2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

A Matemática Financeira nos Financiamentos Habitacionais

Alessandro Ribeiro dos Santos [1]
Ricardo de Carvalho Falcão[2]

Resumo: Com o objetivo de que este trabalho possa ser utilizado como material de consulta aos alunos do ensino médio da educação básica, destacaremos as principais definições e os principais resultados da Matemática Financeira fazendo uma abordagem objetiva sobre a Matemática dos Financiamentos Habitacionais. No primeiro momento apresentaremos os conceitos básicos tais como capital, juros, taxas, aumentos, descontos, regimes de capitalização, taxas equivalentes e cálculo de prestações. Destacaremos também os resultados dos dois principais sistemas de amortização, o SAC e o SAF. Todas as definições e resultados serão a base para o entendimento da operação de financiamento. Finalizando destacamos uma proposta de aplicação dos resultados da Matemática Financeira na tomada de decisões que envolvam o valor do dinheiro em épocas diferentes, aplicação que poderá ser desenvolvida com este grupo de alunos da educação básica.

Palavras-chave: Financiamento, Juros, Amortização.

1 Introdução

Ao longo da história o Homem já se deparou com situações em que houve a necessidade de negociar para seu próprio sustento, no princípio essa negociação se dava através do escambo, ou seja, a troca de mercadorias que corresponde à primeira manifestação comercial.

Na Suméria, por volta de 3.000 a.E.C. , há indícios de desenvolvimento de um sistema de crédito baseado em grãos e prata, sendo assim considera-se que os juros e os impostos existem há muito tempo. Esses juros eram pagos pelo empréstimo de sementes e outras conveniências.

A história também revela que a ideia de trocar moedas tinha se difundido e estava tão bem estabelecida que já existiam banqueiros internacionais na Babilônia por volta de 575 a.E.C..

Os indícios da existência de cálculo de juros estão presentes nas tábuas matemáticas da época, estima-se que das 400 tábuas, cerca de metade eram financeiras. As tábuas de exponenciais sugerem que as mesmas eram usadas no cálculo de juros compostos.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: aleribes@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - DEFIM, CAP
E-mail: rfalcao@gmail.com

Outro fato histórico de destaque são as chamadas "Escolas de Ábaco", que treinavam jovens comerciantes desde os 11 ou 12 anos em matemática prática, essas escolas se difundiram em várias regiões da Itália, sobretudo em Florença e estão relacionadas ao desenvolvimento do capitalismo no fim da Idade Média. Para tratar problemas ligados ao comércio ensinava-se cálculo com numerais indianos, a regra de três, juros simples e compostos, entre outras ferramentas de cálculo voltadas para problemas práticos.

Entender o financiamento habitacional através dos resultados da Matemática Financeira, destacar os dois principais sistemas de amortização e avaliar as decisões envolvendo o uso do dinheiro é o objetivo deste trabalho. Essa necessidade de lidar com estas situações virou rotina em nossas vidas, assim como o financiamento, nos deparamos com o mercado financeiro das bolsas de valores, com os fundos de investimentos oferecidos pelos bancos, com o pagamento de impostos, com empréstimos, etc. Neste panorama o ensino da Matemática Financeira na educação básica requer uma atenção especial para dar suporte aos alunos no entendimento de tais operações.

2 Conceitos Importantes

Nessa seção destacaremos algumas definições e resultados da Matemática Financeira que nos darão suporte para as análises das operações de financiamento, amortização, empréstimos, etc.

A Matemática Financeira estuda as operações envolvidas em empréstimos e ou investimentos, quando uma pessoa empresta ou toma emprestado um valor monetário durante certo período de tempo, esse valor é chamado de capital (ou principal). Após este período o valor a ser recebido ou pago é o capital acrescido de uma remuneração chamada juros.

2.1 Capital, Juros e taxa

Definição 2.1 (Capital) *Capital é o valor monetário o qual é aplicado em processos financeiros e é indicado por C.*

Definição 2.2 (Juros) *Juros corresponde ao valor monetário referente ao rendimento da aplicação do capital e é indicado por J.*

Definição 2.3 (Taxa de juros) *Taxa de juros é a taxa de crescimento do capital determinada pela razão $i = \frac{J}{C}$, referindo-se sempre ao período da operação. Para representar a taxa de juros usamos as porcentagens, razões centesimais que são representadas pelo seu numerador seguido do símbolo % (por cento) ou sua representação decimal que é muito útil na resolução de problemas envolvendo juros simples e compostos.*

Observação 1 *O valor dos juros de um capital aplicado a uma taxa num certo período será dado por:*

$$J = C \cdot i$$

Exemplo 2.1 *Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado a uma taxa de 5% ao mês durante um mês. Qual foi o juros dessa aplicação?*

Como C=10.000 e i=5% ou 0,05, temos:

$$J = 10.000 \cdot 0,05 = 500$$

Portanto os juros da aplicação foram de R$ 500,00.

Definição 2.4 (Montante) *O montante refere-se ao valor resultante da soma entre o capital e os juros e será indicado por M. Assim o montante é dado por:*

$$M = C + J$$

No exemplo anterior teríamos um montante igual a R$ 10.500,00, resultante da soma do capital(R$ 10.000,00) com o juros(R$ 500,00).

2.2 Aumentos e descontos

Definição 2.5 (Aumento ou acréscimo) *Se certo valor sofre um aumento a uma taxa i, então o valor final resultante desse acréscimo será dado por:*

$$V = V_0(1 + i),$$

onde V é o valor final, V_0 o valor inicial e i a taxa de aumento.

Definição 2.6 (Desconto ou abatimento) *Se certo valor sofre um desconto a uma taxa i, então o valor final resultante desse abatimento será dado por:*

$$V = V_0(1 - i),$$

onde V é o valor final, V_0 o valor inicial e i a taxa de desconto.

Exemplo 2.2 *Se uma mercadoria que custava R$ 250,00 sofre um aumento de 2%, então o novo valor da mercadoria, será R$ 255,00 conforme cálculo abaixo:*

$$V = 250(1 + 0,02) = 250(1,02) = 255.$$

Exemplo 2.3 *Em uma promoção uma tv que custa R$ 1.990,00 será vendida à vista com um desconto de 10%. Neste caso vamos calcular o valor da tv com o desconto.*

$$V = 1.990(1 - 0,10) = 1.990(0,90) = 1.791.$$

Portanto o novo preço será de R$ 1.791,00.

2.3 Regimes de Capitalização

Quando um capital é aplicado a uma taxa percentual por período, durante vários períodos de tempo, o montante poderá ser calculado através de duas convenções básicas de cálculo, chamadas de juros simples e juros compostos, esta última está presente em quase todas as operações financeiras existentes.

Definição 2.7 (Juros Simples) *Nesta modalidade os juros gerados em cada período são constantes e resultantes do produto do capital pela taxa. O cálculo dos juros simples de um capital C aplicado a uma taxa i, durante n períodos de tempo é dado por:*

$$J = \underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \cdots + C \cdot i}_{n} \Rightarrow J = C \cdot i \cdot n$$

Exemplo 2.4 *Calculando os juros simples gerados por um capital de R$ 1.250,00 aplicado a uma taxa de 2% ao mês durante 6 meses, temos:*

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 1.250 \cdot 0,02 \cdot 6 = 150$$

Portanto os juros gerados foram de R$ 150,00.

Teorema 2.1 (Juros Compostos) *No regime de juros compostos de taxa i, um capital C_0 transforma-se em n períodos de tempo, em um montante igual a C_n, dado por:*

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, a fórmula do montante é verdadeira uma vez que:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)^1.$$

Supondo que a fórmula do montante seja válida para algum n, queremos mostrar que é também válida para $n+1$. Sabemos que:

$$C_{n+1} = C_n + C_n \cdot i = C_n(1+i).$$

Pela hipótese de indução temos que $C_n = C_0(1+i)^n$, logo:

$$C_{n+1} = C_0(1+i)^{n+1}.$$

Portanto pelo Princípio da Indução Matemática a fórmula do montane é válida para todo n natural. $\square$

Exemplo 2.5 *De acordo com o Teorema 2.1, calculando o montante gerado por um capital de R$ 15.000,00 aplicado a 3% ao mês durante 4 meses na modalidade de juros compostos teremos:*

$$C_n = C_0(1+i)^n = 15.000(1+0,03)^4 = 16.882,63.$$

Portanto, o montante gerado será de R$ 16.882,63.

Observação 2 *Para o cálculo dos juros dessa aplicação, basta fazer a diferença entre o montante encontrado pelo capital inicial.*

Exemplo 2.6 *Marcela fez um empréstimo de R$ 3.000,00 para pagar daqui a 6 meses. Sabendo que a taxa é de 1,5% ao mês, qual o valor total que Marcela irá pagar se forem cobrados juros compostos?*

Mais uma vez recorreremos ao Teorema 2.1.

Como $C_0 = 3.000$, i=1,5% ou 0,015 e n=6, obtemos:

$$C_n = C_0(1+i)^n = 3.000(1+0,015)^6 = 3.280,33.$$

Portanto, Marcela irá pagar pelo empréstimo R$ 3.280,33.

Atualmente a modalidade de juros compostos é a mais utilizada em transações comerciais. Vejamos agora uma comparação entre juros simples e compostos. Utilizaremos um capital de R$ 1.000,00 aplicados a uma taxa mensal de 2% em um período de 1 ano.

Vejamos a tabela abaixo:

Período	Juros Simples	Juros Compostos
0	1.000	1.000
1	1.020	1.020
2	1.040	1.040,40
3	1.060	1.061,21
4	1.080	1.082,43
5	1.100	1.104,08
6	1.120	1.126,16
7	1.140	1.148,69
8	1.160	1.171,66
9	1.180	1.195,09
10	1.200	1.218,99
11	1.220	1.243,37
12	1.240	1.268,24

Já era de se esperar que o montante composto fosse superar o montante simples, uma vez que os juros compostos constituem uma progressão geométrica e os juros simples uma progressão aritmética.

3 Taxas Equivalentes

Definição 3.1 *Duas taxas são ditas equivalentes quando, aplicadas a capitais iguais, em tempos iguais, produzem sempre montantes iguais.[1]*

As taxas equivalentes nos auxiliam nos casos em que o período da operação financeira difere-se do período da taxa de juros. O lema abaixo nos dará a fórmula que relaciona as taxas equivalentes.

Lema 3.1 *Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então:*

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

Demonstração: [4] Seja P_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo $T(T = 1)$, o valor da grandeza será $P_0(1 + I)^1$. Como um período de T, equivale a n períodos iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $P_0(1 + i)^n$, logo:

$$P_0(1 + I)^1 = P_0(1 + i)^n \Rightarrow (1 + I)^1 = (1 + i)^n$$

□

Exemplo 3.1 *Vejamos qual a taxa anual equivalente a uma taxa de 2% ao mês. Utilizando a relação de equivalência acima temos que:*

$$1 + I = (1 + 0,02)^{12} \Rightarrow I = (1,02)^{12} - 1 \Rightarrow I \cong 0,268$$

Portanto a taxa equivale a 26,8% ao ano.

4 Cálculo de Prestações

Para comprar uma geladeira, cujo valor à vista é R$ 1.200,00, Maria precisará parcelar o valor em 5 prestações mensais e iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra. Sendo a taxa de juros de 2% ao mês, qual será o valor de cada prestação?

A dívida no final de 5 meses, será de:

$$1.200(1+i)^5.$$

A mesma dívida analisada em relação às prestações, onde a primeira é paga um mês após a compra, será:

$$P(1+i)^4 + P(1+i)^3 + P(1+i)^2 + P(1+i) + P.$$

Logo:

$$1.200(1+i)^5 = P(1+i)^4 + P(1+i)^3 + P(1+i)^2 + P(1+i) + P$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por $(1+i)^5$ e colocando P em evidência temos que:

$$1.200 = P\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1+i)^5}\right)$$

Este resultado iguala na época "zero", todos os pagamentos ao valor à vista, ou seja, ao valor atual. Substituindo o valor da taxa e realizando os cálculos, encontramos $P \cong$ R$ 254,60. Fazendo a soma de todas as prestações encontramos o valor a prazo de R$ 1.273,00, ou seja, serão pagos a cargo de juros R$ 73,00.

A figura abaixo ilustra este esquema de pagamento.

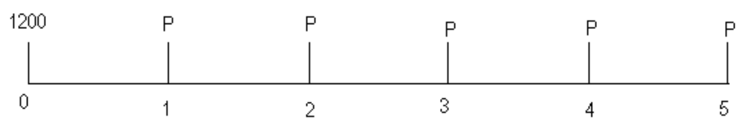

Figura 1: Diagrama 1

Definição 4.1 *O conjunto de pagamentos referentes a períodos diversos é chamado de série de pagamentos e quando estes pagamentos são iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é uniforme.*

Teorema 4.1 *O valor atual(A) de uma dívida(empréstimo ou valor à vista de uma mercadoria) paga em n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento é igual a:*

$$A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Demonstração: Analisando o diagrama da figura 2, sabemos que:

$$A = \left(\frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}\right)$$

colocando P em evidência temos que:

$$A = P\underbrace{\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right)}_{S} \quad (1)$$

A soma S é a soma dos n termos de uma progressão geométrica cuja razão é $(1+i)^{-1}$, logo:

$$S = \frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1-[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}}\right] = \frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{-1}}\right] = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Substituindo S em 1, obetmos o resultado. □

Figura 2: Diagrama 2

Exemplo 4.1 *João fez um empréstimo a uma taxa de 4% ao mês e pagará R$ 595,26 por mês durante 5 meses, sendo a primeira paga um mês após a contratação do empréstimo. Neste caso qual foi o valor do empréstimo?*

Pelo Teorema 4.1 temos que:

$$A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Como $P = 595,26$, $i = 0,04$ e $n = 5$, obtemos:

$$A = 595,26\left[\frac{1-(1,04)^{-5}}{0,04}\right] \cong 2.650.$$

Então o valor do empréstimo foi de R$ 2.650,00. Por este empréstimo João pagou R$ 2.976,30, totalizando um juros de R$ 326,03.

Observação 3 *O resultado do Teorema 4.1 também nos permite o cálculo do valor das prestações envolvidas nas operações financeiras envolvendo juros compostos, para isto basta isolar a variável P na fórmula.*

Voltando ao exemplo do início da seção, vamos verificar se encontramos o mesmo valor de prestação, utilizando agora o resultado do Teorema 4.1.

Sabemos que: $A = 1.200$(valor da geladeira à vista), $i = 0,02$ e 5 o número de pagamentos. Recorrendo ao Teorema 4.1 temos que:

$$A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow P = A\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

substituindo os valores de A, i e n, obtemos:

$$P = A\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 1.200\left[\frac{0,02}{1-(1,02)^{-5}}\right] = 254,60.$$

Portanto o valor da prestação será de R$ 254,60, o mesmo do exemplo citado.

5 Financiamentos Habitacionais

Atualmente falar em financiamento habitacional é muito comum devido a vários programas destinados a aquisição da casa própria, como por exemplo, o programa Minha Casa Minha Vida.

Trataremos nesta seção, de maneira objetiva, como a Matemática Financeira ajuda no entendimento desta operação crédito que se trata na verdade de um empréstimo.

5.1 Sistema Financeiro da Habitação (SFH)

Criado em 1964 pelo governo, o Sistema Financeiro de Habitação (SFH) foi a primeira e continua sendo a mais tradicional forma de uma pessoa obter crédito para a compra, reforma ou construção de um imóvel.

Para prover crédito aos cidadãos o Sistema Financeiro da Habitação utiliza os recursos do FGTS (Fundo de Garantia do Tempo de Serviço), das contas de depósitos de poupança, de financiamentos contraídos no país ou no exterior. Esses recursos são utilizados em projetos de habitações e títulos de crédito.

Outra forma de adquirir um financiamento habitacional é através do Sistema Financeiro Imobiliário (SFI), neste sistema o crédito habitacional é concedido com os recursos dos próprios bancos.

5.2 Etapas de um Financiamento Habitacional

A seguir veremos as principais etapas para se obter um Financiamento Habitacional.

1. Valor do imóvel: valor do crédito necessário para a aquisição, reforma ou construção do bem.

2. Análise da renda bruta familiar: entende-se por renda bruta o valor recebido por todos os integrantes da família sem descontos.

3. Comprometimento da renda: a Matemática Financeira auxilia nesta etapa quando o banco realiza o cálculo que estipulará o valor máximo para a prestação, ou seja, calcula-se uma porcentagem dos ganhos familiares para analisar o risco de um possível empréstimo.

4. Depois da análise de toda a documentação, as etapas que se seguem estão relacionadas ao empréstimo e neste caso um conhecimento prévio dos conceitos básicos da Matemática Financeira facilita o entendimento e até a opção por um melhor plano de financiamento.

5.3 Conceitos básicos de um Financiamento Habitacional

Definição 5.1 (Taxa de juros) *É a taxa referente para o cálculo de juros, nos financiamentos habitacionais esta taxa é anual, para saber a taxa mensal podemos utilizar a relação de equivalência de taxas presente na seção 3.*

Definição 5.2 (Valor de entrada ou recursos própios) *Este valor trata-se dos recursos que o cidadão dispõem para diminuir o valor a ser financiado.*

Definição 5.3 (Valor financiado) *Valor do empréstimo, corresponde à diferença entre o valor do imóvel e o valor da entrada.*

Definição 5.4 (Prazo de financiamento) *Tempo para pagamento da dívida, atualmente o prazo máximo é de 420 meses, ou seja, 35 anos.*

Definição 5.5 (Saldo devedor) *É o valor da dívida, este valor se altera na medida em que os pagamentos são realizados e no momento em que há a atualização, baseada na taxa de juros contratados.*

Definição 5.6 (Amortização) *Processo para extinguir gradualmente o saldo devedor.*

Definição 5.7 (I.O.F.) *Imposto sobre operações financeiras, calculado através de uma porcentagem sobre o valor financiado.*

Definição 5.8 (Custo efetivo total - CET) *O custo efetivo total é expresso na forma de taxa percentual, incluindo todos os encargos e despesas da operação de crédito, isto é, o CET deve englobar não apenas a taxa de juros, mas também tarifas, tributos, seguros e outras despesas cobradas do cliente.*

Para entedermos o cálculo do CET, suponhamos um financiamento nas seguintes condições:

- Valor finaciado : R$ 1.000,00
- Taxa de juros : 0,95% a.m.
- Prazo da operação : 5 meses
- Tarifa de cadastro : R$ 50,00
- I.O.F. : R$ 10,00

Utilizando o resultado do **Teorema 4.1** da seção 4 obtemos uma prestação de R$ 205,73. Daí, para calcularmos o CET levamos em consideração a diferença entre o valor financiado e as despesas da operação, logo:

Valor do crédito = R$ 1.000,00 - R$ 60,00 = R$ 940,00.

Daí, temos que:

$$940,00 = \left(\frac{205,73}{(1+I)} + \frac{205,73}{(1+I)^2} + \frac{205,73}{(1+I)^3} + \frac{205,73}{(1+I)^4} + \frac{205,73}{(1+I)^5} \right)$$

Com o auxílio de uma calculadora científica ou planilha de cálculo eletrônica obtemos o custo efetivo total(I) de 3,08% a.m. ou 43,93% a.a. e ainda o valor total das prestações de R$ 1.028,65.[10]

Para facilitar a análise por parte do cliente, as instituições financeiras disponibilizam, em seus sítios eletrônicos, programas que simulam o financiamento. Na figura 3 temos um exemplo de uma simulação feita levando em consideração a aquisição de um imóvel novo no valor de R$ 150.000,00, cuja entrada é de R$ 30.000,00 e a renda familiar de R$ 5.000,00 mensais.

Notamos que um conhecimento prévio da Matemática Financeira auxilia e muito no entendimento dos processos de um Financiamento Habtiacional. Além dos conhecimentos básicos abordados no primeiro capítulo, temos que destacar o processo de amortização, ou seja, a maneira de se pagar o saldo devedor. São dois os sistemas de amortização mais utilizados, o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês (Tabela Price). Atualmente o mais utilizado é o SAC o qual veremos com mais detalhes no próximo capítulo onde mostraremos a diferença entre os dois sistemas de amortização.

Valor do imóvel	Prazo máximo	Sistema de Amortização
R$ 150.000,00	360 meses	SAC

Valor da entrada	Valor financiado	Prazo desejável
R$ 30.000,00	R$ 120.000,00	360 meses

Taxa de juros	CET
7,16 % a.a.	8,21 % a.a.

Amortização	Juros
R$ 333,33	R$ 716,00

1ª Prestação	360ª Prestação
R$ 1.096,79	R$ 360,32

Figura 3: Simulação Financiamento - www.caixa.gov.br

6 Sistemas de Amortização

Como já dissemos anteriormente, amortização significa extinguir gradualmente uma dívida. Atualmente, devido aos programas do governo que incentivam o financiamento de imóveis, o termo amortizar passou a ser conhecido pelas pessoas. Hoje em dia, quem paga a prestação do seu imóvel sabe que parte desta prestação quita os juros do financiamento e parte amortiza a dívida, ou seja, abate parte do saldo devedor.

O sistema de amortização mais usado é o Sistema de Amortização Constante(SAC) mas também há outro sistema, o Sistema Francês também conhecido por Tabela Price, nome devido ao seu idealizador Richard Price (Inglês e especialista em finanças).

6.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

No SAC, a amortização em cada período é a mesma, ou seja, a amortização é sempre constante. Vejamos agora o teorema que apresenta os resultados que explicam este sistema.

Teorema 6.1 *Sejam A_k, J_k, P_k e D_k, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida na época k, respectivamente. No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos que:*

i. $A_k = \frac{D_0}{n}$

ii. $D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0$

iii. $J_k = i \cdot D_{k-1}$

iv. $P_k = A_k + J_k$

Demonstração: **i.** Como o sistema é de amortização constante e como a dívida inicial será amortizada em n partes iguais temos que:

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

ii. A situação da dívida na época k será a diferença entre a dívida inicial e as amortizações até a época k, daí:

$$D_k = D_0 - k \cdot A_K$$

de i temos que $A_k = \frac{D_0}{n}$, logo

$$D_k = D_0 - k \cdot A_K \Rightarrow D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0$$

iii. Pela definição de juros apresentada na seção 2 e sendo i a taxa temos que:

$$J_k = i \cdot D_{k-1}$$

A última fórmula é óbvia. $\square$

Exemplo 6.1 *Consideremos uma dívida(D_0) de R\$ 1.500,00 que será paga em 6 meses, com taxa de juros de 2% ao mês pelo Sistema de Amortização Constante(SAC). Faça uma planilha de amortização.*

Como o sistema utilizado é o SAC, temos que:

$$A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{1.500}{6} = 250$$

Faremos a nossa tabela com a seguinte ordem, período(k), prestação (P_k), amortização(A_k), juros (J_k), situação da dívida (D_k) e total pago até o período k (T_k).

k	P_k	A_k	J_k	D_k	T_k
0	-	-	-	1.500	0
1	$250 + 30 = 280$	250	$1.500 \cdot 0,02 = 30$	1.250	280
2	$250 + 25 = 275$	250	$1.250 \cdot 0,02 = 25$	1.000	555
3	$250 + 20 = 270$	250	$1.000 \cdot 0,02 = 20$	750	825
4	$250 + 15 = 265$	250	$750 \cdot 0,02 = 15$	500	1.090
5	$250 + 10 = 260$	250	$500 \cdot 0,02 = 10$	250	1.350
6	$250 + 5 = 255$	250	$250 \cdot 0,02 = 5$	0	1.605

Neste exemplo o valor total pago em juros foi de R\$ 105,00 o que representa 7% da dívida inicial.

Exemplo 6.2 *Considerando uma dívida(D_0) de R\$ 20.000,00 que será paga em 24 meses através do Sistema (SAC) a uma taxa de juros de 1,5% ao mês, determine:*

a) *A amortização em cada período.*

b) *O valor da décima sexta prestação.*

c) *A situação da dívida nesta época.*

a) Como o sistema utilizado é o SAC, temos que:

$$A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{20.000}{24} = 833,33$$

A amortização em cada perído será de R$ 833,33.

b)Pelo resultado do Teorema 6.1 temos :

$$P_{16} = J_{16} + A_{16} \text{ e } J_{16} = i \cdot D_{15}.$$

Daí,

$$D_{15} = \frac{24-15}{24} \cdot 20.000 = 7.500.$$

Logo,

$$J_{16} = 0,015 \cdot 7.500 = 112,5 \text{ e } P_{16} = 112,5 + 833,33 = 945,83$$

Portanto, a décima sexta prestação será R$ 945,83.

c)Pelo resultado do Teorema 6.1 temos :

$$D_{16} = \frac{24-16}{24} \cdot 20.000 = 6.666,67.$$

A situação da dívida na época da décima sexta prestação será de R$ 6.666,67.

6.2 Sistema de Amortização Francês (SAF)

No SAF ou Tabela Price, a prestação em cada período é constante. Vejamos agora o teorema que apresenta os resultados que explicam este sistema.

Teorema 6.2 *Sejam A_k, J_k, P_k e D_k, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida na época k, respectivamente. No SAF, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos que:*

i. $P_k = D_0 \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right)$

ii. $D_k = D_0 \left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} \right)$

iii. $J_k = i \cdot D_{k-1}$

iv. $A_k = P_k - J_k$

Demonstração: **i.** Do Teroema 4.1 temos que:

$$A = P\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right),$$

sendo $A = D_0$ e $P = P_k$, isolando P_k obtemos o resultado,

$$P_k = D_0 \left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right).$$

ii. Observe que D_k é a dívida que será paga na época após $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k, daí:

$$D_k = P_k\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right),$$

substituindo P_k pelo resultado encontrado em (i) obtemos:

$$D_k = D_0\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right)\cdot\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right) \Rightarrow D_k = D_0\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}\right).$$

iii. Pela definição de juros apresentada na seção 2 e sendo i a taxa temos que:

$$J_k = i\cdot D_{k-1}$$

iv. Sabemos que $P_k = A_k + J_k$, daí:

$$A_k = P_k - J_k.$$

□

Exemplo 6.3 *Faça a planilha de amortização, no Sistema Francês, referente aos dados do exemplo 6.1.*

No Sistema Francês, sabemos que a prestação é constante, então iremos primeiramente calcular o seu valor. Pelo Teorema 6.2 temos que:

$$P_k = D_0\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right)$$

onde, $D_0 = 1.500$, $n = 6$ e $i = 0,02$. Daí,

$$P_k = 1.500\left(\frac{0,02}{1-(1+0,02)^{-6}}\right) = 1.500\left(\frac{0,02}{1-(1,02)^{-6}}\right) = 267,79$$

Portanto a prestação será de R$ 267,79. Agora faremos a nossa tabela com a seguinte ordem, período(k), prestação (P_k), amortização(A_k), juros (J_k), situação da dívida (D_k) e total pago até o período k (T_k).

k	P_k	A_k	J_k	D_k	T_k
0	-	-	-	1.500	0
1	$267,79$	$267,79-30=237,79$	$1.500\cdot 0,02=30$	$1.262,21$	267,79
2	$267,79$	$267,79-25,24=242,55$	$1.262,21\cdot 0,02=25,24$	$1.019,66$	535,58
3	$267,79$	$267,79-20,39=247,40$	$1.019,66\cdot 0,02=20,39$	$772,26$	803,37
4	$267,79$	$267,79-15,45=252,34$	$772,26\cdot 0,02=15,45$	$519,92$	1.071,16
5	$267,79$	$267,79-10,40=257,39$	$519,92\cdot 0,02=10,40$	$262,54$	1.338,95
6	$267,79$	$267,79-5,25=262,54$	$262,54\cdot 0,02=5,25$	0	1.606,74

Neste exemplo o valor total pago em juros foi de R$ 106,74, com relação ao SAC(exemplo 6.1) a diferença foi de R$ 1,74. A diferença entre os dois sistemas pode ser considerável em operações que envolvam valores muito grandes financiados a longo prazo.

Como já foi dito e mostrado, no SAC a amortização é constante e no SAF a prestação é constante, neste caso a média dos pagamentos realizados no SAF será sempre maior que a média dos pagamentos realizados no SAC. Nota-se ainda que no SAC as prestações são decrescentes ao longo do período e no SAF as amortizações são crescentes ao longo do período. Essas diferenças são importantes para auxiliar na decisão de qual sistema de amortização escolher.

7 Aplicação na Sala de Aula

Na Matemática Financeira imagina-se que o dinheiro nunca fica parado, neste caso sabemos que o valor do dinheiro sofre uma variação ao longo do tempo, neste panorama uma aplicação interessante da Matemática Financeira é comparar e analisar o valor do dinheiro em épocas diferentes, para isso devemos deslocar as quantias em questão para uma mesma época possibilitando assim a análise e a decisão que temos que tomar em cada situação.

7.1 Planejamento da aula

O assunto, como foi dito acima, será a análise do valor do dinheiro ao longo do tempo, assunto este presente em empréstimos, compras, investimentos, financiamentos, etc.

Esta aula é destinada aos alunos do ensino médio da educação básica com os seguintes objetivos:

- Utilizar os conceitos básicos de juros, capitais e taxas;
- Aplicar os resultados dos teoremas estudados nos capítulos anteriores;
- Deslocar uma certa quantia ao longo do tempo em consonância com a taxa de juros chamada de"taxa mínima de atratividade";
- Analisar e comparar a melhor opção para o uso do dinheiro referente a um rendimento;

O desenvolvimento desta aula se dará através de problemas resolvidos com situações que envolvem o valor do dinheiro em épocas diferentes e em diferentes opções de aplicações e uso. Poderemos dividir a aula em duas etapas, na primeira parte fazer uma revisão dos principais conceitos abordados nas primeiras seções e na segunda parte trabalhar com os exemplos resolvidos.

7.2 Exemplos Resolvidos

Na resolução dos exemplos, além dos resultados estudados nas seções anteriores, usaremos também a relação abaixo, entre Valor Atual(V_A) e Valor Futuro(V_F), para o deslocamento de quantias no tempo.

$$V_F = V_A(1+i)^n \Rightarrow V_A = \frac{V_F}{(1+i)^n}$$

Daí, se quisermos adiantar um certo valor em n períodos basta multiplicar por $(1+i)^n$ e se quisermos antecipar o valor em n períodos basta dividir por $(1+i)^n$.

Exemplo 7.1 *João fez um empréstimo de R\$ 500,00, a juros de 10% ao mês. Após dois meses, João pagou R\$ 250,00 e um mês após liquidou a dívida. Neste caso qual foi o valor que João pagou para liquidar a dívida?*

Para resolver o problema, iremos igualar à época "zero" os pagamentos realizados por João ao valor da dívida.

Sendo P o valor do último pagamento temos que:

$$500 = \frac{250}{(1+0,10)^2} + \frac{P}{(1+0,10)^3} \Rightarrow P = 500(1,10)^3 - 250(1,10) = 390,50.$$

Portanto o valor do último pagamento realizado por João foi de R$ 390,50.

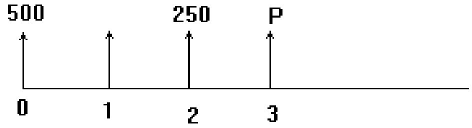

Figura 4: Esquema de pagamento ex. 7.1

Exemplo 7.2 *Sônia tem as seguintes opções de pagamento na compra de um fogão que custa R$ 480,00:*

- *à vista com 5% de desconto, ou seja, R$ 456,00.*
- *Três prestações mensais de R$ 160,00 sendo a primeira no ato da compra.*
- *Sete prestações mensais de R$ 70,00 sendo a primeira no ato da compra.*

Se o dinheiro vale 2% ao mês, qual a melhor opção para Sônia?

Deslocando, nas outras duas situações, os pagamentos à época "zero" temos:

- $V_2 = 160 + \frac{160}{(1{,}02)} + \frac{160}{(1{,}02)^2} = 470,65.$
- $V_3 = 70 + \frac{70}{(1{,}02)} + \frac{70}{(1{,}02)^2} + \frac{70}{(1{,}02)^3} + \frac{70}{(1{,}02)^4} + \frac{70}{(1{,}02)^5} + \frac{70}{(1{,}02)^6} = 462,10.$

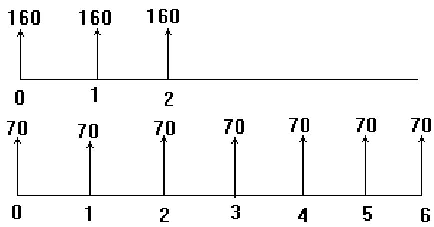

Figura 5: Esquema de pagamento ex. 7.2

Portanto a melhor opção para Sônia é o pagamento à vista com 5% de desconto.

Exemplo 7.3 *Se para Marcelo o dinheiro vale 25% ao mês, qual das três opções de pagamento abaixo ele deve escolher na compra de uma calça?*

- *À vista com 30% de desconto.*
- *Em duas prestações, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.*
- *Em três prestações iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.*

Primeiramente suponhamos um valor de R$ 90,00 para a mercadoria. Neste caso teríamos o seguinte esquema de pagamento:

i) R$ 63,00 à vista. (30% de desconto).

ii) duas prestações de R$ 45,00, sendo a primeira paga um mês após a compra.

iii) três prestações de R$ 30,00 sendo a primeira paga no ato da compra.

Igualando as situações ii) e iii) à época "zero" e levando em consideração a taxa de 25% ao mês temos:

ii) $V_2 = \frac{45}{(1{,}25)} + \frac{45}{(1{,}25)^2} = 64,80.$

iii) $V_3 = 30 + \frac{30}{(1{,}25)} + \frac{30}{(1{,}25)^2} = 73,20.$

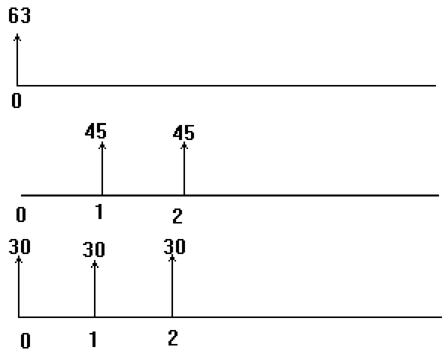

Figura 6: Esquema de pagamento ex. 7.3

Neste caso a melhor opção para Marcelo é o pagamento à vista.

Exemplo 7.4 *Paulo dispõe de um capital de R$ 100.000,00 e pretende adquirir um apartamento cujo valor é R$ 300.000,00, como ele terá que financiar uma grande parte do imóvel, ele fez as seguintes simulações:*

- *dar uma entrada no valor de R$ 100.000,00 financiando o restante com taxa de 9,5% a.a. no prazo de 30 anos através do Sistema de Amortização Constante (SAC).*
- *investir o capital durante 5 anos na poupança, cujo o rendimento mensal é de 0,5%, aumentando assim a entrada. O prazo de financiamento pelo SAC passa a ser de 25 anos a uma taxa de 9,5% a.a., durante estes 5 anos ele pagará um aluguel que representa uma despesa mensal de 0,6% do valor do imóvel.*
- *utilizar 50% do capital para dar de entrada no apartamento financiando R$ 250.000,00 no prazo de 30 anos pelo SAC, neste período investir o restante do capital na poupança.*

Neste panorama, desconsiderando outros encargos e a valorização do imóvel, qual seria a melhor opção para Paulo?

Para verificarmos qual a melhor situação iremos analisar em qual delas ele terá o menor "prejuízo", ou seja, o menor gasto para adquirir o apartamento no prazo de 30 anos.
Analisando as três situações temos:

- Na primeira situação utilizando os resultados do Teorema 6.1 e fazendo a planilha de amortização, pelo SAC, constata-se que Paulo terá um gasto total, com o financiamento, de R$ 474.054,00, neste caso o valor total gasto será de:

$$474.054,00 + 100.000,00 = 574.054,00.$$

- Na segunda situação iremos utilizar o Teorema 2.1 para calcular o montante que Paulo terá ao final de 5 anos aplicando o capital na poupança. Neste caso temos:

  $$M = 100.000(1,005)^{60} = 134.885,02$$

  Este valor será a entrada para a compra do apartamento, fazendo a planilha de amortização para esta situação, Paulo irá pagar ao final do financiamento um total de R$ 353.763,00. Além disso ele terá um gasto de R$ 1.800,00 mensais com o aluguel, ou seja, R$ 108.000,00 ao final de 5 anos.

  Portanto nesta situação o valor total gasto será de:

  $$134.885,02 + 353.763,00 + 108.000,00 = 596.648,02.$$

- Na terceira opção a entrada será de R$ 50.000,00, fazendo a planilha de amortização, Paulo terá um gasto total, com o financiamento, de R$ 592.568,00.

  Como 50% do capital ficará investido na poupança, Paulo terá, ao final do período, um montante no valor de:

  $$M = 50.000(1,005)^{360} = 301.128,76.$$

  Neste caso ao final do período, o valor total gasto será de:

  $$50.000,00 + 592.568,00 - 301.128,76 = 341.439,24.$$

  Portanto a situação em que Paulo terá o menor "prejuízo" será a terceira opção.

Na maioria dos exemplos resolvidos deslocamos as quantias sempre para a época "zero", decisão esta que não impede de deslocarmos as quantias para qualquer época uma vez que estes deslocamentos, em consonância com a taxa de juros, são equivalentes para a tomada de decisões. Por fim fizemos uso dos resultados do sistema de amortização constante e dos juros compostos que auxiliaram na análise da escolha de uma melhor opção de financiamento habitacional.

8 Considerações Finais

A Matemática Financeira se apresenta como uma importante ferramenta a ser utilizada no cotidiano das pessoas, as relações comerciais exigem a cada dia um pensamento racional no momento de tomarmos alguma decisão referente a transações monetárias. Neste panorama o ensino da Matemática Financeira tem como objetivo nos auxiliar nas análises das operações financeiras das quais fazemos uso diariamente e nos proporcionar a chance de optar e decidir o que de melhor convém, interpretando as opções que nos são oferecidas pelo mercado.

O Financiamento Habitacional, apesar de parecer uma operação de empréstimo complexa, pode ser bem interpretado através dos resultados básicos da Matemática Financeira, seus principais conceitos e suas etapas são embasadas nas definições que temos de juros, taxas, período, porcentagens, amortização, etc.

Além de despertar o interesse e o senso crítico dos alunos, esta e outras aplicações são os primeiros passos para o entendimento de processos mais complexos, como a aplicação em bolsas de valores, fundos de investimentos, imposto de renda, financiamentos, entre outros. A busca deste entendimento motiva os alunos, cada vez mais, a buscar o conhecimento desta importante ferramenta da Matemática, por isso a Matemática Financeira é um conteúdo indispensável e está presente nas proposições curriculares e no currículo básico comum de alunos do ensino fundamental e médio da educação básica.

Referências

[1] Rimsa, Leonardo G., *Matemática Financeira Concisa - Para Concursos*. Belo Horizonte: Editora IUS, 2010.

[2] Morgado, Augusto C., Wagner, Edurado., Zani, Sheila C., *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[3] Iezzi, Gelson., Hazzan, Samuel., Degenszajn, David M., *Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 11*. São Paulo: Atual Editora, 2010.

[4] Lima, Elon L., Carvalho, Paulo C.P., Wagner, Eduardo., Morgado, Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

[5] de Carvalho, João Bosco P., Roque, Tatiana., *Tópicos de História da Matemática*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[6] Eves, Howard., *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

[7] Maor, Eli., *e: A História de Um Número*. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008, Cap.3.

[8] Carneiro, Mário Jorge Dias., Spira, Michael., Sabatucci, Jorge., *Proposta Curricular - CBC, Matemática - Ensinos Fundamental e Médio*. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais.

[9] Brasil, Portal., *Financiamento Habitacional*. Publicado em 05/11/2009. Disponível em: http://www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2009/11/financiamento-habitacional. Acesso em: 15/09/2013.

[10] *FAQ - Custo Efetivo Total*. Atualizado em julho de 2013. Disponível em: http://www.bcb.gov.br/?CETFAQ. Acesso em: 15/09/2013.

[11] *Simulador Habitação*. Disponível em: http://wwwcaixa.gov.br - Habitação - Simulador. Acesso em: 18/09/2013.