0$.

Como $a_n \neq 0, \forall n \geq k \Rightarrow b_n = \frac{1}{a_n}, \forall n \geq k \Rightarrow a_n.b_n = a_n.\frac{1}{a_n} = 1, \forall n \geq k \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n.b_n = 1, \Rightarrow a_n.b_n \sim [1]$.

Representamos $[b_n] = [\frac{1}{a_n}] = [a_n^{-1}]$.

Desse modo $\mathbb{R}$, munido das operações $+$ e $\cdot$ é um corpo, e chamaremos este corpo de conjunto dos números reais.

Claramente, podemos encontrar uma imersão de Q em $\mathbb{R}$ definida pela função
$i : Q \to \mathbb{R}$
$q \mapsto [q]$

onde $[q] = [(q)_{n\in\mathbb{N}}], (q)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência constante $q \in \mathbb{Q}$.

Além disso, note que se $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a \neq b \Rightarrow [a] \neq [b]$.

Com efeito, se $a \neq b$, sem perda de generalidade, $a < b \rightarrow\mid a - b \mid= \epsilon > 0$ e $b - a = \epsilon \in Q$.

Dados, (a_n) sequência qualquer em $[a]$ e (b_n) sequência qualquer em $[b]$ temos para que $\frac{\epsilon}{4} > 0$ que $\exists n_1 \in N$ tal que $\mid a_n - a \mid< \frac{\epsilon}{4}$ e $\exists n_1 \in N$ tal que $\mid b_n - b \mid< \frac{\epsilon}{4}$. Tome $\bar{n} = \max n_1, n_2 \Rightarrow a_n < a + \frac{\epsilon}{4}$ e $b_n < b + \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow\mid b_n - a_n \mid\geq b_n - a_n > b - \frac{\epsilon}{4} - (a + \frac{\epsilon}{4}) = b - a - \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow b_n - a_n > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow (b_n)$ não equivalente a (b_n) $\Rightarrow [b_n] \neq [a_n] \Rightarrow [a] \neq [b]$.

Desse modo, $i : Q \rightarrow i(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ é um isomorfirmo, que leva as operações naturais de soma e produto de $\mathbb{Q}$, nas operações de soma e produto em $\mathbb{R}$. Então, cada vez que escolhemos $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in i(\mathbb{Q})$, diremos que $a \in Q$ utilizando um subterfúgio de notação.

O leitor pode constatar que esse conjunto $\mathbb{R}$ criado através das sequências de Cachy de valores racionais é de fato o conjunto dos reais que estamos acostumados a trabalhar. Utilizando a caracterização decimal para qualquer número real é fácil exibir a sequência racional de Cauchy que vai definir esse número.

Com essa breve exposição, espero que o leitor se sinta motivado a buscar e provar outras propriedades para o conjunto $\mathbb{R}$ definido desta forma, como o fato dele ser completo, por exemplo.

Capítulo 6

Conclusão

A partir da experiência docente ao longo dos anos no ensino médio aplicando diversos métodos de ensino dos números reais, é muito importante, na primeira apresentação deste conjunto, que o aluno perceba que está diante de um assunto bem diferente de todos os outros que ele já viu em matemática. É diferente porque número real exige um grau muito maior de abstração e, por isso mesmo, de concentração e metodologia técnica que deve ser cumprida passo a passo para ser possível uma aproximação conceitual desse difícil assunto.

Em sala de aula, verificamos que, com uma abordagem mais franca dos números reais, começando a aula com uma discussão sobre as ideias básicas: O que é número? Pra que servem? Quais os números que conhecemos e em que a natureza deles se difere? Por que e para que existem números diferentes? Medir é contar? Assim, o aluno se sente bem mais à vontade para assumir que não está entendendo e tirar suas dúvidas iniciais. Também, não podemos esquecer de chamar a atenção dos alunos para os inevitáveis pontos obscuros da abordagem dos reais no ensino médio.

Sabemos que nesta nossa proposta, a aula avança menos, havendo perdas na horizontalidade do conteúdo e ganhos na profundidade do mesmo, porém o assunto começa a de fato se enraizar nas mentes dos discentes. Seguindo os roteiros propostos neste trabalho, acreditamos estar auxiliando os professores na abordagem das principais dificuldades, separadamente, do ensino dos números reais. Pois entendemos, pela complexidade deste assunto, que é necessário apontar e atacar ponto por ponto das propriedades que caracterizam esses números, com objetivo de conseguir mais clareza do conteúdo para os alunos.

E ainda, para um maior entendimento teórico dos discentes, apresentamos para estes, uma sequência de atividades práticas em ordem crescente de dificuldade, para que o aluno vá ganhando cada vez mais confiança na prática com os reais; a fim de verificar a compreensão concreta destes números, localização e representação, bem como, a compreensão abstrata dos mesmos, identificação e peculiares propriedades. Por exemplo, o roteiro 2 (Você acha que $0,99999...$ é igual, maior ou menor que 1?) foi a única sequência de atividades que deu tempo de ser testada em sala de aula, numa turma de primeira série do ensino médio do colégio estadual Lélia Gonzales, com a qual se obteve razoável resultado de aprendizado. Antes da atividade, cerca de 5% da turma (1 dentre 35 alunos) sabia a resposta correta e após a atividade, 63% (quase $\frac{2}{3}$ ou 22 alunos) da turma acertaram a questão.

Sabemos das limitações teóricas e práticas deste trabalho, mas ainda assim, pretenciosamente, gostaríamos de que este material ajudasse a alunos a melhor identificar e separar números racionais de irracionais, a melhor compreender a ideia de que número racional é um número que possui representação decimal finita ou representação decimal infinita e periódica; e a melhor perceber que número irracional é um número que possui representação decimal sempre infinita e não-periódica, e que tanto os racionais e irracionais são uma construção intelectual da matemática. Ao cabo deste trabalho e, por fim, esperamos que tenha aumentado a maturidade matemática do aluno sobre uma melhor compreensão dos reais.

Referências Bibliográficas

[1] Carl B. Boyer, História da Matemática, Edgard Blucher LTDA, 1996.

[2] Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Editora Unicamp, 2002.

[3] Bento de Jesus Caraça, Conceitos Fundamentais da Matemática, Editora Livraria Sá da Costa, 1989.

[4] Francisco Cesar Polcino Milies, Sonia Pitta Coelho, Números: Uma Introdução à Matemática, Editora EDUSP, 2006.

[5] Ivan Niven, Números Racionais e Irracionais, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[6] Djairo Guedes de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[7] Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado, A Matemática no Ensino Médio Vol 1, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2006

[8] Elon Lages Lima, Análise Real Vol.1. Funções de uma Variável, Editora Impa, 1993.

[9] Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I, Editora LTC, 1996.

[10] Rezende W. M., Ensino de Cálculo - Dificuldades de Natureza Epistemológica, Tese(Doutorado em Educação) da Universidade de São Paulo, 2003.

[11] Geraldo Ávila, Revista do Professor de Matemática número 5, Grandezas incomensuráveis e números irracionais, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[12] Tatiana Roque, História da matemática, Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.