Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Otimização Matemática: Cálculo dos Extremos de uma Função

Evandro Barbosa Nunes

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	EVANDRO BARBOSA NUNES					
E-mail:	evandro.b@gmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [ ]Sim [X] Não						
Vínculo empregatício do autor		Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00.889.834/0001-08	
Título:	Otimização Matemática: Cálculo dos Extremos de uma Função					
Palavras-chave:	Otimização, Funções de uma, duas ou três variáveis, Máximos e Mínimos, Método de Lagrange					
Título em outra língua:	Mathematical optimization: Calculation of Extremes of a Function					
Palavras-chave em outra língua:	Optimization, Functions of one, two or three variables, Maximum and Minimum, Method of Lagrange					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	03/07/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT					
Orientador (a):	Dr. Maxwell Lizete da Silva					
E-mail:	maxwell@ufg.br					
Co-orientador (a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Evandro Barbosa Nunes
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 29 / 08 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Evandro Barbosa Nunes

Otimização Matemática: Cálculo dos Extremos de uma Função

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

N972o

Nunes, Evandro Barbosa.
Otimização matemática [manuscrito]: cálculo dos extremos de uma função / Evandro Barbosa Nunes. - 2014.
59 f. : il., figs, tabs.

Orientador Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras e tabelas.

1. Funções (Matemática) 2. Matemática 3. Funções – Cálculo dos extremos. I. Título.

CDU – 517.5

Evandro Barbosa Nunes

Otimização Matemática: Cálculo dos Extremos de uma Função

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 03 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Silvia Cristina Belo e Silva.

Prof.ª Drª. Sílvia Cristina Belo e Silva
MAF/PUC-GO

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Evandro Barbosa Nunes graduou-se em Matemática pela Universidade Católica de Brasília no ano de 2001. Atua como Professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal - SEEDF desde 1999.

Dedico este trabalho a minha esposa Luciléia Lima Nunes, aos meus filhos João Gabriel Lima Nunes e Maria Eduarda Lima Nunes, a minha irmâ Patrícia Barbosa Nunes, ao meu pai Edvaldo Nunes da Rocha e a minha mãe Paula Francinete Barbosa Nunes.

Agradecimentos

A minha esposa, Luciléia, pelo amor, paciência e dedicação incondicional nessa caminhada

Aos meus filhos, João e Maria, pelas alegrias que me dão todos os dias.

Aos meus pais, Edvaldo e Paula, e minha irmã, Patrícia, que sempre incentivaram e apoiaram a minha busca pela educação.

A todos os professores que passaram pela minha vida.

Aos amigos e familiares que sempre deram uma palavra de incentivo na realização desse trabalho, em especial ao amigo Emilio Curi Neto, pelas boas horas que passamos nas viagens para Goiânia.

Ao Professor Dr. Maxwell Lizete da Silva por sua orientação precisa.

A Secretaria de Educação do Distrito Federal pelo afastamento do trabalho para dedicação total ao curso.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras

Notação

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^2$ - representação do espaço de duas dimensões

$\mathbb{R}^3$ - representação do espaço de três dimensões

$\mathbb{R}^n$ - representação do espaço de n dimensões

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ - Intervalo aberto

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - Intervalo fechado

∞ - infinito

$f : A \to B$ - função f com domínio A e contradomínio B

$\dfrac{df}{dx}$ ou f_x - derivada de f em relação a x

$x \to a$ - representação de x tendendo a a

$A \setminus B$ - elementos do conjunto A que não pertencem ao conjunto B

Resumo

Problemas de otimização procuram maximizar ou minimizar uma determinada função, eles desempenham um papel importante no mundo real. Muitas aplicações práticas de ciências como engenharia e economia, podem ser formuladas através de problemas de otimização, como, por exemplo, a minimização da quantidade de energia usada em uma fábrica ou a maximização dos investimentos de uma pessoa. Nesse trabalho trataremos com questões de funções de uma, duas ou três variáveis na busca pelo ponto cujo o valor é máximo ou mínimo, será tratado conteúdos que podem ser trabalhados no ensino médio, como a Desigualdade das Médias, Função Quadrática e também, temas que podem ser explorados em cursos de graduações, no caso das Derivadas e o Método de Lagrange, todos os tópicos possuem exemplos interessantes sobre aplicações dos conceitos estudados.

Palavras-chave

Otimização, Funções de uma, duas ou três variáveis, Máximos e Mínimos, Método de Lagrange

Abstract

Optimization problems seek to maximize or minimize a certain function, they play an important role in the real world. Many practical applications of sciences like engineering and economics can be formulated through optimization problems, for example, minimizing the amount of energy used in a factory or maximizing the investment of a person. In this work we will deal with issues of functions of one, two or three variables in the search for the point whose value is maximum or minimum, will be treated contents that can be worked in high school, as the Inequality of Means, Quadratic Function and also themes that can be explored in graduate course, in the case of Derivative and Method of Lagrange, all threads have interesting examples of applications of the concepts studied.

Keywords

Optimization, Functions of one, two or three variables, Maximum and Minimum, Method of Lagrange

1 Introdução

O desenvolvimento das sociedades como o conhecemos foi fruto de uma intensa busca da melhora dos mecanismos que regem a vida das pessoas. Desde os primórdios o homem pensa em maneiras de criar, modificar ou substituir uma tecnologia em outra para aumentar sua capacidade, velocidade de produção e lucro ou diminuir o tempo de criação de um objeto e reduzir os seus custos.

Na era da globalização essa procura por inovação é uma constante na vida das pessoas e empresas. Todos os dias são lançados novos produtos que desempenham uma função melhor ou agregam características a mais que o seu antecessor. A matemática tem um papel preponderante nessa evolução. É ela a responsável pela compreensão dos conhecimentos necessários para os saltos tecnológicos das sociedades modernas.

É através da busca em responder um problema real que os avanços ocorrem, a fração, por exemplo, é resultado da necessidade em resolver problemas do dia a dia. Por certo tempo, o homem viu a necessidade apenas em utilizar os números naturais, para ele isso era mais que suficiente, mas à medida que valores menores seriam mais eficazes, fez-se necessário o desenvolvimento de uma forma de representação das partes de um número natural, assim as frações vieram para resolver essa questão, como diz Boyer [2],

> "Os homens da Idade da Pedra não usavam frações mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações."

Nesse trabalho, será abordado temas envolvendo otimização de uma função, mas o que significa otimizar, segundo o dicionário Houaiss [8], tem-se o seguinte significado para esse termo,

> "Tirar o melhor rendimento de (algo), criando as condições mais favoráveis possíveis."

Nesse contexto, em matemática, o termo está ligado a calcular o ponto "ótimo" de uma função, isto é, o valor que maximiza ou minimiza determinada função. Problemas que envolvem otimização possuem uma vasta área de aplicação, como engenharia, biologia, química, informática etc.

Assim, é fundamental para o processo de otimização matemática, primeiramente criar o modelo matemático a ser trabalhado. A modelagem matemática, tão estudada atualmente, serve de base para a montagem e entendimento do problema proposto, segundo Burak [16], tem-se a seguinte definição para Modelagem Matemática,

> "Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões."

De maneira geral, tem-se que a Modelagem Matemática visa tentar moldar uma situação através de estruturas intrísecas ao sistema a ser analisado. Esse trabalho estará limitado ao uso de situações onde o modelo matemático será representado por equações explicitas no enunciado das questões ou o problema trará implicitamente equações facilmente reconhecidadas.

De posse do modelo matemático com suas equações, defini-se quais são os objetivos a serem alcançados. A resolução de um problema modelado está em encontrar as soluções para o conjunto de equações propostas e em alguns casos, que é o foco desse trabalho, encontrar as soluções otimizadas, isto é, aquelas soluções que maximizam ou minimizam uma situação e ao mesmo tempo respeitam todas as condições impostas pelo problema em análise.

Será demonstrado nesse trabalho métodos de cálculo dos extremos (máximos e mínimos) de uma função, utilizando inicialmente procedimentos conhecidos como a Desigualdades das Médias e a Função Quadrática para funções de uma variável. Já para funções de duas e três variáveis, se usará um conhecimento mais apurado para o encontro de pontos de máximo e mínimo, como é o caso das Derivadas e o Método de Lagrange para uma função com uma restrição.

2 Máximos e Mínimos de uma Função

2.1 Médias e Desigualdade das Médias

As Desigualdades das Médias é uma interessante abordagem para o cálculo de máximos e mínimos, sua idéia é simples e muito fácil de ser aplicada, mas infelizmente, é muito pouco utilizada pelos professores do Ensino Médio, que apenas usam o conceito de média aritmética para resolver alguns exercícios quando se faz necessário.

Definição 2.1.1 *Dados n números reais positivos, a_1, a_2,..., a_n , define-se*

- *A média aritmética de a_1, a_2,..., a_n como o número $A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.*
- *A média geométrica de a_1, a_2,..., a_n como o número $G = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$.*

Teorema 2.1.1 (Desigualdade entre as Médias) *Sejam a_1, a_2,..., a_n, números reais positivos. A média aritmética(A) é sempre maior ou igual que a média geométrica(G), ocorrendo a igualdade se, e somente se, os números forem todos iguais, isto é,*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq G = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \quad e \quad A = G \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \cdots = a_n.$$

Uma demonstração elegante para esse teorema pode ser vista no Apêndice $A.1$.

Exemplo 2.1.1 *Para $x > 0$, encontrar o valor mínimo para $ax^n + \dfrac{b}{x^n}$, com a, b e n positivos.*

Solução

Sejam $a_1 = ax^n$ e $a_2 = \dfrac{b}{x^n}$. Pelo Teorema 2.1.1, tem-se,

$$\begin{aligned} A &\geq G \\ \frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1.a_2} \\ \frac{ax^n + \frac{b}{x^n}}{2} &\geq \sqrt{ax^n \cdot \frac{b}{x^n}} = \sqrt{ab} \\ ax^n + \frac{b}{x^n} &\geq 2 \cdot \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Assim, o valor mínimo de $ax^n + \dfrac{b}{x^n}$ será igual $2\sqrt{ab}$, que ocorre em $x = \sqrt[2n]{\dfrac{b}{a}}$.

Uma aplicação do caso descrito no exemplo anterior pode ser trabalhada na seguinte questão.

Aplicação 2.1.1 *Um caminhão faz uma viagem em uma estrada regular de 400 km a uma velocidade quase constante. O caminhão gasta combustível a uma taxa de* $1 + \dfrac{x}{40} + \dfrac{x^2}{300}$ *litros por hora, a uma velocidade de* x *km por hora. Se o custo do combustível é de* k *reais por litro, e o salário do motorista é* $8k$ *por hora, a que velocidade o caminhão deve ser conduzido para minimizar o custo total da viagem, incluindo os custos de combustível e salário do motorista?*

Solução

A uma velocidade de x km por hora, a viagem gastará $\dfrac{400}{x}$ horas.

O salário do motorista será $8k \cdot \dfrac{400}{x} = \dfrac{3200k}{x}$ reais.

O custo de combustível é de $k \cdot (1 + \dfrac{x}{40} + \dfrac{x^2}{300})$ reais por hora. Logo, o custo total de combustível será dado pelo produto desta equação por $\dfrac{400}{x}$, cujo resultado é $k \cdot (\dfrac{400}{x} + 10 + \dfrac{4x}{3})$.

Agora, somando $\dfrac{3200k}{x}$ e $k \cdot (\dfrac{400}{x} + 10 + \dfrac{4x}{3})$, temos que o custo total da viagem é

$$k \cdot (\frac{3600}{x} + 10 + \frac{4x}{3}) \;=\; 10k + k\left(\frac{3600}{x} + \frac{4x}{3}\right).$$

Como $10k$ e k são constantes, basta encontrar o mínimo para $\dfrac{3600}{x} + \dfrac{4x}{3}$.

Assim, pelo Exemplo 2.1.1, tem-se que o mínimo de $\dfrac{3600}{x} + \dfrac{4x}{3}$ ocorrerá em $x = \sqrt{\dfrac{3600}{\frac{4}{3}}} \simeq 51,96$ km por hora.

Exemplo 2.1.2 *Se* a *é uma constante positiva, encontrar o valor mínimo de* $x^2 + \dfrac{a}{x}$ *para todo* $x > 0$.

Solução

Como o produto de x^2 por $\dfrac{a}{x}$ não é uma constante, não pode-se aplicar o mesmo método do Exemplo 2.1.1.

Para contornar essa dificuldade, basta reescrever a soma da seguinte forma,

$$x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}.$$

Agora, seja $a_1 = x^2$, $a_2 = \dfrac{a}{2x}$ e $a_3 = \dfrac{a}{2x}$, logo pelo Teorema 2.1.1, tem-se;

$$\begin{aligned}
A &\geq G \\
\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} &\geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \\
\frac{x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}}{3} &\geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{a}{2x} \cdot \frac{a}{2x}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\
x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x} &\geq 3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor mínimo de $x^2 + \dfrac{a}{x}$ será dado por $3\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, que ocorre quando $x^2 = \dfrac{a}{2x}$, isto é, se $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}$.

O exemplo anterior serve para resolver a seguinte questão.

Aplicação 2.1.2 *Uma caixa, sem tampa, deve ser construída com a forma de um paralelepípedo de base quadrada. O volume da caixa será de 4 m^3. Encontre a área mínima para construção dessa caixa.*

Solução

Sejam x e y a medida da base e a altura da caixa, respectivamente, como descreve a Figura 1.

Tem-se que a área total A da caixa é dada pela soma da área da base mais a área lateral, ou seja,

$$A = x^2 + 4xy.$$

Como o volume é dado por $x^2y = 4$, vem que $y = \dfrac{4}{x^2}$.

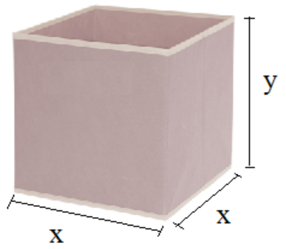


Figura 1: Esboço da caixa sem tampa

Agora, substituindo $y = \dfrac{4}{x^2}$ em $A = x^2 + 4xy$, vem que,

$$A = x^2 + 4x \cdot \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad A = x^2 + \frac{16}{x}.$$

Pelo Exemplo 2.1.2, tem-se que o valor mínimo para construção da caixa é $3\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{2}{3}} =$ $12\ m^2$.

2.2 Funções de Grau 2

Até o Ensino Médio os problemas de otimização matemática estão contidos no assunto sobre funções quadráticas, onde deve-se encontrar uma função para modelar a questão envolvida e em seguida, encontrar as coordenadas dos vértices do gráfico e analisar se é ponto de máximo ou de mínimo da função. Novamente muitos equívocos acontecem no ensino desse tópico, a grande maioria dos livros apenas trazem as fórmulas sem nenhuma demonstração ou justificativa, assim os alunos decoram o que deve ser feito e aplicam nas questões de maneira totalmente mecânica.

Definição 2.2.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de quadrática quando existem a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

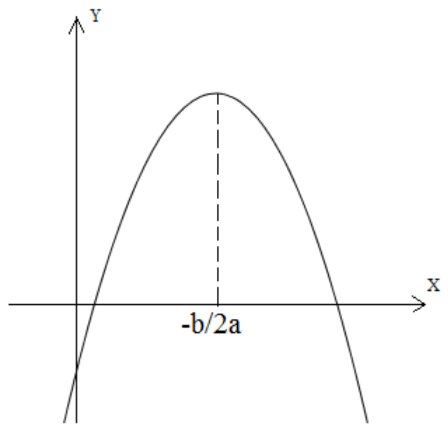
É de fato conhecido que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e que se $a > 0$, então a parábola tem a concavidade para cima, e para baixo se $a < 0$. Para mais detalhes veja [3].

Assim, dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e a não nulo, tem-se,

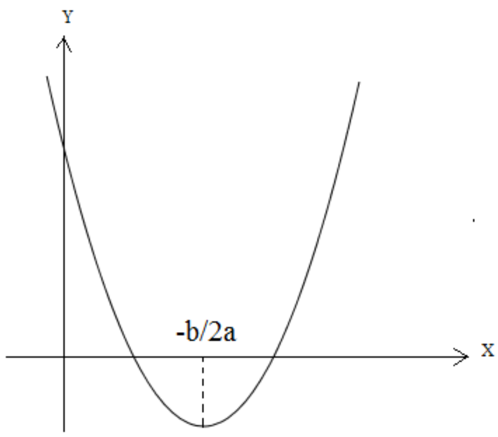
$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right).
\end{aligned}
$$

Logo para $x = -\dfrac{b}{2a}$ o termo $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ é zero. Portanto, indiferente do valor de $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$, temos que

- para $a < 0$, o maior valor de $f(x)$ ocorrerá em $x = -\dfrac{b}{2a}$,
- para $a > 0$, o menor valor de $f(x)$ ocorrerá em $x = -\dfrac{b}{2a}$.



(a) Gráfico para $a < 0$



(b) Gráfico para $a > 0$

A seguir, serão analisados dois exemplos .

Exemplo 2.2.1 *Um vendedor compra calças diretamente da fábrica ao preço de R\$ 720,00 a caixa com 12 calças. O valor de revenda sugerido pela fábrica é de R\$ 160,00 a calça. A esse preço o vendedor costuma vender 30 caixas por mês. No entanto, a experiência do vendedor mostra que para cada R\$ 5,00 que oferece de desconto no preço sugerido da fábrica, ele consegue vender 3 caixas a mais. Por quanto deve vender cada calça para que seu lucro mensal seja o máximo possível?*

Solução

Seja x o valor que cada calça deverá ser vendida no mês.

Uma caixa com 12 calças custa R\$ 720,00, logo o preço de custo de cada calça é de R\$ 60,00.

O lucro de cada calça será de $x - 60$.

O valor x é múltiplo de 5, pois o vendedor dá desconto de R\$ 5,00 em R\$ 5,00, logo o total de caixas vendidas no mês será dado por $30 + 3 \cdot \dfrac{160 - x}{5} = \dfrac{630 - 3x}{5}$.

Portanto, a função lucro mensal L é,

$$L(x) = (x - 60) \cdot \left(\frac{630 - 3x}{5}\right) \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad L(x) = -\frac{36}{5}x^2 + 1944x - 90720.$$

Como $a < 0$, tem-se que o máximo de L ocorrerá em $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Segue que,

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1944}{2\left(-\frac{36}{5}\right)} = 135.$$

Logo, o valor de venda de cada calça para se ter lucro máximo dever ser de R\$ 135,00.

Exemplo 2.2.2 *Nas férias quando ocorre um aumento no consumo de refrigerantes, um grupo de catadores decidiu coletar latas de aluminio para reciclar, conseguindo recolher 300 latas por dia. A indústria de reciclagem pagava R\$ 0,10 por lata, mas, a esse preço as latas estavam ficando acumuladas nos galpões, mais rapidamente do que poderiam ser recicladas. Assim, no dia em que os catadores iniciaram a coleta, a indústria mudou sua estratégia de compra e passou a pagar um valor menor por lata: houve uma redução fixa e diária correspondente a 1,25% do preço inicial de R\$ 0,10.*

Todas as latas coletadas pelos catadores devem ser entregues de uma única vez, por causa dos custos de transporte. Assim, os catadores ficaram em um dilema: de início, o preço era melhor, mas eles tinham poucas latas; por outro lado, se esperassem muito, o preço ficaria cada vez menor. Determinar o número de dias em que os catadores devem terminar a coleta e vender as latas, de modo que o grupo receba a quantia máxima possível.

Solução

Seja d o número de dias da coleta, assim, o número de latas recolhidas n será dado por:

$$n(d) = 300 \cdot d.$$

O valor de cada lata que inicialmente era vendida por R$ 0,10 sofrerá uma redução fixa e diária de 1,25%, logo o preço p de uma lata será:

$$p(d) = 0,10 - \frac{1,25}{100} \cdot d \quad \Rightarrow \quad p(d) = \frac{1}{10} - \frac{d}{80}.$$

O valor v arrecadado pelos catadores em d dias de coleta é dado por $v(d) = n(d) \cdot p(d)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
v(d) &= n(d) \cdot p(d) \\
v(d) &= 300 \cdot d \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{d}{80}\right) \\
v(d) &= -\frac{3}{8}d^2 + 30d.
\end{aligned}$$

Assim, v é uma função quadrática com $a < 0$, logo o valor máximo ocorre em $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Segue que, $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{30}{2 \cdot \left(-\dfrac{3}{8}\right)} = 40.$

Portanto, os catadores devem concluir a coleta e vender as latas em 40 dias.

Vale lembrar, que os catadores tem até o 79º dia para entregar as latas para terem algum lucro, pois a partir do 80º dia as latas não terão valor para vender a indústria, devido a $v(80) = 0$.

2.3 Funções de Grau maior que 2

Para funções de grau igual ou superior a 2 pode-se utilizar os conhecimentos desenvolvidos no Cálculo Diferencial para encontrar as soluções otimizadas dos problemas, ou seja, os pontos de máximos ou mínimos das funções.

Definição 2.3.1 *Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ela terá máximo absoluto em $c \in D$, se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Assim, o valor de $f(c)$ é o valor máximo de f em D.*

Definição 2.3.2 *Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ela terá mínimo absoluto em $c \in D$, se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Assim, o valor de $f(c)$ é o valor mínimo de f em D.*

Obs.: Dependendo do domínio escolhido uma função pode não ter nem máximo e nem mínimo absoluto. Como 0 e 1 não pertencem ao intervalo $(0, 1)$, a função abaixo não possui máximo e nem mínimo absoluto.

$$\begin{array}{rcl} f : (0,1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Já para a função,

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

como f é uma função crescente, tem-se que o máximo absoluto para ela ocorre em $x = 1$ e o mínimo absoluto em $x = 0$.

Definição 2.3.3 *Diz-se que $f(c)$ é o valor máximo local de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se existe um intervalo aberto I contido em $\mathbb{R}$, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$.*

Definição 2.3.4 *Diz-se que $f(c)$ é o valor mínimo local de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se existe um intervalo aberto I contido em $\mathbb{R}$, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$.*

Definição 2.3.5 *Um ponto A é dito de fronteira de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se toda bola aberta com centro em A contém pontos que estão no conjunto D e, também, pontos que não estão em D.*

Definição 2.3.6 *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se existe uma bola fechada $B_r(0)$ de centro em $0 = (0, 0, \cdots, 0)$ e raio r tal que $D \subset B_r(0)$.*

Definição 2.3.7 *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ se todos os pontos de fronteira de D pertencem a D.*

Teorema 2.3.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo aberto D. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in D$ e f é derivável em c, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração

Supondo que f tem um máximo local em $x = c$. Como f é derivável em c, tem-se

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Como $f(c)$ é máximo local, existe um intervalo $(a, b) \in D$ tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Logo $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Para $x < c$, tem-se $x - c < 0$ e, portanto $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{1}$$

Agora, se $x > c$, então $x - c > 0$ e portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{2}$$

Como (1) e (2) representam o mesmo número, tem-se por essas desigualdades que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0.$$

De modo análogo, prova-se o caso quando f tem mínimo local.

No teorema anterior, foi definido que o domínio é um conjunto aberto $D = (a, b)$. Caso seja um conjunto fechado $[a, b]$, bastaria encontrar primeiro os pontos críticos em (a, b), calcular os valores de $f(a)$ e $f(b)$ e em seguida comparar os valores nos pontos críticos com $f(a)$ e $f(b)$, o que tiver maior valor será o máximo absoluto e o menor será o mínimo absoluto. Isto é baseado no Teorema de Weierstrass, descrito abaixo.

Teorema 2.3.2 *Seja K um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então f assume máximo e mínimo absoluto em K.*

A demontração desse teorema pode ser encontrada em Elon [4], Cap-1, p-19.

Definição 2.3.8 *Seja um ponto c do domínio de uma função f. Esse ponto será chamado de ponto crítico se ocorrer um dos casos abaixo:*

(i) f não é derivável em $x = c$,

(ii) f é derivável em $x = c$ e $f'(c) = 0$.

Proposição 2.3.1 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).*

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$,

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração A prova dessa proposição pode ser encontrada em [5], [12] ou [14].

Teorema 2.3.3 (Teste da Derivada Primeira) *Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) e c um ponto crítico de f, com $c \in (a, b)$.*

(i) Se f' passa de positiva para negativa em c, então f tem máximo local em c.

(ii) Se f' passa de negativa para positiva em c, então f tem mínimo local em c.

Demonstração

(i) Pela Preposição 2.3.1, pode-se concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Logo, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um máximo local em c.

(ii) Pela Preposição 2.3.1, pode-se concluir que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo, $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Seque que f tem um mínimo local em c.

Teorema 2.3.4 (Teste da Derivada Segunda) *Seja f uma função com derivada $f'(x)$ contínua em um intervalo aberto D e $c \in D$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ exitir, então*

(i) para $f''(c) < 0$, f possui um máximo local em c,

(ii) para $f''(c) > 0$, f possui um mínimo local em c,

(iii) para $f''(c) = 0$, nada pode se afirmar.

Demonstração

Para o caso (i). Supondo $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Logo, $a < x < c \quad \Rightarrow \quad x - c < 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{f'(x)}{x - c} < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0.$

E, $c < x < b \quad \Rightarrow \quad x - c > 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{f'(x)}{x - c} < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0.$

Assim f passa de crescente para decrescente em c, e pelo Teorema 2.3.3, logo f tem máximo local em $x = c$.

O caso (ii) possui demonstração análoga.

Duas aplicações do uso das derivadas para encontrar a solução otimizada são mostradas a seguir.

Aplicação 2.3.1 (Lei de Refração de Snell) *Um raio de luz propaga-se de uma fonte A no ar até um ponto B na água, considere os ângulos de incidência e refração θ_a e θ_b, conforme Figura 2. Supondo que no ar a luz tenha uma velocidade v_a e v_b na água, mostre que o tempo mínimo desse percurso ocorrerá se*

$$\frac{sen(\theta_a)}{sen(\theta_b)} = \frac{v_a}{v_b}.$$

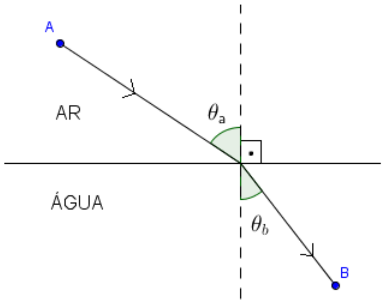


Figura 2: Trajetória do raio de luz

Solução

De acordo com a Figura 3, e sabendo que o tempo é igual a distância dividida pela velocidade, temos que o tempo total t do raio de luz no percurso AB é dado por:

$$t = \frac{AP}{v_a} + \frac{PB}{v_b}.$$

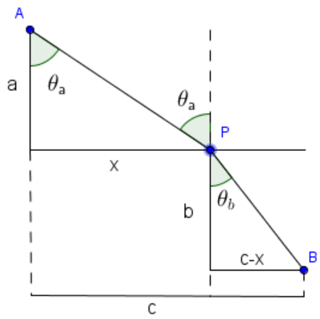


Figura 3: Esboço do problema de Snell

Logo,

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_b}.$$

Deriva-se t, portanto,

$$t'(x) = \frac{x}{v_a\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x - c}{v_b\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Assim,

$$t'(x) = \frac{sen(\theta_a)}{v_a} - \frac{sen(\theta_b)}{v_b}.$$

Agora, faz-se $t'(x) = 0$. Segue que,

$$\frac{sen(\theta_a)}{v_a} - \frac{sen(\theta_b)}{v_b} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sen(\theta_a)}{v_a} = \frac{sen(\theta_b)}{v_b} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sen(\theta_a)}{sen(\theta_b} = \frac{v_a}{v_b}.$$

Para mostrar que a resposta nos fornece o mínimo de t, basta verificar que a derivada segunda de t é positiva. De fato, temos,

$$t''(x) = \frac{a^2}{v_a(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2}{v_b\left[b^2 + (c - x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Como todos os termos são positivos, logo $t''(x) > 0$.

Aplicação 2.3.2 *Um muro tem 2 metros de altura, é paralelo à parede de um edifício, e está a 1 metro desta. Determine o comprimento da menor escada que vá do chão à parede do edifício, tocando o muro na sua extremidade, como na figura abaixo.*

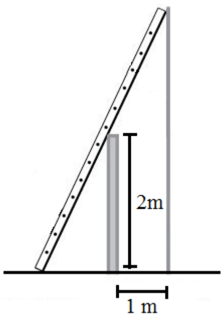


Figura 4: Problema da Escada Mínima

Solução

Com o auxílio da Figura 5, tem-se,

$$\begin{aligned} L &= a + b \\ L &= \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{1 + y^2}, \ \textit{onde } x > 0 \textit{ e } y > 0. \end{aligned}$$

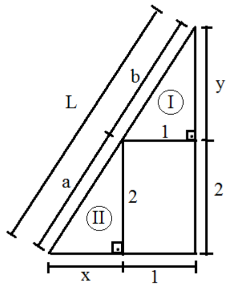


Figura 5: Esboço do problema da escada

Por semelhança de triângulos em I e II, vem que $\dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2}{x}$.
Logo,

$$\begin{aligned}
L(x) &= \sqrt{x^2+4} + \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} \\
L(x) &= \sqrt{x^2+4} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}} \\
L(x) &= \sqrt{x^2+4} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \\
L(x) &= \frac{(x+1)}{x} \cdot \sqrt{x^2+4}, \ \textit{para } x > 0.
\end{aligned}$$

Agora, $L'(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = 0$ tem-se que $x = \sqrt[3]{4}$.

Portanto, o único ponto crítico é $x = \sqrt[3]{4}$.

Como, $L''(x) = \dfrac{4(x^3+3x^2+8)}{x^3(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$, para todo $x > 0$, em $x = \sqrt[3]{4}$ temos um ponto de mínimo local.

Já que $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} L(x) = +\infty$, tem-se que $x = \sqrt[3]{4}$ é um mínimo absoluto de L.

Portanto, o comprimento mínimo da escada será dado por $L(\sqrt[3]{4})$, isto é,

$$L(\sqrt[3]{4}) = \frac{(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt{(\sqrt[3]{4})^2+4}.$$

Cuja aproximação é $4,16$ metros.

2.4 Extremos de uma função de duas e três variáveis

A grande maioria das questões nos livros já definem em seu enunciado se é para calcular o máximo ou o mínimo para determinado problema, nesse tipo de resolução o aluno parte da premissa de existir a solução, mas quando a questão nada afirma sobre o que encontrar, tem-se que analisar os pontos críticos encontrados para definir se é máximo ou mínimo, ou mesmo nenhum dos dois.

Para encontrar os máximos e os mínimos de uma função diferenciável f numa região aberta D, o primeiro passo é descobrir os pontos P nos quais as derivadas parciais se anulem. Nesse trabalho f_{x_k} e $f_{x_k x_j}$ representarão as derivadas parciais.

A seguir, serão enunciados dois teoremas que caracterizam os pontos críticos de uma função de duas e três variáveis. As suas demonstrações podem ser encontradas em [13] ou [15].

Teorema 2.4.1 *Supondo que f tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem contínuas em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0). Seja*

$$\Delta(x_0, y_0) = det \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 .$$

(i) Se $\Delta(x_0, y_0) < 0$, então o ponto (x_0, y_0) é um ponto de sela[1] *de f,*

(ii) Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$, então $f(x_0, y_0)$ será um máximo local de f se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ e um mínimo local se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$,

(iii) Se $\Delta(x_0, y_0) = 0$, nada pode se afirmar.

Teorema 2.4.2 *Supondo que f tenha todas as derivadas parciais até segunda ordem contínuas em uma vizinhança de um ponto crítico $P = (x_0, y_0, z_0)$. Sejam*

$$H_1(P) = f_{xx}(P) \ , \quad H_2(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix} e$$

[1]Em qualquer vizinhança de (x_0, y_0) existem pontos (x, y) em que a função assume valores maiores e menores que $f(x_0, y_0)$.

$$H_3(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix}.$$

Então,

(i) Se $detH_1(P) > 0$*,* $detH_2(P) > 0$ *e* $detH_3(P) > 0$*, existe um mínimo local em* P*,*

(ii) Se $detH_1(P) < 0$*,* $detH_2(P) > 0$ *e* $detH_3(P) < 0$*, existe um máximo local em* P*.*

Exemplo 2.4.1 *Deseja-se construir uma calha com uma folha de metal de a cm de largura, dobrando-se os lados da folha para cima e formando duas abas de mesmo tamanho, de modo que estas abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura das abas e que ângulo elas devem fazer com a horizontal, a fim de que a capacidade da calha seja máxima?*

Solução

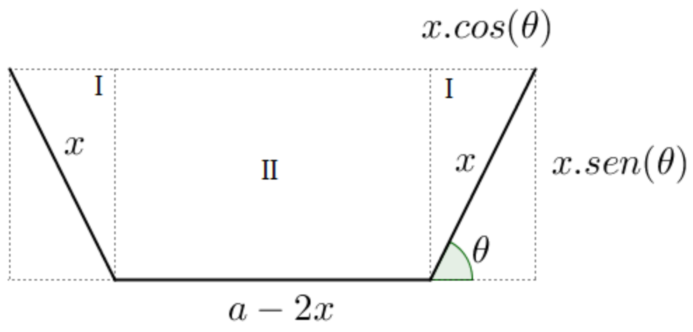


Figura 6: Esboço da Calha

De acordo com a Figura 6, a área A de uma seção transversal da calha é dada pela área do retângulo II mais a área dos triângulos I, logo:

$$\begin{aligned} A(x,\theta) &= xsen(\theta) \cdot (a - 2x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot xcos(\theta) \cdot xsen(\theta) \\ &= axsen(\theta) - 2x^2sen(\theta) + x^2sen(\theta) \cdot cos(\theta). \end{aligned}$$

O domínio dessa função é dado por $\left[0, \frac{a}{2}\right] \times [0, \pi]$, logo pelo Teorema 2.3.2, possui máximo e mínimo.

Agora,

$$A_x(x,\theta) = asen(\theta) - 4xsen(\theta) + 2xsen(\theta)\cdot cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad sen(\theta)[a - 4x + 2xcos(\theta)] = 0.$$

Para $sen(\theta) = 0$ temos que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, mas esses valores não satisfazem já que implica que a área seria nula.

Logo,

$$a - 4x + 2xcos(\theta) = 0 \ \Rightarrow \ cos(\theta) = 2 - \frac{a}{2x}.$$

Usando a identidade $sen(2\theta) = 2sen(\theta)\cdot cos(\theta)$, vem que,

$$\begin{aligned} A(x,\theta) &= axsen(\theta) - 2x^2 sen(\theta) + x^2 sen(\theta)\cdot cos(\theta) \\ &= axsen(\theta) - 2x^2 sen(\theta) + \frac{1}{2}\cdot x^2 sen(2\theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$A_\theta(x,\theta) = axcos(\theta) - 2x^2 cos(\theta) + x^2 cos(2\theta).$$

Como, $cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$, logo,

$$A_\theta(x,\theta) = axcos(\theta) - 2x^2 cos(\theta) + x^2[2cos^2(\theta) - 1] = 0.$$

Substituindo $cos(\theta) = 2 - \frac{a}{2x}$ nessa última equação, tem-se,

$$ax\left(2 - \frac{a}{2x}\right) - 2x^2\left(2 - \frac{a}{2x}\right) + x^2\left[2\left(2 - \frac{a}{2x}\right)^2 - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3ax - \frac{a^2}{2} - 4x^2 + 7x^2 - 4ax + \frac{a^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x - a) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \ \ ou \ \ x = \frac{a}{3}.$$

Para $x = 0$, implica que a área é igual a zero, logo não satisfaz o problema.

E, para $x = \frac{a}{3}$, temos,

$$cos(\theta) = 2 - \frac{a}{2\left(\frac{a}{3}\right)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \ \text{ para } \theta \in [0,\pi].$$

Portanto, o único ponto crítico é dado em $\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Agora,

$$\begin{cases} A_{xx}(x,\theta) = -4sen(\theta) + 2sen(\theta)\cdot cos(\theta) \\ A_{\theta\theta}(x,\theta) = -axsen(\theta) + 2x^2sen(\theta) - 2x^2sen(2\theta) \\ A_{x\theta}(x,\theta) = acos(\theta) - 4xcos(\theta) + 2xcos(2\theta) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} A_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ A_{\theta\theta}\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a^2\sqrt{3}}{6} \\ A_{x\theta}\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) - \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} > 0.$$

Como $\Delta\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) > 0$ e $A_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) < 0$, logo pelo Teorema 2.4.1, tem-se em $\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ um ponto de máximo local.

Para mostrar que em $\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ocorre um máximo absoluto, falta analisar na fronteira do domínio sobre as retas $x = 0$, $x = \frac{a}{2}$, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e em suas interseções.

Temos:

- para $x = 0$, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ vem que

$$A(0,\theta) = A(x,0) = A(x,\pi) = 0 < \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = A\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

- para $x = \frac{a}{2}$, vem que $A\left(\frac{a}{2}, \theta\right) = \frac{a^2}{4}sen(\theta)\cdot cos(\theta) = \frac{a^2}{8}sen(2\theta)$, logo,

$$A_\theta\left(\frac{a}{2}, \theta\right) = \frac{a^2}{4}cos(2\theta) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

E, $A\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2}{8} < \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = A\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Nas interseções das retas, temos os seguintes pontos $(0,0)$, $(0,\pi)$, $\left(\frac{a}{2},0\right)$ e $\left(\frac{a}{2},\pi\right)$.

Então, $A(0,0) = A(0,\pi) = A\left(\frac{a}{2},0\right) = A\left(\frac{a}{2},\pi\right) = 0 < \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = A\left(\frac{a}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Portanto, em $\left(\frac{a}{3},\frac{\pi}{3}\right)$, ocorre um máximo absoluto.

Exemplo 2.4.2 *A única indústria em uma comunidade rural vende duas marcas de suco de laranja: uma marca local, que é obtida a um custo de 30 centavos por litro, e uma marca nacional que é obtida a um custo de 40 centavos por litro, nenhum dos sucos pode ser vendido abaixo do preço de custo para não gerar prejuízo a indústria. O dono da indústria estimou que se a marca local é vendida a x centavos por litro e a marca nacional a y centavos por litro, então, todos os dias serão vendidos cerca de $70-5x+4y$ litros da marca local e $80+6x-7y$ litros da marca nacional. Ele também sabe que o preço de venda não pode ser superior a 65 centavos para nenhuma das duas marcas, pois as pessoas da comunidade não comprariam. Qual o preço que deve ser aplicado a cada marca para maximizar o lucro com a venda de suco?*

Solução

Tem-se que o lucro total é igual ao lucro da venda da marca local somado com o lucro da venda da marca nacional, logo se deduz que o lucro diário da venda do suco é dado pela seguinte função,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (70-5x+4y)\cdot(x-30)+(80+6x-7y)\cdot(y-40) \\ &= -5x^2+10xy-20x-7y^2+240y-5300. \end{aligned}$$

Logo, tem-se que $f:[30,65]\times[40,65]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua para todo o seu domínio e como seu domínio é fechado e limitado, pelo Teorema 2.3.2, possui máximo e mínimo.

É fácil verificar que o mínimo nesse intervalo ocorre no ponto $(30,40)$, já que $f(30,40)=0$.

A função f é de duas variáveis, logo aplica-se o Teorema 2.4.1.

Como f é diferenciável em todo os seus pontos, logo os seus pontos críticos são os pontos (x,y), nos quais $f_x=0$ e $f_y=0$. Como $f_x=-10x+10y-20$ e $f_y = 10x-14y+240$, vem

$$\begin{cases} -10x + 10y - 20 = 0 \\ 10x - 14y + 240 = 0 \end{cases}$$

Logo o único ponto crítico é $P = (53, 55)$.

Agora, tem-se $f_{xx}(P) = -10$, $f_{xy}(P) = 10$ e $f_{yy}(P) = -14$, logo

$$\Delta(x, y) = (-10)(-14) - 10^2 = 40.$$

Assim,

$$\Delta(53, 55) = 40 > 0 \;\text{ e }\; f_{xx}(53, 55) = -10 < 0.$$

E, tem-se um ponto de máximo local em $(53, 55)$.

Para mostrar que nesse ponto ocorre um máximo absoluto, resta verificar os valores da função na fronteira do domínio.

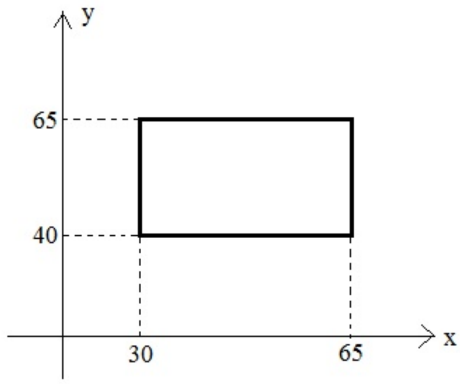


Figura 7: Domínio de $f(x, y)$

Ou seja, na fronteira do domínio que está sobre as retas $x = 30$, $x = 65$, $y = 40$ e $y = 65$ e nas suas interseções. Segue que,

- para $x = 30$, vem que $f(30, y) = -7y^2 + 540y - 10400$, logo

$$f_y(30, y) = -14y + 540 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{270}{7}$$

- para $x = 65$, vem que $f(65, y) = -7y^2 + 890y - 27725$, logo

$$f_y(65, y) = -14y + 890 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{445}{7}$$

- para $y = 40$, vem que $f(x, 40) = -5x^2 + 380x - 6900$, logo

$$f_x(x, 40) = -10x + 380 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 38$$

- para $y = 65$, vem que $f(x, 65) = -5x^2 + 630x - 19275$, logo

$$f_x(x, 65) = -10x + 630 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 63$$

Assim, obtem-se os pontos $(30, \dfrac{270}{7}), (65, \dfrac{445}{7}), (38, 40)$ e $(63, 65)$.
Os pontos das interseções dessas retas são $(30, 40)$, $(30, 65)$, $(65, 40)$ e $(65, 65)$.
Como,

- $f(30, \dfrac{270}{7}) = \dfrac{100}{7} < 770 = f(53, 55)$
- $f(65, \dfrac{445}{7}) = \dfrac{3950}{7} < 770 = f(53, 55)$
- $f(38, 40) = 320 < 770 = f(53, 55)$
- $f(63, 65) = 570 < 770 = f(53, 55)$
- $f(30, 40) = 0 < 770 = f(53, 55)$
- $f(30, 65) = -4875 < 770 = f(53, 55)$
- $f(65, 40) = -3325 < 770 = f(53, 55)$
- $f(65, 65) = 550 < 770 = f(53, 55)$

Portanto, tem-se um ponto de máximo absoluto em $(53, 55)$, isto é, a marca local deve ser vendida a 53 centavos por litro e a marca nacional a 55 centavos por litro.

3 Método do Multiplicador de Lagrange

3.1 Máximos e Mínimos com uma Restrição

Em muitos problemas tem-se de encontrar o máximo ou mínimo de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ sujeita a uma equação (restrição ou vínculo) dada por $\{P \in D \mid g(P) = k\}$. Restrições ou vínculos são equações do problema que condicionam uma ou mais variáveis em uma dada decisão a ser observada na resolução do problema. Por exemplo, encontrar o ponto mais elevado sobre uma cônica sujeito a restrição de que o ponto esteja sobre um plano que a secciona. A Figura 8 mostra geometricamente esse caso.

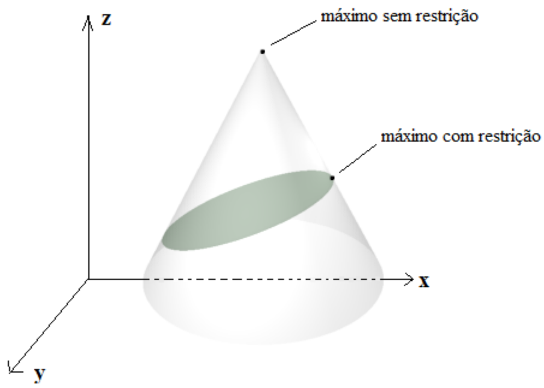


Figura 8: Máximo com e sem restrição

Para essas questões pode-se tentar resolvê-las por alguma das formas já trabalhadas, como resolver a equação de restrição para alguma de suas variáveis em termos das outras e, em seguida, substituir na equação f. Assim, por exemplo, bastaria utilizar o método tradicional de encontrar os pontos críticos da função e aplicar o Teste da Segunda Derivada, se f possuir duas variáveis, para se chegar a solução do problema.

O inconveniente desse método encontra-se na dificuldade, muitas vezes, de resolver a equação de restrição para alguma de suas variáveis, e em certos casos até mesmo impossível isolar essa variável. Também, existe o fato que dependendo dos tipos de equações envolvidas no sistema, a simples ideia de substituir uma equação em outra gera uma nova equação mais complicada para resolver, o que tornará os cálculos mais trabalhosos e o tempo de resolução mais longo. Trataremos a seguir de um método para contornar esses problemas e encontrar os máximos e mínimos sujeitos à uma restrição, esse método é chamado de Método do Multiplicador de Lagrange[2].

3.2 Definições sobre o Método dos Multiplicadores de Lagrange

Antes da exposição do Método dos Multiplicadores de Lagrange, far-se-á necessário algumas definições e teoremas que ajudarão no entendimento da demonstração. Tratam-se de assuntos bem conhecidos nos livros de Cálculo(Veja [6], [10], [11], [13], [14] e [15]).

Definição 3.2.1 (Curva de Nível) *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. Dado um número real k, define-se a curva de nível k como o conjunto $C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\}$.*

Definição 3.2.2 (Superfície de Nível) *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis. Dado um número real k, define-se a superfície de nível k como o conjunto $C_k = \{(x, y, z) \in D \mid f(x, y, z) = k\}$.*

Definição 3.2.3 (Classe de uma função) *Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 no ponto $A \in D$ se as suas derivadas parciais em A existem e são contínuas em seu domínio.*

Definição 3.2.4 (Vetor Gradiente) *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e A um ponto no interior de D, então o vetor gradiente de f no ponto A é definido por*

$$\nabla f(A) = (f_x(A),\ f_y(A)).$$

As definições acima se estendem facilmente para funções definidas em $D \subset \mathbb{R}^n$. Como exemplo o vetor gradiente de $f(x, y, z)$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) será

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0),\ f_y(x_0, y_0, z_0),\ f_z(x_0, y_0, z_0)).$$

[2]**Joseph Louis Lagrange** - Nascido em 25 de janeiro de 1736, em Turim, faleceu em 10 de abril de 1813, em Paris. Professor da Escola de Artilharia da cidade de Turim e acadêmico em Berlim, Alemanha.

Teorema 3.2.1 (Gradiente ortogonal a curva de nível) *Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e C_k uma curva de nível k para g, então o ∇g é ortogonal a C_k em todo ponto.*

Demonstração

Seja $r(t) = (x(t),\ y(t))$ uma parametrização da curva C_k, logo $g(x(t),\ y(t)) = k$.

Deriva-se com relação a t os dois membros da equação, utilizando a Regra da Cadeia, assim:

$$\frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dk}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 0.$$

Tem-se que dois vetores no plano $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (x, y)$ serão ortogonais se, e somente se $ax + by = 0$.

Logo o $\nabla g(r(t)) = \left(\frac{dg}{dx},\ \frac{dg}{dy}\right)$ é ortogonal a $r'(t) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$, visto que $r'(t)$ é o vetor tangente a C_k em $r(t)$.

Teorema 3.2.2 *Supondo que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 de alguma região onde o interior contenha uma curva diferenciável*

$$C : r(t) = (x(t),\ y(t)) \ \text{e}\ t \in (a, b).$$

Se $P_0 = r(t_0)$ é um ponto em C onde a função f tem seu máximo(mínimo) local, então $\nabla f(P_0)$ é ortogonal a C em P_0.

Demonstração

Os valores da função f restrito a C são dados pela composta $w(t) = f(x(t),\ y(t))$.

Seja $P_0 = r(t_0) = (x(t_0),\ y(t_0))$ com $t_0 \in (a, b)$, um ponto de máximo ou mínimo da função f sobre C, então a função $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida por $w(t) = f(x(t),\ y(t))$, tem ponto crítico em t_0, portanto, $\frac{dw(t_0)}{dt} = 0$.

Pela Regra da Cadeia, $\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$, tem-se em t_0,

$$\frac{dw(t_0)}{dt} = \frac{df(P_0)}{dx} \cdot \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{df(P_0)}{dy} \cdot \frac{dy(t_0)}{dt} = 0.$$

Tem-se que dois vetores no plano $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (x, y)$ serão ortogonais se, e somente se $ax + by = 0$.

Logo o $\nabla f(P_0) = \left(\dfrac{df(P_0)}{dx}, \dfrac{df(P_0)}{dy}\right)$ é ortogonal a $r'(t_0) = \left(\dfrac{dx(t_0)}{dt}, \dfrac{dy(t_0)}{dt}\right)$.

Os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 podem ser estendidos para funções de três variáveis.

Teorema 3.2.3 (Gradiente ortogonal a superfície de nível) *Seja* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = k\}$ *uma superfície de nível e* $P \in S$*, então* $\nabla g(P)$ *é ortogonal a* S *em* P.

Demonstração Veja por exemplo [7], Cap-8, p-291.

Teorema 3.2.4 *Supondo que* $w = f(x, y, z)$ *seja uma função diferenciável no interior de uma região que contenha a superfície diferenciável* S.

Se P_0 *é um ponto onde* f *atinge o máximo (mínimo) local restrito a* S*, então* $\nabla f(P_0)$ *é ortogonal a* S.

Demonstração Veja por exemplo [7], Cap-8, p-291.

3.3 Método de Lagrange para duas e três variáveis

Neste capítulo será demonstrado o Método de Lagrange para ser usado no encontro dos extremos de uma função de duas ou três variáveis sujeitas a uma restrição. Desde que se saiba da existência dos extremos.

Teorema 3.3.1 (Método para duas variáveis) *Sejam* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *duas funções de classe* C^1 *numa região do plano, onde* $\nabla g(x, y) \neq 0$.

Se f *possui um extremo local em* (x_0, y_0)*, interior ao domínio, sujeito a uma restrição* $g(x, y) = k$*, então existe um número real* λ*, tal que* $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$*, onde* λ *recebe o nome de multiplicador de lagrange.*

Demonstração

Tem-se por hipótese que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são diferenciáveis e que P_0 seja um ponto na curva de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = k\}$, tal que f possui um valor de máximo ou mínimo.

Pelo Teorema 3.2.2, tem-se que $\nabla f(P_0)$ é ortogonal a curva C. Agora, pelo Teorema 3.2.1, o $\nabla g(P_0)$ é, também, ortogonal a curva C.

Portanto, os vetores $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ são paralelos.

Tem-se que dois vetores no plano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, um é múltiplo do outro, ou seja, existe um escalar k, tal que $\vec{u} = k\vec{u}$.

Logo existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

Teorema 3.3.2 (Método para três variáveis) *Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 e contínuas numa região do espaço, onde $\nabla g(x, y, z) \neq 0$.*

Se f possui um extremo local (x_0, y_0, z_0), interior ao domínio, sujeito a uma restrição $g(x, y, z) = k$, então existe um número real λ, tal que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$, onde λ recebe o nome de multiplicador de lagrange.

Demonstração

Tem-se que f e g são diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$ e que P_0 seja um ponto na superficíe de $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = k\}$, tal que f tenha um valor máximo ou mínimo restrito a um ponto da curva C.

Pelo Teorema 3.2.4, tem-se que $\nabla f(P_0)$ é ortogonal a superfície C. Agora, pelo Teorema 3.2.3, o $\nabla g(P_0)$ é, também, ortogonal a superfície C.

Portanto, os vetores $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ são paralelos.

Tem-se que dois vetores no espaço $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, um é múltiplo do outro, ou seja, existe um escalar k, tal que $\vec{u} = k\vec{u}$.

Logo existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

Assim, os pontos candidatos a extremos de f restritos a C são aqueles que satisfazem $\nabla g \neq 0$ e o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = k \end{cases}$$

Note que é importante que $\nabla g \neq 0$. No entanto pode ocorrer que $\lambda = 0$, nestes casos o extremo P é candidato a extremo do problema sem o vínculo $g = k$.

3.4 Aplicações

Este capítulo traz aplicações diversas e interessantes sobre o uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange. O método por si só não é capaz de resolver as questões, em várias soluções serão necessários usar os conhecimentos vistos nos capítulos anteriores para obter os resultados procurados.

Aplicação 3.4.1 *Demonstre que a distância do ponto* (x_0, y_0, z_0) *ao plano de equação* $ax + by + cz + d = 0$ *é dada por*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Solução

O problema consiste em minimizar a distância $D^2 = f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ sujeita à restrição dada pelo conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0\}$. Como S não é um conjunto limitado, não existe uma distância máxima a ser encontrada.

Tem-se, $\nabla g(x, y, z) = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Para $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 0$, monta-se o sistema,

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2(x - x_0), 2(y - y_0), 2(z - z_0)) = \lambda(a, b, c) \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ x = \dfrac{\lambda a}{2} + x_0 \\ (2)\ y = \dfrac{\lambda b}{2} + y_0 \\ (3)\ z = \dfrac{\lambda c}{2} + z_0 \\ (4)\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Substituindo (1), (2) e (3) em (4), vem que,

$$a\left(\frac{\lambda a}{2} + x_0\right) + b\left(\frac{\lambda b}{2} + y_0\right) + c\left(\frac{\lambda c}{2} + z_0\right) + d = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Assim, o sistema ficará,

$$\begin{cases} (1)\ x - x_0 = \dfrac{\lambda a}{2} \\ (2)\ y - y_0 = \dfrac{\lambda b}{2} \\ (3)\ z - z_0 = \dfrac{\lambda c}{2} \\ (4)\ \dfrac{\lambda}{2} = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

Agora, substitui-se (1), (2) e (3) em $D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, logo;

$$D^2 = \left(\frac{\lambda a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda c}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Segue que,

$$D = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{|\lambda|}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Substituindo (4) em $D = \dfrac{|\lambda|}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, temos que,

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Logo,

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Seja (x, y, z) o ponto do plano $ax + by + cz + d = 0$ cuja distância a (x_0, y_0, z_0) é $D = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Para mostrar que D é realmente a distância mínima, basta verificar que o segmento de reta que passa pelos pontos (x, y, z) e (x_0, y_0, z_0) é perpendicular ao plano.

De fato, seja $\overrightarrow{v}$ o vetor relativo aos pontos (x, y, z) e (x_0, y_0, z_0), logo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= \left(\frac{\lambda a}{2}, \frac{\lambda b}{2}, \frac{\lambda c}{2}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}(a, b, c). \end{aligned}$$

O vetor $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ é perpendicular ao plano $ax + by + cz + d = 0$. Portanto, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ são múltiplos, logo, $\overrightarrow{v}$ é paralelo a $\overrightarrow{u}$, e assim $\overrightarrow{v}$ é perpendicular ao plano.

Aplicação 3.4.2 *Uma caixa será construída com vários materiais. O material a ser usado na frente e atrás custa R$ 1,00 por metro quadrado. O material para ser utilizado do lado direito e esquerdo custa R$ 2,00 por metro quadrado. E por fim, o material na parte superior e inferior custa R$ 4,00 por metro quadrado. Qual o volume máximo dessa caixa para um custo total de R$ 192,00 na sua construção?*

<u>**Solução**</u>

Sejam C, L, A e V, respectivamente, o comprimento, a largura, a altura e o volume da caixa.

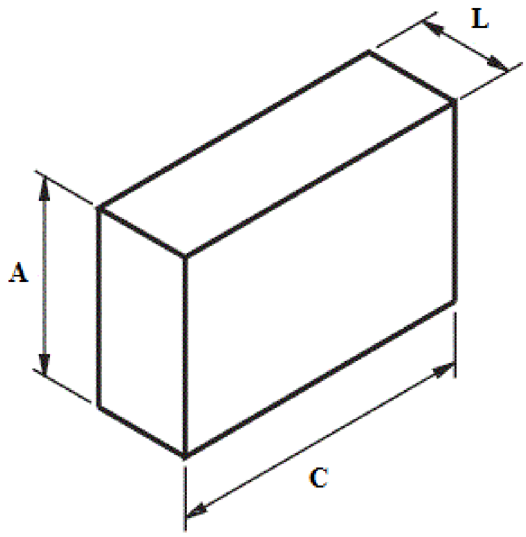


Figura 9: Comprimento, Largura e Altura do Paralelepípedo

A equação de restrição requerida no Método de Lagrange é o conjunto,

$$S = \{(C, L, A) \in \mathbb{R}^3 \mid g(C, L, A) = 2CA + 4LA + 8CL = 192\}.$$

E a função a ser otimizada é o volume, dado por

$$V = CLA.$$

Obviamente, o volume mínimo é zero, mas neste caso não interessa, pois não existiria a caixa.

Primeiro verifica-se a condição $\nabla g(C, L, A) \neq 0$ é satisfeita.

Como $\nabla g(C, L, A) = (2A+8L,\ 4A+8C,\ 2C+4L)$, segue que $\nabla g(C, L, A) = 0$ se e somente se $(C, L, A) = (0, 0, 0)$, mas $(0, 0, 0)$ não pertence a S e portanto $\nabla g(C, L, A) \neq 0$, em S.

Agora seja o sistema,

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla g \\ g(C, L, A) = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (LA, CA, CL) = \lambda(2A + 8L,\ 4A + 8C,\ 2C + 4L) \\ 2CA + 4LA + 8CL = 192 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ LA = \lambda(2A + 8L) \\ (2)\ CA = \lambda(4A + 8C) \\ (3)\ CL = \lambda(2C + 4L) \\ (4)\ 2CA + 4LA + 8CL = 192 \end{cases}$$

Isola-se A na primeira equação e C na terceira, logo:

$$A = \frac{8\lambda L}{L - 2\lambda} \quad \text{e} \quad C = \frac{4\lambda L}{L - 2\lambda}.$$

Portanto, $A = 2C$, agora substitui esse valor na segunda equação, assim

$$CA = \lambda(4A + 8C) \quad \Rightarrow \quad 2C^2 = \lambda(8C + 8C) \quad \Rightarrow \quad 2C^2 = 16\lambda C.$$

De onde vem, $\lambda = \dfrac{C}{8}$.

Substitui $A = 2C$ e $\lambda = \dfrac{C}{8}$ na primeira equação, tem-se

$$2LC = \frac{C}{8}(4C + 8L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{C}{2}.$$

Por fim, substitui $A = 2C$ e $L = \dfrac{C}{2}$ na última equação, vem

$$4C^2 + 4C^2 + 4C^2 = 192 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{192}{12}} = 4.$$

E assim $C = 4$, $L = 2$ e $A = 8$.

Portanto, o volume no ponto $(4, 2, 8)$ é igual a $64\ m^3$.

Para mostrar que nesse ponto ocorre um máximo global, responderemos a seguinte pergunta:

"Qual o mínimo da função $F(C, L, A) = 2CA + 4LA + 8CL$, dado que $V = CLA$?"

Tem-se que $A = \dfrac{V}{CL}$ e seja $M = 2CA + 4LA + 8CL$, logo

$$M = 2C\frac{V}{CL} + 4L\frac{V}{CL} + 8CL \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2V}{L} + \frac{4V}{C} + 8CL.$$

Agora, seja $a_1 = \dfrac{2V}{L}$, $a_2 = \dfrac{4V}{C}$ e $a_3 = 8CL$.

Pelo Teorema 2.1.1, vem

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} &\geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \\
\frac{\frac{2V}{L} + \frac{4V}{C} + 8CL}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{2V}{L} \cdot \frac{4V}{C} \cdot 8CL} = 4V^{\frac{2}{3}} \\
\frac{2V}{L} + \frac{4V}{C} + 8CL &\geq 12V^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Isto é, $M \geq 12V^{\frac{2}{3}}$.

Logo, se $V > 64$, então $M > 192$, ou seja, $2CA + 4LA + 8CL > 192$.

Portanto, em $(4, 2, 8)$ ocorre um máximo absoluto.

E o volume procurado é $V = 64\ m^3$.

Aplicação 3.4.3 *Encontrar e classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3y^5$ sujeita a restrição $x + y = 8$.*

Solução

A própria descrição do problema fornece todos os requisitos necessários para iniciar a solução, tem-se $f(x, y) = x^3y^5$ e a equação de restrição será o conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = x + y = 8\}$.

A reta $x + y = 8$ passa pelos 1º, 2º e 4º quadrantes do plano xy, logo,

(1) se o ponto (x, y) pertence ao primeiro quadrante, logo o valor de f é positivo ou zero, para todo $x \in [0, 8]$ e $y \in [0, 8]$,

(2) se o ponto (x, y) pertence ao segundo quadrante, logo o valor de f é negativo, para todo $x < 0$ e $y > 8$,

(3) se o ponto (x, y) pertence ao quarto quadrante, logo o valor de f é negativo, para todo $x > 8$ e $y < 0$.

Portanto, a questão não possui um mínimo absoluto, pois $f \to -\infty$ nos 2º e 4º quadrantes.

Pelo Teorema 2.3.2 no intervalo $[0, 8] \times [0, 8]$ a função assume valor máximo e mínimo absoluto, como o mínimo não interessa, basta procurar o máximo da função nesse intervalo.

Primeiro verifica-se a condição $\nabla g(x, y) \neq 0$ é satisfeita.

Como $\nabla g(x, y) = (1, 1)$, logo $\nabla g(x, y) \neq 0$

Assim, os pontos que maximizam a função tem que satisfazer as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 8$. Isto é,

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x^2y^5, 5x^3y^4) = \lambda(1,1) \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \;\; 3x^2y^5 = \lambda \\ (2) \;\; 5x^3y^4 = \lambda \\ (3) \;\; x + y = 8 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, temos pela primeira equação que ou $x = 0$ ou $y = 0$. O ponto $(0, 0)$ está descartado devido a terceira equação. Então, se $x = 0$, pela terceira equação temos que $y = 8$ e se $y = 0$, vem que $x = 8$. Assim, $f(8, 0) = f(0, 8) = 0$.

Agora, para $\lambda \neq 0$, temos pela primeira e segunda equação a seguinte igualdade,

$$\begin{aligned} 3x^2y^5 &= 5x^3y^4 \\ 3x^2y^5 - 5x^3y^4 &= 0 \\ x^2y^4(3y - 5x) &= 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Logo pela última equação tem-se que $3y - 5x = 0$, de onde vem $y = \dfrac{5x}{3}$. Substitui esse valor em $x + y = 8$ e obtêm-se

$$x + \frac{5x}{3} = 8 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{8x}{3} = 8 \;\;\Rightarrow\;\; x = 3.$$

E, portanto, $y = 5$.

Devido, $f(3, 5) = 84375 > 0 = f(8, 0) = f(0, 8)$, tem-se que $(3, 5)$ é um ponto de máximo absoluto da função.

Aplicação 3.4.4 *Encontrar as dimensões do paralelepípedo retangular de volume máximo, sabendo que 3 faces dele estão nos planos coordenados do 1º octante e um vértice pertence ao plano dado por* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$*, com* $a, b, c > 0$*. Calcule o volume máximo.*

Solução

Note que para todo ponto (x, y, z) do 1º octante que está abaixo do plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1$, tem-se que $0 \leq x \leq a, \;\; 0 \leq y \leq b$ e $0 \leq z \leq c$.

Logo o problema consiste em maximizar o volume $V(x, y, z) = xyz$ sujeito à restrição $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\}$, com $0 \leq x \leq a, \;\; 0 \leq y \leq b$ e $0 \leq z \leq c$, e como o domínio é um conjunto fechado e limitado pelo Teorema 2.3.2 a função V possui máximo e mínimo.

O volume mínimo é dado quando $x = 0$, $y = 0$, ou $z = 0$, mas nesse caso não interessa, já que o paralelepípedo não existe.

Agora, primeiro verifica-se a condição $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ é satisfeita.

Como $\nabla g(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right)$ e $a, b, c > 0$, logo $\nabla g(x, y, z) \neq 0$.

Logo,

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (yz, xz, xy) = \lambda \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ ayz = \lambda \\ (2)\ bxz = \lambda \\ (3)\ cxy = \lambda \\ (4)\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \end{cases}$$

Como $x, y, z \neq 0$, temos que $\lambda \neq 0$ e fazendo (1) igual a (2) tem-se $y = \dfrac{bx}{a}$, e de $(1) = (3)$ vem $z = \dfrac{cx}{a}$.

Substitui esses valores em (4),

$$\frac{x}{a} + \frac{\frac{bx}{a}}{b} + \frac{\frac{cx}{a}}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \frac{x}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{3}.$$

Logo, $x = \dfrac{a}{3}$, $y = \dfrac{b}{3}$ e $z = \dfrac{c}{3}$.

E o volume máximo é $\dfrac{abc}{27}$.

Aplicação 3.4.5 *Determine os pontos da superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$, *mais próximo e mais afastado da origem.*

Solução

A distância de um ponto $P \in S$ à origem é dado por $d(P) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, logo a função que se quer maximizar e minimizar é $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sujeita à restrição S.

Seja a curva,

$$\alpha(t) = \begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{t} \\ z = \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \left(t^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Note que a curva $\alpha(t)$ está no conjunto S.

Logo, $f(t^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}) = t^4 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}$.

Assim, quando $t \to \infty$, tem-se que $f(t^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}) \to \infty$, portanto f não possui valor máximo.

Pelo Método de Lagrange, tem que verificar primeiro se a condição $\nabla g(x,y,z) \neq 0$ é satisfeita.

Como $\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, segue que $\nabla g(x,y,z) = 0$ se, e somente se, $x = y = z = 0$, como $(x,y,z) = (0,0,0)$ não pertence a S, logo $\nabla g(x,y,z) \neq 0$.

Os pontos que minimizam a função tem que satisfazer as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x,y,z) = 1$, ou seja,

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda\,(yz, xz, xy) \\ xyz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 2x = \lambda yz \\ (2)\ 2y = \lambda xz \\ (3)\ 2z = \lambda xy \\ (4)\ xyz = 1 \end{cases}$$

Como, x, y e z são diferentes de zero, pois implicaria $xyz = 0$, tem-se que $\lambda \neq 0$, assim de (1) e (3) e de (2) e (3), vem que,

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} = \frac{z}{y}.$$

Logo, $x^2 = y^2 = z^2$, o que implica que $xyz = \pm x^3 = 1$.

Disso, tem que $x = y = z = \pm 1$, como $xyz = 1$, logo os pontos críticos que a satisfazem são:

$$(1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1) \text{ e } (1, 1, 1).$$

Note que todos estes pontos distam $\sqrt{3}$ até a origem, mas não pode-se afirmar que a distância mínima é $\sqrt{3}$. No entanto, escrevendo $\overline{S} = S \cap [-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$, tem-se que $\overline{S}$ é limitado e fechado, logo com certeza o mínimo será atingido.

Uma maneira de verificar que a distância mínima é $\sqrt{3}$ e será atingida, baseia-se na Desigualdade das Médias, Teorema 2.1.1.

Dados, $x = a$ e $y = b$, com $a, b \neq 0$, tem que $z = \dfrac{1}{ab}$.

Assim, a distância do ponto $\left(a, b, \dfrac{1}{ab}\right)$ à origem é $d^2 = a^2 + b^2 + \dfrac{1}{a^2b^2}$.

Agora, sejam $a_1 = a^2$, $a_2 = b^2$ e $a_3 = \dfrac{1}{a^2b^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} A &\geq G \\ \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} &\geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \\ \frac{a^2 + b^2 + \dfrac{1}{a^2b^2}}{3} &\geq \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot \frac{1}{a^2b^2}} = 1 \\ a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2b^2} &\geq 3. \end{aligned}$$

Portanto, $d^2 \geq 3$, isto é, a menor distância de um ponto a origem é $\sqrt{3}$.

Como as distâncias de cada um dos pontos $(1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1)$ e $(1, 1, 1)$ à origem é $\sqrt{3}$, logo são pontos de mínimo absoluto.

Aplicação 3.4.6 *A temperatura sobre uma placa de metal M é dada por*

$$T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3.$$

Se M é a região fechada e limitada pela elipse $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 \leq 0\}$, encontre os pontos de maior e menor temperatura na placa M.

Solução

Primeiro, escreve-se T da seguinte forma,

$$T(x,y) \ = \ x^2+y^2-2x-2y+3 \ = \ (x-1)^2+(y-1)^2+1$$

Ou seja, o problema consiste em encontrar os máximos e mínimos do parabolóide $T(x,y)$ sobre a elipse M. Como a elipse M é um conjunto fechado e limitado do plano xy, é claro que a função T possui máximo e mínimo em M (Teorema 2.3.2).

Primeiro, determina-se os pontos críticos no interior de M. Assim,

$$\begin{cases} T_x(x,y) = 2x-2 = 0 \\ T_y(x,y) = 2y-2 = 0 \end{cases}$$

Como o ponto $(1,1)$ pertence a M, logo o único ponto crítico no interior de M é $(1,1)$.

Para a fronteira de M utiliza-se o Método de Lagrange, portanto, procura-se os pontos críticos de $T(x,y)$ sujeita à restrição $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 4x^2+y^2- -8x-2y+1=0\}$

Verificar se a condição $\nabla g(x,y) \neq 0$ é satisfeita.

Como $\nabla g(x,y) = (8x-8, 2y-2)$, vem que $\nabla g(x,y) = 0$ se $(x,y) = (1,1)$, e como o ponto $(1,1)$ não pertence a S, logo $\nabla g(x,y) \neq 0$.

Agora, os pontos extremos tem que satisfazer $\nabla T = \lambda \nabla g$ e $g(x,y) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} (2x-2, 2y-2) = \lambda\,(8x-8, 2y-2) \\ 4x^2+y^2-8x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x-1 = 4\lambda(x-1) \\ (2)\ y-1 = \lambda(y-1) \\ (3)\ 4x^2+y^2-8x-2y+1=0 \end{cases}$$

Para $x-1 \neq 0$ em (1), vem que $\lambda = \dfrac{1}{4}$. Substitui esse valor em (2) e encontra-se $y=1$. Agora, substitui $y=1$ em (3) e vem que $x=0$ e $x=2$. Assim, obtêm os pontos $(0,1)$ e $(2,1)$.

Se $x-1=0$, logo $x=1$. Substitui esse valor em (3) e tem que $y=3$ e $y=-1$, logo os pontos são $(1,3)$ e $(1,-1)$.

Portanto, tem-se os seguintes pontos $(1,1)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(1,3)$ e $(1,-1)$ para analisar.

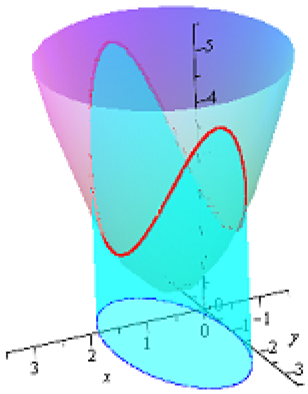


Figura 10: Interseção das superfícies do Paraboloíde e o Cilindro Eliptíco

Calcula-se os valores em T para os pontos encontrados. Assim,

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 1 \\ T(0,1) &= T(2,1) = 2 \\ T(1,3) &= T(1,-1) = 3. \end{aligned}$$

Logo, o valor mínimo local é dado em $(1,1)$ e os máximos locais ocorrem em $(1,3)$ e $(1,-1)$.

Aplicação 3.4.7 *Determine os pontos da superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^8+y^8+z^8 = 1\}$*, mais próximo e mais afastado da origem.*

Solução

Dado um ponto P de S, tem-se que a distândia d do ponto P à origem é $d(P) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Portanto, a função que se quer maximizar e minimizar é $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sujeita à restrição $g(x,y,z) = x^8+y^8+z^8 = 1$.

Pela equação $x^8+y^8+z^8 = 1$, é fácil ver que x, y e z devem satisfazer, $x,y,z \leq |1|$, portanto o domínio de f é limitado e fechado, logo pelo Teorema 2.3.2 possui máximo e mínimo absoluto.

Primeiro verificar se a condição $\nabla g(x,y,z) \neq 0$ é satisfeita.

Tem que $\nabla g(x,y,z) = (8x^7, 8y^7, 8z^7)$, logo $\nabla g(x,y,z) = 0$ se, e somente se $(x,y,z) = (0,0,0)$, como $(0,0,0)$ não pertence a S, logo $\nabla g(x,y,z) \neq 0$.

Assim, os pontos críticos da função tem que satisfazer as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 1$. Portanto,

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda \left(8x^7, 8y^7, 8z^7\right) \\ x^8 + y^8 + z^8 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x(1 - \lambda 4x^6) = 0 \\ (2)\ y(1 - \lambda 4y^6) = 0 \\ (3)\ z(1 - \lambda 4z^6) = 0 \\ (4)\ x^8 + y^8 + z^8 = 1 \end{cases}$$

As soluções do sistema são do tipo: $(0, 0, z)$, $(0, y, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, $(0, y, z)$ e (x, y, z).

Assim,

- se $x = y = 0$, vem de (4) que $z = \pm 1$,
- se $x = z = 0$, vem de (4) que $y = \pm 1$,
- se $y = z = 0$, vem de (4) que $x = \pm 1$.

Logo, tem-se os pontos críticos $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

Para $z = 0$ e $x, y \neq 0$, o sistema fica:

$$\begin{cases} (1)\ 1 - \lambda 4x^6 = 0 \\ (2)\ 1 - \lambda 4y^6 = 0 \\ (3)\ x^8 + y^8 = 1 \end{cases}$$

Tem-se que $\lambda \neq 0$, senão implicaria em (1) que $1 = 0$, absurdo.

De (2) − (1), vem que $\lambda(x^6 - y^6) = 0$, logo $x = \pm y$.

Agora de (3), vem que

$$x^8 + x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2^{-\frac{1}{8}}.$$

Portanto, $x = y = \pm 2^{-\frac{1}{8}}$. Assim os pontos críticos são: $(2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}}, 0)$, $(2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}}, 0)$, $(-2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}}, 0)$ e $(-2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}}, 0)$.

Usa-se o mesmo raciocínio para $x = 0$ e $y, z \neq 0$. Logo os pontos encontrados são: $(0, 2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}})$, $(0, 2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}})$, $(0, -2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}})$ e $(0, -2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}})$.

E, para $y = 0$ e $x, z \neq 0$, tem-se os seguintes pontos: $(2^{-\frac{1}{8}}, 0, 2^{-\frac{1}{8}})$, $(2^{-\frac{1}{8}}, 0, -2^{-\frac{1}{8}})$, $(-2^{-\frac{1}{8}}, 0, 2^{-\frac{1}{8}})$ e $(-2^{-\frac{1}{8}}, 0, -2^{-\frac{1}{8}})$.

Agora, se $x, y, z \neq 0$, o sistema ficará:

$$\begin{cases} (1)\ 1 - \lambda 4x^6 = 0 \\ (2)\ 1 - \lambda 4y^6 = 0 \\ (3)\ 1 - \lambda 4z^6 = 0 \\ (4)\ x^8 + y^8 + z^8 = 1 \end{cases}$$

Tem-se que $\lambda \neq 0$, senão implicaria em (1) que $1 = 0$, absurdo.
De $(2) - (1)$, vem que $\lambda(x^6 - y^6) = 0$, logo $x = \pm y$.
De $(3) - (2)$, vem que $\lambda(y^6 - z^6) = 0$, logo $y = \pm z$.
Portanto, $\pm x = \pm y = \pm z$, de (3), tem que,

$$x^8 + x^8 + x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3^{-\frac{1}{8}}.$$

Segue que, $x = y = z = \pm 3^{-\frac{1}{8}}$.
Assim os pontos críticos são: $(3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$, $(3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$, $(3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$, $(3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$, $(-3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$, $(-3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$, $(-3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$ e $(-3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$.
Logo,

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	**Ponto de**
$(1, 0, 0)$	1	mínimo
$(-1, 0, 0)$	1	mínimo
$(0, 1, 0)$	1	mínimo
$(0, -1, 0)$	1	mínimo
$(0, 0, 1)$	1	mínimo
$(0, 0, -1)$	1	mínimo
$(2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}}, 0)$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}}, 0)$	$2^{\frac{3}{4}}$	—

$(-2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}}, 0)$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(-2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}}, 0)$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(0, 2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(0, 2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(0, -2^{-\frac{1}{8}}, 2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(0, -2^{-\frac{1}{8}}, -2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(2^{-\frac{1}{8}}, 0, 2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(2^{-\frac{1}{8}}, 0, -2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(-2^{-\frac{1}{8}}, 0, 2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(-2^{-\frac{1}{8}}, 0, -2^{-\frac{1}{8}})$	$2^{\frac{3}{4}}$	—
$(3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(-3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(-3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(-3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo
$(-3^{-\frac{1}{8}}, 3^{-\frac{1}{8}}, -3^{-\frac{1}{8}})$	$3^{\frac{3}{4}}$	máximo

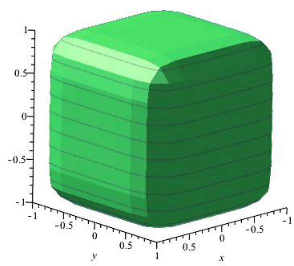


Figura 11: Superfície de $x^8 + y^8 + z^8 = 1$

4 Considerações Finais

O presente trabalho teve como foco principal a procura pelos máximos e mínimos de determinadas funções, encontrar tais pontos tem sido temas de vários trabalhos nas mais variadas áreas do conhecimento humano. A otimização matemática tem desempenhado um papel preponderante em questões de melhoramento tecnológico dentro da sociedade.

Procurou-se tratar dos tópicos mais interessantes sobre problemas de máximos e mínimos de diversas funções. Primeiramente foi abordado as médias aritméticas e geométricas, passando pelas funções quadráticas e em seguida pelos temas sobre as derivadas para funções com uma variável e viu-se uma variedades de questões que despertam a curiosidade sobre a sua resolução.

No final, trabalhou-se as funções de duas ou três variáveis e deu-se ênfase no Método de Lagrange para encontro de máximos e mínimos condicionados a uma restrição. Infelizmente nos cursos superiores, raramente os alunos chegam a estudar o Método do Multiplicador de Lagrange e quando o veem é de forma muito superficial, sem explorar toda sua potencialidade.

Foi instigante estudar os problemas de maximização/minimização sobre várias óticas e perceber a importância que cada um apresenta dentro de suas características, como é caso das Desigualdades das Médias, um conceito fácil de ser compreendido pelos alunos, mas que é, praticamente, retirado dos livros do Ensino Médio e muito pouco abordado pelos cursos de graduação em licenciatura matemática no país.

O aluno do Ensino Médio estuda máximos e mínimos de funções, isso quando o Professor aborda, somente em questões que envolvem funções quadráticas e na maioria dos casos são exemplos que exploram o seu uso puramente algébrico, sem contextualizações que possam criar um vínculo com a realidade.

Problemas que envolvem máximos e mínimos devem ser levados para sala de aula, pois possibilitam a discussão interdisciplinar entre os diversos conteúdos da vida escolar do aluno, como Física, Economia, Sustentabilidade, entre outros.

Ao Professor cabe saber propiciar a seus alunos situações matemáticas que visem estimular o estudo de determinado componente curricular, elas permitem ao discente exercitar o lado do raciocínio lógico sobre diferentes aspectos. Saber trabalhar com questões onde envolvam contextos diversos são de grande importância no mundo atual e devem ser aplicadas dentro da escola.

Espera-se que esse trabalho seja capaz de fomentar a procura por mais conhecimento e que desperte em seus leitores o interesse na busca de material para futuras pesquisas ou mesmo que sirva como base para professores construirem seus planos de aulas para usarem junto aos seus alunos para o desenvolvimento de uma abordagem diferenciada sobre maximização e minimização de funções.

A Apêndice

A.1

Demonstração da Desigualdade entre a média Aritmética e Geométrica

Essa demonstração foi deduzida por George Polya [17].

Demonstração

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = e^{x-1} - x$.

Como $f'(x) = e^{x-1} - 1$, vem que $e^{x-1} - 1 = 0$, logo $x = 1$ é o único ponto crítico de f.

Tem-se $f''(x) = e^{x-1} > 0$ para todo x real. Assim, $f(1) = 0$ é o mínimo absoluto de f.

Portanto, $f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq e^{x-1}$, para todo elemento do domínio.

Agora, seja $x_1 = \dfrac{a_1}{A}, x_2 = \dfrac{a_2}{A}, ..., x_n = \dfrac{a_n}{A}$, onde A é a média aritmética de a_1, $a_2, \cdots, a_n$, com $a_i > 0$, para todo $i = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Aplicar a esses valores a desigualdade $x \leq e^{x-1}$, logo:

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdots \frac{a_n}{A} \leq e^{\frac{a_1}{A}-1} \cdot e^{\frac{a_2}{A}-1} \cdots e^{\frac{a_n}{A}-1} = e^{\frac{a_1}{A}+\frac{a_2}{A}+\cdots+\frac{a_n}{A}-n}$$

Mas,

$$\frac{a_1}{A} + \frac{a_2}{A} + \cdots + \frac{a_n}{A} - n = \frac{nA}{A} - n = 0$$

Logo,

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdots \frac{a_n}{A} \leq 1$$

Portanto,

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Obs: Para uma demonstração elementar, sem o uso de derivadas, veja [9].

Referências

[1] NIVEN, Ivan. Maxima e Minima Without Calculus - The Dolciani Mathematical Expositions Nº 6. The Mathematical Association of America, 1981.

[2] BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[3] LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: Solgraf, 2001.

[4] LIMA, Elon L. Análise Real Volume 2 - Funções de n Variáveis. 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[5] THOMAS, George B. Cálculo Volume 1. 11ª ed. São Paulo: PEARSON, 2009.

[6] THOMAS, George B. Cálculo Volume 2. 11ª ed. São Paulo: PEARSON, 2009.

[7] BORTOLOSSI, Humberto J. Cálculo Diferencial a Várias Variáveis. 2ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

[8] HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. Minidicionário Houaiss de língua portuguesa. 2ª ed. rev. e aum. Rio de Janeiro: Objetiva, 2004.

[9] TIKHOMIROV, Vladimir M. Stories about Maxima e Minima - Mathematical World. Americam Mathematical Society, 1991.

[10] HOFFMANN D.; BRADLEY, Gerald L. Calculus for business, economics, and the social and life sciences. 10ª ed. McGraw-Hill, 2010.

[11] MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. Cálculo - Funções de uma e várias variáveis. 2ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[12] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica Volume 1. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

[13] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica Volume 2. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

[14] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo Volume 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[15] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo Volume 2. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[16] BURAK, Dionisio. Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese de Doutorado, Campinas: FE/UNICAMP, 1992, p-62.

[17] ALEXANDERSON, Gerald L. The Random Walks of George Polya. The Mathematical Association of America, 2000.