Ezequiel Bobsin Strasburg

Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do *software* GeoGebra

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2014

Ezequiel Bobsin Strasburg

Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do *software* GeoGebra

Dissertação submetida por Ezequiel Bobsin Strasburg como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Fabíola Aiub Sperotto

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2014

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

S897a Strasburg, Ezequiel Bobsin
Atividades de trigonometria para o ensino fundamental com o uso do software GeoGebra / Ezequiel Bobsin Strasburg. – 2014.
135 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande /Furg, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Drª. Fabíola Aiub Sperotto.
Coorientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Trigonometria. 2. Relações trigonométricas. 3. Círculo trigonométrico. I. Sperotto, Fabíola Aiub. II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider. III. Título.

CDU 51

Catalogação na fonte: Bibliotecária Flávia Reis de Oliveira CRB10/1946

Ezequiel Bobsin Strasburg

Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do *software* GeoGebra

Dissertação submetida por Ezequiel Bobsin Strasburg como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 25 de julho de 2014:

Dra. Fabíola Aiub Sperotto
(Orientadora - FURG)

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Coorientadora - FURG)

Me. Luciana Rossato Piovesan
(Avaliador - UFPel)

Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2014

Este trabalho é dedicado àqueles que amo e àqueles que respeito,
pois amo alguns, mas respeito a todos.

Agradecimentos

A FURG - Universidade Federal de Rio Grande.

Ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

A SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.

A CAPES - Coordenacão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Aos Mestres pela forma que conduziram os ensinamentos do curso, e em especial às professoras Dra. Fabíola Aiub Sperotto e Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti por me conduzir neste trabalho de conclusão de curso e ao professor e ao professor Me. André Meneghetti pelo auxílio neste trabalho.

A minha família, pais Vilmar Justin Strasburg e Neli Bobsin Strasburg, irmãos Natanael Bobsin Strasburg e Raquel Bobsin Strasburg, e cunhados, pelo total apoio e compreensão nesse período de curso.

A minha namorada Simone Pereira dos Santos pela compreensão e palavras de incentivo.

A todos os colegas e ex-colegas de curso pela força em especial aos colegas Josias Neubert Savóis e Thiago Ehlers Martins pela parceiria nas viagens e estudos e ao ex-colega Ademir Pielke por me convencer a voltar para o curso após eu ter tomado a decisão de desistir.

A todos os colegas de trabalho e amigos pelo apoio e palavras de incentivo.

"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes"Issac Newton

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar novas atividades para o ensino de trigonometria no Ensino Fundamental. A ideia é mostrar como ensinar as principais relações trigonométricas através de exercícios que levam os alunos, de forma gradual, à obtenção dessas relações. As atividades sugeridas fazem uso do *software* GeoGebra, um recurso que possibilita a construção de círculos trigonométricos que facilitam o entendimento por parte dos alunos.

Este trabalho apresenta ainda, não somente as relações seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, como normalmente é proposto por livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, mas também relações como secante, cossecante e cotangente. Além disso, não se limita à ângulos agudos e ao estudo de triângulos retângulos, deixando, assim, o aluno mais preparado para os desafios do Ensino Médio e da vida profissional.

Palavras-chaves: Trigonometria, relações trigonométricas, círculo trigonométrico.

Abstract

This work aims to present new activities for teaching trigonometry in Elementary Education. The idea is to show how to teach the main trigonometric relations through exercises that guide students, gradually, to conclusions of these trigonometry relations. The suggested activities make use of "GeoGebra" software, a feature that enables the construction of trigonometric circles that facilitate the understanding by students.

This paper presents not only the sine relations, cosine and tangent for acute angles, as it is usually proposed by textbooks 9^{th} year of elementary school, but also relationships with secant, cosecant and cotangent, and it is not limited to acute angles and the study of right triangles, this leaving, the student more prepared for the challenges of high school and to their professional life.

Key-words: Trigonometry, trigonometric relationships, trigonometric circle.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma parte do papiro Rhind, que se encontra no Museu Britânico, Londres 19
Figura 2 – Plimpton 322 19
Figura 3 – Círculo de Hiparco 20
Figura 4 – GeoGebra 31
Figura 5 – Mover objeto 33
Figura 6 – Ativar, ou desativar, eixos x e y 33
Figura 7 – Mover janela de visualização 34
Figura 8 – Ajustar tamanho da figura 35
Figura 9 – Criar círculo 36
Figura 10 – Criar ponto 37
Figura 11 – Traçar segmento de reta 37
Figura 12 – Criar ângulo 38
Figura 13 – Traçar reta tangente ao círculo 39
Figura 14 – Ponto com tangente do ângulo na coordenada y, na reta b 40
Figura 15 – Ponto com cosseno do ângulo na coordenada x, no eixo x 40
Figura 16 – Ponto com seno do ângulo na coordenada y, no eixo y 41
Figura 17 – Criar o valor de seno na janela de álgebra 42
Figura 18 – Primeiro passo para renomear objeto 42
Figura 19 – Segundo passo para renomear objeto 43
Figura 20 – Exibir, ou esconder, rótulo na figura 44
Figura 21 – Propriedades 45
Figura 22 – Aumentar espessura da linha 45
Figura 23 – Alterar cor 46
Figura 24 – Exibir, ou excluir, malha na figura 47
Figura 25 – Digitar ângulo 48
Figura 26 – Primeiro passo para criar ângulo com amplitude fixa 49
Figura 27 – Segundo passo para criar ângulo com amplitude fixa 50
Figura 28 – Renomear ângulo 51
Figura 29 – Animar figura 55
Figura 30 – Círculo trigonométrico 1 55
Figura 31 – Ponto com cotangente do ângulo na coordenada x, na reta b 58
Figura 32 – Ponto com secante do ângulo na coordenada x, no eixo x 58
Figura 33 – Ponto com cossecante do ângulo na coordenada y, no eixo y 59
Figura 34 – Criar o valor de secante na janela de álgebra 60
Figura 35 – Desmarcar objeto na figura 64
Figura 36 – Círculo trigonométrico 2 67

Figura 37 – Representação do seno 68
Figura 38 – Círculo trigonométrico completo 68
Figura 39 – Digitar na barra de entrada 69
Figura 40 – Triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1 71
Figura 41 – Primeiro passo para criar círculo com raio fixo 73
Figura 42 – Segundo passo para criar círculo com raio fixo 73
Figura 43 – Comandos na janela de visualização 74
Figura 44 – Alterar unidade de medida do eixo x 75
Figura 45 – Habilitar rastro 76
Figura 46 – Pausar/acionar animação 77
Figura 47 – Graduar eixo x em intervalos de $\frac{\pi}{2}$ 78
Figura 48 – Gráfico da função seno 79
Figura 49 – Ponto de reflexão a uma reta 81
Figura 50 – Interseção de dois objetos 82
Figura 51 – Círculo trigonométrico de Hiparco 86
Figura 52 – Atividade 1, exercício 1, item (c) - Triângulo EFG 89
Figura 53 – Atividade 1, exercício 1, item (a) - Solução 89
Figura 54 – Atividade 1, exercício 1, item (c) - Solução 90
Figura 55 – Atividade 2, exercício 2 - Solução 94
Figura 56 – Atividade 2, exercício 3 - Solução 95
Figura 57 – Atividade 3, exercício 5, item (a) - Triângulo AGH 98
Figura 58 – Atividade 3, exercício 6 99
Figura 59 – Atividade 3, exercício 5 - Solução 100
Figura 60 – Atividade 3, exercício 5, item (c) - Solução 102
Figura 61 – Atividade 4, exercício 7 105
Figura 62 – Gráfico da função seno 109
Figura 63 – Gráfico da função cosseno 110
Figura 64 – Gráfico da função tangente 111
Figura 65 – Gráfico da função secante 112
Figura 66 – Gráfico da função cossecante 113
Figura 67 – Gráfico da função cotangente 114
Figura 68 – Atividade 6, exercício 9 - Solução 117
Figura 69 – Triângulo EFG 126
Figura 70 – Triângulo AGH 129
Figura 71 – Triângulo AGH sobreposto ao círculo trigonométrico 1 130
Figura 72 – Círculo trigonométrico 2 131

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de sen(α), cos(α) e tg(α) para $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$ 94
Tabela 2 – Valores de sen(α), cos(α) e tg(α) para cada quadrante 94
Tabela 3 – Valores de sec(α), cosec(α) e cotg(α) para $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$ 96
Tabela 4 – Valores de sec(α), cosec(α) e cotg(α) para cada quadrante 96
Tabela 5 – Valores de sen(α) 109
Tabela 6 – Valores de cos(α) 110
Tabela 7 – Valores de tg(α) 111
Tabela 8 – Valores de sec(α) 112
Tabela 9 – Valores de cosec(α) 113
Tabela 10 – Valores de cotg(α) 114

Sumário

	Introdução	**15**
1	**HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA**	**18**
2	**O ESTUDO DE TRIGONOMETRIA**	**24**
2.1	**Abordagem dada ao estudo de trigonometria em livros didáticos**	**24**
3	**JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS**	**28**
4	**CONSTRUÇÕES NO *SOFTWARE* GEOGEBRA**	**30**
4.1	**Círculo trigonométrico 1: seno, cosseno e tangente**	**32**
4.1.1	Construção do círculo trigonométrico 1a	32
4.1.2	Construção do círculo trigonométrico 1b	47
4.2	**Círculo trigonométrico 2: secante, cossecante e cotangente**	**56**
4.2.1	Construção do círculo trigonométrico 2a	56
4.2.2	Construção do círculo trigonométrico 2b	61
4.3	**Triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1**	**69**
4.4	**Gráfico das funções trigonométricas**	**71**
4.5	**Círculo de Hiparco**	**79**
4.5.1	Construção do círculo de Hiparco 1	79
4.5.2	Construção do círculo de Hiparco 2	83
5	**ATIVIDADES PROPOSTAS**	**87**
5.1	**Estudando o círculo trigonométrico de Hiparco**	**87**
5.2	**Explorando o círculo trigonométrico no *software* GeoGebra**	**91**
5.3	**Encontrando relações trigonométricas no círculo 1**	**97**
5.4	**Encontrando relações trigonométricas no círculo 2**	**104**
5.5	**Gráfico das funções trigonométricas**	**107**
5.6	**Trigonometria em um triângulo qualquer**	**114**
6	**POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES OU DESDOBRAMENTOS**	**120**
7	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**121**
	Referências	**123**

ANEXOS **125**

ANEXO A – ATIVIDADE 1 126

ANEXO B – ATIVIDADE 2 127

ANEXO C – ATIVIDADE 3 129

ANEXO D – ATIVIDADE 4 131

ANEXO E – ATIVIDADE 5 132

ANEXO F – ATIVIDADE 6 133

Introdução

Com o avanço da tecnologia e o surgimento de novas ferramentas computacionais, a informática está cada vez mais presente no cotidiano das escolas. Desta forma, cabe ao professor buscar novas metodologias e práticas pedagógicas visando um ensino mais atrativo, multidisciplinar, que desperte o interesse do educando e que facilite o processo pedagógico.

Segundo (DANTE, 1999),

> O mundo está em constantes mudanças, dado o grande e o rápido desenvolvimento da tecnologia – Máquinas de calcular, computadores, internet, etc, são assuntos do dia-a-dia e todos eles têm ligações estreitas com a Matemática. Nas últimas décadas, muitos pesquisadores da psicologia cognitiva se dedicaram a estudar e pesquisar como os alunos aprendem, como aplicam o que aprendem para resolver situações problemas, como constroem conceitos, qual é a maturidade cognitiva necessária para se apropriar com significado, determinado conceito, como a interação com o meio social desenvolve a aprendizagem.

De fato, como menciona (DANTE, 1999), o mundo está em constante mudança e, de certa forma, essas mudanças acabam influenciando a vida escolar. O professor diante de tais mudanças deve estar sempre buscando uma atualização profissional, pois a formação do professor é fundamental para acompanhar a demanda de uma sociedade em transformação.

A incessante busca por uma nova estratégia de ensino da Matemática, visando sanar algumas dificuldades e despertando o interesse do educando é uma tarefa que nem sempre é fácil de realizar. Com o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), os professores tem disponíveis diversos recursos como os *softwares* livres, que não necessitam de pagamento de licenças. Um destes *softwares* é o GeoGebra. O *software* GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. A primeira versão é o GeoGebra 1.0 que apresentava, como objetos disponíveis: ponto, vetor, ângulo, número, reta e seção cônica, e se apresentava em dois idiomas: Inglês e Alemão. Além da versão 1.0, existem também as versões 2.0, 3.0, 3.2, 4.0, 4.2, 4.4 e 5.0. A versão 5.0 apresenta figuras em 3D e ainda está em fase experimental, já a versão 4.4 é a mais recente em 2D e tem uma infinidade de recursos. Este *software* possui ferramentas que podem ser usadas tanto no Ensino Fundamental como nos Ensinos Médio e Superior.

O estudo da trigonometria é parte importante do desenvolvimento da Matemática. Se desenvolveu na Grécia há mais de 2 mil anos, e esse desenvolvimento surgiu devido aos problemas gerados em navegação, agrimensura e astronomia. As dúvidas em astronomia levaram os gregos à grandes conclusões na época como: o diâmetro da Terra, a distância da Lua e a distância do Sol. A trigonometria foi muito utilizada pelos gregos para os cálculos de grandes distâncias. Atualmente, a trigonometria tem aplicações em vários ramos do conhecimento: na Matemática, Física, Medicina, ou em qualquer fenômeno cíclico que pode ser descrito por uma função trigonométrica.

Muitos educandos do 9º ano do Ensino Fundamental encontram dificuldades de aprendizagem no estudo da Matemática, em especial quando se trata de trigonometria. O estudo da trigonometria é guiado através de livros didáticos e explicações de professores, que muitas vezes se limitam apenas nas aplicações de fórmulas de razões trigonométrias, que costumam ser decoradas sem entendimento mais expressivo e vazio de significado. Também é comum que os alunos tenham acesso à tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno e tangente de cada ângulo onde, na grande maioria das vezes, não sabem de onde surgiram. Muitos livros sequer fazem menção à existência do círculo trigonométrico e se limitam à explicações de seno, cosseno e tangente de um ângulo α para $0° < \alpha < 90°$.

Sendo assim, este trabalho traz uma proposta de uso de novos recursos tecnológicos, mais especificamente o uso do *software* GeoGebra no ensino da trigonometria. Além disso, sugere-se trabalhar não apenas seno, cosseno e tangente, mas também a secante, cossecante e cotangente de um ângulo, e apresentar ângulos quaisquer, não apenas variando entre 0° e 90°. Também não nos restringiremos ao estudo do triângulo retângulo apenas.

Este trabalho foi desenvolvido visando alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e tem o propósito de: mostrar aos alunos a importância do estudo da trigonometria; apresentar noções bem fundamentadas da trigonometria; entender significado das fórmulas e dos valores da tabela trigonométrica; e capacitá-los para utilizar os conhecimentos trigonométricos no dia-a-dia. Não existe apenas um motivo para a escolha da trigonometria como foco deste trabalho, mas alguns são: o grande desafio de ensinar este conteúdo de maneira satisfatória, as frustrações em experiências pessoais anteriores e a importância desse conteúdo para o desenvolvimento da Matemática.

Para justificar o porquê de denominarmos como importante este conteúdo, este trabalho traz um capítulo com um pouco da história da trigonometria, onde se explica como a trigonometria se desenvolveu e quem foram os grandes responsáveis por esse desenvolvimento. Também é possível conhecer os nomes das obras que apresentaram algum registro de trigonometria.

Com intuito de servir como facilitador para os professores, este trabalho também apresenta as seguintes construções no *software* GeoGebra: o círculo trigonométrico, o triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico; o gráfico das funções trigonométricas para ângulos pertencentes ao intervalo $[0°, 360°)$; e o círculo trigonométrico de Hiparco.

Na sequência, o trabalho traz uma proposta de atividades para o ensino de trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental, com o uso das construções feitas no *software* GeoGebra. Esta proposta tem a intenção de auxiliar os alunos a aprenderem de forma gradual, sem a necessidade de decorar fórmulas, desenvolvendo neles a capacidade de aplicar os conhecimentos trigonométricos construídos.

1 História da Trigonometria

A trigonometria tem uma história rica, fez parte de todas as grandes civilizações e continua sendo parte importante nos estudos e aplicações da atualidade. Não se sabe ao certo quando os estudos da trigonometria foram iniciados, mas pode-se dizer que o desenvolvimento dos estudos se deu por conta dos problemas gerados pela astronomia, navegação e agrimensura. Para resolver esses problemas era necessário comparar um triângulo qualquer à outro semelhante, motivo pelo qual surgiu o círculo trigonométrico onde se tem todos os triângulos possíveis com cateto unitário ou hipotenusa unitária.

Na construção dos relógios de Sol, produzidos pelos egípcios, era preciso ter conhecimento de algumas relações entre ângulos e cordas em um círculo. Alguns matemáticos acreditam que a trigonometria foi originalmente inventada para a produção desse tipo de relógio. No entanto, a construção dos relógios de Sol se baseava mais em observações diárias, sem um estudo aprofundado em trigonometria. O livro (KENNEDY, 1992) traz uma inscrição do século XIII a.C., em Abydos, no Alto Egito, e apresenta uma tabela que relaciona o tempo ao comprimento da sombra do gnômon (instrumento utilizado para projetar sombra em um plano perpendicular a ele). A ideia de função era bastante utilizada pelos egípcios, neste caso relacionando o tempo ao comprimento da sombra, mas com o passar o tempo o instrumento básico passou a ser a *função corda*, ainda tabulada em manuais de engenharia e conhecida como a precursora da função seno.

Segundo (USP, 2000) é possível encontrar problemas envolvendo cotangente no *Papiro Rhind* (também conhecido como *Papiro Ahmes*). Este papiro egípcio é um dos mais antigos registros que sobreviveu ao tempo e foi copiado por Ahmes, por volta de 1650 a.C., de outro papiro ainda mais antigo provindo do Reino Médio entre 2000 a.C. e 1800 a.C., segundo o que foi escrito por Ahmes. O papiro copiado por Ahmes se encontra, quase na sua totalidade, no museu British Museum, em Londres, mas alguns fragmentos estão em Brooklyn Museum, em Nova York. Um fragmento do papiro de Rhind pode ser visualizado na Figura 1:

Figura 1 – Uma parte do papiro Rhind, que se encontra no Museu Britânico, Londres

Outro registro importante é a tábula de secantes *Plimpton 322* (veja a Figura 2). Trata-se de uma pedra cuneiforme babilônica, com registro de ternas pitagóricas, segundo o historiador matemático Otto Neugebauer. A *Plimpton 322* é, talvez, a mais notável tábula matemática babilônica, e foi escrita no período Babilônico Antigo, aproximadamente 1900 a 1600 a.C.. Esta pedra se encontra na Universidade de Columbia, em Nova York, conforme (BICUDO, 2010) e (USP, 2000).

Figura 2 – Plimpton 322

Embora as civilizações do Egito e Mesopotâmia tivessem algumas noções em relação à trigonometria, foi na Grécia que os estudos nessa área se desenvolveram. Os gregos, de modo geral, foram estudiosos da cultura egípcia e mesopotâmica e muitos registros dessas duas civilizações chegavam à Grécia. Muitos gregos notáveis dedicaram a sua vida a dar sequência nos estudos iniciados no Egito e na Mesopotâmia e o desenvolvimento da Matemática não foi uma exceção. O próprio nome "*trigonometria*" "...do grego *trígono* significa "triangular" e *metria*, "medida"..."(SILVEIRA; MARQUES, 2001).

Coube a Hiparco de Nicéia (190 a 125 a.C.), astrônomo greco-otomano, o título de "Pai da trigonometria" por ter criado o que podemos chamar de primeiro círculo trigonométrico, obviamente diferente do que temos conhecimento hoje, pois os gregos não tinham conhecimento dos números negativos. Entre os feitos de Hiparco está o fato de ter sido a primeira pessoa a relacionar as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo através de uma tabela de cordas, de acordo com (BENTLEY, 2010).

A trigonometria de Hiparco era baseada no estudo da relação entre a corda de um círculo e o ângulo entre os segmentos que ligam as extremidades dessa corda ao centro desse círculo.

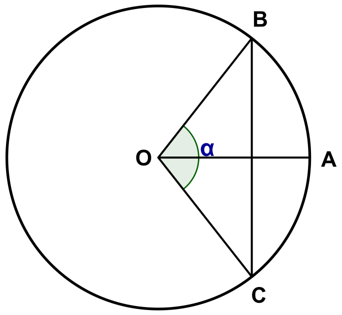

Figura 3 – Círculo de Hiparco

Observando a Figura 3 podemos relacionar o ângulo $\alpha = C\hat{O}B$ à corda $\overline{BC}$. Se o círculo dessa figura fosse unitário, poderia-se concluir facilmente que o seno da metade de α é igual à metade da corda $\overline{BC}$, portanto para um círculo qualquer podemos escrever a função corda da seguinte maneira:

$$\frac{\overline{BC}}{2} = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

A função anterior relaciona a metade do ângulo α à metade da corda $\overline{BC}$, por esse motivo era chamada de *função meia corda*. Segundo (BENTLEY, 2010),

> A palavra em sânscrito para "meia corda" era *jya-ardha*, que era abreviada por *jiva*. Em árabe isso se tornou *jiba*, que se abrevia por *jb*. Tradutores latinos tornaram erroneamente *jb* pela palavra árabe *jaib*, que singnifica *seio*, portanto passaram a usar a palavra latina *sinus*, e em português *sinus* tornou-se **seno**.

Pelo que consta em (USP, 2000), somente no século XVII surgiu o termo *cosseno*, que é o seno do ângulo complementar. O seno e o cosseno surgiram para resolver questões existentes na astronomia. Acredita-se que o conceito de *tangente* tenha surgido para cálculos de alturas, através da relação entre seno e cosseno.

Também contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria o astrônomo e geômetra Menelau de Alexandria (70 a 130 d.C.). Segundo (FILHO, 2014c), entre suas principais obras estão *Cordas em Círculos*, em seis livros, *Elementos de Geometria*, em três livros, e *Sphaera*, em três livros, também chamado de "O Livro das Proposições Esféricas". *Sphaera* é a única obra de Menelau que foi preservada, em uma versão Árabe, e é o trabalho mais antigo sobre trigonometria esférica. Nesta obra ele provou, entre outras coisas, que a soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície de uma esfera é maior que 180°.

Outro extraordinário matemático, que contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da trigonometria foi Claudio Ptolomeu, nascido possivelmente em Ptolemaida Hérmia por volta de 90 d.C., no Egito. Morreu em Canopo, também no Egito, por volta do ano 168 d.C.. Pelo que consta em (BENTLEY, 2010), (SANTIAGO, 2012) e (USP, 2000) Ptolomeu também era astrônomo, geógrafo e físico e foi o último dos grandes cientistas gregos. Trabalhou em Alexandria e deu continuidade ao trabalho deixado por Hiparco. Entre os feitos de Ptolomeu estão: a continuidade do catálogo de estrelas que foi iniciado por Hiparco - catalogou 1022 estrelas; calculou o valor de π com considerável precisão - usou a aproximação $\dfrac{377}{120}$ para o valor de π, que só seria melhorado 150 anos depois; desenvolveu a ideia de cordas, produzindo uma tabela de valores de cordas para ângulos que variavam de meio em meio grau e lançou para as gerações seguintes os fundamentos sobre funções trigonométricas; fez um sistema geométrico-numérico, de acordo com as tabelas de observações babilônicas, para descrever os movimentos do céu.

Segundo (BENTLEY, 2010) Ptolomeu escreveu um tratado de 13 livros chamado *Syntaxis Mathematica* (Síntese Matemática), considerado por muitos tão importante quanto os *Os Elementos* de Euclides. Por volta do século IX, os árabes usavam o superlativo “Magiste” que significa “O Maior”, para se referir à obra. Nesse termo foi acrescentado o artigo árabe “Al”, então surgiu o nome *Almagesto* (Al-Magiste), como a obra é hoje conhecida. Pelo que consta em (VASCONCELOS, 2014a) e (VASCONCELOS, 2014b), esta obra, que é a síntese dos trabalhos e observações de Aristóteles, Hiparco, Posidônio e outros, é uma das mais importantes e influentes. Nela Ptolomeu se dedicou à explicação do sistema geocêntrico, que situa a Terra no centro do universo e, girando em torno dela estão: Mercúrio, Vênus, Lua, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e Urano.

Pelo que consta em (VASCONCELOS, 2014a), o segundo livro do Almagesto contém uma tabela de cordas e rudimentos de trigonometria esférica. No restante da obra Ptolomeu: defende o geocentrismo, no primeiro livro; descreve o movimento do Sol e da duração do ano, no terceiro livro; descreve o movimento da Lua e duração dos meses, no quarto livro; traz a distância do Sol e da Lua e descreve o astrolábio, no quinto livro; descreve eclipses do Sol e da Lua, no sexto livro; traz um catálogo de 1022 estrelas, no sétimo e oitavo livros; e expõe detalhadamente a sua teoria geocêntrica, nos cinco últimos livros. Mesmo defendendo o geocentrismo, o Almagesto foi uma obra importantíssima, que foi preservada em uma versão árabe encontrada no Irã em 765 d.C., e muito do que se sabe a respeito dos estudos de Hiparco se deve à esta obra. Este trabalho, apresentado por Ptolomeu, foi aceito por mais de 14 séculos, quando a teoria do geocentrismo foi suplantada por pessoas do quilate de Copérnico, Galileu e Kepler, dando espaço ao heliocentrismo, de acordo com (BENTLEY, 2010).

Tanto Hiparco quanto Ptolomeu, por influência babilônica, dividiam o círculo em 360°. Foi dividido assim pelos babilônios pelo fato de usarem o sistema sexagesimal, então dividiam o círculo em 60 partes, e depois subdividiam em 6 partes, pelo que consta em (BENTLEY, 2010). Posteriormente, surgiu a necessidade de uma nova unidade de medida para os ângulos e foi assim que surgiu o *radiano*, denominado *radian*, pois os estudiosos discutiam uma “expressão” do ângulo em termos de π, que primeiramente foi chamada π-*medida*, *circular* ou *medida arcual*, conforme (USP, 2000). Nenhum autor explica por que fizeram uso dessa unidade, mas o seu uso simplificou várias fórmulas matemáticas e físicas.

Pelo que consta em (USP, 2000), outra civilização antiga que contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria foi o povo hindu. Foi na Índia, inclusive, onde foi descoberto a mais antiga tábula de senos, de autor desconhecido. Outro registro importante foi o *Surya Siddhanta*, que é uma das primeiras doutrinas ou tradições em arqueo-astronomia dos hindus, de versão original também de um autor desconhecido. Esta obra misturava as crenças dos hindus com algumas informações científicas com pouca explicação e sem demonstração, entre elas: os movimentos dos planetas; a direção, local e horário dos planetas; as projeções de eclipses; estimativas dos tamanhos dos planetas (apresenta o tamanho de Mercúrio e Saturno com erro inferior a 1%, de Marte com erro de aproximadamente 11%, e considerava Vênus e Júpiter com a metade do tamanho real); e conter as raízes da moderna trigonometria usando sine (*jya*), co-seno (*kojya* ou “sine perpendicular”) e seno inverso (*otkram jya*), pela primeira vez, e também conter o uso mais antigo da tangente e secante quando se discute a sombra projetada por um gnômon. O *Surya Siddhanta* foi composto no século IV ou V d.C., mas a versão que resta foi revista tantas vezes que é difícil dizer que partes estão em sua forma original.

De acordo com (USP, 2000), o primeiro aparecimento real do seno de um ângulo se deu no trabalho dos hindus. Aryabhata (476 a 550 d.C.), elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou *jiva* para nomear o seno.

De acordo com (FILHO, 2014b), a tabela desenvolvida por Aryabhata foi reproduzida no trabalho do matemático e astrônomo hindu Brahmagupta (598 a 668 d.C,), na obra *Brahmasphutasiddhanta* (“A abertura do Universo”), escrita em 628 d.C. em 25 capítulos. Neste trabalho, Brahmagupta: definiu o número zero como sendo o resultado da subtração de um número por si mesmo; apresentou ideias de números negativos; explicou o movimento dos planetas e como suas trajetórias precisas podiam ser calculadas; apresentou o ano da Terra como sendo de 365 dias, 6 horas, 5 minutos e 19 segundos (posteriormente de 365 dias, 6 horas, 12 minutos e 36 segundos na obra *Khandakhadyaka*); e abordou as longitudes dos planetas; eclipses solares e lunares e conjunções dos planetas. Na obra *Khandakhadyaka*, Brahmagupta usa a fórmula de interpolação para calcular os valores de seno.

O próximo passo do desenvolvimento da trigonometria também foi realizado na

Índia. No século VII, o matemático, astrólogo e astrônomo, Bhaskara I (600 a 680 d.C,), escreveu *Laghubhaskariya*, *Aryabhatiyabhasya*, e também a obra *Mahabhaskariya*, em 8 capítulos sobre matemática aplicada em astronomia, em que apresentou, no sétimo capítulo, uma aproximação para a função de seno por meio de uma fração racional. Essa fórmula era incrivelmente precisa e seu uso conduz a um erro máximo menor que 1%, de acordo com (FILHO, 2014a). A fórmula é:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)},$$

onde x é a medida do ângulo em radianos.

Outro notável matemático, astrólogo e astrônomo hindu foi Bhaskara II (1114 a 1185 d.C.). Pelo que consta em (FILHO, 2014a), ele escreveu seis grandes trabalhos que são: *Lilavati*, *Bijaganita*, *Siddhantasiromani*, *Vasanabhasya of Mitaksara*, *Karanakutuhala ou Brahmatulya* e *Vivarana*. Em *Siddhantasiromani*, apresentou dois volumes sobre trigonometria e matemática aplicada à astronomia, e apresentou também as expressões: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$ e $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$, que já eram utilizadas no trabalho de Ptolomeu.

A tangente e a cotangente vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de sol. A secante e a cossecante não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas com valores de secante e cossecante correspondentes às medidas de vários ângulos, conforme (USP, 2000).

Também de acordo com (USP, 2000), a trigonometria continuou sendo usada e desenvolvida por outros grandes matemáticos como: o francês Fibonacci (1170 a 1250 d.C.), o polaco Copérnico (1473 a 1543 d.C.), o suíço Johann Bernoulli (1667 a 1748 d.C.), o francês De Moivre (1667 - 1754 d.C.) e o suíço Euler (1707 a 1783 d.C).

No próximo capítulo, descreveremos alguns dos principais livros de Matemática adotados no Brasil que apresentam o conteúdo de trigonometria.

2 O estudo de trigonometria

Segundo (LIBÂNEO, 2001) “A escola com que sonhamos é aquela que assegura a todos a formação cultural e científica para a vida pessoal, profissional e cidadã,...”

Ainda sobre essas falas e reflexões o mesmo autor relata:

> A escola tem concorrentes poderosos, inclusive que pretendem substituir suas funções, como as mídias, os computadores e até propostas que querem fazer dela meramente um lugar de convivência social. Acho vital compreender que efetivamente estamos de frente a novos desafios. Em face desse contexto, a escola precisa manter aquelas funções nucleares de que falei, mas, simultaneamente, precisa rever processos, os métodos, as formas de educar, ensinar e aprender. Para que isso aconteça, é preciso que os professores compreendam que a escola não é mais a única agência de transmissão do saber. Na verdade, ela nunca deteve sozinha nesse papel, mas hoje é fundamental que os educadores percebam que a educação ocorre em muitos lugares... (LIBÂNEO, em entrevista a (COSTA, 2007))

Neste contexto, é importante que os educadores tenham compreensão de que é necessária a adaptação da escola às mudanças da sociedade, inclusive na forma de se construir conhecimento. Fica evidente que uma das formas de se adaptar, é usar novas agências de transmissão do saber não como concorrentes, mas em prol de uma educação de qualidade.

Quanto à trigonometria, o professor pode fazer uso de recursos tecnológicos que podem servir de facilitador da aprendizagem dessa importante área do conhecimento, que já contribuiu muito com o desenvolvimento científico.

Algumas noções sobre trigonometria são estudadas no 9º ano do Ensino Fundamental, com algumas aplicações de razões trigonométricas no triângulo retângulo, e no Ensino Médio os estudos se intensificam com funções trigonométricas, normalmente no 1º ano, e prosseguem em alguns cursos de Ensino Superior pela utilidade que se tem em vários ramos do conhecimento. É comum os vestibulares, e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) apresentarem questões referentes à este conteúdo.

2.1 Abordagem dada ao estudo de trigonometria em livros didáticos

Esta subseção apresenta uma análise da abordagem da trigonometria em 5, dos 10 livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, colocados a disposição dos professores da rede pública de ensino pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura) através do PNLD 2014 (Programa Nacional do Livro Didático). Os livros analisados são: *Matemática – Bianchini* (BIANCHINI, 2012), *Matemática – ideias e desafios* (ONAGA; MORI, 2012), *Matemática: teoria e contexto* (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012), *Projeto Araribá Matemática* (LEONARDO, 2013) e *Vontade de saber Matemática* (SOUZA; PATARO, 2012).

O livro *Matemática – Bianchini* (BIANCHINI, 2012) introduz o conteúdo de trigonometria com um exemplo de aplicação e o resumo da história da trigonometria. O livro apresenta: definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo; estudo das razões trigonométricas com ângulos notáveis (30°, 45° e 60°); exemplos, exercícios e problemas com aplicações das razões trigonométricas. Mostra também: uma tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno, e tangente, com aproximação de 4 casas decimais para ângulos maiores que 0° e menores que 90°. Os diferenciais deste livro são: mostrar ao leitor como usar a calculadora científica para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente; explicar o que é teodolito (aparelho usado para medir ângulos) e como construir um teodolito com transferidor, que pode ser interessante para ser trabalhado em sala de aula. Este livro não traz explicação do conteúdo de trigonometria fazendo uso de *softwares.*

O livro *Matemática – ideias e desafios* (ONAGA; MORI, 2012) introduz o conteúdo de trigonometria com um exemplo de aplicação interessante, mas resume a história em apenas um parágrafo, e não menciona o significado da palavra "trigonometria". Apresenta definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo; estudo das razões trigonométricas com ângulos notáveis (30°, 45° e 60°); exemplos, exercícios e problemas com aplicações das razões trigonométricas. Mostra também uma tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno, e tangente com aproximação de 3 casas decimais, para ângulos maiores que 0° e menores que 90°. Além disso, faz uma breve referência a outras três relações trigonométricas, entre elas a relação fundamental e deixa a demonstração como desafio. Os diferenciais deste livro são: uma linguagem acessível ao leitor; mostrar a construção de um instrumento para determinar os valores de seno e cosseno para ângulos maiores que 0° e menores que 90° que reproduz o primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Este livro não traz explicação do conteúdo de trigonometria fazendo uso de *softwares.*

O livro *Matemática: teoria e contexto* (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012) introduz o conteúdo explicando o significado da palavra "trigonometria". Apresenta um resumo da história da trigonometria; um exemplo interessante de aplicação da trigonometria e muitos exemplos que necessitam medições manuais; definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo; estudo das razões trigonométricas com ângulos notáveis (30°, 45° e 60°); exercícios e problemas com aplicações das razões trigonométricas. Mostra também uma tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno, e tangente com aproximação de 2 casas decimais, para ângulos maiores que 0° e menores que 90°. Os diferenciais deste livro são: estimular a aplicação dos conhecimentos na prática; apresentar o conteúdo de forma bem ilustrada; e apresentar a curiosidade de como calcular o raio da Terra. Este livro não traz explicação do conteúdo de trigonometria fazendo uso de *softwares*.

O livro *Projeto Araribá Matemática* (LEONARDO, 2013) introduz o conteúdo de trigonometria com um resumo da história e um exemplo de aplicação da trigonometria. Apresenta definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo; estudo das razões trigonométricas com ângulos notáveis (30°, 45° e 60°); exercícios e problemas com aplicações das razões trigonométricas. Mostra também uma tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno, e tangente com aproximação de 3 casas decimais, para ângulos maiores que 0° e menores que 90°. Os diferenciais deste livro são: apresentar relações entre seno, cosseno e tangente; mostrar ao leitor como usar a calculadora científica para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente. Este livro não traz explicação do conteúdo de trigonometria fazendo uso de *softwares*.

O livro *Vontade de saber Matemática* (SOUZA; PATARO, 2012) introduz o conteúdo de trigonometria com um resumo da história e fala da importância da trigonometria em vários campos do conhecimento. Apresenta definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo; estudo das razões trigonométricas com ângulos notáveis (30°, 45° e 60°); exemplos, exercícios e problemas com aplicações das razões trigonométricas. Mostra também uma tabela trigonométrica com valores de seno, cosseno, e tangente com aproximação de 3 casas decimais, para ângulos maiores que 0° e menores que 90°. Os diferenciais deste livro são: expor o conteúdo de forma bem ilustrada e com muitos detalhes; conter um número expressivo de exercícios; e explicar ao leitor como usar um *software*, que oferece a possibilidade de encontrar medidas de ângulos e lados de triângulos, chamado *Microsoft Mathematics*.

Nenhum dos atuais livros analisados menciona a existência do círculo trigonométrico, embora o livro *Matemática – ideias e desafios* (de (ONAGA; MORI, 2012)) apresente um instrumento para encontrar os valores de seno e cosseno de um ângulo agudo, que é uma reprodução do primeiro quadrante do círculo. Os livros analisados definem seno como a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa em um triângulo retângulo; o cosseno como a razão entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa em um triângulo retângulo, e a tangente como a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente em um triângulo retângulo, ou seja, definem seno, cosseno e tangente apenas para ângulos agudos. Nenhum desses livros faz referência à secante, cossecante, e cotangente, e quase nada se fala a respeito de outras relações trigonométricas. Esses livros se limitam ao estudo da trigonometria em triângulos retângulos, não fazendo referência à trigonometria em um triângulo qualquer, consequentemente não fazem referência a lei dos senos e a lei dos cossenos. Embora o livro *Vontade de saber Matemática* (de (SOUZA; PATARO, 2012)) apresente como usar o programa *Microsoft Mathematics*, livros que usam recursos tecnológicos são exceções.

É importante que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental: estudem secante, cossecante e cotangente, assim como trigonometria em um triângulo qualquer, antes de chegarem ao Ensino Médio; saibam o significado das palavras seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente; conheçam o círculo trigonométrico pois através dele é possível chegar às razões e relações trigonométricas sem a necessidade de decorar tais razões e relações; e conheçam os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente também para ângulos maiores ou igual a 90°, que sejam estimulados a usar *softwares* de maneira correta, pois dessa forma chegam ao Ensino Médio mais preparados para aprender as funções trigonométricas.

3 Justificativa e objetivos

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1998) do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, no que se refere à importância dos recursos tecnológicos na educação:

> O mundo vive um acelerado desenvolvimento, em que a tecnologia está presente direta ou indiretamente em atividades bastante comuns. A escola faz parte do mundo e para cumprir sua função de contribuir para a formação de indivíduos que possam exercer plenamente sua cidadania, participando dos processos de transformação e construção da realidade, deve estar aberta e incorporar novos hábitos, comportamentos, percepções e demandas.

É com a preocupação de incorporar esses novos hábitos, comportamentos, percepções e demandas, que este trabalho tem os objetivos de: apresentar uma proposta de trabalho no ensino da trigonometria que possa estimular o interesse dos alunos pelo aprendizado e estimular o uso de novas ferramentas tecnológicas em sala de aula que possam servir não somente como facilitador para os professores, mas também como suporte para a construção do conhecimento em trigonometria por parte dos alunos.

Este trabalho tem como público alvo, principalmente alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mas também pode servir à todas as pessoas que se interessam pelo estudo da trigonometria.

O fato de ser professor de Ensino Funfamental me motivou a escolher um tema que pudesse ser abordado nessa etapa do ensino, mas a principal motivação para a elaboração deste trabalho deve-se à inquietação diante das experiências negativas acumuladas com aulas de trigonometria através de métodos tradicionais. Além disso, existem: a inconformidade com a dificuldade dos alunos em entender um conteúdo tão rico e útil; o fato da grande maioria dos livros didáticos não apresentarem uma forma de levar os alunos a concluírem as relações trigonométricas e a vontade de buscar melhores resultados fazendo algo diferenciado daquilo que é apresentado nos livros didáticos atuais.

O presente trabalho tem a intenção de: estimular o uso de recursos tecnológicos em sala de aula; oferecer aos professores uma forma alternativa de ensino da trigonometria e servir como facilitador para esses professores; eliminar, ou pelo menos reduzir, as experiências frustrantes dos professores no ensino deste conteúdo; dar aos alunos os conhecimentos em trigonometria necessários para que tenham condições entender a importância desse tema, aplicar esse conhecimento na prática e que possam prosseguir os estudos no Ensino Médio.

Este trabalho não tem o objetivo de substituir os livros didáticos, mas sim servir como complemento a eles.

4 Construções no *software* GeoGebra

Para a realização deste trabalho iniciam-se agora algumas construções no *software* GeoGebra que serão usadas na realização das atividades, mas que também podem servir para que os professores desenvolvam suas próprias atividades. Nessas construções usa-se a versão 4.4.29.0 do *software* GeoGebra. Recomenda-se que esta versão seja instalada no computador, mas também é possível fazer as construções na *web*, através do site:

http://web.geogebra.org/chromeapp/.

Para facilitar a compreensão, são dados os seguintes nomes aos recursos do programa, conforme a Figura 4:

➡ **Menu**: É a barra horizontal que se localiza na parte superior com os botões *arquivo*, *editar*, *exibir*, *opções*, *ferramentas*, *janela* e *ajuda*;

➡ **Barra de recursos**: É a barra horizontal que se localiza imediatamente abaixo do menu e possui 12 botões;

➡ **Janela de Álgebra**: É a janela que se localiza imediatamente abaixo da barra de recursos, à esquerda;

➡ **Janela de Visualização**: É a janela que se localiza imediatamente abaixo da barra de recursos, à direita, onde fica toda a construção geométrica desejada;

➡ **Entrada**: É a barra horizontal que fica na parte inferior, nela podem ser escritos: pontos, retas, funções, operações, etc. Tudo o que é digitado na *entrada* aparece na *janela de álgebra*. Se solicitarmos operações aparecerá o resultado da operação.

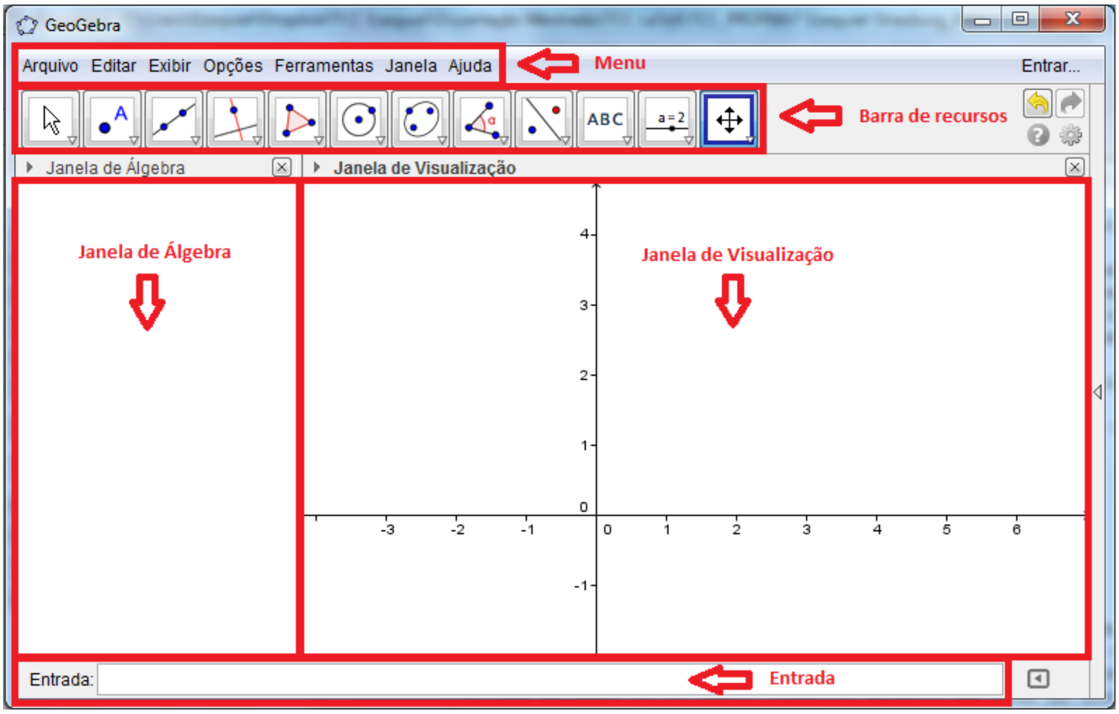

Figura 4 – GeoGebra

Observações:

1. Sempre que se falar em *clicar* em um botão, significa movimentar o mouse levando a seta, na tela, até o botão desejado e pressionar o botão *esquerdo* do mouse. Será especificado quando for necessário clicar com o botão *direito* do mouse;

2. *Arrastar* significa clicar, permanecendo com o botão esquerdo do mouse pressionado, e movimentar o mouse;

3. Ao clicar em um dos botões do menu, ou na parte inferior direita de cada um dos botões da barra de recursos se vizualizam outros botões que serão chamados de *opções*;

4. Não é necessário clicar na parte inferior direita dos botões da barra de recursos para que se visualizem as opções de cada botão, basta clicar em qualquer parte do botão e esperar por um segundo com o mouse na mesma posição;

5. Alguns passos da construção são facultativos servindo apenas esteticamente;

6. Se acontecer de algum dos passos não sair conforme a explicação, pode-se desfazer este passo pressionando as teclas *Ctrl* e *Z*, simultaneamente;

7. Em alguns casos será necessário clicar com o botão direito do mouse na janela de álgebra, ou na janela de visualização, para que se abra uma janela com algumas

opções, se a opção procurada não estiver nessa janela, recomenda-se clicar em qualquer um dos botões da barra de recursos e voltar a clicar com o botão direito na janela de álgebra, ou janela de visualização, para que a opção desejada apareça na janela.

Para não haver poluição visual no círculo trigonométrico, com excesso de informações, serão construídos dois círculos: o **círculo trigonométrico 1** na seção 4.1, com seno, cosseno e tangente; e o **círculo trigonométrico 2** na seção 4.2, com secante, cossecante e cotangente.

4.1 Círculo trigonométrico 1: seno, cosseno e tangente

O círculo trigonométrico 1 apresenta os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo α, e esta seção apresenta duas construções para o círculo trigonométrico 1, que diferem na forma como se altera o ângulo. Estas construções serão chamadas de círculo trigonométrico 1a, e círculo trigonométrico 1b.

4.1.1 Construção do círculo trigonométrico 1a

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

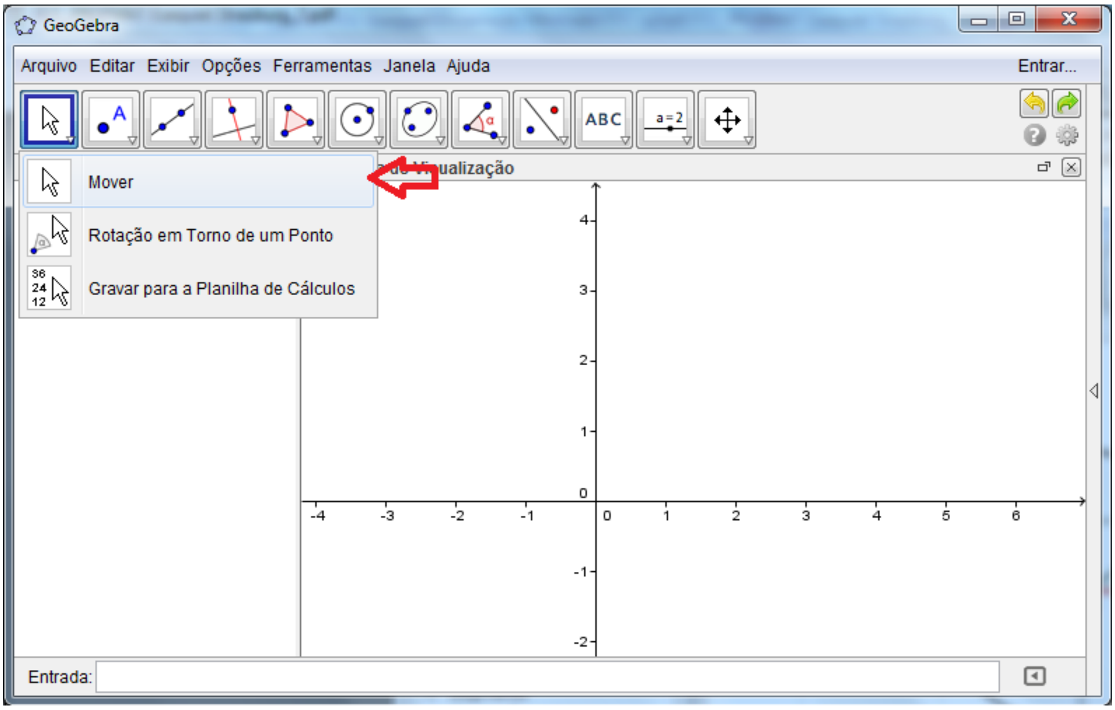

Figura 5 – Mover objeto

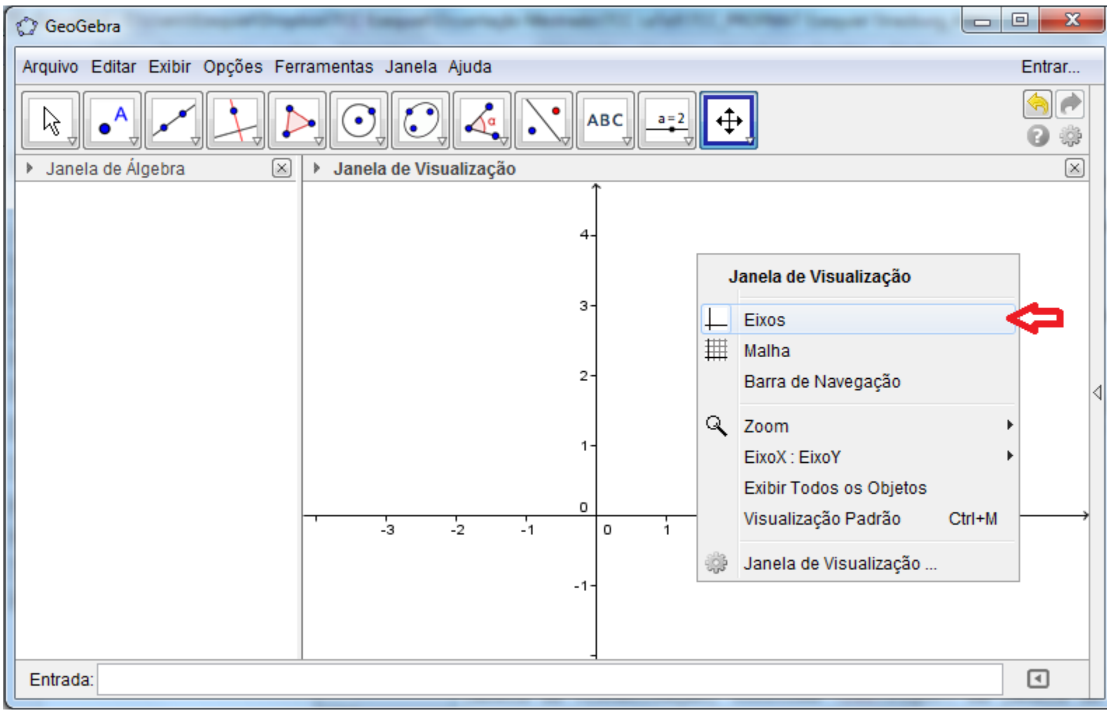

Figura 6 – Ativar, ou desativar, eixos x e y

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para centralizar os eixos;

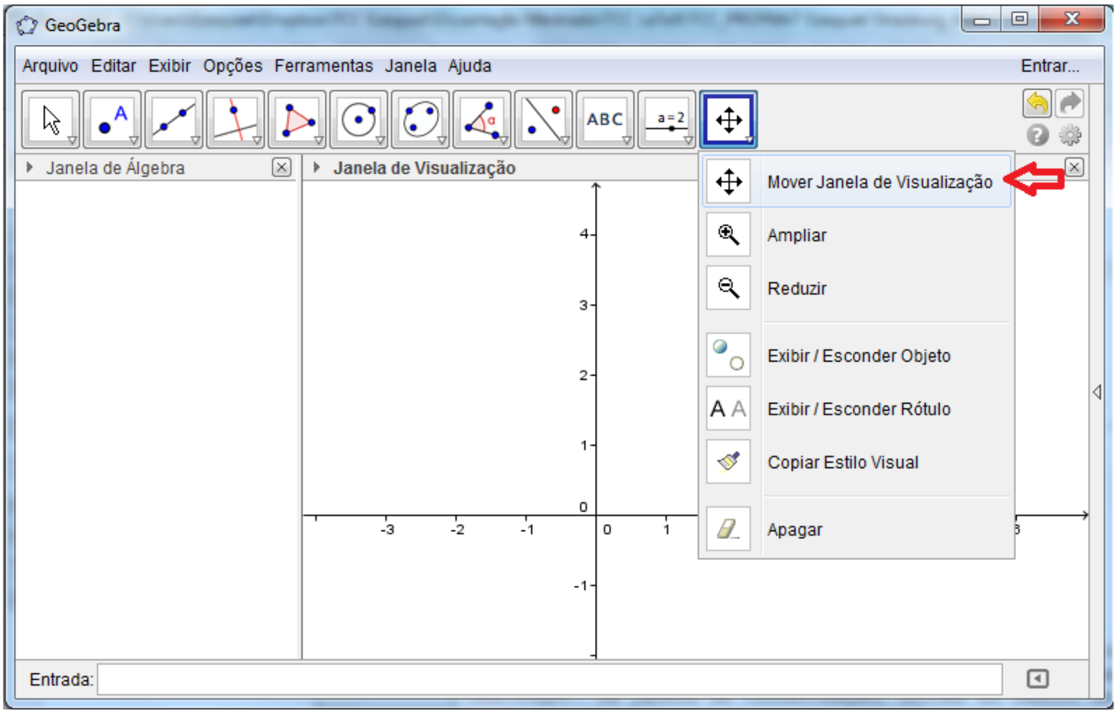

Figura 7 – Mover janela de visualização

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

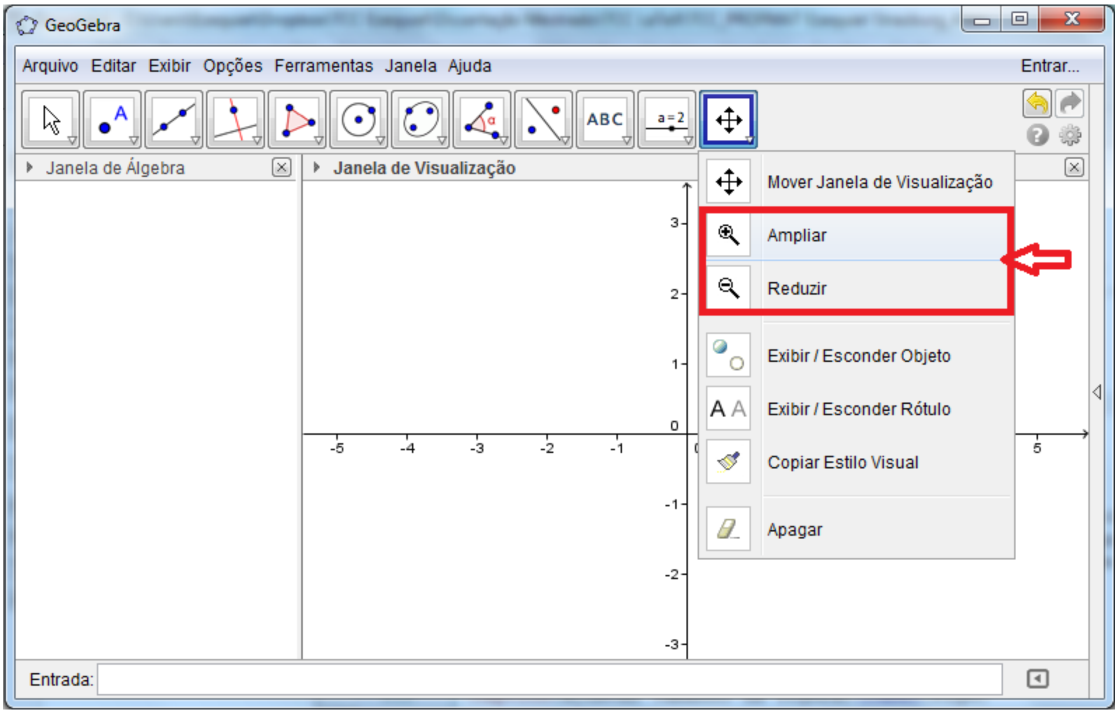

Figura 8 – Ajustar tamanho da figura

4. Criar o círculo de raio unitário em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e um de seus pontos, conforme a Figura 9. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$, e em seguida clicar no ponto $(1, 0)$, criando assim os pontos A e B e o círculo c de raio unitário e centrado na origem;

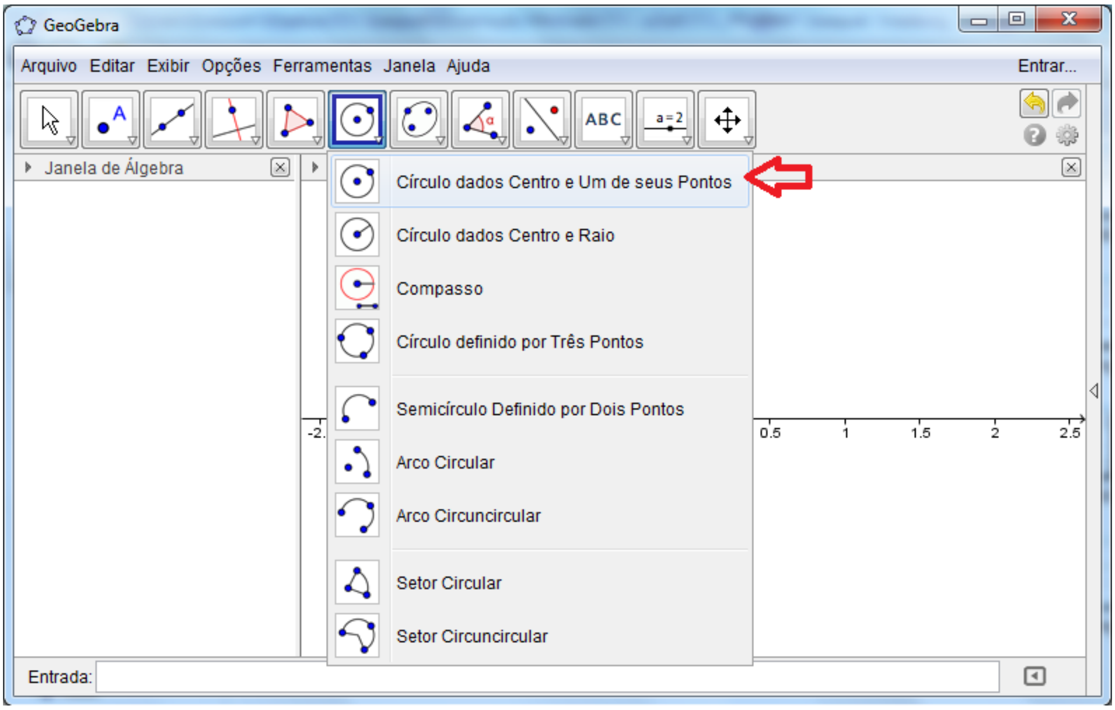

Figura 9 – Criar círculo

5. Criar um ponto qualquer sobre o círculo c em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção ponto, conforme a Figura 10. Na janela de visualização, clicar em um ponto qualquer do círculo c, com exceção dos pontos de interseção entre o eixo y e o círculo c, criando o ponto C;

   Observações:

   a) O ponto C não deve ser um dos pontos de interseção entre o eixo y e o círculo c pelo fato da tangente de um ângulo não estar definida para os ângulos de 90° e 270°;

   b) Evite escolher um ponto próximo a um dos pontos de interseção entre o eixo y e o círculo c, pois isso pode dificultar a construção da figura.

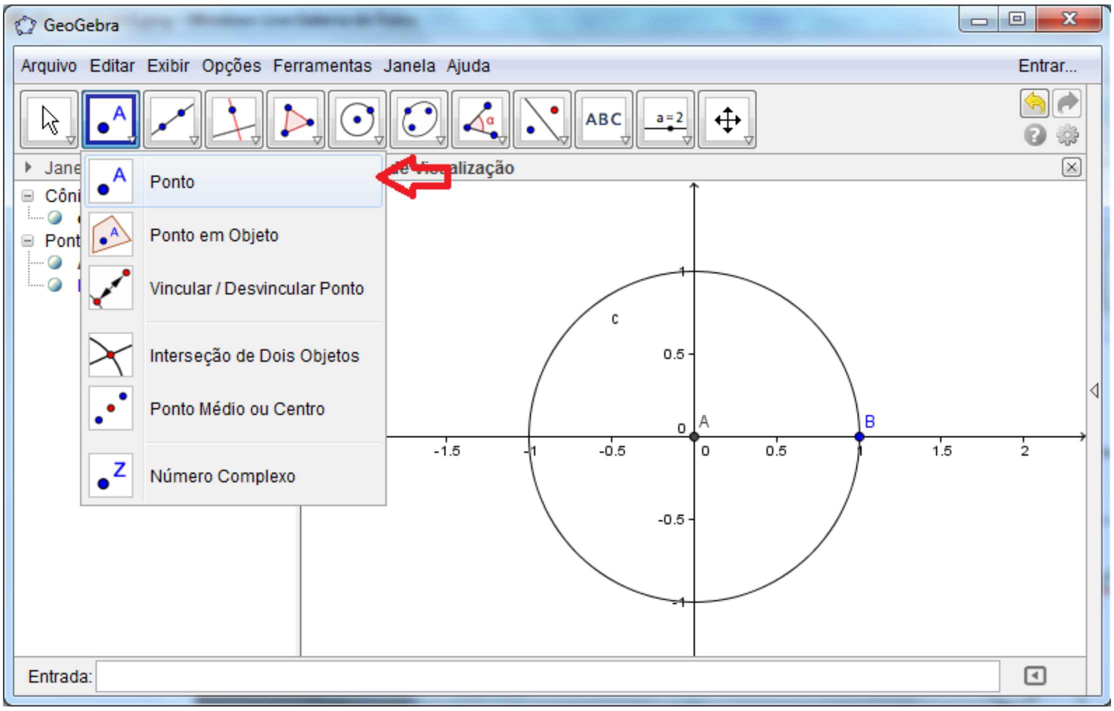

Figura 10 – Criar ponto

6. Traçar o segmento de reta $\overline{AC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto $A(0,0)$ e depois clicar no ponto C, criando o segmento de reta $a = \overline{AC}$;

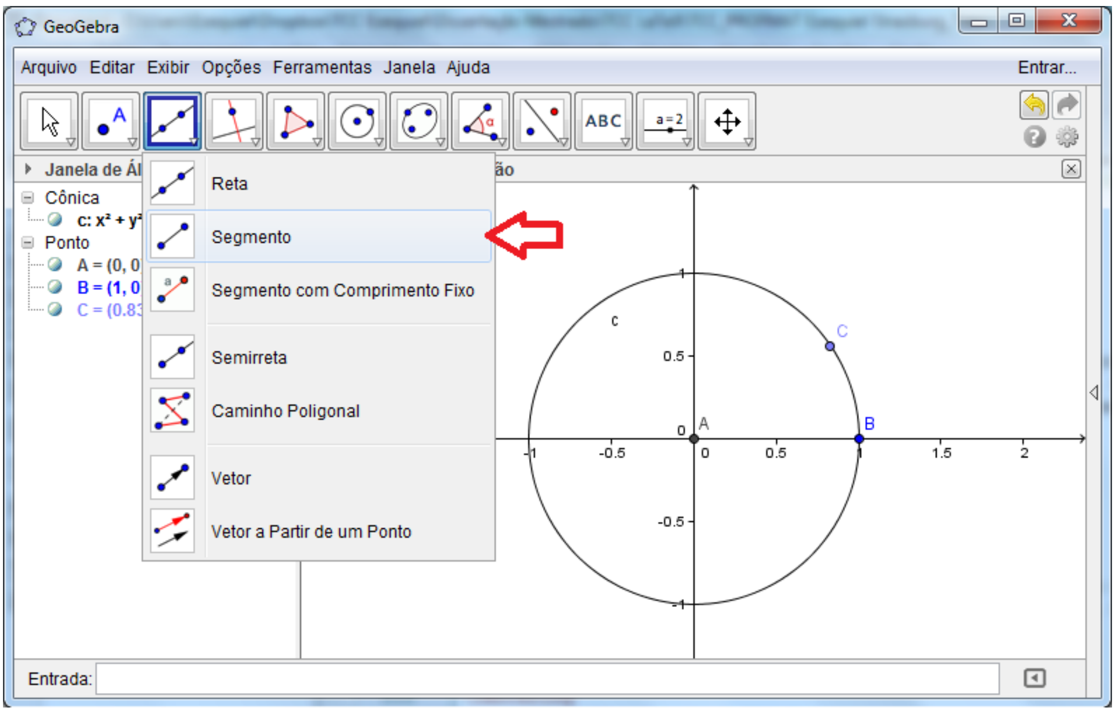

Figura 11 – Traçar segmento de reta

7. Criar o ângulo $B\widehat{A}C$ em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo, conforme a Figura 12. Na janela de visualização, clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e por fim, clicar no ponto C, criando o ângulo $\alpha = B\widehat{A}C$;

   Observação:

   a) Vale ressaltar que a ordem dos pontos em que clicamos altera a figura do ângulo.

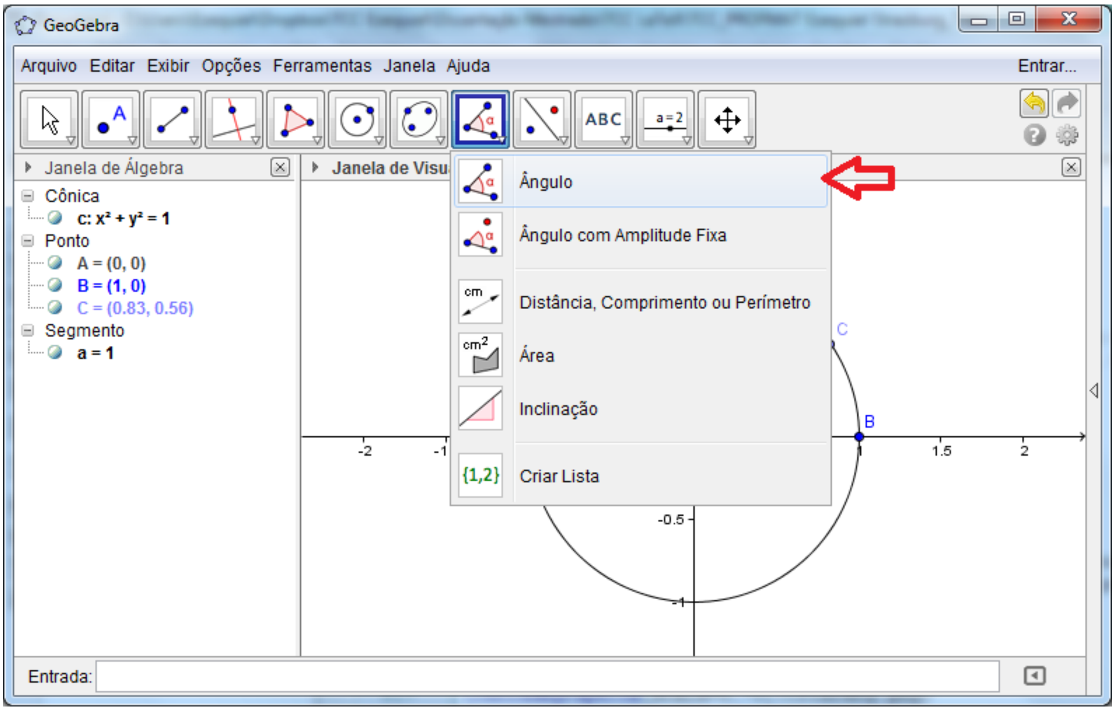

Figura 12 – Criar ângulo

8. Traçar a reta tangente ao círculo c, pelo ponto $(1, 0)$ em: barra de recursos, clicar no botão 4, depois clicar na opção reta tangente, conforme a Figura 13. Na janela de visualização, clicar no ponto B, e depois clicar em qualquer outro ponto do círculo c, diferente de C, criando a reta b;

   Observação:

   a) O *software* GeoGebra não criará a reta tangente ao clicar nos pontos B e C, por esse motivo o ponto C não pode ser escolhido para essa construção.

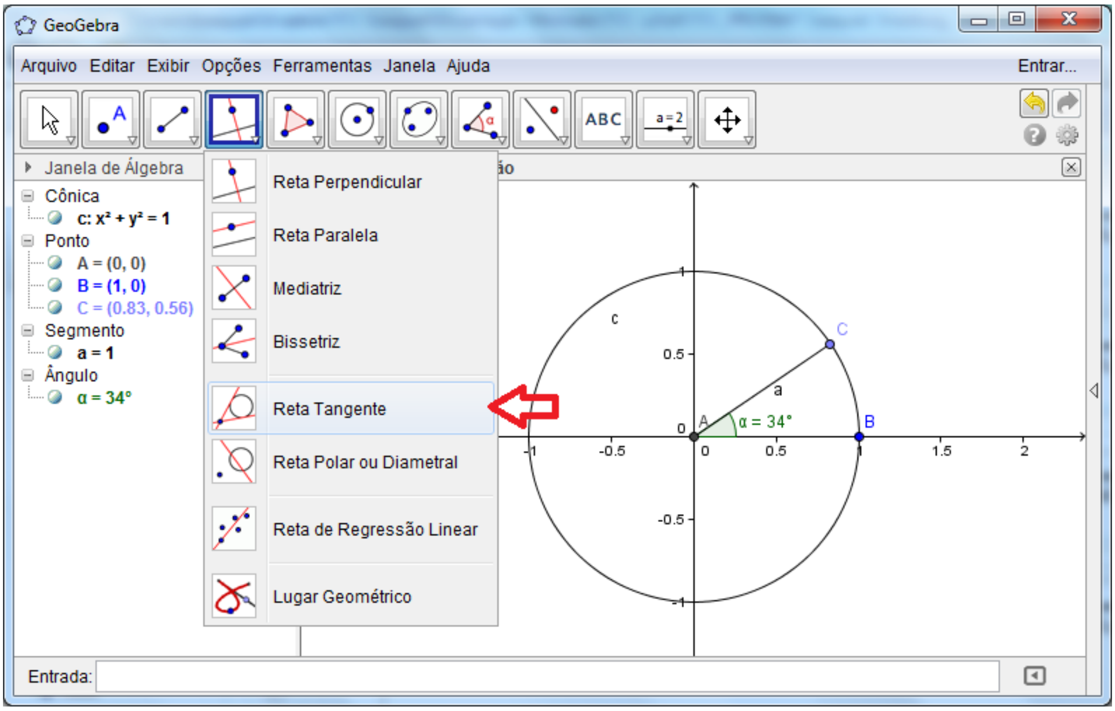

Figura 13 – Traçar reta tangente ao círculo

9. Criar o ponto que contém a tangente de α na coordenada y, sobre a reta b, em: barra de entrada, digitar o ponto $(1, \operatorname{tg}(\alpha))$, conforme a Figura 14, e pressionar a tecla enter, criando o ponto D sobre a reta tangente b. Para digitar α na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α;

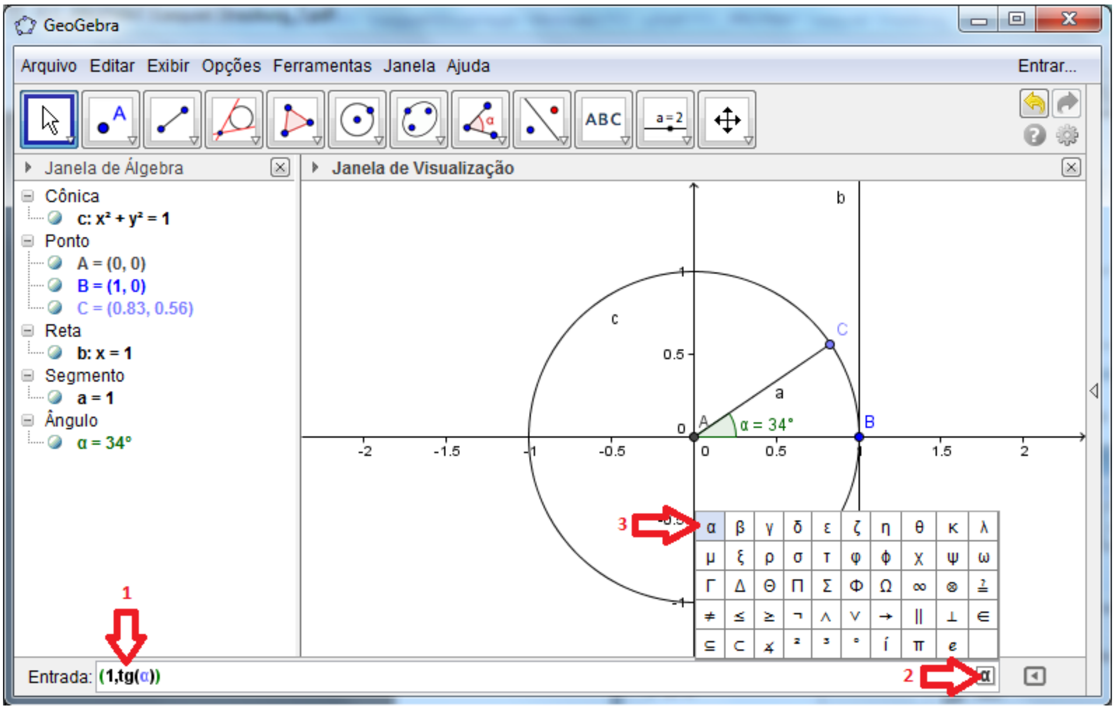

Figura 14 – Ponto com tangente do ângulo na coordenada y, na reta b

10. Criar o ponto que contém o cosseno de α na coordenada x, sobre o eixo x, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\cos(\alpha), 0)$, conforme a Figura 15, e pressionar a tecla enter, criando o ponto E;

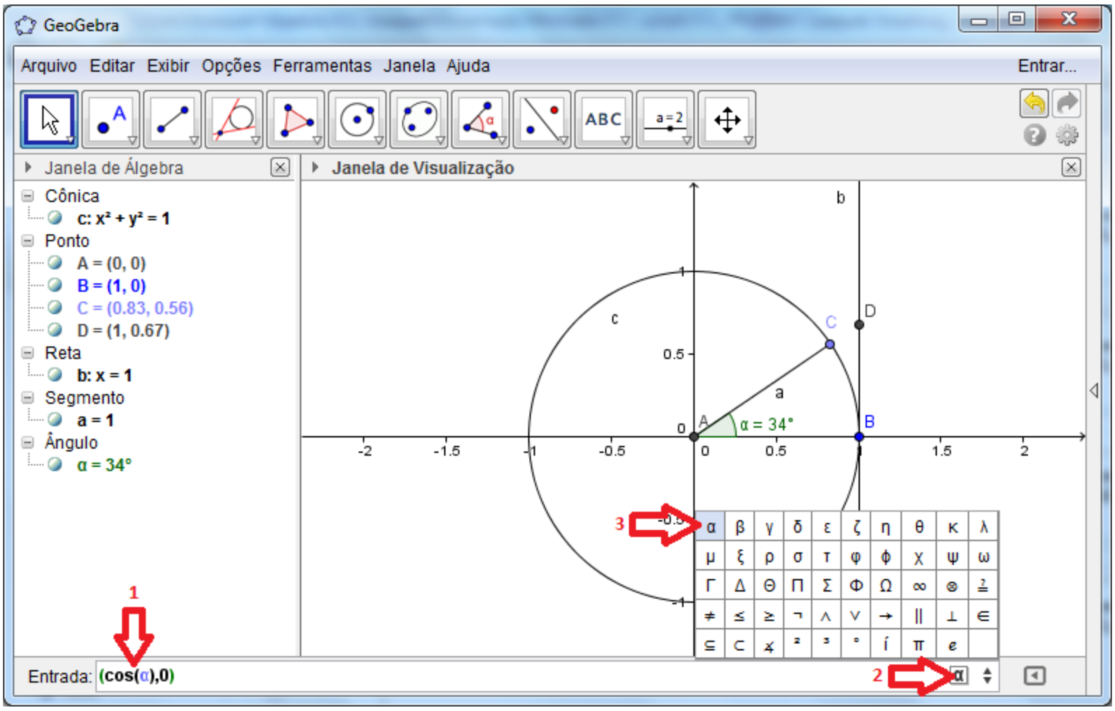

Figura 15 – Ponto com cosseno do ângulo na coordenada x, no eixo x

11. Criar o ponto que contém o seno de α na coordenada y, sobre o eixo y, em: barra de entrada, digitar o ponto $(0, \text{sen}(\alpha))$, conforme a Figura 16, e pressionar a tecla enter, criando o ponto F;

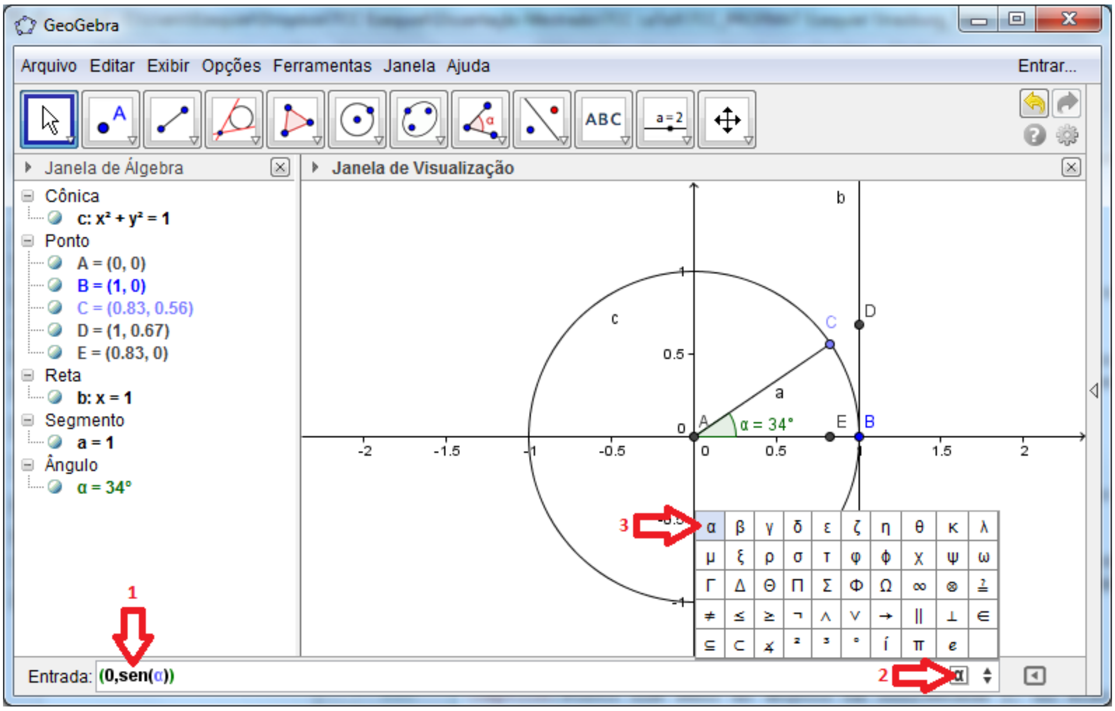

Figura 16 – Ponto com seno do ângulo na coordenada y, no eixo y

12. Traçar os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $d = \overline{AD}$; clicar no ponto C e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $e = \overline{CE}$; clicar no ponto C e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $f = \overline{CF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $g = \overline{AF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $h = \overline{AE}$; e por fim, clicar no ponto B e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $i = \overline{BD}$;

13. Escrever os valores de seno, cosseno e tangente na janela de álgebra, da seguinte forma: digitar na barra de entrada $\text{sen}(\alpha)$, conforme a Figura 17, e pressionar a tecla enter criando o valor j. Depois repetir o processo digitando $\cos(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor k, e por fim, digitando $\tan(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor l;

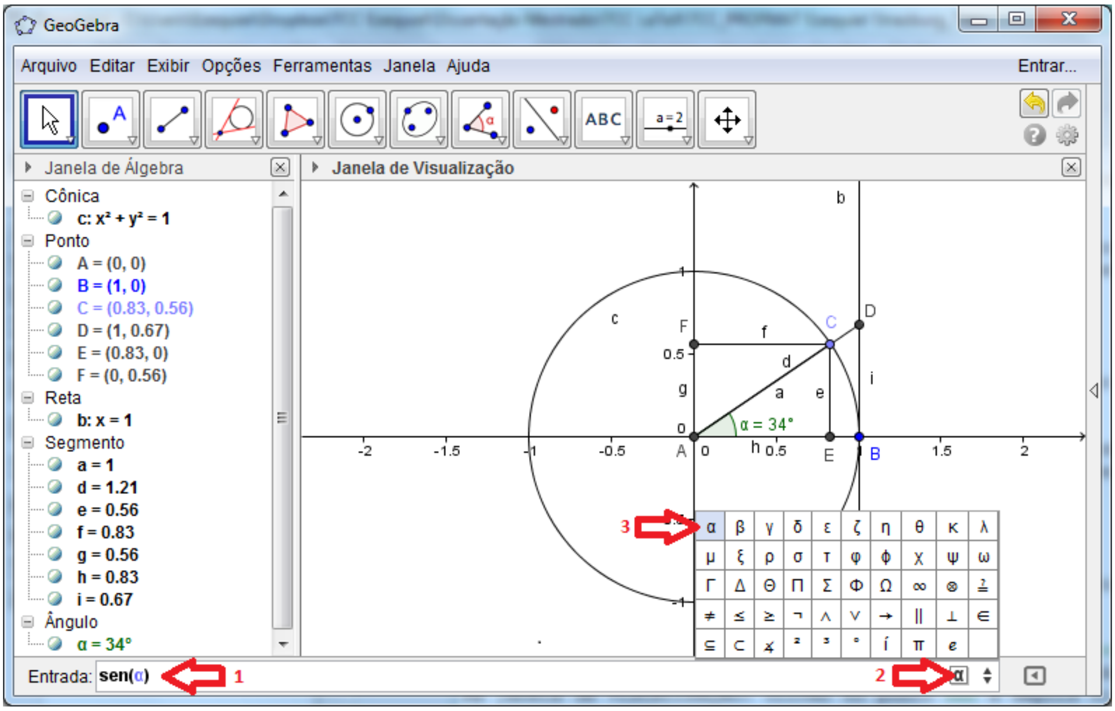

Figura 17 – Criar o valor de seno na janela de álgebra

14. Renomear os valores j, k e l em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em j, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar *seno* e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor k dando o nome de *cosseno*, e com o valor l dando o nome de *tangente*.

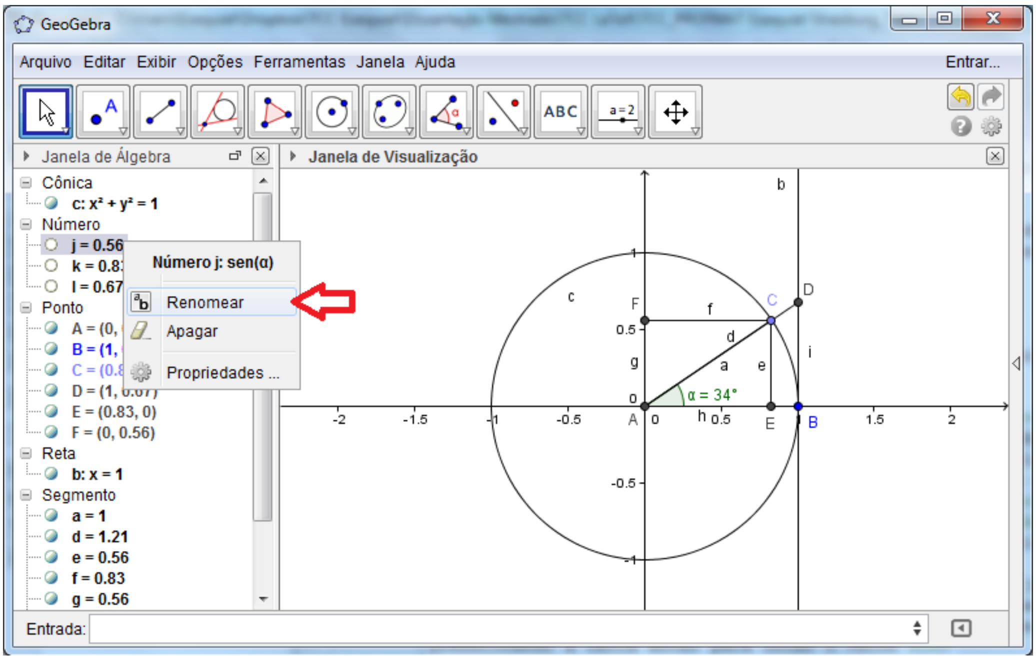

Figura 18 – Primeiro passo para renomear objeto

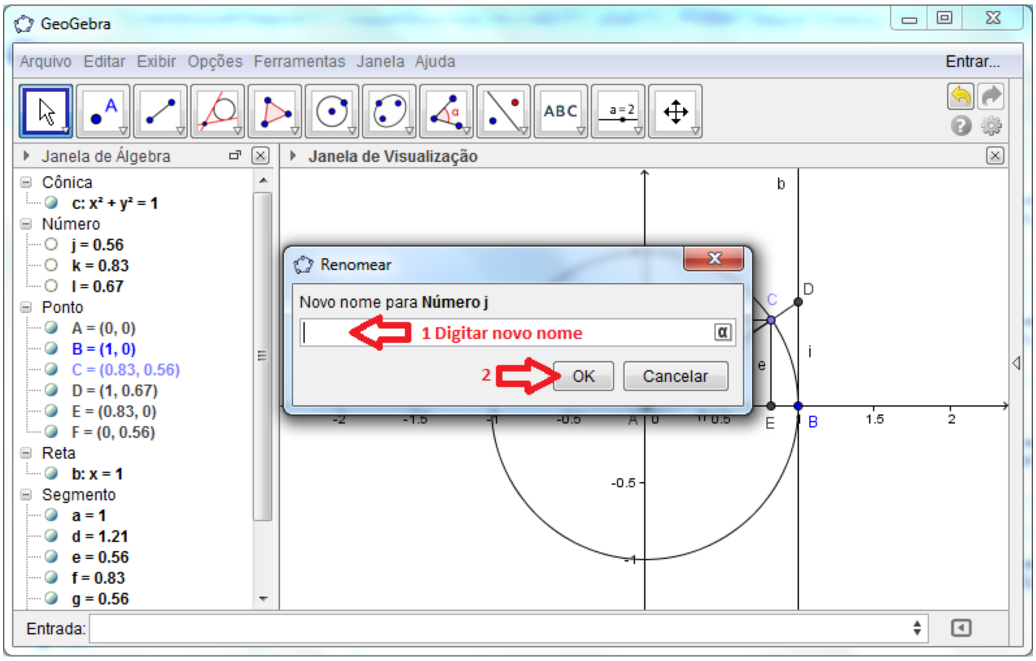

Figura 19 – Segundo passo para renomear objeto

Embora o círculo trigonométrico 1a já possa ser usado, recomenda-se organizar a figura na janela de visualização com os itens facultativos, a seguir:

15. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualizaçao, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, e, f, g, h e i, apagando esses rótulos na figura;

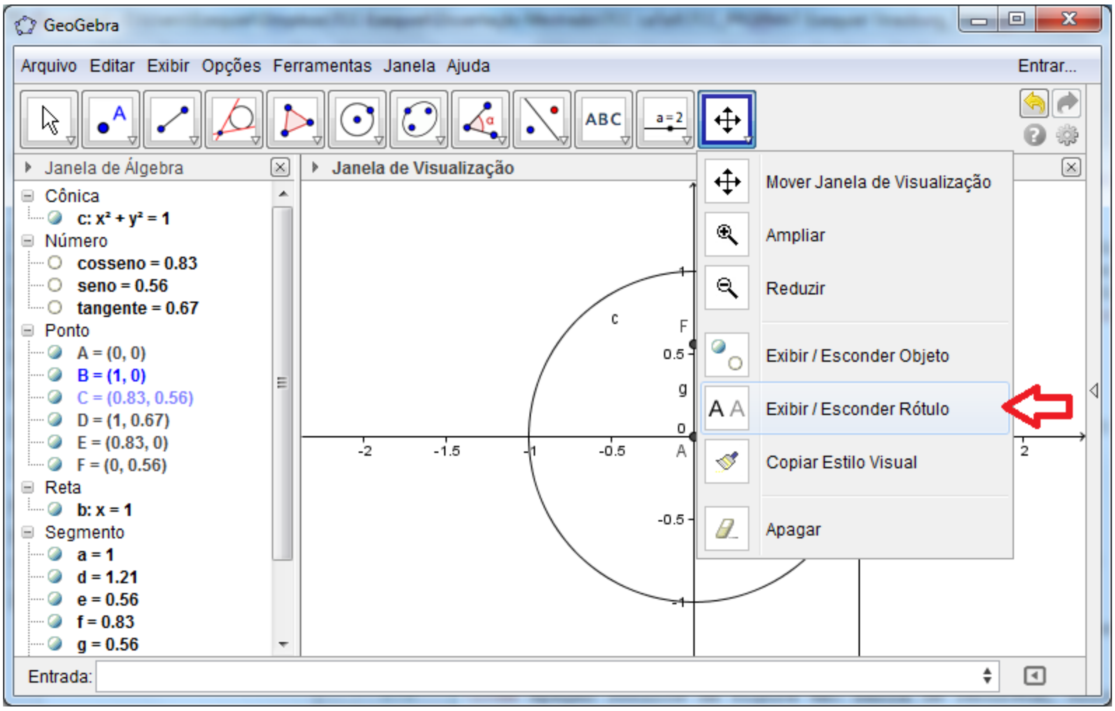

Figura 20 – Exibir, ou esconder, rótulo na figura

16. Aumentar a espessura do círculo c, e dos segmentos de reta $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em c, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão estilo e aparecerá uma escala com um indicador da espessura da linha, conforme a Figura 22. Deve-se arrastar esse indicador para a direita, aumentando a espessura da linha dando mais destaque na janela de visualização, em seguida deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Repetir processo com os segmentos de reta g, h e i, aumentando a espessura dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$;

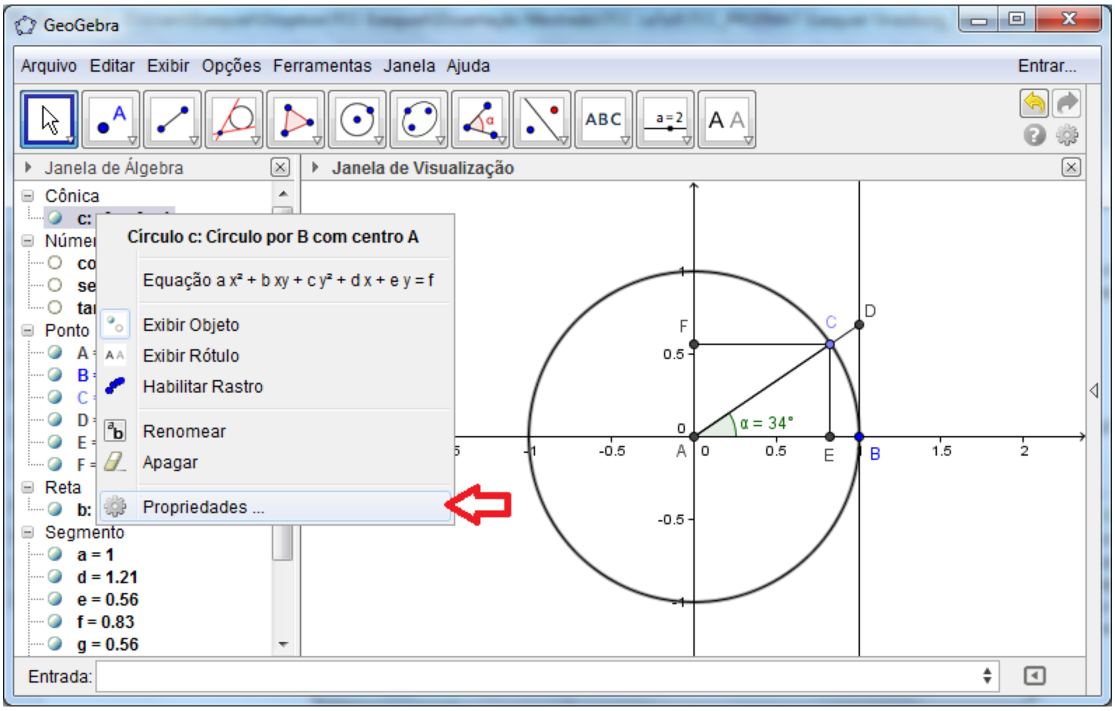

Figura 21 – Propriedades

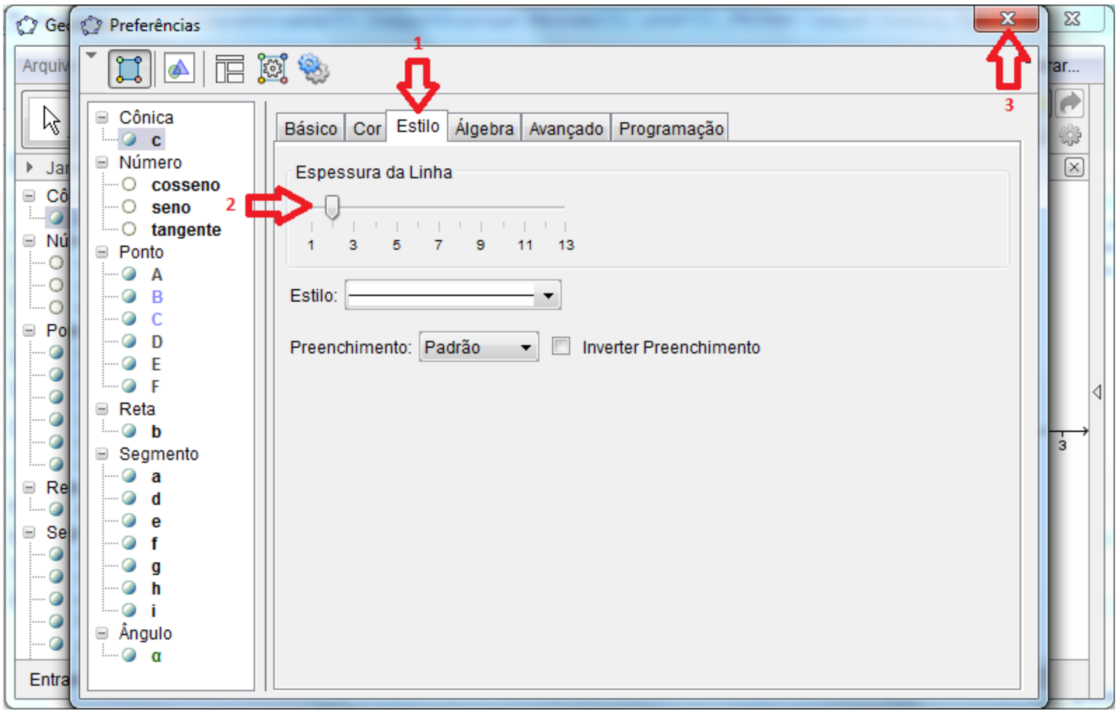

Figura 22 – Aumentar espessura da linha

17. Mudar as cores dos segmentos de reta $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, na janela de visualização, e dos valores de seno, cosseno e tangente, na janela de álgebra, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em g, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão cor, depois clicar em uma das cores que são oferecidas como alternativas, conforme a Figura 23, em seguida, deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Dessa forma, o segmento de reta ficará destacado na janela de visualização. Repetir processo com os segmentos h e i, na janela de álgebra. Repetir processo com seno, cosseno e tangente, na janela de álgebra, escolhendo as mesmas cores de g, h e i, respectivamente;

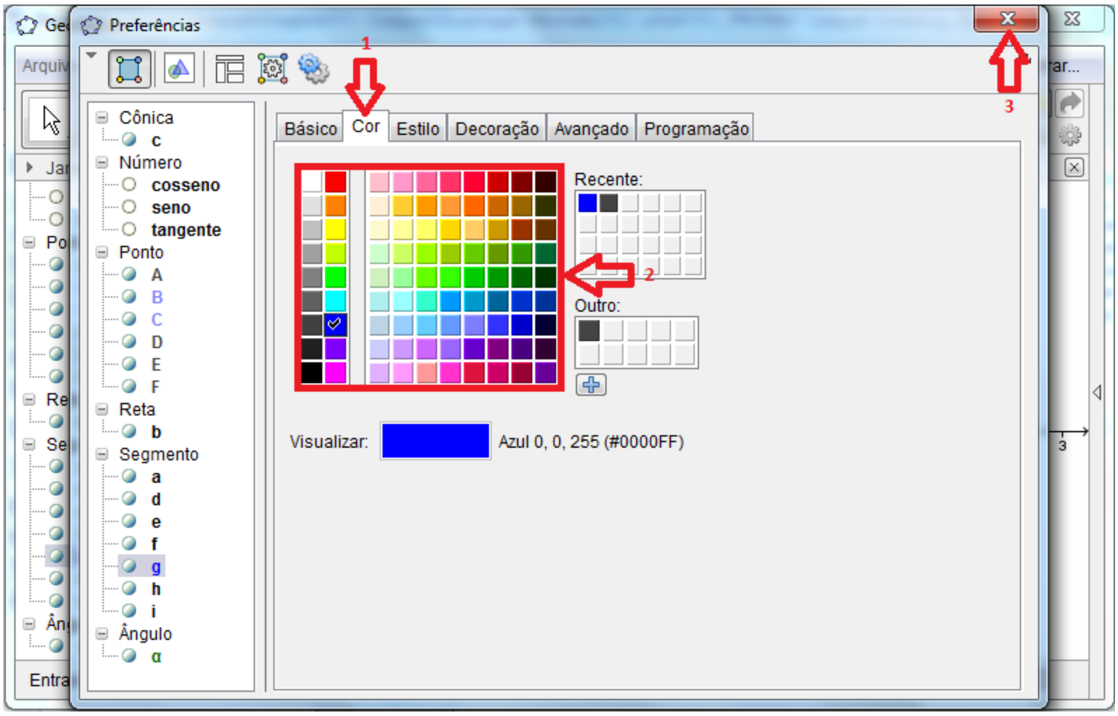

Figura 23 – Alterar cor

18. Exibir malhas na figura em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse fora da figura, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão malha, conforme a Figura 24. O mesmo pode ser feito para não exibir a malha;

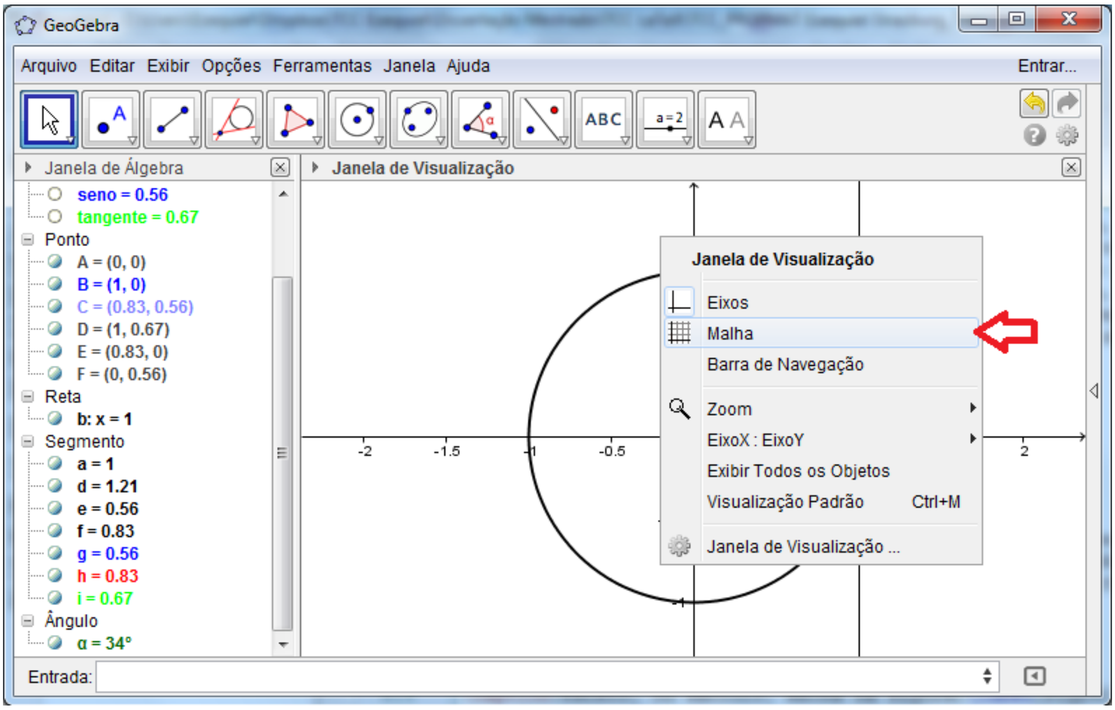

Figura 24 – Exibir, ou excluir, malha na figura

19. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, arrastar o rótulo para o local desejado.

Com o círculo trigonométrico 1a, é possível alterar a medida do ângulo α em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo c.

4.1.2 Construção do círculo trigonométrico 1b

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para centralizar os eixos;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho da figura, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar

no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar o círculo de raio unitário em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e um de seus pontos, conforme a Figura 9. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$, e em seguida clicar no ponto $(1, 0)$, criando assim os pontos A e B e o círculo c de raio unitário e centrado na origem;

5. Criar um ângulo qualquer em: barra de entrada, digitar um ângulo qualquer, com exceção dos ângulos $90°$ e $270°$, por exemplo $\alpha = 34°$, e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25, criando o valor $\alpha = 34°$ na janela de álgebra. Para digitar α e o símbolo "°" na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α e "°";

   Observações:

   a) Não podem ser escolhidos os ângulos $90°$ e $270°$ pelo fato da tangente não estar definida para esses ângulos;

   b) Evite escolher um ângulo com pouca diferença para os ângulos onde a tangente não está definida, pois isso pode dificultar a construção da figura.

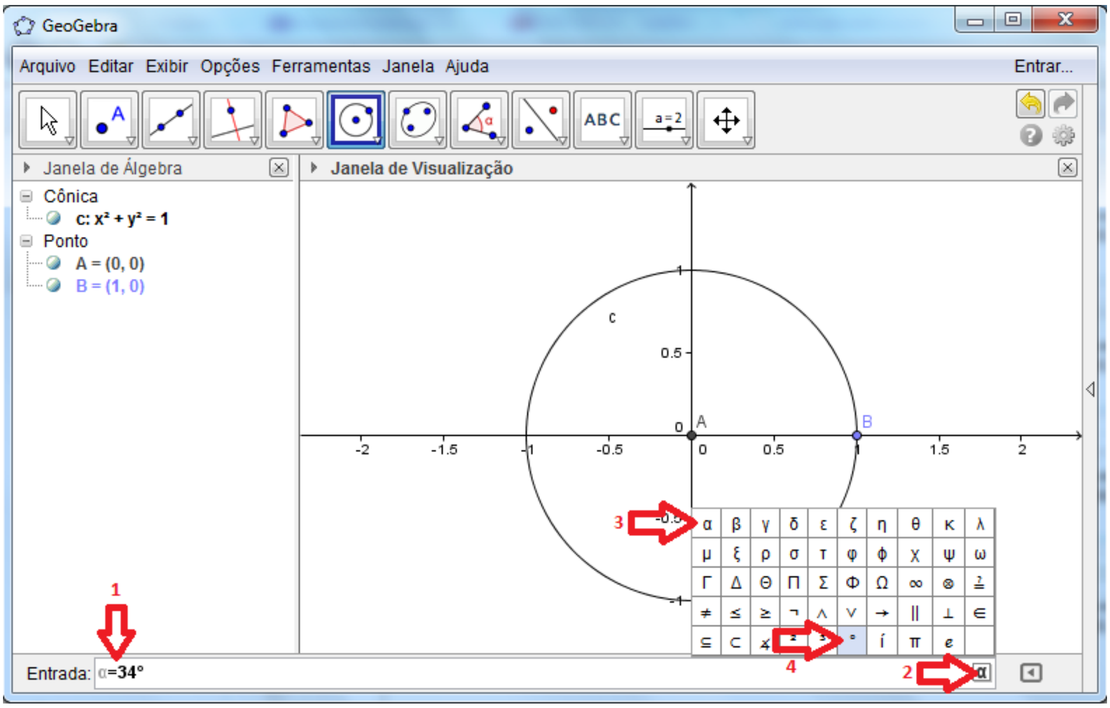

Figura 25 – Digitar ângulo

6. Criar o ângulo β em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo com amplitude fixa, conforme a Figura 26. Na janela de visualização, clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e abrirá uma janela, em seguida digitar α, depois selecionar a opção sentido anti-horário, e por fim clicar em OK, conforme a Figura 27, criando o ponto B' e o ângulo $\beta = \alpha$. Para digitar α na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção α;

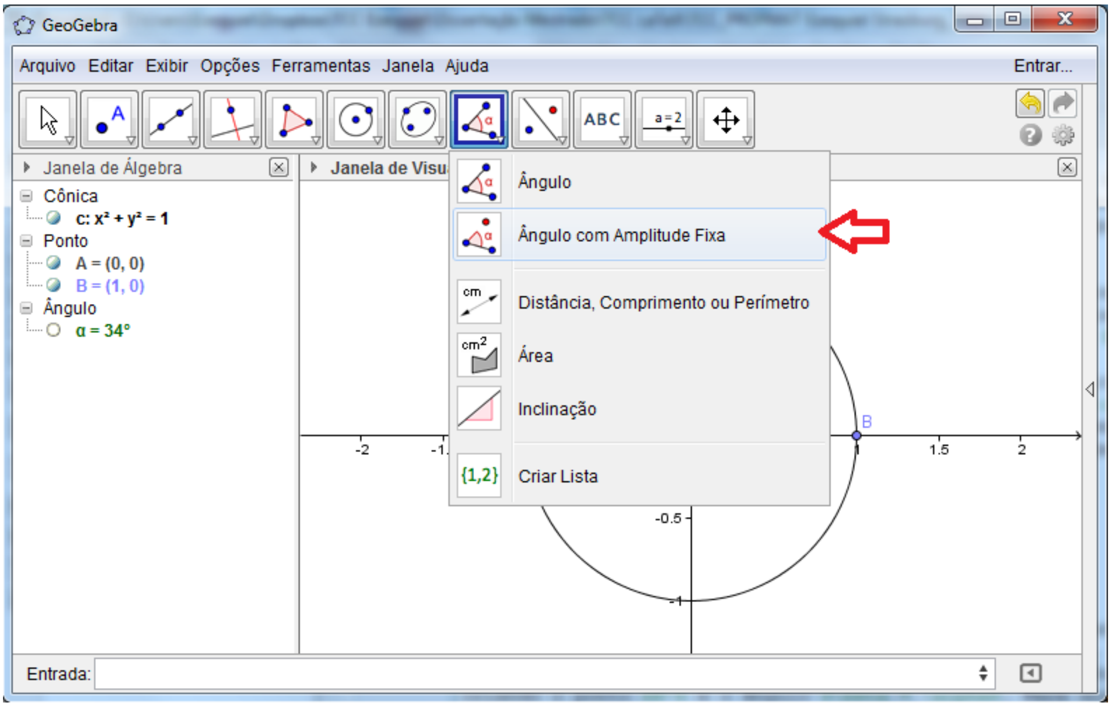

Figura 26 – Primeiro passo para criar ângulo com amplitude fixa

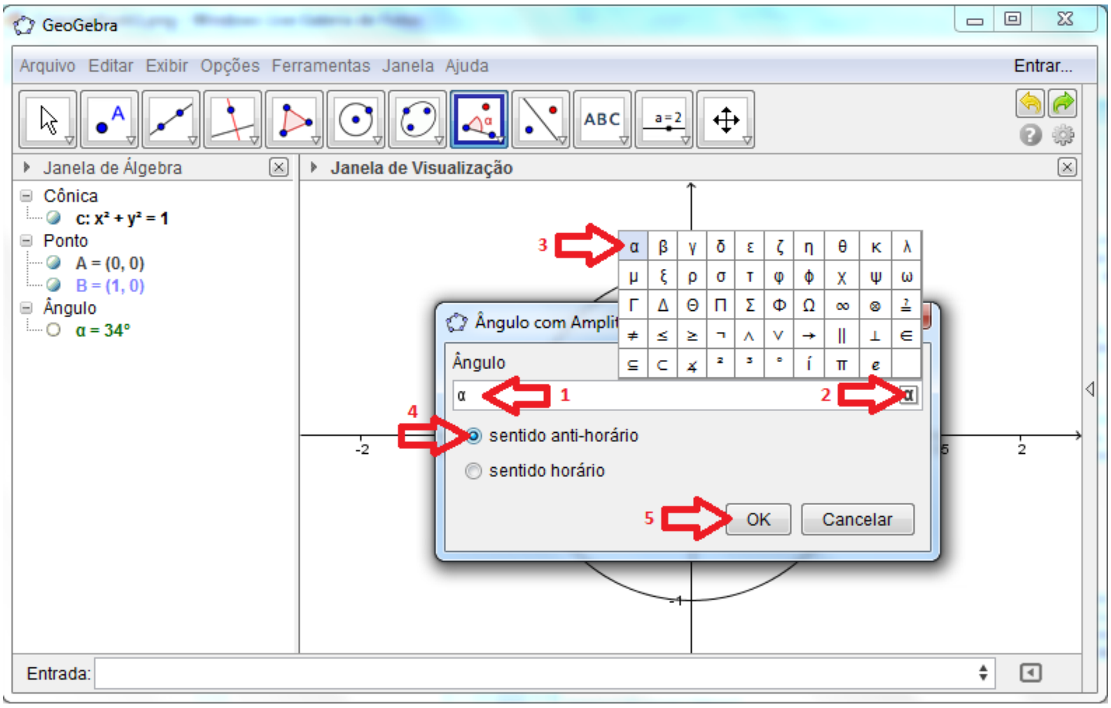

Figura 27 – Segundo passo para criar ângulo com amplitude fixa

7. Renomear o ângulo β em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em β, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar θ e clicar no botão OK, conforme a Figura 28. Para digitar θ na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção θ;

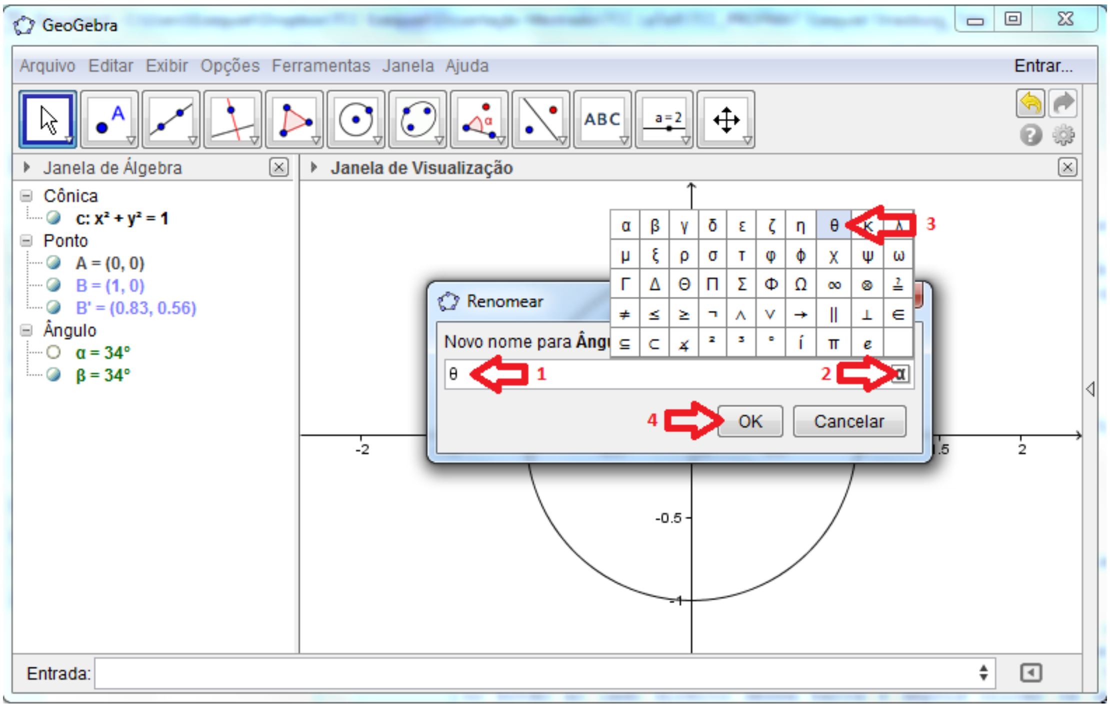

Figura 28 – Renomear ângulo

8. Renomear o ponto B' em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em B', e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar C e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

9. Traçar o segmento de reta $\overline{AC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto $A(0,0)$ e depois clicar no ponto C, criando o segmento de reta $a = \overline{AC}$;

10. Traçar a reta tangente ao círculo c, pelo ponto $(1,0)$ em: barra de recursos, clicar no botão 4, depois clicar na opção reta tangente, conforme a Figura 13. Na janela de visualização, clicar no ponto B, e depois clicar em qualquer outro ponto do círculo c, diferente de C, criando a reta b;

    Observação:

    a) O *software* GeoGebra não criará a reta tangente ao clicar nos pontos B e C, por esse motivo o ponto C não pode ser escolhido para essa construção.

11. Criar o ponto que contém a tangente de α na coordenada y, sobre a reta b, em: barra de entrada, digitar o ponto $(1, \text{tg}(\alpha))$, conforme a Figura 14, e pressionar a tecla enter, criando o ponto D sobre a reta tangente b. Para digitar α na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α;

12. Criar o ponto que contém o cosseno de α na coordenada x, sobre o eixo x, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\cos(\alpha), 0)$, conforme a Figura 15, e pressionar a tecla enter, criando o ponto E;

13. Criar o ponto que contém o seno de α na coordenada y, sobre o eixo y, em: barra de entrada, digitar o ponto $(0, \operatorname{sen}(\alpha))$, conforme a Figura 16, e pressionar a tecla enter, criando o ponto F;

14. Traçar os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $d = \overline{AD}$; clicar no ponto C e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $e = \overline{CE}$; clicar no ponto C e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $f = \overline{CF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $g = \overline{AF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $h = \overline{AE}$; e por fim, clicar no ponto B e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $i = \overline{BD}$;

15. Escrever os valores de seno, cosseno e tangente na janela de álgebra, da seguinte forma: digitar na barra de entrada $\operatorname{sen}(\alpha)$, conforme a Figura 17, e pressionar a tecla enter criando o valor j. Depois repetir o processo digitando $\cos(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor k, e por fim, digitando $\operatorname{tg}(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor l;

16. Renomear os valores j, k e l em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em j, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar *seno* e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor k dando o nome de *cosseno*, e com o valor l dando o nome de *tangente*.

    Embora o círculo trigonométrico 1b já possa ser usado, recomenda-se organizar a figura na janela de visualização com os itens facultativos, a seguir:

17. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualizaçao, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, e, f, g, h e i, apagando esses rótulos na figura;

18. Aumentar a espessura do círculo c, e dos segmentos de reta $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em c, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão estilo e aparecerá uma escala com um indicador

da espessura da linha, conforme a Figura 22. Deve-se arrastar esse indicador para a direita, aumentando a espessura da linha dando mais destaque na janela de visualização, em seguida deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Repetir processo com os segmentos de reta g, h e i, aumentando a espessura dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$;

19. Mudar as cores dos segmentos de reta $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, na janela de visualização, e dos valores de seno, cosseno e tangente, na janela de álgebra, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em g, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão cor, depois clicar em uma das cores que são oferecidas como alternativas, conforme a Figura 23, em seguida, deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Dessa forma, o segmento de reta ficará destacado na janela de visualização. Repetir processo com os segmentos h e i, na janela de álgebra. Repetir processo com seno, cosseno e tangente, na janela de álgebra, escolhendo as mesmas cores de g, h e i, respectivamente;

20. Exibir malhas na figura em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse fora da figura, e abrirá uma nova janela com alguns botões. Deve-se clicar no botão malha, conforme a Figura 24. O mesmo pode ser feito para não exibir a malha;

21. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, arrastar o rótulo para o local desejado.

Com o círculo trigonométrico 1b, é possível alterar a medida do ângulo α em: barra de entrada, digitar o ângulo (por exemplo: $\alpha = 40°$), e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25.

Observações:

1. Nas construções dos círculos trigonométricos 1a e 1b, o professor pode modificar as figuras conforme desejar, aumentando ou diminuindo a espessura das linhas, e modificando as cores das linhas, dos pontos e dos rótulos.

2. A única diferença, na janela de visualização, entre o círculo trigonométrico 1a e o cículo trigonométrico 1b é que um ficará com o ângulo nomeado α, enquanto o outro ficará com o ângulo nomeado θ.

3. Com os círculos trigonométricos 1a e 1b, o professor tem uma interessante ferramenta para trabalhar as relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente. O que diferencia o círculo trigonométrico 1a do círculo trigonométrico 1b é a forma como se modifica o ângulo.

4. Para modificar o ângulo no círculo trigonométrico 1a arrasta-se o ponto C pelo círculo, e para modificar o ângulo no círculo trigonométrico 1b digita-se o ângulo na barra de entrada. Dessa forma, quando o professor tem o objetivo de mostrar aos alunos os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo α, e a forma como acontece a variação desses valores em relação ao ângulo α, é mais conveniente usar o círculo trigonométrico 1a, por ser mais dinâmico. Mas quando se deseja encontrar os valores de seno, cosseno e tangente, para um valor de α específico, é mais conveniente usar o círculo trigonométrico 1b. Uma vantagem do círculo trigonométrico 1a é que se pode fazer o ângulo α aumentar automaticamente através de uma animação, da seguinte forma: na janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse no ponto C, e abrirá uma janela, em seguida, deve-se clicar no botão animar, conforme a Figura 29. Repetir o processo caso se queira parar a animação.

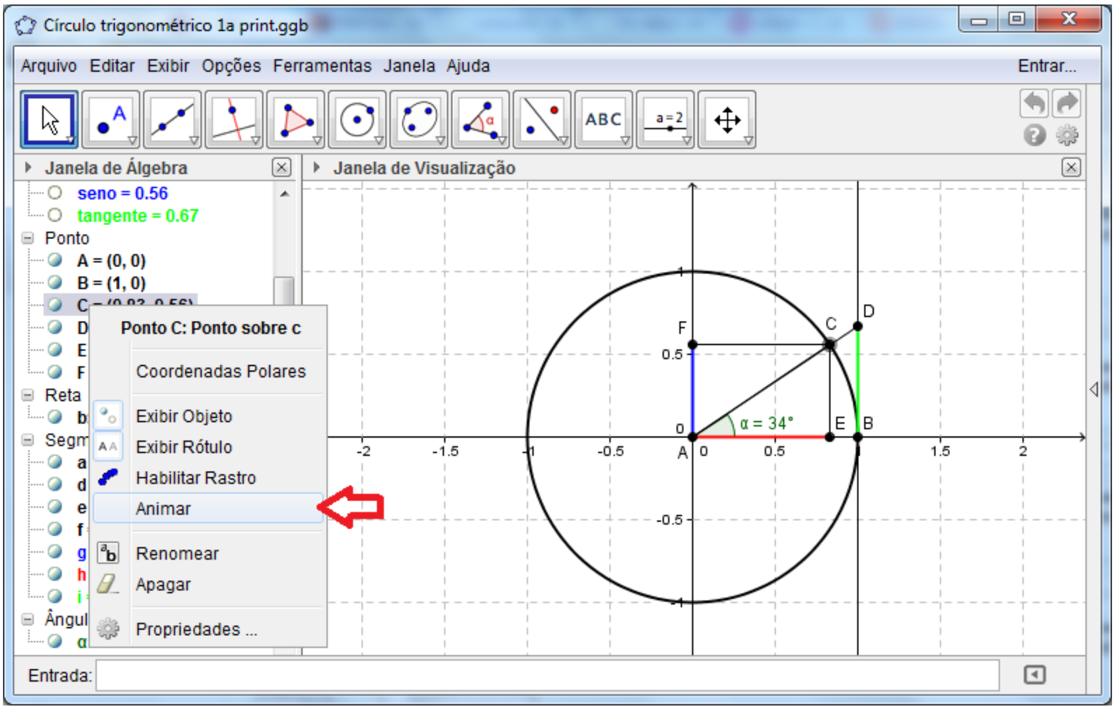

Figura 29 – Animar figura

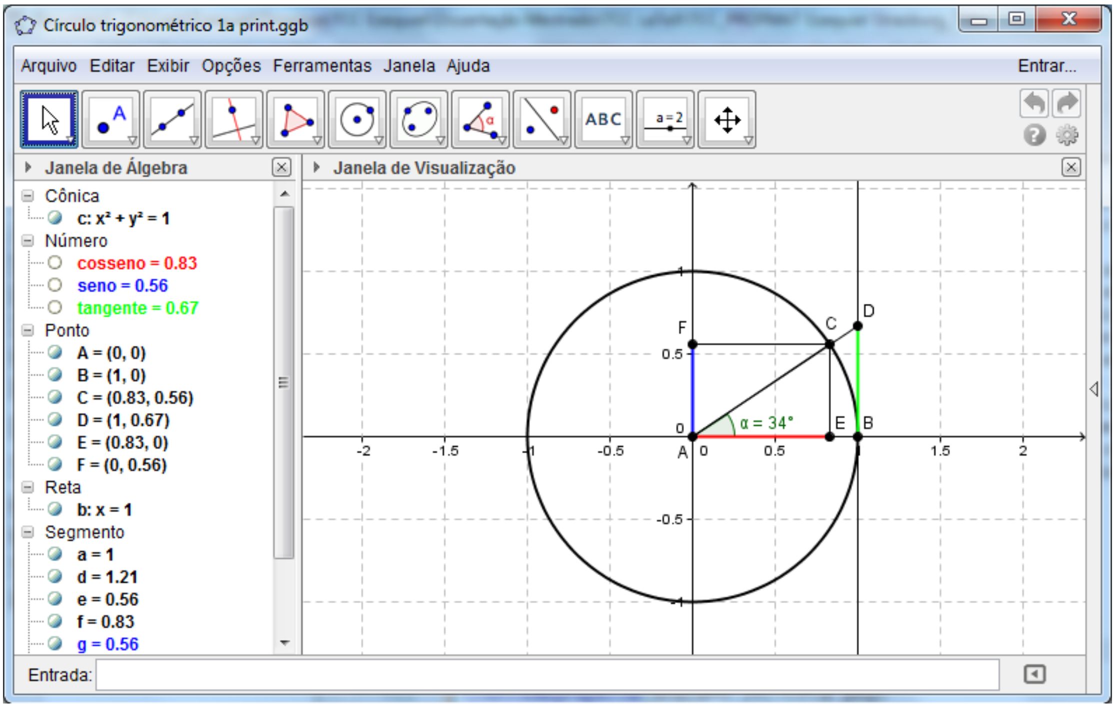

Figura 30 – Círculo trigonométrico 1

4.2 Círculo trigonométrico 2: secante, cossecante e cotangente

O círculo trigonométrico 2 apresenta os valores de secante, cossecante e cotangente de um ângulo α, e esta seção apresenta duas construções para o círculo trigonométrico 2, que se diferem na forma como se altera o ângulo. Estas construções serão chamadas de círculo trigonométrico 2a, e círculo trigonométrico 2b.

4.2.1 Construção do círculo trigonométrico 2a

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para centralizar os eixos;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar o círculo de raio unitário em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e um de seus pontos, conforme a Figura 9. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$, e em seguida clicar no ponto $(0, 1)$, criando assim os pontos A e B e o círculo c de raio unitário e centrado na origem;

5. Criar um ponto qualquer sobre o círculo c em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção ponto, conforme a Figura 10. Na janela de visualização, clicar em um ponto qualquer do círculo c, com exceção dos pontos de interseção entre os eixos x e y com o círculo c, criando o ponto C;

   Observações:

   a) O ponto C não deve ser um dos pontos de interseção dos eixos x e y com o círculo c pelo fato da secante de um ângulo não estar definida para os ângulos $90°$ e $270°$ e a cossecante e a cotangente de um ângulo não estarem definidas para os ângulos de $0°$ e $180°$;

b) Evite escolher um ponto próximo a um dos pontos de interseção dos eixos x e y com o círculo c, pois isso pode dificultar a construção da figura.

6. Traçar o segmento de reta $\overline{AC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto $A(0,0)$ e depois clicar no ponto C, criando o segmento de reta $a = \overline{AC}$;

7. Criar o ângulo entre o eixo x e o segmento de reta $\overline{AC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo, conforme a Figura 12. Na janela de visualização, clicar no eixo x, depois clicar no segmento de reta $\overline{AC}$, criando o ângulo α;

   Observação:

   a) Vale ressaltar que a ordem das retas e segmentos de reta em que clicamos altera a figura do ângulo.

8. Traçar a reta tangente ao círculo c, pelo ponto $(0,1)$ em: barra de recursos, clicar no botão 4, depois clicar na opção reta tangente, conforme a Figura 13. Na janela de visualização, clicar no ponto B, e depois clicar em qualquer outro ponto do círculo c, diferente de C, criando a reta b;

   Observação:

   a) O *software* GeoGebra não criará a reta tangente ao clicar nos pontos B e C, por esse motivo o ponto C não pode ser escolhido para essa construção.

9. Criar o ponto que contém a cotangente de α na coordenada x, sobre a reta b, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\text{cotg}(\alpha), 1)$, conforme a Figura 31, e pressionar a tecla enter, criando o ponto D sobre a reta tangente b. Para digitar α na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α;

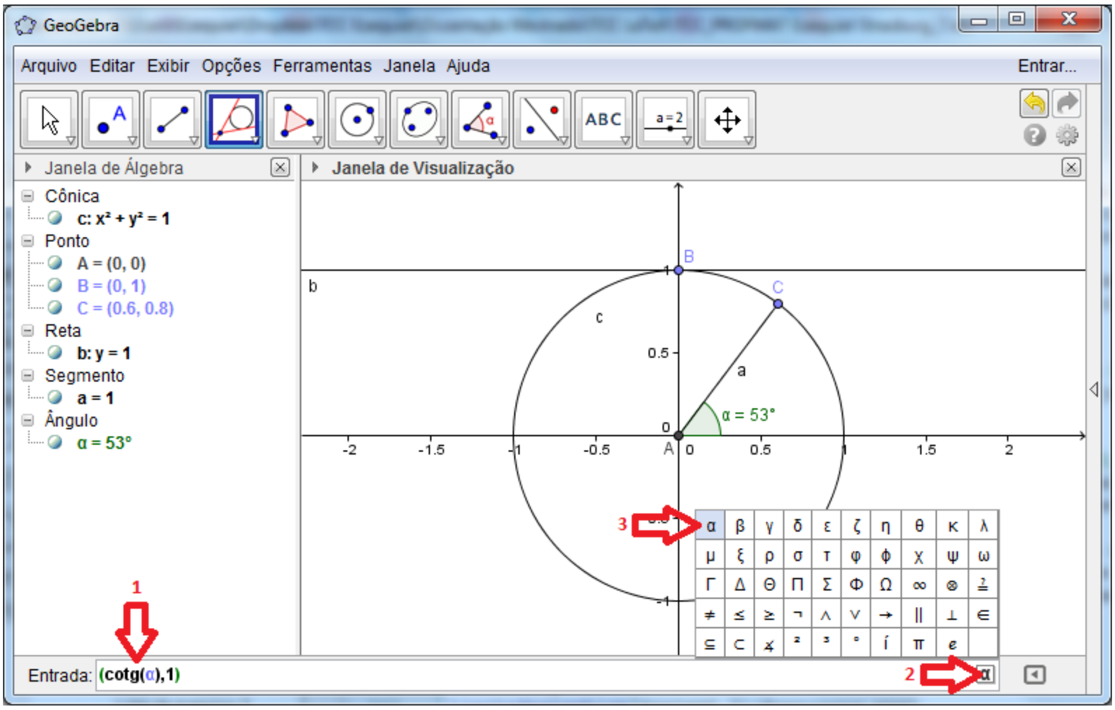

Figura 31 – Ponto com cotangente do ângulo na coordenada x, na reta b

10. Criar o ponto que contém a secante de α na coordenada x, sobre o eixo x, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\sec(\alpha), 0)$, conforme a Figura 32, e pressionar a tecla enter, criando o ponto E;

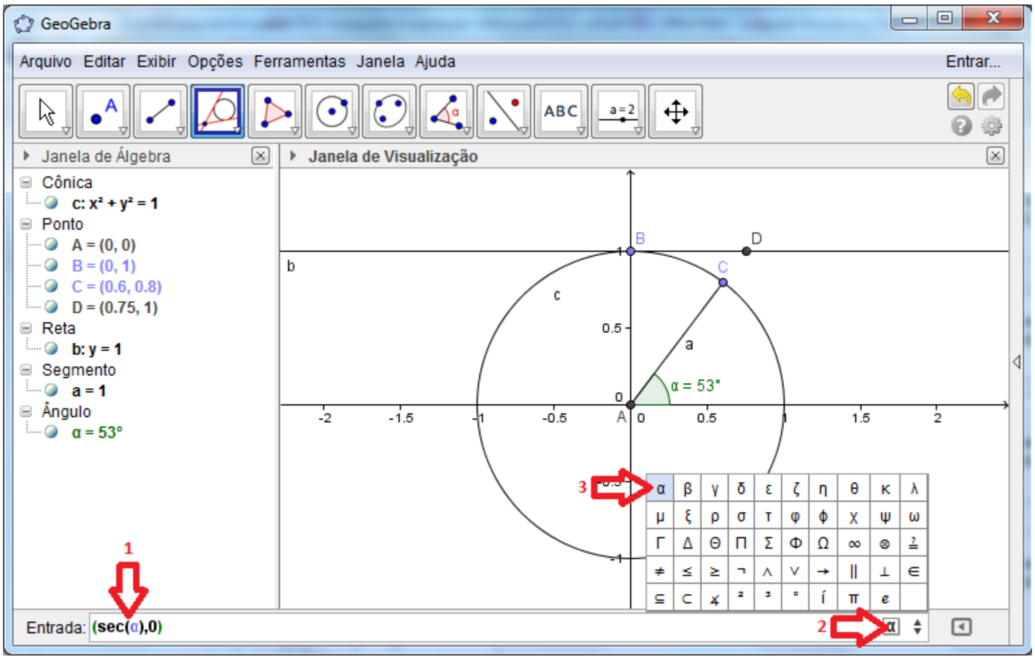

Figura 32 – Ponto com secante do ângulo na coordenada x, no eixo x

11. Criar o ponto que contém a cossecante de α na coordenada y, sobre o eixo y, em: barra de entrada, digitar o ponto $(0, \text{cosec}(\alpha))$, conforme a Figura 33, e pressionar a tecla enter, criando o ponto F;

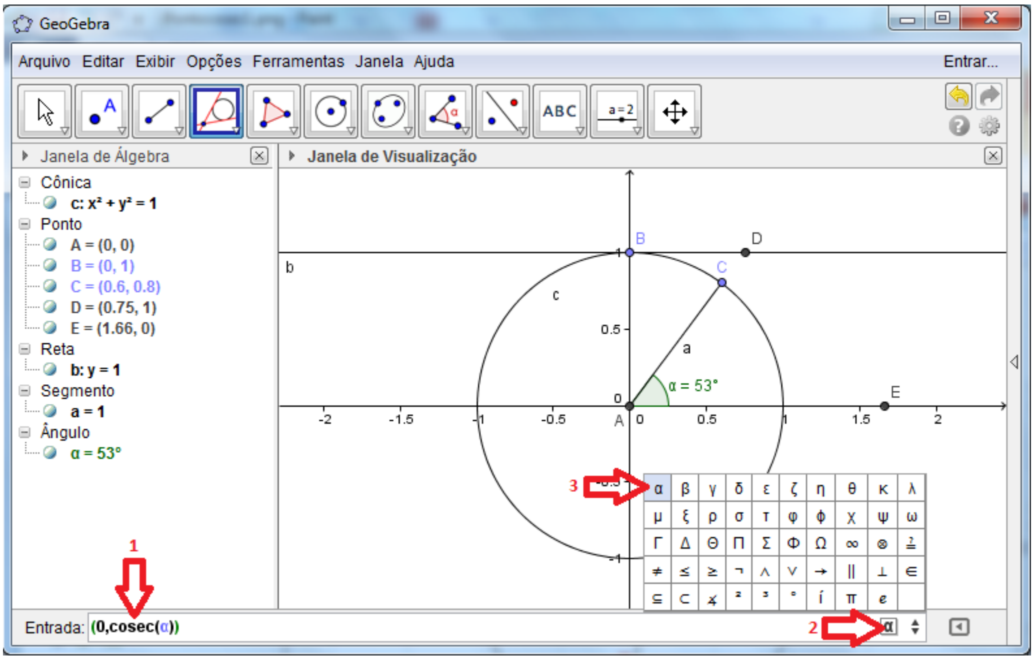

Figura 33 – Ponto com cossecante do ângulo na coordenada y, no eixo y

12. Traçar os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $d = \overline{AD}$; clicar no ponto E e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $e = \overline{EF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $f = \overline{AE}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $g = \overline{AF}$; e por fim, clicar no ponto B e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $h = \overline{BD}$;

13. Escrever os valores de secante, cossecante e cotangente na janela de álgebra, da seguinte forma: digitar na barra de entrada $\sec(\alpha)$, conforme a Figura 34, e pressionar a tecla enter, criando o valor i. Depois repetir o processo digitando $\text{cosec}(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor j, e por fim, digitando $\text{cotg}(\alpha)$ e pressionando a tecla enter para criar o valor k;

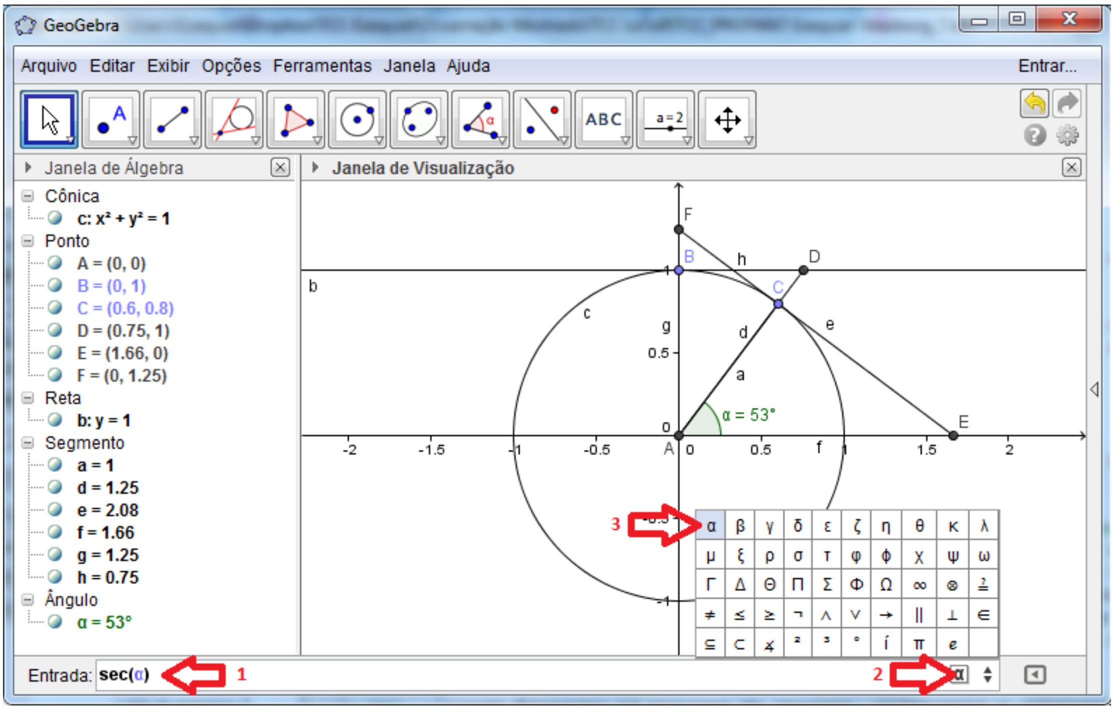

Figura 34 – Criar o valor de secante na janela de álgebra

14. Renomear os valores i, j e k em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em i, e abrirá uma nova janela com alguns botões. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar *secante* e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor j dando o nome de *cossecante*, e com o valor k dando o nome de *cotangente*.

    Embora o círculo trigonométrico 2a já possa ser usado, recomenda-se organizar a figura na janela de visualização com os itens facultativos, a seguir:

15. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculos, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, e, f, g e h, apagando esses rótulos na figura;

16. Aumentar a espessura do círculo c, e dos segmentos de reta $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em c, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão estilo e aparecerá uma escala com um indicador da espessura da linha, conforme a Figura 22. Deve-se arrastar esse indicador para a direita, aumentando a espessura da linha dando mais destaque na janela de visualização, em seguida deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Repetir processo com os segmentos de reta f, g e h, aumentando a espessura dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$;

17. Mudar as cores dos segmentos de reta $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$, na janela de visualização, e dos valores de secante, cossecante e cotangente, na janela de álgebra, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em f, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão cor, depois clicar em uma das cores que são oferecidas como alternativas, conforme a Figura 23, em seguida, deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Dessa forma, o segmento de reta ficará destacado na janela de visualização. Repetir processo com os segmentos g e h, na janela de álgebra. Repetir processo com secante, cossecante e cotangente, na janela de álgebra, escolhendo as mesmas cores de f, g e h, respectivamente;

18. Exibir malhas na figura em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse fora da figura, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão malha, conforme a Figura 24. O mesmo pode ser feito para não exibir a malha;

19. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, arrastar o rótulo para o local desejado.

Com o círculo trigonométrico 2a, é possível alterar a medida do ângulo α em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo c.

4.2.2 Construção do círculo trigonométrico 2b

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para centralizar os eixos;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar o círculo de raio unitário em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e um de seus pontos, conforme a Figura 9. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$, e em seguida clicar no ponto $(0, 1)$, criando assim os pontos A e B e o círculo c de raio unitário e centrado na origem;

5. Criar um ângulo qualquer em: barra de entrada, digitar um ângulo qualquer, com exceção dos ângulos 0°, 90°, 180° e 270°, por exemplo $\alpha = 53°$, e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25, criando o valor $\alpha = 53°$ na janela de álgebra. Para digitar α e o símbolo "°" na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α e no símbolo "°";

   Observações:

   a) Não podem ser escolhidos os ângulos 0°, 90°, 180° e 270° pelo fato da secante de um ângulo não estar definida para os ângulos 90° e 270° e a cossecante e a cotangente de um ângulo não estarem definidas para os ângulos de 0° e 180°;

   b) Evite escolher um ângulo com pouca diferença para os ângulos onde a secante, cossecante e cotangente não estão definidas, pois isso pode dificultar a construção da figura.

6. Criar um novo ponto no círculo em: barra de recuros, clicar no botão 2, depois clicar na opção ponto, conforme a Figura 10. Na janela de visualização, clicar ponto $(1, 0)$, criando assim o ponto C;

7. Renomear o ponto C em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em C, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar X e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

8. Criar o ângulo β em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo com amplitude fixa, conforme a Figura 26. Na janela de visualização, clicar no ponto X, depois clicar no ponto A, e abrirá uma janela, em seguida, digitar α, depois selecionar a opção sentido anti-horário, e por fim clicar em OK, conforme a Figura 27, criando o ponto X' e o ângulo $\beta = \alpha$. Para digitar α na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção α;

9. Renomear o ângulo β em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em β, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar θ e clicar no botão OK, conforme a Figura 28. Para digitar θ na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção θ;

10. Renomear o ponto X' em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em X', e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar C e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

11. Traçar o segmento de reta $\overline{AC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto $A(0, 0)$ e depois clicar no ponto C, criando o segmento de reta $a = \overline{AC}$;

12. Traçar a reta tangente ao círculo c, pelo ponto $(0, 1)$ em: barra de recursos, clicar no botão 4, depois clicar na opção reta tangente, conforme a Figura 13. Na janela de visualização, clicar no ponto B, e depois clicar em qualquer outro ponto do círculo c, diferente de C, criando a reta b;

    Observação:

    a) O *software* GeoGebra não criará a reta tangente ao clicar nos pontos B e C, por esse motivo o ponto C não pode ser escolhido para essa construção.

13. Criar o ponto que contém a cotangente de α na coordenada x, sobre a reta b, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\text{cotg}(\alpha), 1)$, conforme a Figura 31, e pressionar a tecla enter, criando o ponto D sobre a reta tangente b. Para digitar α na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α;

14. Criar o ponto que contém a secante de α na coordenada x, sobre o eixo x, em: barra de entrada, digitar o ponto $(\sec(\alpha), 0)$, conforme a Figura 32, e pressionar a tecla enter, criando o ponto E;

15. Criar o ponto que contém a cossecante de α na coordenada y, sobre o eixo y, em: barra de entrada, digitar o ponto $(0, \text{cosec}(\alpha))$, conforme a Figura 33, e pressionar a tecla enter, criando o ponto F;

16. Traçar os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $d = \overline{AD}$; clicar no ponto E e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $e = \overline{EF}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto E, criando o segmento de reta $f = \overline{AE}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto F, criando o segmento de reta $g = \overline{AF}$; e por fim, clicar no ponto B e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $h = \overline{BD}$;

17. Escrever os valores de secante, cossecante e cotangente na janela de álgebra, da seguinte forma: digitar na barra de entrada $\sec(\alpha)$, conforme a Figura 34, e pressionar a tecla enter, criando o valor i. Depois repetir o processo digitando $\text{cosec}(\alpha)$

e pressionando a tecla enter para criar o valor j, e por fim, digitando cotg(α) e pressionando a tecla enter para criar o valor k;

18. Renomear os valores i, j e k em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em i, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar *secante* e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor j dando o nome de *cossecante*, e com o valor k dando o nome de *cotangente*;

19. Desmarcar o ponto X da figura em: janela de álgebra, clicar no ponto à esquerda de X, conforme a Figura 35, desmarcando este objeto.

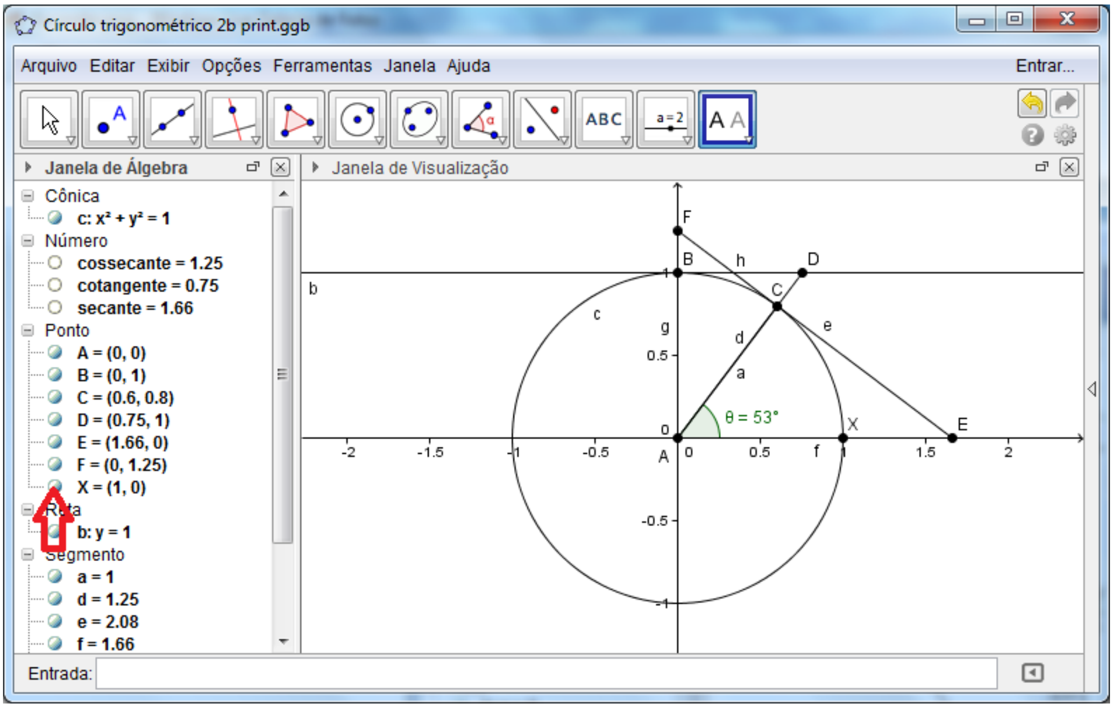

Figura 35 – Desmarcar objeto na figura

Embora o círculo trigonométrico 2b já possa ser usado, recomenda-se organizar a figura na janela de visualização com os itens facultativos, a seguir:

20. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, e, f, g e h, apagando esses rótulos na figura;

21. Aumentar a espessura do círculo c, e dos segmentos de reta $\overline{AF}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em c, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão estilo e aparecerá uma escala com um indicador

da espessura da linha, conforme a Figura 22. Deve-se arrastar esse indicador para a direita, aumentando a espessura da linha dando mais destaque na janela de visualização, em seguida deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Repetir processo com os segmentos de reta f, g e h, aumentando a espessura dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$;

22. Mudar as cores dos segmentos de reta $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BD}$, na janela de visualização, e dos valores de secante, cossecante e cotangente, na janela de álgebra, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em f, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21. Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão cor, depois clicar em uma das cores que são oferecidas como alternativas, conforme a Figura 23, em seguida, deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Dessa forma, o segmento de reta ficará destacado na janela de visualização. Repetir processo com os segmentos g e h, na janela de álgebra. Repetir processo com secante, cossecante e cotangente, na janela de álgebra, escolhendo as mesmas cores de f, g e h, respectivamente;

23. Exibir malhas na figura em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse fora da figura, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão malha, conforme a Figura 24. O mesmo pode ser feito para não exibir a malha;

24. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, arrastar o rótulo para o local desejado.

Com o círculo trigonométrico 2b, é possível alterar a medida do ângulo α em: barra de entrada, digitar o ângulo (por exemplo: $\alpha = 40°$), e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25.

Observações:

1. Nas construções anteriores, o professor pode modificar as figuras conforme desejar, aumentando ou diminuindo a espessura das linhas, e modificando as cores das linhas, dos pontos e dos rótulos.

2. A única diferença, na janela de visualização, entre o círculo trigonométrico 2a e o cículo trigonométrico 2b é que um ficará com o ângulo nomeado α, enquanto o outro ficará com o ângulo nomeado θ.

3. Com os círculos trigonométricos 2a e 2b, o professor tem uma interessante ferramenta para trabalharas relações trigonométricas envolvendo secante, cossecante e cotangente. O que diferencia o círculo trigonométrico 2a do círculo trigonométrico 2b é a forma como se modifica o ângulo.

4. Para modificar o ângulo no círculo trigonométrico 2a arrasta-se o ponto C pelo círculo, e para modificar o ângulo no círculo trigonométrico 2b digita-se o ângulo na barra de entrada. Dessa forma, quando o professor tem o objetivo de mostrar aos alunos os valores de secante, cossecante e cotangente de um ângulo α, e a forma como acontece a variação desses valores em relação ao ângulo α, é mais conveniente usar o círculo trigonométrico 2a, por ser mais dinâmico. Mas quando se deseja encontrar os valores de secante, cossecante e cotangente de α específico, é mais conveniente usar o círculo trigonométrico 2b. Uma vantagem do círculo trigonométrico 2a é que se pode fazer o ângulo α aumentar automaticamente através de uma animação, da seguinte forma: na janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse no ponto C, e abrirá uma janela, deve-se clicar no botão animar, conforme a Figura 29. Repetir o processo caso se queira parar a animação.

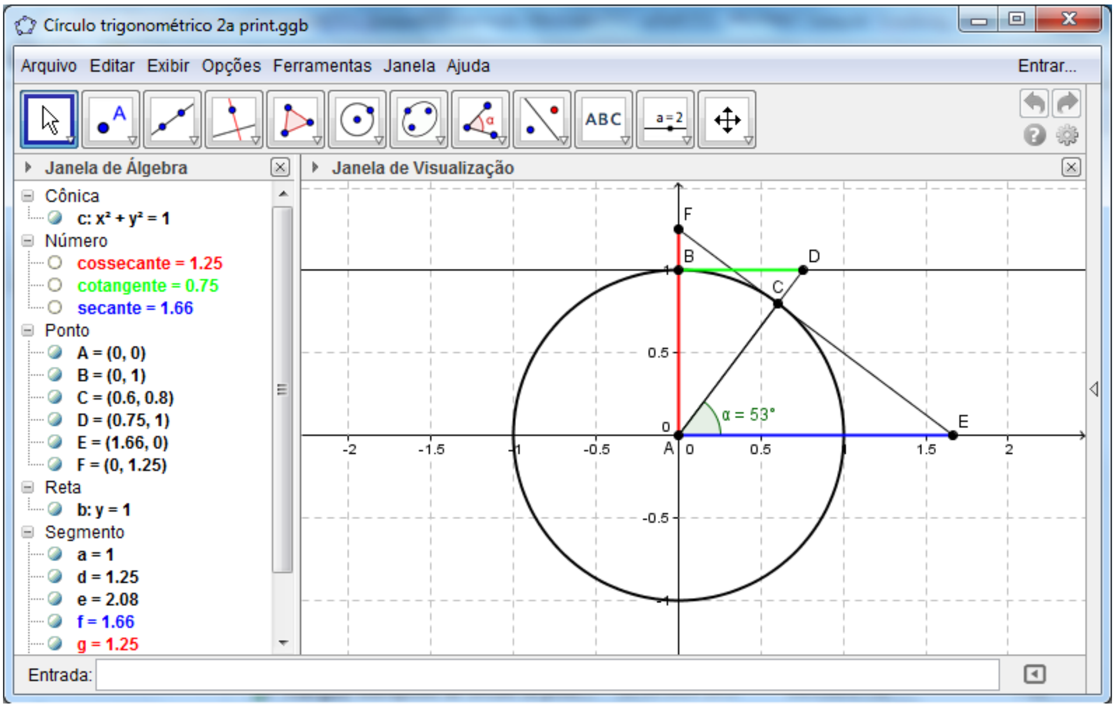

Figura 36 – Círculo trigonométrico 2

É possível colocar todas as informações em um só círculo, ou também colocar as informações separadamente, de acordo com a necessidade e da proposta em sala de aula.

Na Figura 37, tem-se o círculo trigonométrico apenas com a representação geométrica do seno. Pois as informações referentes ao cosseno e tangente foram desacionadas na janela de álgebra. As informações na janela de álgebra podem ser desmarcadas clicando no ponto a esquerda do objeto pendente, conforme a Figura 35.

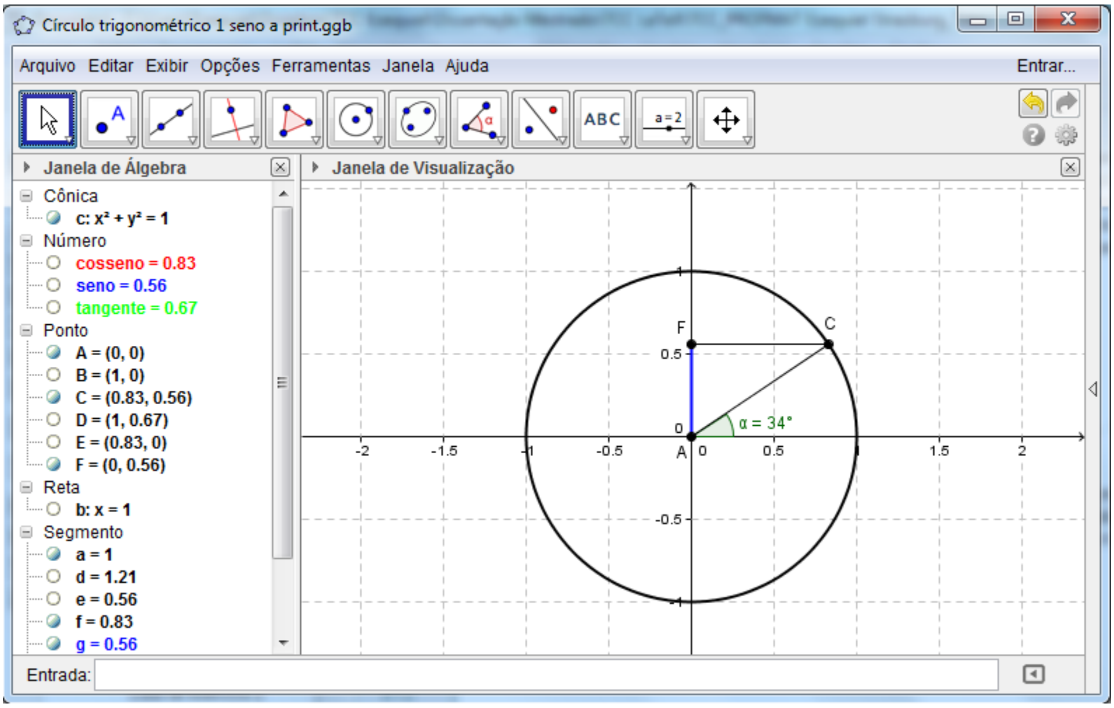

Figura 37 – Representação do seno

Na Figura 38, tem-se o círculo trigonométrico completo, com as informações de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente. Mas a nomenclatura dos pontos apresenta-se diferente da apresentada nos círculos trigonométricos 1 e 2.

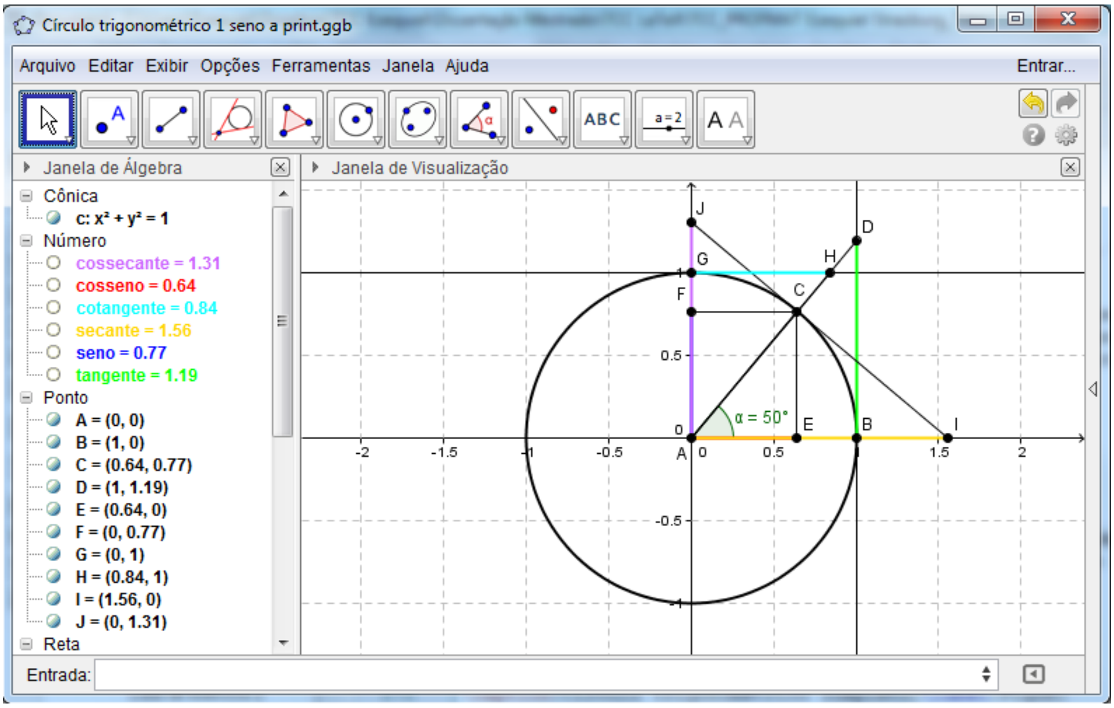

Figura 38 – Círculo trigonométrico completo

Ao longo do trabalho, usaremos os círculos trigonométricos 1 e 2, seguindo rigorosamente a nomenclatura utilizada na construção conforme o passo-a-passo.

4.3 Triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1

Esta figura consiste em apresentar um triângulo retângulo qualquer no círculo trigonométrico 1, e facilitar a compreensão das relações trigonométricas. Para a construção do triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1, seguir os passos:

1. Escolher entre os círculos trigonométricos 1a e 1b;
2. Criar um valor positivo na janela de álgebra, em: barra de entrada, digitar um valor positivo qualquer (preferencialmente entre 1 e 2, usando ponto para separar a parte inteira da parte decimal caso preferir um número decimal) e pressionar a tecla enter, criando o valor j, conforme a Figura 39;

   Observação:

   a) É possível criar qualquer valor positivo para j, porém, dependendo do valor escolhido será difícil a visualização. Portanto não use os valores 1 e $\cos(\alpha)$, nem valores muito elevados.

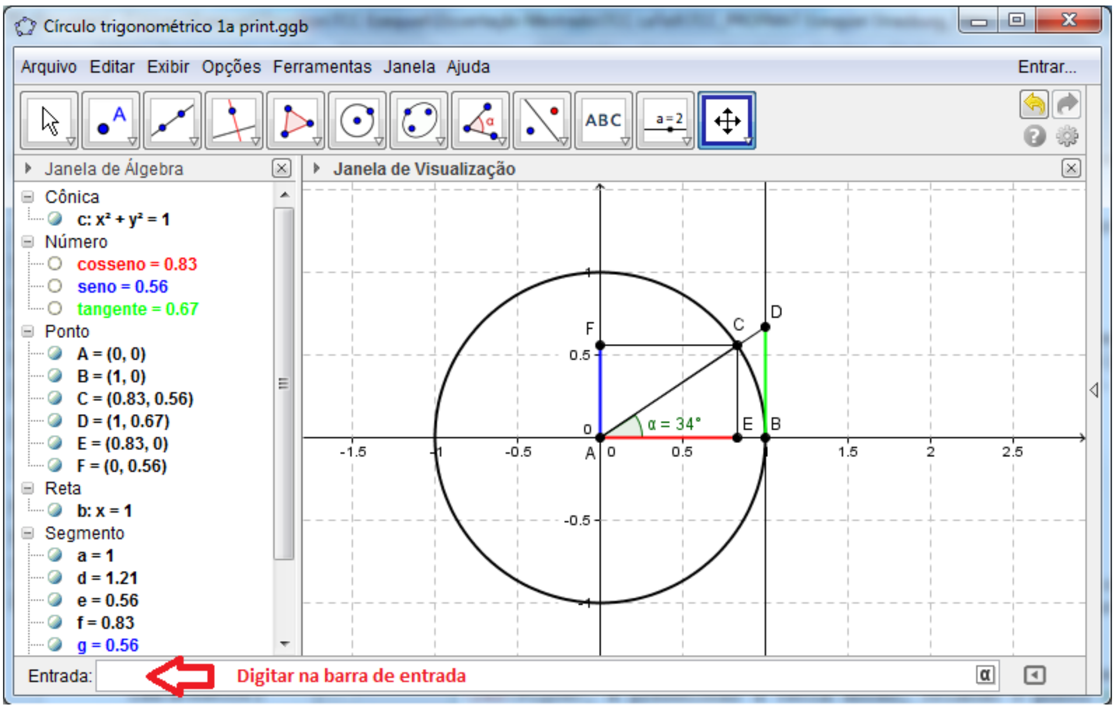

Figura 39 – Digitar na barra de entrada

3. Renomear o valor j em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em j, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar z e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

4. Criar um dos vértices do triângulo sobreposto em: barra de entrada, digitar o ponto $(z, 0)$, conforme a Figura 39, e pressionar a tecla enter, criando o ponto G, vértice do triângulo;

5. Criar o outro vértice do triângulo em: barra de entrada, digitar $(x(G), \operatorname{tg}(\alpha)x(G))$, conforme a Figura 39, e pressionar a tecla enter, criando o ponto H, vértice do triângulo;

   Observações:

   a) Os pontos G e H devem ter a mesma coordenada x, pois dessa maneira o segmento de reta $\overline{GH}$, que será o cateto oposto ao ângulo α, fica perpendicular ao eixo x, deixando o triângulo AGH retângulo. Por esse motivo o ponto H deve ter coordenada x com valor $x(G)$ (coordenada x do ponto G);

   b) Para deixar os triângulos ABD e AGH semelhantes, devemos perceber que o lado $\overline{AG}$ é $x(G)$ vezes maior que o lado $\overline{AB} = 1$, portanto o lado $\overline{GH}$ também deve ser $x(G)$ vezes maior que o lado $\overline{BD} = tg(\alpha)$. Por esse motivo o ponto H deve ter coordenada y com valor igual a $\operatorname{tg}(\alpha)x(G)$.

6. Criar os segmentos de reta $\overline{AG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{AH}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto A e depois clicar no ponto G, criando $j = \overline{AG}$, cateto adjacente ao ângulo α no triângulo AGH; clicar no ponto G e depois clicar no ponto H, criando $k = \overline{GH}$, cateto oposto ao ângulo α no triângulo AGH; em seguida, clicar no ponto A e depois clicar no ponto H, criando $l = \overline{AG}$, hipotenusa do triângulo AGH;

7. Renomear os valorres j, k e l em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em j, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar AG e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor k, dando o nome de GH, e com o valor l, dando o nome de AH;

8. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em AG, GH e AH, apagando esses rótulos na figura.

Dessa forma, o triângulo AGH fica sobreposto ao círculo trigonométrico 1, tornando mais fácil a comparação desse triângulo com outro triângulo semelhante no círculo.

Com o triângulo AGH sobreposto ao círculo trigonométrico 1, tem-se uma interessante ferramenta para comparar um triângulo qualquer (ΔAGH) a um triângulo de hipotenusa unitária (ΔAEC), ou a um triângulo de cateto unitário (ΔABD).

Com a construção do triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1, no *software* GeoGebra, pode-se encontrar todos os triângulos retângulos possíveis, basta alterar o ângulo α, e o cateto AG, adjacente ao ângulo α do triângulo AGH.

É possível alterar a medida do cateto AG, adjacente a α, em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5, e na janela de visualização, clicar no ponto G e arrastar sobre o eixo x. Mas também é possível alterar a medida do cateto AG, adjacente a α em: caixa de entrada, digitar um valor para z, por exemplo $z = 2.5$, conforme a Figura 39, e pressionar a tecla enter.

A alteração do ângulo α dependerá da escolha entre os círculos trigonométricos 1a e 1b vistos anteriormente.

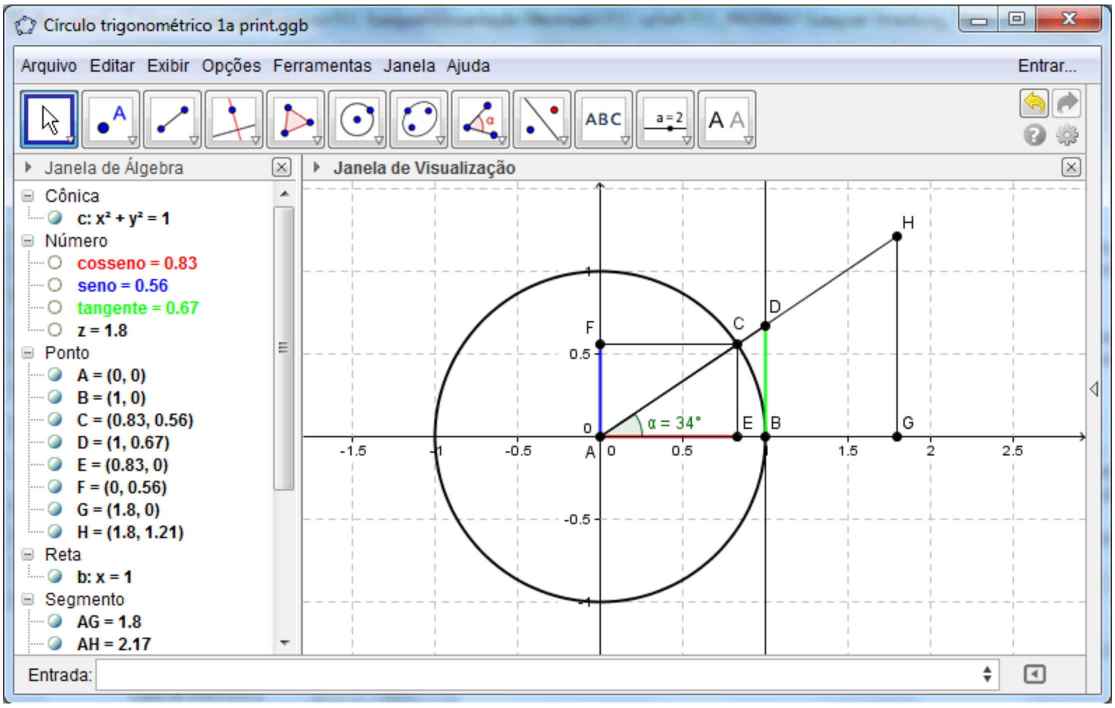

Figura 40 – Triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1

4.4 Gráfico das funções trigonométricas

Embora este trabalho não tenha como foco o estudo de funções trigonométricas, com a construção a seguir será possível introduzir a ideia de funções para ângulos pertencentes ao intervalo $[0, 360°)$. Esta construção será importante para entender os valores que seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, e cotangente, de um ângulo α, assumem em função de α.

Para construir a figura que será utilizada para os gráficos das funções trigonométricas, segue-se os passos:

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Posicionar a figura à esquerda da janela de visualização em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para o lugar desejado;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar o círculo de raio unitário em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e raio, conforme a Figura 41. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$ e abrirá nova janela, em seguida, digitar 1 e clicar no botão OK, conforme a Figura 42, criando assim os pontos A e o círculo c de raio unitário e centrado na origem;

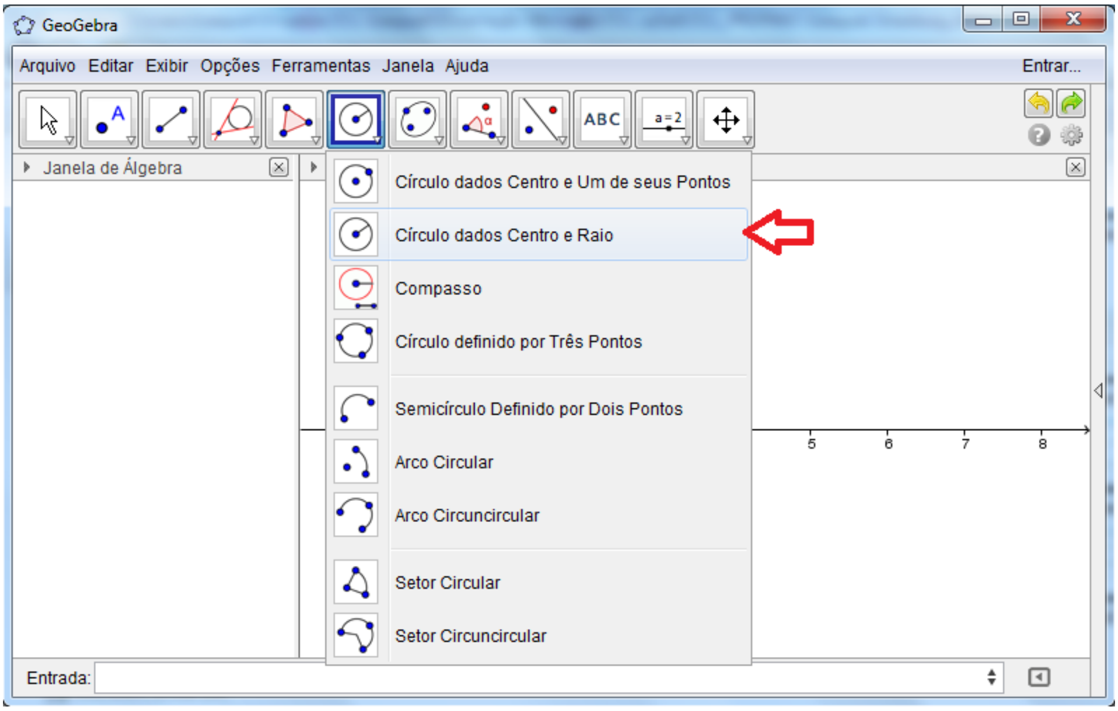

Figura 41 – Primeiro passo para criar círculo com raio fixo

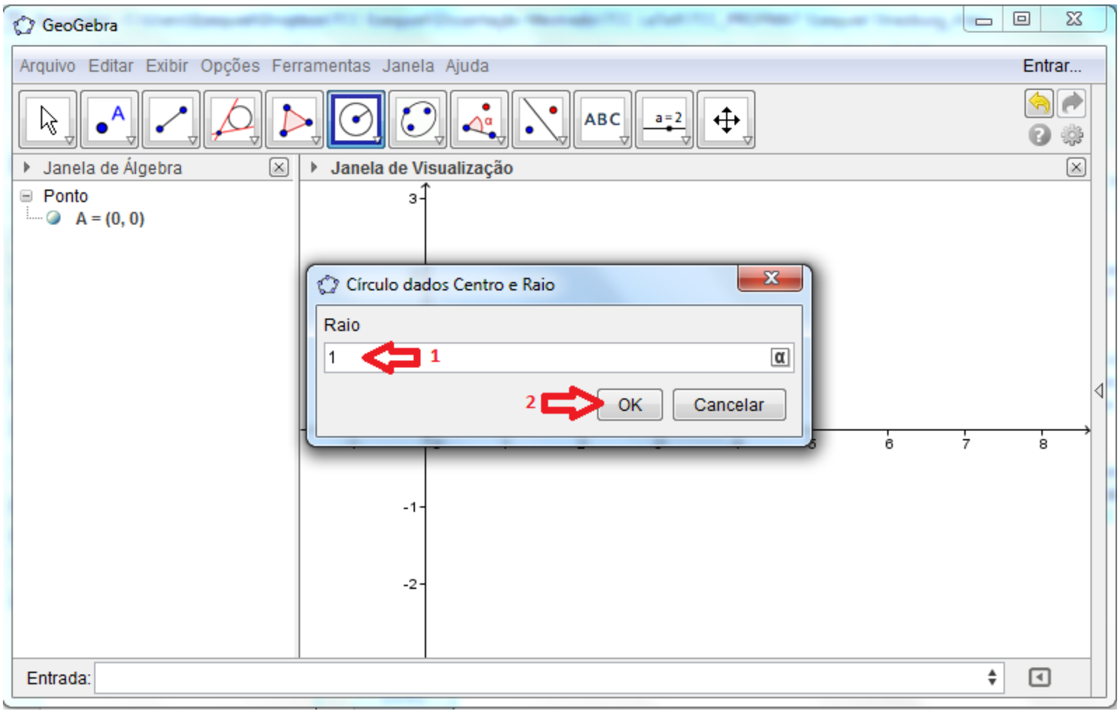

Figura 42 – Segundo passo para criar círculo com raio fixo

5. Criar um ponto qualquer sobre o círculo c em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção ponto, conforme a Figura 10. Na janela de visualização, clicar em um ponto qualquer do círculo c, criando assim o ponto B;

6. Traçar o segmento de reta $\overline{AB}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização, clicar no ponto $A(0,0)$ e depois clicar no ponto B, criando o segmento de reta $a = \overline{AB}$;

7. Criar o ângulo α, entre o eixo x e o segmento de reta $\overline{AB}$, em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo, conforme a Figura 12. Na janela de visualização, clicar em um ponto do eixo x, com exceção do ponto A, depois clicar no segmento de reta $\overline{AB}$;

8. Alterar unidade de medida do eixo x em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse (desde que não seja na figura) e abrirá uma janela. Deve-se clicar no botão janela de visualização, conforme a Figura 43. Será aberta outra janela, em seguida, deve-se clicar no botão eixo$x$, depois clicar nas opções de unidades de medida, e por fim, escolher a unidade de medida π, e fechar a janela na parte superior direita clicando no X, conforme a Figura 44;

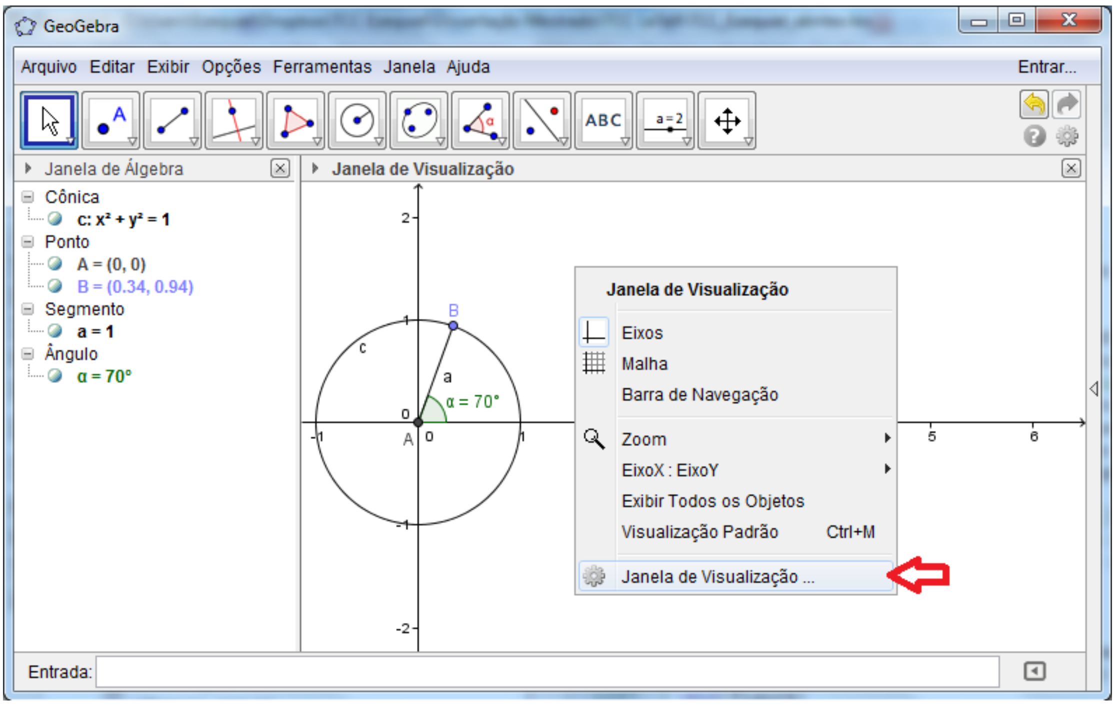

Figura 43 – Comandos na janela de visualização

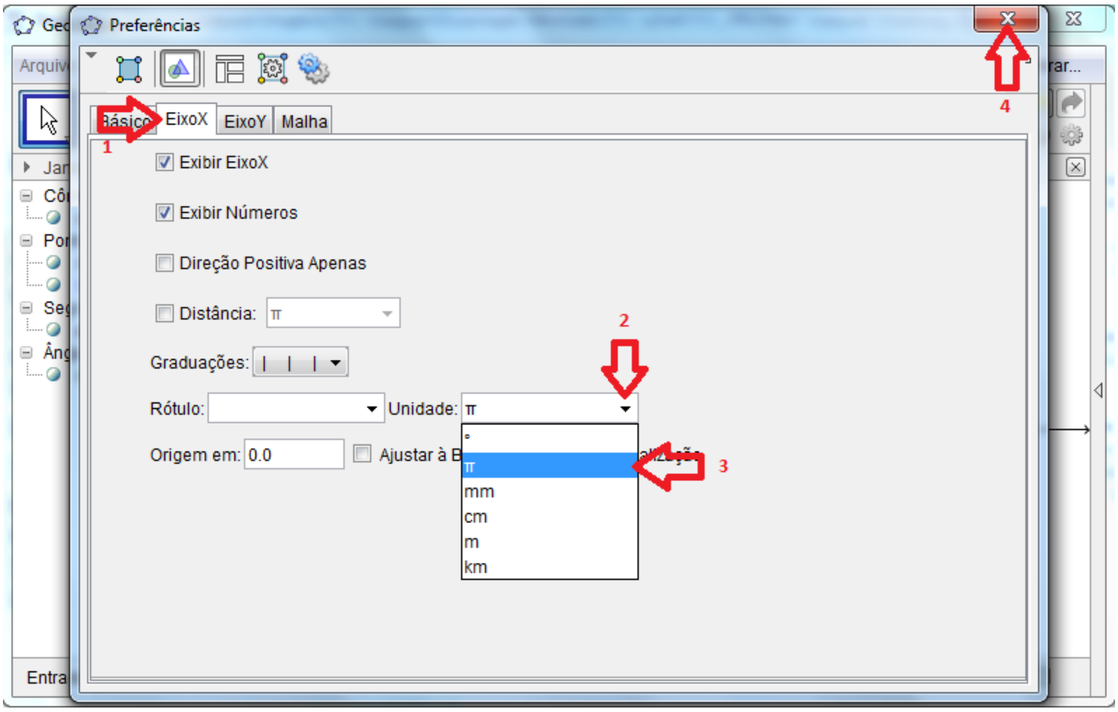

Figura 44 – Alterar unidade de medida do eixo x

9. Criar os pontos que farão os gráficos, em: barra de entrada, digitar $(\alpha, \mathrm{sen}(\alpha))$, conforme a Figura 39, e pressionar a tecla enter, criando o ponto C que fará o gráfico do seno. Repetir o processo digitando $(\alpha, \cos(\alpha))$, criando o ponto D, que fará o gráfico do cosseno; digitando $(\alpha, \mathrm{tg}(\alpha))$, criando o ponto E, que fará o gráfico da tangente; digitando $(\alpha, \sec(\alpha))$, criando o ponto F, que fará o gráfico da secante; digitando $(\alpha, \mathrm{cosec}(\alpha))$, criando o ponto G, que fará o gráfico da cossecante; e digitando $(\alpha, \mathrm{cotg}(\alpha))$, criando o ponto H, que fará o gráfico da cotangente;

10. Habilitar o rastro dos pontos C, D, E, F, G e H, em: janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse no ponto C e abrirá uma janela, Deve-se clicar em habilitar rastro, conforme a Figura 45. Repetir o processo com os pontos D, E, F, G e H;

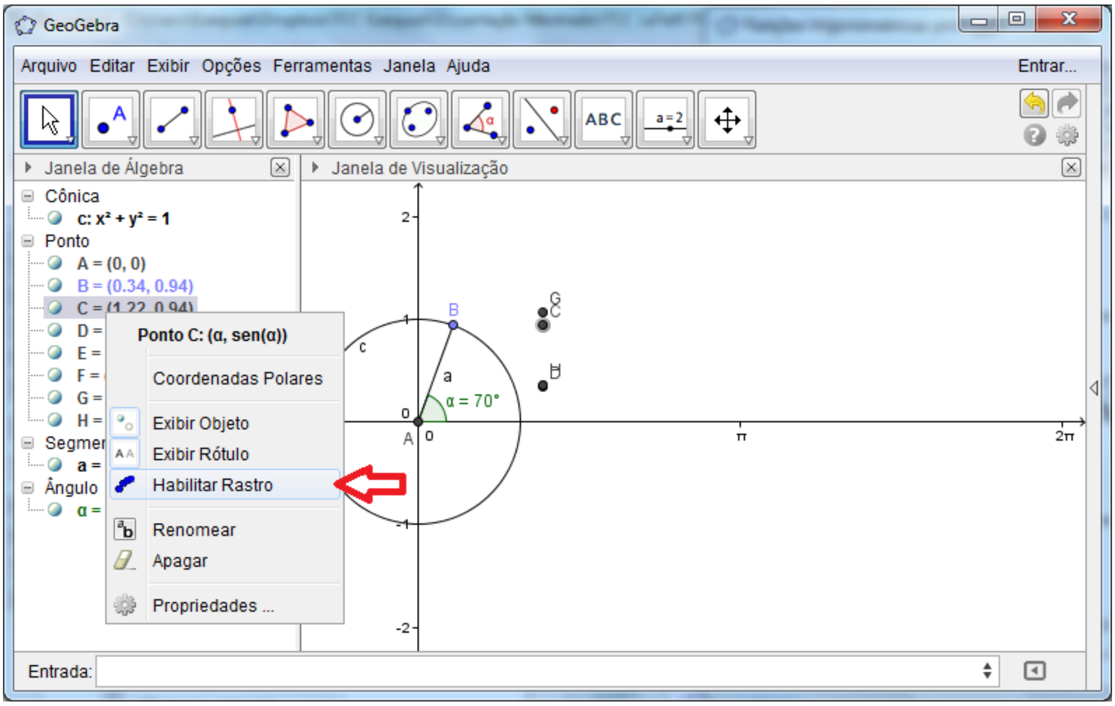

Figura 45 – Habilitar rastro

11. Mudar as cores dos pontos C, D, E, F, G e H, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em C, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão propriedades, conforme a Figura 21, Será aberta outra janela, em seguida, clicar no botão cor, depois clicar em uma das cores que são oferecidas como alternativas, conforme a Figura 23, em por fim, deve-se clicar em fechar janela, na parte superior direita da janela, em X. Repetir processo com os pontos D, E, F, G e H;

12. Renomear os pontos C, D, E, F, G e H, em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em C, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar *seno* e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o ponto D dando o nome de *cosseno*, com o ponto E dando o nome de *tangente*, com o ponto F dando o nome de *secante*, com o ponto G, dando o nome de *cossecante*, e com o ponto H dando o nome de *cotangente*;

13. Escolher qual(is) gráfico(s) se deseja(m) visualizar desmarcando os que não se tem interesse, e deixando marcado os que se tem interesse, em: janela de álgebra, clicar no ponto a esquerda da função que não se deseja visualizar, desmarcando a função, conforme a Figura 35. Deve-se fazer o mesmo processo caso queira marcar a função;

14. Construir o gráfico desejado, para $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ rad, em: janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto B e abrirá uma janela. Deve-se clicar no botão animar, conforme a Figura 29. A animação pode ser pausada ou acionada no

botão inferior esquerdo da janela de visualização, conforme a Figura 46. O gráfico pode ser construído manualmente em: barra de recursos, clicar na parte inferior direita do botão 1, clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar no ponto B e arrastar sobre o círculo c girando algumas voltas.

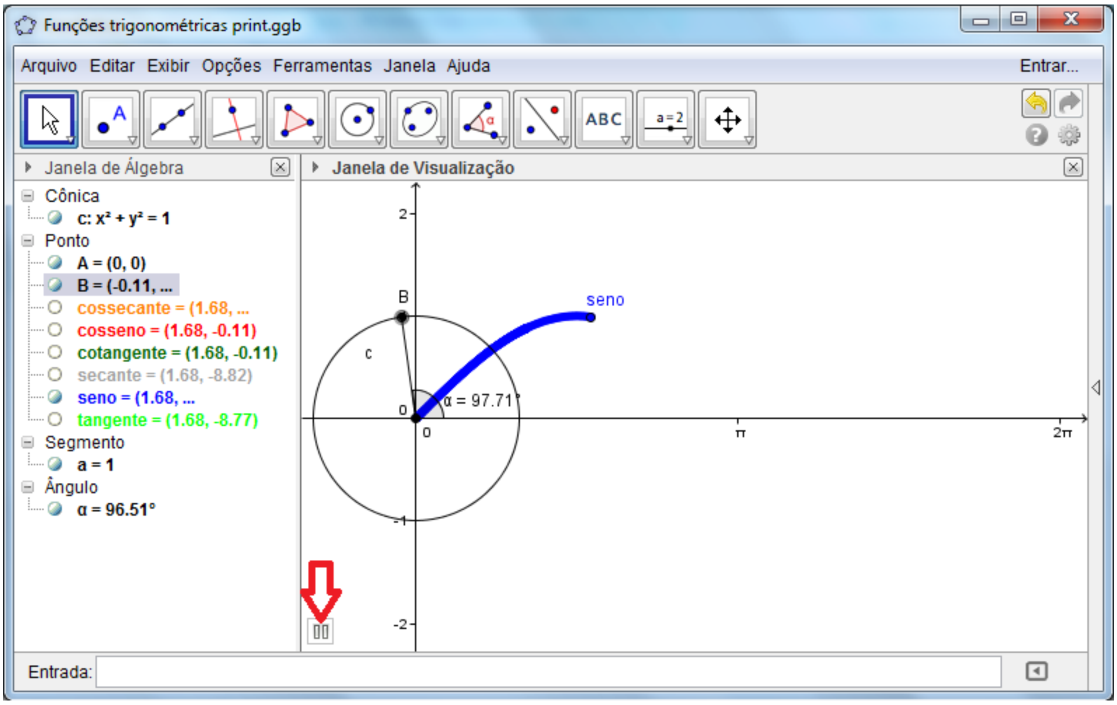

Figura 46 – Pausar/acionar animação

Embora as construções dos gráficos das funções trigonométricas já possam ser feitas, recomenda-se organizar a figura na janela de visualização com os itens facultativos, a seguir:

15. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a e em c, apagando esses rótulos na figura;

16. Exibir malhas na figura em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse fora da figura, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão malha, conforme a Figura 24. O mesmo pode ser feito para não exibir a malha;

17. Graduar eixo x em intervalos de $\frac{\pi}{2}$ em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse (desde que não seja na figura) e abrirá uma janela. Deve-se clicar no botão janela de visualização, conforme a Figura 43. Será aberta outra janela, em seguida, deve-se clicar no botão eixo$x$, depois clicar no quadrinho

à esquerda da alternativa "Distância". Em seguida, deve-se clicar em possibilidades de distância, e por fim, escolher a alternativa $\frac{\pi}{2}$ e fechar a janela na parte superior direita clicando no X, conforme a Figura 47.

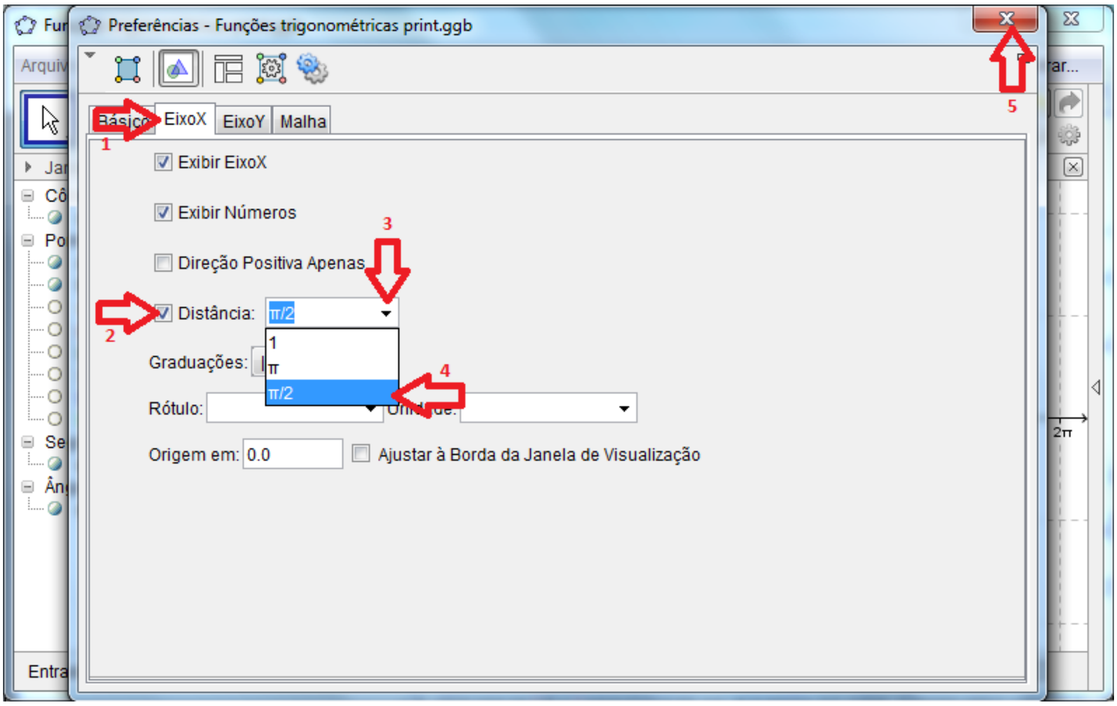

Figura 47 – Graduar eixo x em intervalos de $\frac{\pi}{2}$

Observação:

1. Sempre que se quiser desfazer o gráfico da função, basta clicar nos botões "Ctrl" e "Z", simultaneamente.

A Figura 48 mostra o gráfico da função seno.

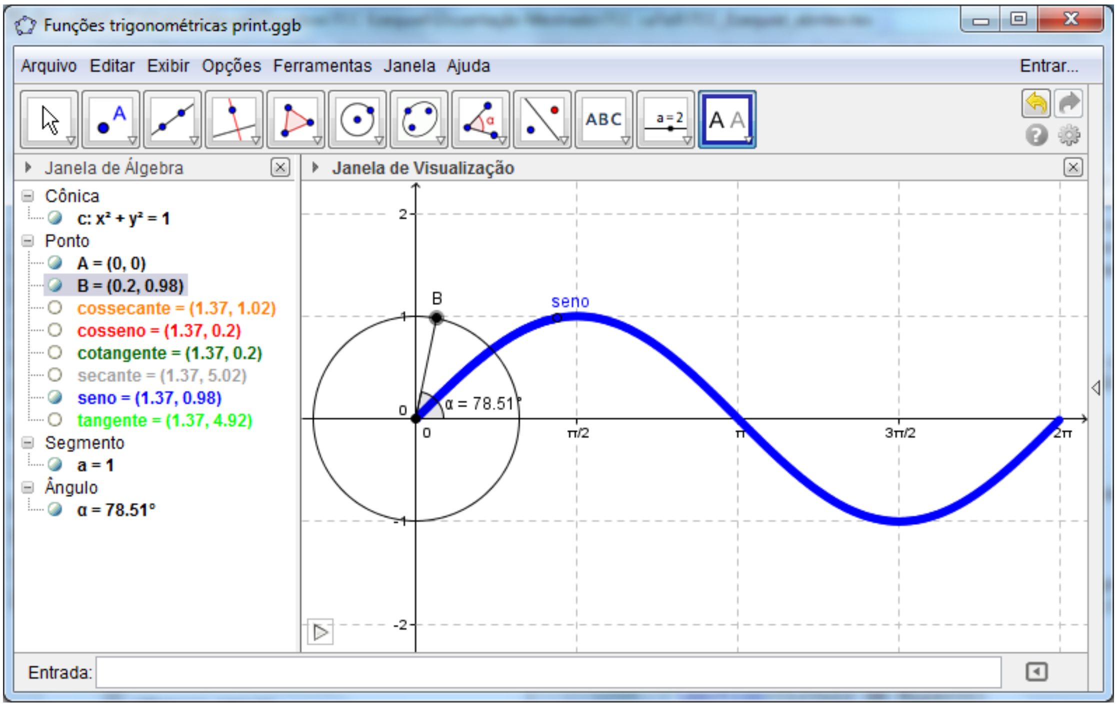

Figura 48 – Gráfico da função seno

4.5 Círculo de Hiparco

Nesta seção, será apresentado como construir o círculo de Hiparco, o precursor dos círculos trigonométricos que temos hoje. Novamente serão apresentadas duas formas de construção que se diferem na forma como se modifica o ângulo. Estas construções serão chamadas de círculo de Hiparco 1 e círculo de Hiparco 2 e serão necessárias ao longo deste trabalho.

4.5.1 Construção do círculo de Hiparco 1

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para o lugar desejado;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar

no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar um valor positivo na janela de álgebra, que será a medida do raio, em: barra de entrada, digitar um valor positivo qualquer (preferencialmente menor ou igual a 3, usando ponto para separar a parte inteira da parte decimal caso preferir um número decimal), e pressionar a tecla enter, criando o valor a, conforme a Figura 39;

   Observação:

   a) É possível criar qualquer valor positivo para a, porém, dependendo do valor escolhido será difícil a visualização, ou será necessário repetir o item 3. Portanto não use valores elevados.

5. Renomear o valor a em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em a, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar r e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

6. Criar o círculo de raio r em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e raio, conforme a Figura 41. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$ e abrirá nova janela, em seguida, digitar r, e clicar no botão OK, conforme a Figura 42, criando assim os pontos A e o círculo c de raio r. Repetir os itens 2 e 3, novamente, se necessário;

7. Criar o ponto de interseção entre o círculo c e o eixo x positivo, em: barra de entrada, digitar o ponto $(r, 0)$, e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 39, criando o ponto B;

8. Criar um ponto qualquer sobre o círculo c em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção ponto, conforme a Figura 10. Na janela de visualização, clicar em um ponto qualquer do círculo c, diferente de B (preferencialmente do arco do primeiro quadrante), criando o ponto C;

9. Criar o ponto de reflexão de C em relação ao eixo x, em: barra de recursos, clicar no botão 9, depois clicar na opção reflexão em relação a uma reta, conforme a Figura 49. Na janela de visualização, clicar no ponto C, depois clicar em um ponto do eixo x, com exceções dos pontos A e B, criando o ponto C';

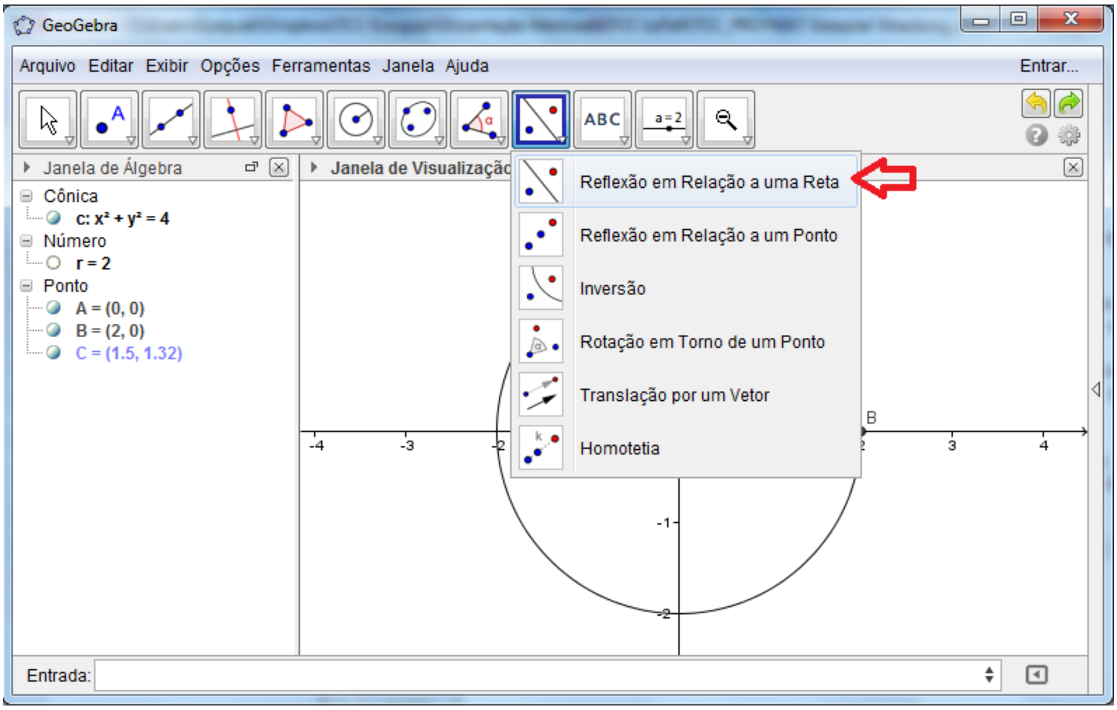

Figura 49 – Ponto de reflexão a uma reta

10. Traçar os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AC'}$ e $\overline{CC'}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto B, criando o segmento de reta $a = \overline{AB}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto C, criando o segmento de reta $b = \overline{AC}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto C', criando o segmento de reta $d = \overline{AC'}$; e por fim, clicar no ponto C e depois clicar no ponto C', criando o segmento de reta $e = \overline{CC'}$;

11. Criar os ângulos $B\hat{A}C$ e $C'\hat{A}B$, em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo, conforme a Figura 12. Na janela de visualização, clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e por fim, clicar no ponto C, criando o ângulo $\alpha = B\hat{A}C$, em seguida, clicar no ponto C', depois clicar no ponto A, e por fim, clicar no ponto B, criando o ângulo $\beta = C'\hat{A}B = \alpha$;

12. Criar o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CC'}$, em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção interseção de dois objetos, conforme a Figura 50. Na janela de visualização, clicar no segmento $\overline{CC'}$, depois clicar no segmento $\overline{AB}$, criando o ponto D;

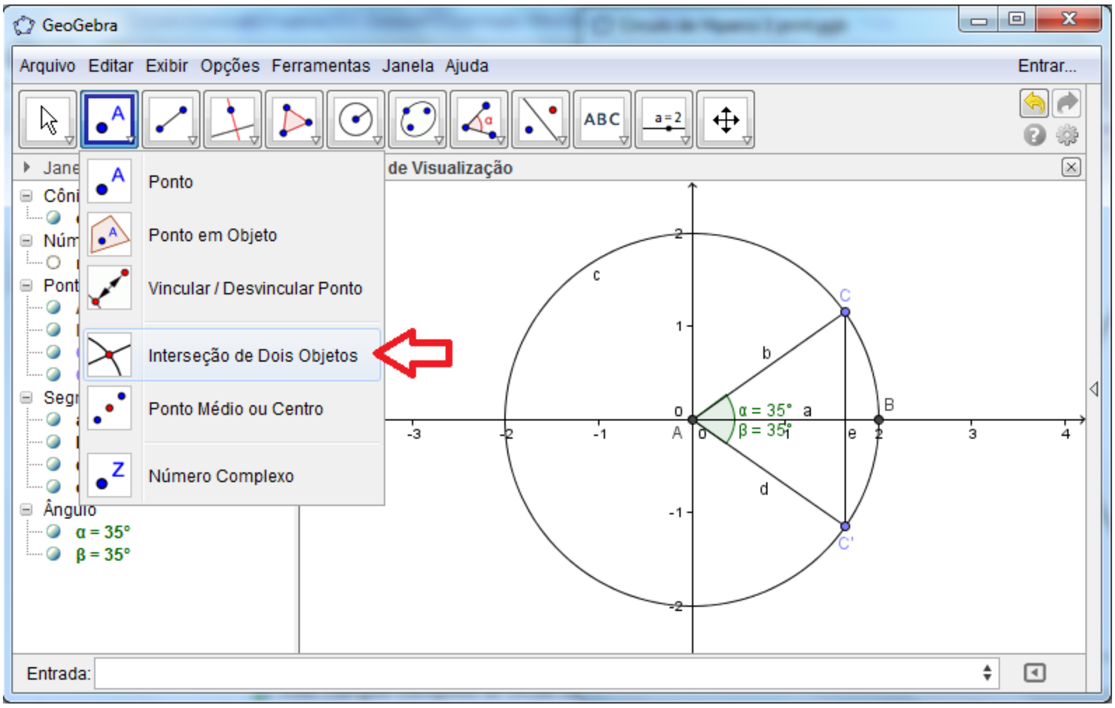

Figura 50 – Interseção de dois objetos

13. Traçar os segmentos de reta $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto C e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $f = \overline{CD}$; e clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $g = \overline{AD}$;

14. Renomear aos valores e, f, e g em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em e, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar $\overline{CC'}$ e clicar no botão OK, conforme a Figura 19. Repetir o processo com o valor f dando o nome de $\overline{CD}$, e com o valor g dando o nome de $\overline{AD}$;

15. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, CC', AD e CD, apagando esses rótulos na figura;

16. Esconder eixos x e y, conforme o item 1;

17. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar no rótulo e arrastar para o local desejado.

É possível alterar a medida do raio do círculo de Hiparco 1, em: barra de entrada, digitar a medida do raio (por exemplo: $r = 1.5$), e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 39. Também pode-se alterar o raio do círculo de Hiparco em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar no ponto B e arrastar horizontalmente.

É possível alterar a medida do ângulo em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização clicar no ponto C e arrastar sobre o círculo c.

4.5.2 Construção do círculo de Hiparco 2

1. Verificar se os eixos x e y estão expostos na janela de visualização. Caso não estejam, deve-se colocar os eixos x e y em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar em opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela com alguns botões, conforme a Figura 6, e deve-se clicar no botão eixos. O mesmo pode ser feito para não exibir os eixos;

2. Reposicionar a figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção mover janela de visualização, conforme a Figura 7. Na janela de visualização, arrastar a figura para o lugar desejado;

3. Ajustar o tamanho da figura em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção ampliar, se desejar aumentar o tamanho, ou na opção reduzir, se desejar diminuir o tamanho da figura, conforme a Figura 8. Na janela de visualização, clicar no centro da figura até que esta fique do tamanho desejado. Repetir o item 2, caso o ajuste do tamanho da figura descentralize-a;

4. Criar um valor positivo qualquer na janela de álgebra, que será a medida do raio, em: barra de entrada, digitar um valor positivo qualquer (preferencialmente menor ou igual a 3, usando ponto para separar a parte inteira da parte decimal caso preferir um número decimal), e pressionar a tecla enter, criando o valor a, conforme a Figura 39;

   Observação:

   a) É possível criar qualquer valor positivo para a, porém, dependendo do valor escolhido será difícil a visualização, ou será necessário repetir o item 3. Portanto não use valores elevados.

5. Renomear o valor a em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em a, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar r e clicar no botão OK, conforme a Figura 19;

6. Criar o círculo de raio r em: barra de recursos, clicar no botão 6, depois clicar em opção círculo dados centro e raio, conforme a Figura 41. Na janela de visualização, clicar na origem do plano cartesiano $(0, 0)$ e abrirá nova janela, em seguida, digitar r, e clicar no botão OK, conforme a Figura 42, criando assim os pontos A e o círculo c de raio r. Repetir os itens 2 e 3, novamente, se necessário;

7. Criar o ponto de interseção entre o círculo c e o eixo x positivo, em: barra de entrada, digitar o ponto $(r, 0)$, e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 39, criando o ponto B;

8. Criar um ângulo qualquer em: barra de entrada, digitar um ângulo qualquer (escolha um ângulo agudo, preferencialmente), por exemplo $\alpha = 30°$, e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25, criando o valor $\alpha = 30°$ na janela de álgebra. Para digitar α e "°" na barra de entrada, basta clicar no botão ao lado direito da barra de entrada e depois clicar na opção α e "°";

9. Renomear o ângulo α em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em α, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, em seguida, digitar θ e clicar no botão OK, conforme a Figura 28. Para digitar θ na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção θ;

10. Criar o ângulo α em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo com amplitude fixa, conforme a Figura 26. Na janela de visualização, clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e abrirá uma janela, em seguida, digitar θ, selecionar a opção sentido anti-horário, e clicar em OK, conforme a Figura 27, criando o criando o ponto B' e o ângulo $\alpha = \theta$. Para digitar θ na barra dessa janela, basta clicar no botão ao lado direito dessa barra e depois clicar na opção θ;

11. Renomear o ponto B' em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em B', e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, conforme a Figura 19, em seguida, digitar C e clicar no botão OK;

12. Criar o ponto de reflexão de C em relação ao eixo x, em: barra de recursos, clicar no botão 9, depois clicar na opção reflexão em relação a uma reta, conforme a Figura 49. Na janela de visualização, clicar no ponto C, depois clicar no eixo x, com exceções dos pontos A e B, criando o ponto C';

13. Traçar os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AC'}$ e $\overline{CC'}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto A e depois clicar no ponto B, criando o segmento de reta $a = \overline{AB}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto C, criando o segmento de

reta $b = \overline{AC}$; clicar no ponto A e depois clicar no ponto C', criando o segmento de reta $d = \overline{AC'}$; e por fim, clicar no ponto C e depois clicar no ponto C', criando o segmento de reta $e = \overline{CC'}$;

14. Criar o ângulo $C'\widehat{A}B$, em: barra de recursos, clicar no botão 8, depois clicar na opção ângulo, conforme a Figura 12. Na janela de visualização, clicar no ponto C', depois clicar no ponto A, e por fim, clicar no ponto B, criando o ângulo $\beta = C'\widehat{A}B = \alpha$;

15. Criar o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CC'}$, em: barra de recursos, clicar no botão 2, depois clicar na opção interseção de dois objetos, conforme a Figura 50. Na janela de visualização, clicar no segmento $\overline{CC'}$, depois clicar no segmento $\overline{AB}$, criando o ponto D;

16. Traçar os segmentos de reta $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, em: barra de recursos, clicar no botão 3, depois clicar na opção segmento, conforme a Figura 11. Na janela de visualização: clicar no ponto C e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $f = \overline{CD}$; e clicar no ponto A e depois clicar no ponto D, criando o segmento de reta $g = \overline{AD}$;

17. Renomear aos valores e, f, e g em: janela de álgebra, clicar com botão direito do mouse em e, e abrirá uma nova janela. Deve-se clicar no botão renomear, conforme a Figura 18. Será aberta outra janela, conforme a Figura 19, em seguida, digitar $\overline{CC'}$ e clicar no botão OK. Repetir o processo com o valor f dando o nome de $\overline{CD}$, e com o valor g dando o nome de $\overline{AD}$;

18. Caso os rótulos (nomes de pontos, retas, segmentos de reta, círculo, etc) apareçam na janela de visualização, é possível apagar esses rótulos em: barra de recursos, clicar no botão 12, depois clicar na opção exibir/esconder rótulo, conforme a Figura 20. Na janela de álgebra, clicar em a, b, c, d, CC', AD e CD, apagando esses rótulos na figura;

19. Esconder eixos x e y, conforme o item 1;

20. Mudar rótulo de posição em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar no rótulo e arrastar para o local desejado.

É possível alterar a medida do raio do círculo de Hiparco 2, em: barra de entrada, digitar a medida do raio (por exemplo: $r = 1.5$), e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 39. Também pode-se alterar o raio do círculo em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover, conforme a Figura 5. Na janela de visualização, clicar no ponto B e arrastar horizontalmente.

É possível alterar a medida do ângulo em: barra de entrada, digitar o ângulo (por exemplo: $\theta = 35°$), e pressionar a tecla enter, conforme a Figura 25.

Nas construções dos círculos de Hiparco 1 e 2 é possível fazer modificações de acordo com a necessidade, aumentando ou diminuindo a espessura das linhas, alterando as cores dos objetos das figuras, etc. Também é possível construir o círculo de Hiparco sem os eixos x e y, portanto, sem precisar tomar cuidado em: reposicionar figura, ajustar tamanho da figura ou cuidar a posição do centro do círculo, porém a forma como está o passo-a-passo permite ao professor colocar os eixos do plano cartesiano e comparar com o círculo trigonométrico atual, de raio unitário.

Com os círculos de Hiparco 1 e 2, o professor tem uma interessante ferramenta para uso em sala de aula, podendo ser utilizado para comparar um triângulo qualquer a um triângulo semelhante deste círculo. O que diferencia o círculo de Hiparco 1 do círculo de Hiparco 2 é a forma como se modifica o ângulo, pois para modificar o ângulo no círculo 1 se arrasta o ponto C pelo círculo, e para modificar o ângulo no círculo 2 se digita o ângulo na barra de entrada.

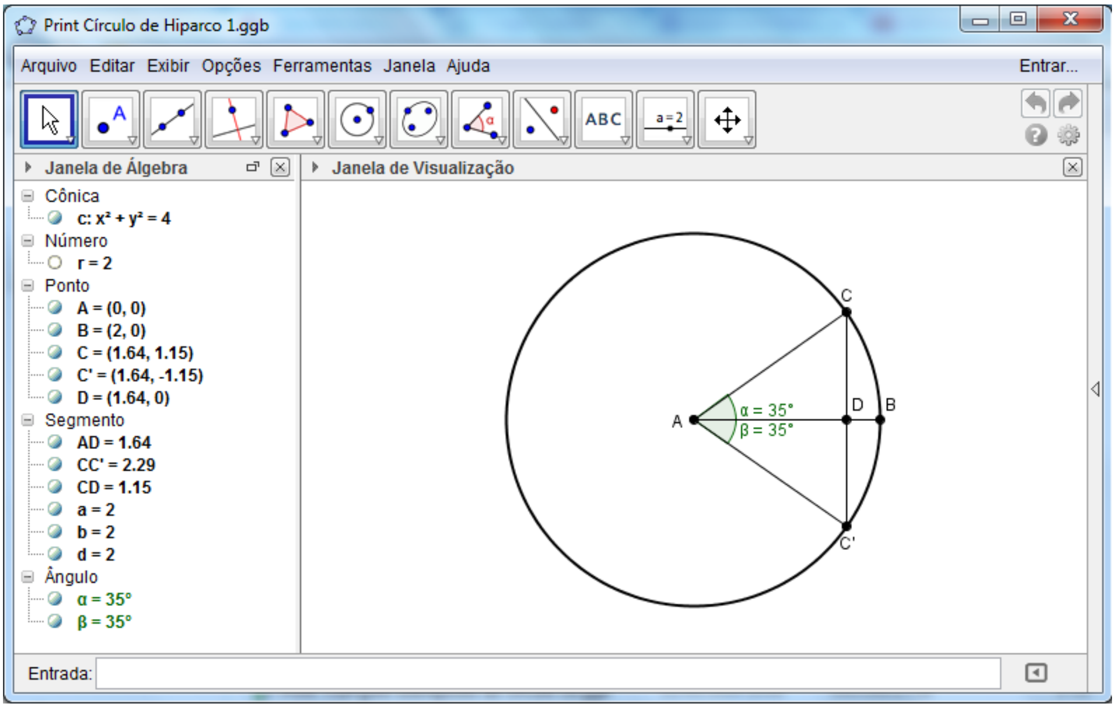

Figura 51 – Círculo trigonométrico de Hiparco

5 Atividades propostas

Trigonometria e círculo trigonométrico estão diretamente associados, porém a maioria dos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental trazem uma proposta de explicar trigonometria sem fazer menção à existência do círculo trigonométrico. Através do círculo trigonométrico conclui-se não somente o que são os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, de um ângulo, mas também de onde surgem, e porque levam esses nomes. A maioria das relações trigonométricas podem ser concluídas usando o círculo trigonométrico e fazendo uso do conhecimento em semelhança de triângulos, pois no círculo se encontram absolutamente todos os triângulos possíveis com cateto ou hipotenusa, unitário. Portanto, uma boa parte das relações trigonométricas consiste em comparar um triângulo retângulo qualquer à outro triângulo semelhante do círculo trigonométrico, que tem cateto ou hipotenusa, unitário.

No presente capítulo, apresentam-se algumas atividades com o uso do *software* GeoGebra e as construções vistas no capítulo anterior, com intuito de levar os alunos às conclusões das relações trigonométricas. Antes de mais nada, é extremamente importante que os alunos tenham total entendimento sobre semelhança e congruência de triângulos, propriedade fundamental da semelhança de triângulos, propriedades da proporção, Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, soma dos ângulos internos dos triângulo, conversão de unidades de medida do ângulo, pontos no plano cartesiano e noções sobre funções.

Dica ao professor:

1. O professor deve ensinar conhecimentos básicos do *software* GeoGebra que estão no capítulo 4 deste trabalho.

5.1 Estudando o círculo trigonométrico de Hiparco

Esta seção tem o propósito de mostrar como se iniciou o estudo da trigonometria e como surgiu o círculo trigonométrico. Nesta atividade usaremos uma das construções feitas na seção 4.5.

O uso do círculo trigonométrico de Hiparco feito no *software* GeoGebra, se torna interessante pelo dinamismo. O professor pode, inclusive, realizar a construção do círculo de Hiparco com régua e compasso, mas a vantagem da construção no *software* GeoGebra é a precisão e também ser possível usar as medidas dos lados dos triângulos que são expostas na janela de álgebra.

Atividade 1. Trabalhando com o círculo de Hiparco

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem; mostrar aos alunos como surgiu o primeiro círculo trigonométrico usando as mesmas ideias de Hiparco e explicar o surgimento da palavra *seno*.

Pré-requisitos: Semelhança e congruência de triângulos; Teorema de Pitágoras; Propriedades da proporção e conhecimentos mínimos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 2 horas/aula.

Exercício 1. Leitura: Há aproximadamente 500 a.C. os gregos, especialmente Pitágoras de Samos (569 a 475 a.C., aproximadamente), já tinham conhecimento da relação entre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, inclusive com demonstração, conhecida como Teorema de Pitágoras, em que era possível calcular a medida de um dos lados de um triângulo retângulo conhecidas as medidas dos outros dois lados. No entanto, nos estudos de astronomia do grego Hiparco de Nicéia (190 a 125 a.C.), considerado o "Pai da trigonometria", surgiu a necessidade de saber como calcular um dos lados do triângulo retângulo sabendo-se apenas a medida de um dos catetos e um dos ângulos agudos. Hiparco, fazendo uso dos conhecimentos em semelhança de triângulos propostos por Tales de Mileto (624 a 548 a.C.), criou o que podemos chamar de "primeiro círculo trigonométrico", com a finalidade de encontrar triângulos semelhantes e compará-los.

Sabendo-se dessa importância, faça as atividades a seguir:

a) No círculo de Hiparco, construído no *software* GeoGebra, escolha um valor qualquer para a medida do raio, e um valor qualquer para a medida do ângulo α (Escolha entre o círculos de Hiparco 1 e 2);

b) No círculo criado no item (a), justifique que os triângulos ACD e $AC'D$ são congruentes, e consequentemente, são triângulos retângulos:

c) Encontre um triângulo, no círculo de Hiparco do *software* GeoGebra, que seja semelhante ao triângulo EFG, da Figura 52, e calcule o valor de x por semelhança de triângulos, usando o valor da medida do segmento $\overline{CD}$ (correspondente à *meia corda* $\overline{CC'}$) exposto na janela de álgebra.

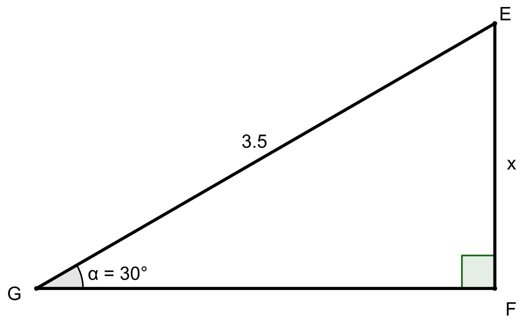

Figura 52 – Atividade 1, exercício 1, item (c) - Triângulo EFG

d) Repita o que foi feito no item (c), porém utilizando raio unitário no círculo de Hiparco.

Solução da Atividade 1:

Exercício 1

a) Uma possível solução: para mudar a medida do raio deve-se digitar na barra de entrada um valor para o raio, por exemplo $r = 1.5$, e pressionar a tecla enter. Também é possível alterar a medida do raio em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização, arrastar o ponto B horizontalmente. Para mudar a medida do ângulo dependerá do círculo escolhido. Caso se escolha o *círculo de Hiparco 1* deve-se, na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo. Caso se escolha o *círculo de Hiparco 2* deve-se alterar o ângulo em: barra de entrada, digitar um valor para o ângulo, por exemplo $\theta = 40°$, e pressionar a tecla enter. Veja a Figura 53.

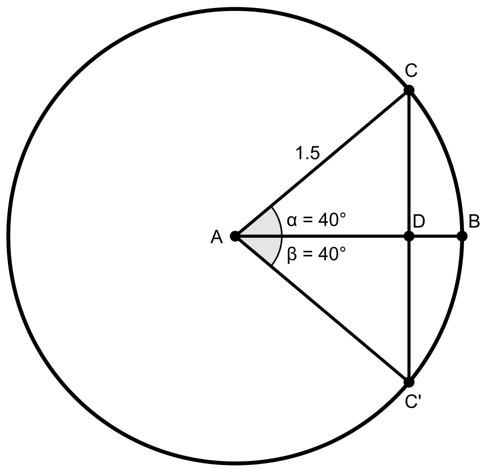

Figura 53 – Atividade 1, exercício 1, item (a) - Solução

b) Analisando a figura construída no item (a), pode-se perceber que a medida do lado $\overline{AC}$ é igual à medida do lado $\overline{AC'}$, a medida do ângulo α é igual à medida do ângulo β, e o lado $\overline{AD}$ é comum ao triângulo ACD e $AC'D$, portanto ΔACD e $\Delta AC'D$ são congruentes por LAL (possuem dois lados correspondentes congruentes e os ângulos compreendidos entre esses lados congruentes). Como esses triângulos são congruentes, tem-se que os ângulos $C\widehat{D}A$ e $A\widehat{D}C'$ são congruentes. Como $C\widehat{D}A$ e $A\widehat{D}C'$ são suplementares, a soma de suas medidas é igual a 180°, portanto os ângulos $C\widehat{D}A$ e $A\widehat{D}C'$ são retos e, consequentemente ΔACD e $\Delta AC'D$ são triângulos retângulos.

c) Uma possível solução: primeiramente vamos encontrar no círculo de Hiparco, um triângulo semelhante ao triângulo retângulo EFG e, para isso, podemos utilizar a construção feita no item (a), com raio medindo 1,5, em seguida alterar o ângulo α para 30°. Caso se escolha o *círculo de Hiparco 1* deve-se, na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo até encontrar $\alpha = 30°$. Caso se escolha o *círculo de Hiparco 2* deve-se alterar o ângulo em: barra de entrada, digitar $\theta = 30°$, e pressionar a tecla enter, criando a Figura 54.

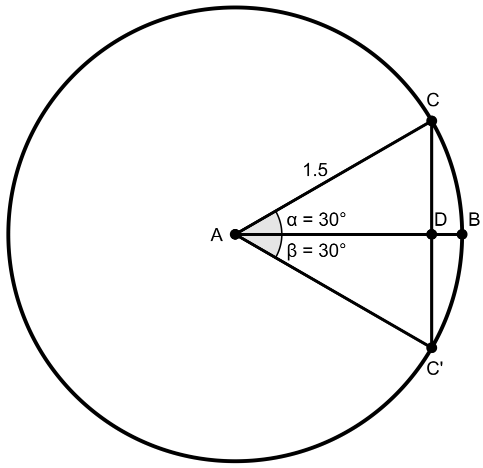

Figura 54 – Atividade 1, exercício 1, item (c) - Solução

Conforme vimos no item (b), o triângulo ACD é retângulo. Portanto, o triângulo ACD é semelhante ao triângulo EFG por AA (possuem dois ângulos correspondentes congruentes, e consequentemente o terceiro ângulo congruente). Como os triângulos EFG e ACD são semelhantes possuem os lados correspondentes proporcionais, então é possível encontrar o valor de x comparando esses dois triângulos, usando as medidas de $\overline{AC} = 1,5$ e $\overline{CD} = 0,75$, na janela de álgebra:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{0,75}{1,5} = \frac{x}{3,5} \Leftrightarrow 1,5x = 2,625 \Leftrightarrow x = 1,75.$$

Portanto, o triângulo EFG tem a medida $x = \overline{EF} = 1,75$.

d) O círculo construído no item (c) já apresenta o triângulo ACD semelhante ao triângulo EFG, porém o raio não é unitário. Para deixar o raio igual a 1, basta digitar $r = 1$ na barra de entrada e pressionar a tecla enter. Dessa maneira, $\overline{AC} = 1$ e $\overline{CD} = 0,5$. Portanto:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{0,5}{1} = \frac{x}{3,5} \Leftrightarrow x = 1,75.$$

Portanto, o triângulo EFG tem a medida $x = \overline{EF} = 1,75$.

Dicas ao professor:

1. Mostre aos alunos que o círculo de Hiparco no *software* GeoGebra, possibilita encontrar todas as possibilidades de triângulos retângulos;
2. Diga aos alunos que um triângulo qualquer pode ser comparado a um triângulo semelhante no círculo de Hiparco com raio qualquer, porém é mais fácil comparar esse triângulo a um triângulo que tenha um dos lados unitário. Esse é o motivo pelo qual o círculo trigonométrico atual, que será mostrado aos alunos na sequência, tem raio unitário;
3. Para calcular o valor de x foi preciso utilizar a medida de $\overline{DC}$, que corresponde à **metade da corda** $\overline{CC'}$. Então peça para os alunos que observem que quando se altera o ângulo α, se altera também a medida da **meia corda** $\overline{CD}$;
4. Comente com os alunos que será estudado, posteriormente, uma fórmula que relaciona a medida do ângulo α à medida da **meia corda** $\overline{CD}$. Esta fórmula generaliza o que foi feito nesta atividade e é chamada de *relação seno*.

Importante: Diga aos alunos que a relação entre o ângulo α e a meia corda $\overline{CD}$, era chamada de *função meia corda*. A palavra em sânscrito para "meia corda" era *jya-ardha*, que era abreviada por *jiva*. Em árabe isso se tornou *jiba*, que se abrevia por *jb*. Tradutores latinos tornaram erroneamente *jb* pela palavra árabe *jaib*, que singnifica *seio*, portanto passaram a usar a palavra latina *sinus*, e em português *sinus* tornou-se **seno**.

5.2 Explorando o círculo trigonométrico no *software* GeoGebra

Esta seção tem o propósito de mostrar como encontrar os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, e cotangente, de um ângulo α no círculo trigonométrico. Nesta atividade usaremos uma das construções feitas na seção 4.1 e uma das construções feitas na seção 4.2.

O uso do círculo trigonométrico no *software* GeoGebra, torna-se interessante pois através dele é possível encontrar os valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um ângulo α, podendo ser visualizada a representação geométrica. O professor pode realizar essas construções com régua e compasso, mas a vantagem da construção no *software* GeoGebra é a precisão e dinamismo.

Atividade 2. Trabalhando com o círculo trigonométrico no *software* GeoGebra

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem; mostrar aos alunos a representação geométrica dos valores de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um âgulo α e explicar o motivo pelo qual se utilizam as palavras *tangente* e *secante*.

Pré-requisitos: Semelhança e congruência de triângulos; Retas paralelas cortadas por transversal; Soma dos ângulos internos de um triângulo; Pontos no plano cartesiano e conhecimentos mínimos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 2 horas/aula.

Dicas ao professor:

1. Diga aos alunos que no *círculo trigonométrico 1*: o **seno do ângulo** α, que podemos abreviar por $\text{sen}(\alpha)$ é a coordenada y do ponto F; o **cosseno do ângulo** α, que podemos abreviar por $\cos(\alpha)$ é a coordenada x do ponto E e a **tangente do ângulo** α, que podemos abreviar por $\text{tg}(\alpha)$ é a coordenada y do ponto D. Portanto, tem-se o ponto $C = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ e o ponto $D = (1, \text{tg}(\alpha))$;

2. Diga aos alunos que no *círculo trigonométrico 2*: a **secante do ângulo** α, que podemos abreviar por $\sec(\alpha)$ é a coordenada x do ponto E; a **cossecante do ângulo** α, que podemos abreviar por $\text{cosec}(\alpha)$ é a coordenada y do ponto F e a **cotangente de um ângulo** α, que podemos abreviar por $\text{cotg}(\alpha)$ é a coordenada x do ponto D. Portanto, tem-se o ponto $E = (\sec(\alpha), 0)$, o ponto $F = (0, \text{cosec}(\alpha))$ e o ponto $D = (\text{cotg}(\alpha), 1)$.

Exercício 2. De posse do *círculo trigonométrico 1*, construído no *software* GeoGebra, faça as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 1a*, faça o ângulo α variar automaticamente através de uma animação. Para fazer esta animação deve-se clicar com o botão direito do mouse no ponto C, da janela de álgebra, ou da janela de visualização, e abrirá uma janela, em seguida deve-se clicar na opção animar;

b) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que seno, cosseno e tangente do ângulo α assumem quando: $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$;

c) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que seno, cosseno e tangente do ângulo α assumem em cada quadrante: $0° < \alpha < 90°$ (1º quadrante), $90° < \alpha < 180°$ (2º quadrante), $180° < \alpha < 270°$ (3º quadrante) e $270° < \alpha < 360°$ (4º quadrante);

d) Compare os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos C e D.

Exercício 3. De posse do *círculo trigonométrico 2*, construído no *software* GeoGebra, faça as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 2a*, faça o ângulo α variar automaticamente através de uma animação. Para fazer esta animação deve-se clicar com o botão direito do mouse no ponto C, da janela de álgebra, ou da janela de visualização, e abrirá uma janela, em seguida deve-se clicar na opção animar.

b) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que secante, cossecante e cotangente do ângulo α assumem quando: $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$;

c) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que secante, cossecante e cotangente do ângulo α assumem em cada quadrante: $0° < \alpha < 90°$ (1º quadrante), $90° < \alpha < 180°$ (2º quadrante), $180° < \alpha < 270°$ (3º quadrante) e $270° < \alpha < 360°$ (4º quadrante);

d) Compare os valores de secante, cossecante e cotangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos D, E e F.

Exercício 4. De posse do *círculo trigonométrico 2*, construído no *software* GeoGebra, escolha um valor para α entre 0° e 90°. Em seguida, demonstre que os triângulos ACE, ACF, ABD e AEF são semelhantes e demonstre que os triângulos ACF e ABD também são congruentes. Observação: O segmento $\overline{AD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{EF}$.

Solução da Atividade 2:

Exercício 2

a) Para fazer animação é preciso: na janela de álgebra ou na janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse no ponto C, e abrirá uma janela. Deve-se clicar no botão animar. Repetir o processo caso se queira parar a animação.

Para resolver os itens (b) e (c) do exercício 2, pode-se obervar os valores encontrados na janela de álgebra, conforme a Figura 55.

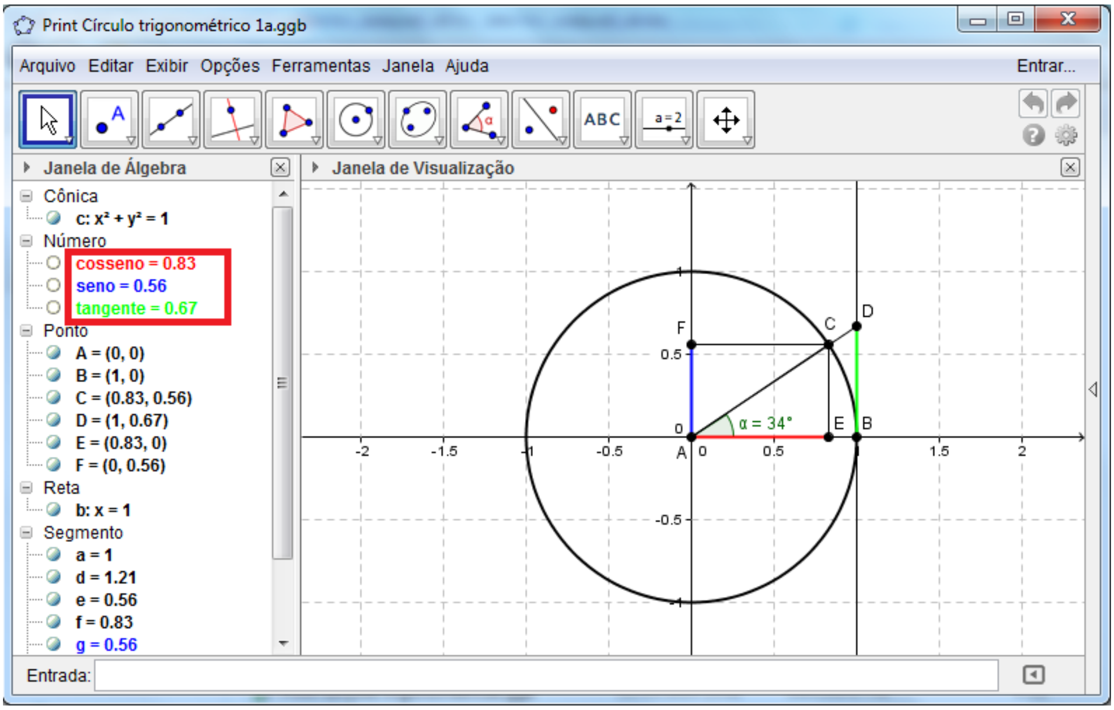

Figura 55 – Atividade 2, exercício 2 - Solução

b) Observando a janela de álgebra, podemos encontrar os seguintes valores de sen(α), cos(α) e tg(α) para $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$, conforme a Tabela 1:

Tabela 1 – Valores de sen(α), cos(α) e tg(α) para $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$	$\alpha = 270°$
sen(α)	0	1	0	-1
cos(α)	1	0	-1	0
tg(α)	0	$\nexists$	0	$\nexists$

c) Observando a janela de álgebra, podemos encontrar os seguintes valores para sen(α), cos(α) e tg(α) em cada quadrante, conforme a Tabela 2:

Tabela 2 – Valores de sen(α), cos(α) e tg(α) para cada quadrante

	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen(α)	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$
cos(α)	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$
tg(α)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

d) Comparando os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos C e D, pode-se concluir que: sen(α) é a coordenada y do ponto C; cos(α) é a coordenada x do ponto C e tg(α) é a coordenada y do ponto D.

Importante: Diga aos alunos que embora os livros didáticos do 9º ano no Ensino Fundamental frequentemente definem a tangente de um ângulo agudo como a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo, em um triângulo retângulo, a “tangente” de um ângulo qualquer leva esse nome por ser o valor da coordenada y do ponto D que pertence à reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto (1,0), conforme o *círculo trigonométrico 1.*

Exercício 3

a) Para fazer animação é preciso: na janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse no ponto C, e abrirá uma janela. Deve-se clicar no botão animar. Repetir o processo caso se queira parar a animação.

Para resolver os itens (b) e (c) do exercício 3, pode-se obervar os valores encontrados na janela de álgebra, conforme a Figura 56.

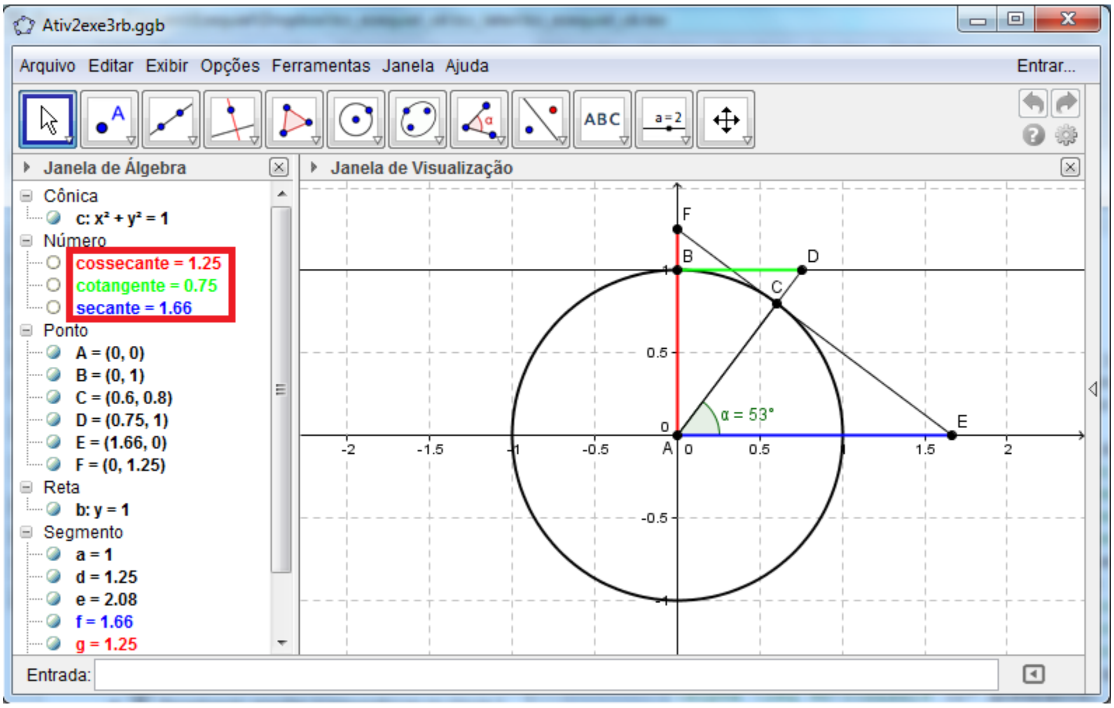

Figura 56 – Atividade 2, exercício 3 - Solução

b) Observando a janela de álgebra, podemos encontrar os seguintes valores de sec(α), cosec(α) e cotg(α) para $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$, conforme a Tabela 3:

Tabela 3 – Valores de sec(α), cosec(α) e cotg(α) para $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$	$\alpha = 270°$
sec(α)	1	$\nexists$	-1	$\nexists$
cosec(α)	$\nexists$	1	$\nexists$	-1
cotg(α)	$\nexists$	0	$\nexists$	0

c) Observando a janela de álgebra, podemos encontrar os seguintes valores para sec(α), cosec(α) e cotg(α) em cada quadrante, conforme a Tabela 4:

Tabela 4 – Valores de sec(α), cosec(α) e cotg(α) para cada quadrante

	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sec(α)	$(1, +\infty)$	$(-\infty, -1)$	$(-\infty, -1)$	$(1, +\infty)$
cosec(α)	$(1, +\infty)$	$(1, +\infty)$	$(-\infty, -1)$	$(-\infty, -1)$
cotg(α)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

d) Comparando os valores de secante, cossecante e cotangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos D, E e F, pode-se concluir que: sec(α) é a coordenada x do ponto E; cosec(α) é a coordenada y do ponto F e cotg(α) é a coordenada x do ponto D.

Importante: Diga aos alunos que a palavra "secante" é utilizada, pois a secante de um ângulo α é o valor da coordenada x do ponto E no *círculo trigonométrico 2* e o ponto E pertence à reta $\overleftrightarrow{AE}$ que é secante por intersectar o círculo c em dois pontos.

Exercício 4

Primeiramente escolha um ângulo α agudo no *círculo trigonométrico 2*.

Demonstração de que o triângulo ACE é semelhante ao triângulo ACF:

Os triângulos ACE e ACF são retângulos, pois como os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{EF}$ são perpendiculares, os ângulos $A\widehat{C}E$ e $F\widehat{C}A$ são retos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° tem-se que o ângulo $C\hat{E}A$ mede $90° - \alpha$ (ou seja, o ângulo $C\hat{E}A$ é complementar ao ângulo α). Como o ângulo $C\hat{A}F$ também é complementar ao ângulo α tem-se que os ângulos $C\hat{E}A$ e $C\hat{A}F$ são congruentes. Portanto, o triângulo ACE é semelhante ao triângulo ACF por AA (possuem dois ângulos correspondentes congruentes).

Demonstração de que o triângulo ACF é semelhante e congruente ao triângulo ABD:

O triângulo ABD é retângulo, pois o ângulo $A\widehat{B}D$ é reto, e o triângulo ACF é retângulo, conforme foi visto anteriormente. Tem-se que os ângulos $B\widehat{D}A$ e α são congruentes pois são ângulos alternos internos. Então o triângulo ACF é semelhante ao triângulo ABD por AA (possuem dois ângulos correspondentes congruentes). Além disso, pode-se perceber que esses triângulos tem os lados correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ com medida unitária. Portanto, o triângulo ACF é congruente ao triângulo ABD por ALA (possuem dois ângulos correspontentes congruentes e lado correspondente congruente);

Demonstração de que o triângulo ABD é semelhante ao triângulo AEF:

O triângulo AEF é retângulo, pois o ângulo $E\widehat{A}F$ é reto, e o triângulo ABD é retângulo, conforme foi visto anteriormente. Tem-se que a medida do ângulo $F\widehat{E}A$ é igual à medida do ângulo $C\widehat{E}A$ que é igual a $90° - \alpha$ (ou seja, o ângulo $C\widehat{E}A$ é complementar ao ângulo α). Como o ângulo $D\widehat{A}B$ também é complementar ao ângulo α tem-se que os ângulos $F\widehat{E}A$ e $D\widehat{A}B$ são congruentes. Portanto, o triângulo ABD é semelhante ao triângulo AEF por AA (possuem dois ângulos correspondentes congruentes).

Dicas ao professor:

1. Diga aos alunos que o círculo trigonométrico fornece todos os triângulos retângulos com cateto unitário, e todos os triângulos retângulos com hipotenusa unitária. E o motivo pelo qual o círculo trigonométrico tem raio unitário é justamente pelo fato de ser mais fácil comparar um triângulo qualquer a outro que tenha um dos lados unitário;

2. Peça para os alunos observarem que no 1º quadrante: $\text{sen}(\alpha)$ é a medida do cateto oposto ao ângulo α em um triângulo de hipotenusa unitária, $\cos(\alpha)$ é a medida do cateto adjacente ao ângulo α em um triângulo de hipotenusa unitária, $\text{tg}(\alpha)$ é a medida do cateto oposto ao ângulo α em um triângulo de cateto adjacente unitário, $\sec(\alpha)$ é a medida da hipotenusa em um triângulo de cateto unitário adjacente ao ângulo α, $\text{cosec}(\alpha)$ é a medida da hipotenusa em um triângulo de cateto unitário oposto ao ângulo α (pois os triângulos ABD e ACF são congruentes, conforme foi visto no exercício 4 da atividade 2), e $\text{cotg}(\alpha)$ é a medida do cateto adjacente ao ângulo α em um triângulo de cateto unitário oposto ao ângulo α.

5.3 Encontrando relações trigonométricas no círculo 1

Esta seção tem o propósito de mostrar como é possível encontrar algumas relações trigonométricas no círculo trigonométrico 1. Para realizar esta atividade usaremos as construções feitas na seção 4.1 e 4.3.

O uso do *círculo trigonométrico 1* e do *triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1* (que nada mais é do que uma extensão do círculo trigonométrico 1) possibilita encontrar várias relações trigonométricas usando o conhecimento em semelhança de triângulos e torna-se ainda mais interessante quando se usam os recursos do *software* GeoGebra.

O professor pode realizar essas construções com régua e compasso, mas a vantagem do *software* GeoGebra é a precisão, o dinamismo, e o fato de ser possível testar as relações trigonométricas usando os valores encontrados na janela de álgebra. O *triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1* será usado para comparar um triângulo retângulo qualquer a outro triângulo semelhante do *círculo trigonométrico 1*, dessa forma é possível ter os dois triângulos na mesma figura facilitando a visualização.

Atividade 3. Relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo α

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem; mostrar aos alunos como estabelecer algumas relações envolvendo o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo α e explicar o motivo pelo qual se utiliza a palavra *cosseno*.

Pré-requisitos: Semelhança de triângulos; Propriedade fundamental da semelhança de triângulos; Teorema de Pitágoras; Propriedades da proporção; Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; Pontos no plano cartesiano e conhecimentos mínimos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 4 horas/aula.

Exercício 5. Realize as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 1* construído no *software* GeoGebra, encontre um triângulo semelhante ao triângulo da Figura 57;

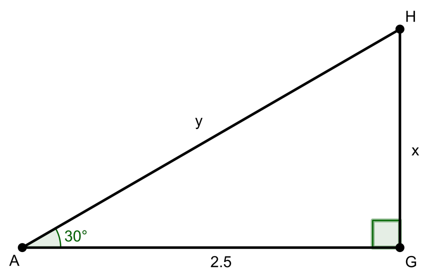

Figura 57 – Atividade 3, exercício 5, item (a) - Triângulo AGH

b) Calcule os valores de x e y da Figura 57 comparando este triângulo aos triângulos semelhantes encontrados no item (a) e usando os valores das medidas dos lados expostos na janela de álgebra;

c) Construa o triângulo AGH, da Figura 57, sobreposto ao *círculo trigonométrico 1* no *software* GeoGebra.

Exercício 6. Considere um ângulo α agudo qualquer no *triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1* construído no *software* GeoGebra, conforme a Figura 58. Faça as atividades a seguir:

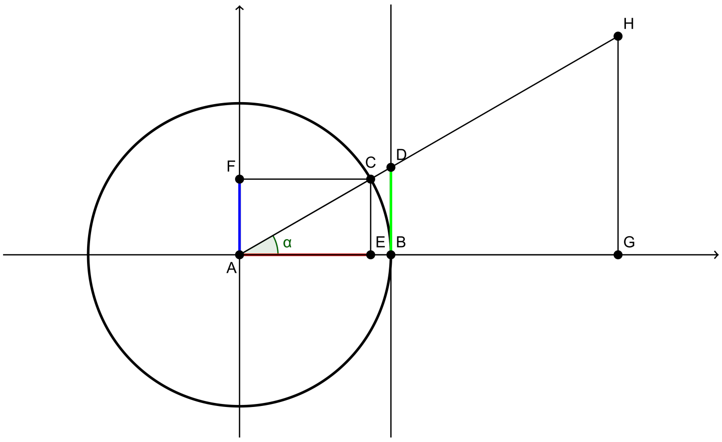

Figura 58 – Atividade 3, exercício 6

Observação: os itens (a), (b) e (c) podem ser feitos seguindo a ideia do que foi feito no exercício 5, item (b), da atividade 3.

a) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonométrico ACE, determine uma relação que permita generalizar os valores de sen(α);

b) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonométrico ACE, estabeleça uma relação que permita generalizar os valores de cos(α);

c) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonométrico ABD, encontre uma relação que permita generalizar os valores de tg(α);

d) Verifique o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE;

e) Compare os triângulos ADB e ACE e determine uma relação entre sen(α) e cos(α) que seja igual à tg(α). Dica: use apenas as medidas dos catetos opostos e dos catetos adjacentes ao ângulo α;

f) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ACE aplique a relação cosseno (encontrada no item (b)) do ângulo α e aplique a relação seno (encontrada no item (a)) do ângulo $E\widehat{C}A$, compare o que foi encontrado nas duas relações e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β;

g) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ACE aplique a relação seno (encontrada no item (a)) do ângulo α e aplique a relação cosseno (encontrada no item (b)) do ângulo $E\widehat{C}A$, compare o que foi encontrado nas duas relações e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β;

h) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ABD aplique a relação tangente (encontrada no item (c)) do $A\widehat{D}B$ e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β.

Dicas ao professor:

1. Lembre os alunos que na Figura 58: $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são congruentes; $\overline{CF}$ e $\overline{AE}$ são congruentes; e $\overline{AF}$ e $\overline{CE}$ também são congruentes;

2. Peça para os alunos observarem que na Figura 58 os segmentos de reta $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{GH}$ perpendiculares ao eixo x, portanto os triângulos AGH, ABD e ACE são semelhantes por AA (possuem dois ângulos correspondentes congruentes).

Solução da Atividade 3:

Exercício 5

a) Como o triângulo AGH, da Figura 57, é retângulo, para encontrar um triângulo semelhante no *círculo trigonométrico 1* basta que este triângulo retângulo tenha um dos ângulos agudos igual a 30°. Para alterar o ângulo no *círculo trigonométrico 1* construído no *software* GeoGebra dependerá da escolha entre os círculos trigonométricos 1a e 1b. Caso escolha-se o *círculo trigonométrico 1a* deve-se, na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo até encontrar $\alpha = 30°$. Caso escolha-se o *círculo trigonométrico 1b* deve-se alterar o ângulo em: barra de entrada, digitar o valor do ângulo ($\alpha = 30°$), e pressionar a tecla enter. Dessa forma encontram-se os triângulos ACE e ABD semelhantes ao triângulo AGH. Veja a Figura 59.

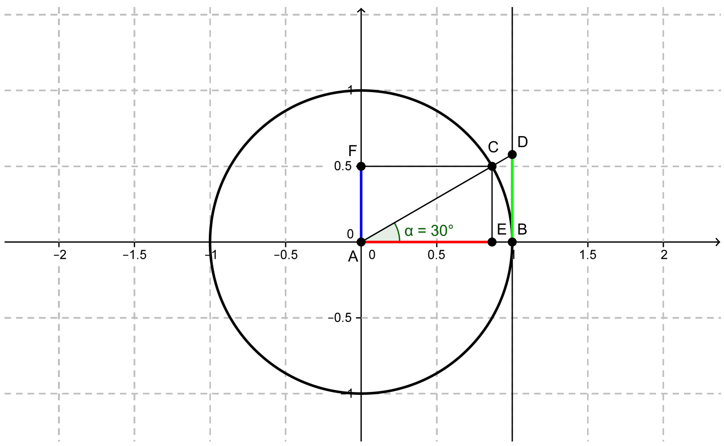

Figura 59 – Atividade 3, exercício 5 - Solução

Dica ao professor:

1. É importante dizer aos alunos que quando realizarem uma atividade no círculo trigonométrico em que o objetivo é encontrar nele um triângulo semelhante a outro triângulo qualquer (como foi feito no item (a) do exercício 5 da atividade 3) pode-se

encontrar vários triângulos semelhantes, porém a resolução proposta anteriormente é a mais simples e conveniente.

b) Como sabemos os valores das medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$ do triângulo ACE, expostos na janela de álgebra, e também sabemos o valor de $\overline{AG}$ do triângulo AGH, podemos calcular o valor de y comparando os triângulos semelhantes ACE e AGH, da seguinte forma:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{y}{1} = \frac{2,5}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow y \simeq \frac{2,5}{0,87} \Leftrightarrow y \simeq 2,87.$$

Como sabemos os valores das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ do triângulo ABD, expostos na janela de álgebra, e também sabemos o valor de $\overline{AG}$ do triângulo AGH, podemos calcular o valor de x comparando os triângulos semelhantes ABD e AGH, da seguinte forma:

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{x}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{2,5}{1} \Leftrightarrow x \simeq 2,5 \times 0,58 \Leftrightarrow x \simeq 1,45.$$

c) Usando a construção da seção 4.3, devemos alterar o valor do ângulo para 30° e isso dependerá do círculo trigonométrico escolhido. Se a construção do *triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1* foi construído sobre o *círculo trigonométrico 1a* deve-se, na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo até encontrar $\alpha = 30°$, mas se foi construído sobre o *círculo trigonométrico 1b* deve-se alterar o ângulo em: barra de entrada, digitar o valor do ângulo ($\alpha = 30°$), e pressionar a tecla enter. Por fim, deve-se alterar a medida de $\overline{AG}$. Para mudar a medida de $\overline{AG}$ deve-se digitar na barra de entrada $z = 2.5$ e pressionar a tecla enter. Também é possível alterar a medida de $\overline{AG}$ em: barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover e na janela de visualização, arrastar o ponto G horizontalmente até que a coordenada x do ponto G seja igual a 2,5. Veja a Figura 60.

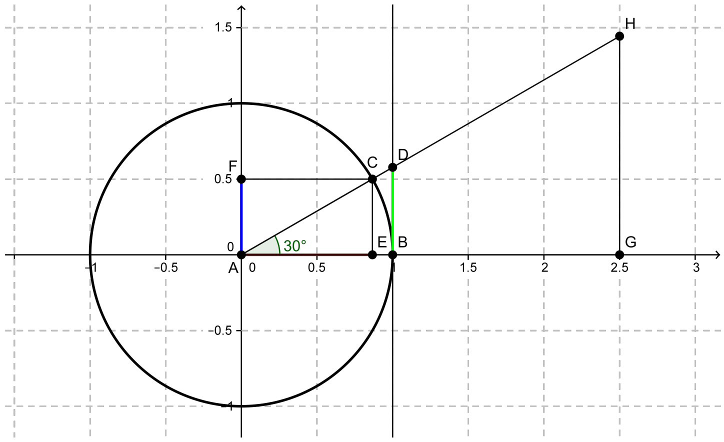

Figura 60 – Atividade 3, exercício 5, item (c) - Solução

Exercício 6

a) Comparando os triângulos AGH e ACE, por semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}.$$

Importante: Informe aos alunos que esta relação é chamada de **Relação trigonométrica seno**.

b) Comparando os triângulos AGH e ACE, por semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}.$$

Importante: Diga aos alunos que esta relação é chamada de **Relação trigonométrica cosseno**.

c) Comparando os triângulos AGH e ABD, por semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{1} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}.$$

Importante: Fale aos alunos que esta relação é chamada de **Relação trigonométrica tangente**.

d) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE tem-se:

$$\overline{CE}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Importante: Informe aos alunos que esta relação é chamada de **Relação trigonométrica fundamental entre seno e cosseno**.

e) Comparando os triângulos ABD e ACE, por semelhança de triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\text{tg}(\alpha)}{1} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Importante: Diga aos alunos que esta relação é chamada de **Relação quociente entre seno e cosseno**.

f) No triângulo ACE o ângulo $A\widehat{C}E$ é complementar ao ângulo α, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (ou seja, $A\widehat{C}E = \beta$).

Aplicando a relação cosseno do ângulo α, tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Aplicando a relação seno do ângulo β, tem-se:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Portanto, tem-se que:

$$\cos(\alpha) = \text{sen}(\beta).$$

Importante: Fale aos alunos que essa relação justifica o motivo pelo qual se usa a palavra “cosseno”, pois cosseno quer dizer o seno do ângulo complementar.

g) No triângulo ACE o ângulo $A\widehat{C}E$ é complementar ao ângulo α, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (ou seja, $A\widehat{C}E = \beta$).

Aplicando a relação seno do ângulo α, tem-se:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

Aplicando a relação cosseno do ângulo β, tem-se:

$$\cos(\beta) = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos(\beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

Portanto, tem-se que:

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\beta).$$

h) No triângulo ABD o ângulo $A\widehat{D}B$ é complementar ao ângulo α, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (ou seja, $A\widehat{D}B = \beta$).

Aplicando a relação tangente do ângulo β, tem-se:

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{cateto\ oposto}{catetos\ adjacente} \Leftrightarrow \mathrm{tg}(\beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}.$$

Portanto, tem-se que:

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

Importante: Informe aos alunos que as relações encontradas nos itens (f), (g) e (h) são chamadas de **Relações entre ângulos complementares**.

Dicas ao professor:

1. É importante para o aluno que ele tenha total entendimento das relações trigonométricas encontradas nessa seção, por esse motivo é válido que se façam exercícios com o uso do *círculo trigonométrico 1*, onde o aluno possa escolher um valor para o ângulo α no círculo trigonométrico e com os valores encontrados na janela de álgebra verificar a igualdade de cada relação trigonométrica;
2. Também é importante que o aluno faça exercícios de aplicação, em que é necessário o uso das relações trigonométricas na resolução.

5.4 Encontrando relações trigonométricas no círculo 2

Esta seção tem o propósito de mostrar como é possível encontrar algumas relações trigonométricas no círculo trigonométrico 2. Para realizar esta atividade usaremos as construções feitas na seção 4.2.

O uso do *círculo trigonométrico 2* possibilita encontrar várias relações trigonométricas usando os conhecimentos adquiridos na seção 5.3. Com o uso deste círculo trigonométrico no *software* GeoGebra não é preciso fazer um desenho manual para cada situação, e é possível conferir essas relações trigonométricas usando os valores da janela de álgebra para diferentes medidas do ângulo α.

Atividade 4. Relações trigonométricas envolvendo secante, cossecante e cotangente de um ângulo α

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem; mostrar aos alunos como encontrar algumas relações envolvendo a secante, a cossecante e a cotangente de um ângulo α e explicar o motivo pelo qual se utilizam as palavras *cossecante* e *cotangente*.

Pré-requisitos: Semelhança e congruência de triângulos; Relações trigonométricas seno, cosseno e tangente; Retas paralelas cortadas por transversal; Pontos no plano cartesiano e conhecimentos mínimos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 4 horas/aula.

Exercício 7. Considere um ângulo α agudo qualquer no *círculo trigonométrico 2* construído no *software* GeoGebra, conforme a Figura 61. Faça as atividades a seguir:

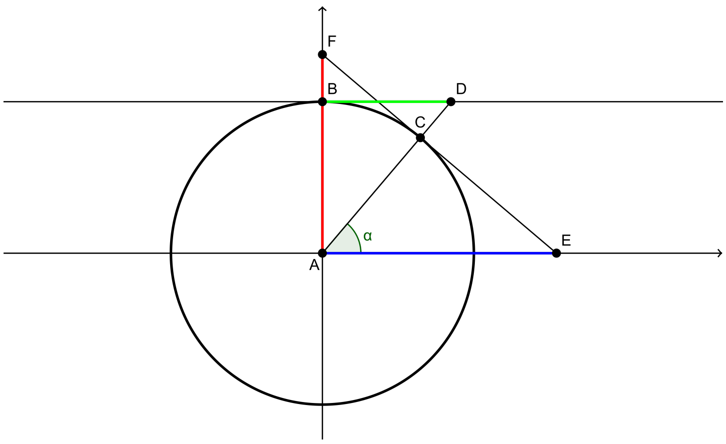

Figura 61 – Atividade 4, exercício 7

a) Aplique a relação cosseno do ângulo α no triângulo ACE e encontre uma expressão que permita relacionar a secante do ângulo α com o cosseno do ângulo α;

b) Aplique a relação seno do ângulo α no triângulo ACF e encontre uma expressão que permita relacionar a cossecante do ângulo α com o seno do ângulo α;

c) Aplique a relação tangente do ângulo α no triângulo ABD e encontre uma expressão que permita relacionar a cotangente do ângulo α com a tangente do ângulo α;

d) Seja β o ângulo complementar a α. Use a igualdade encontrada no item (b) do exercício 7 da atividade 4, em seguida use a relação encontrada no item (g) do exercício 6 da atividade 3, depois use a igualdade encontrada no item (a) do exercício 7 da atividade 4, e encontre uma relação entre os ângulos α e β;

e) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ABD aplique a relação tangente do ângulo β e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β.

Dica ao professor:

1. Lembre os alunos que na Figura 61 os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{EF}$ são perpendiculares e, consequentemente, os triângulos ACE, ACF e AEF são semelhantes e os triângulos ACF e ABD são congruentes, conforme foi visto no exercício 4 da atividade 2.

Solução da Atividade 4:

Exercício 7

a) Aplicando a relação cosseno do ângulo α no triângulo ACE, tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sec(\alpha)} \Leftrightarrow \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Importante: Informe aos alunos que a secante de um ângulo é igual ao inverso do cosseno desse mesmo ângulo e, consequentemente, $\sec(\alpha) = \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adjacente}}$.

b) Conforme vimos no exercício 4 da atividade 2, o ângulo $\alpha = E\widehat{A}D$ é congruente ao ângulo $B\widehat{D}A$, pois são ângulos alternos internos e o ângulo $A\widehat{F}C$ é congruente ao ângulo $B\widehat{D}A$ pois os triângulos ABD e ACF são congruentes. Portanto, como $A\widehat{F}C = \alpha$, aplicando a relação seno do ângulo α no triângulo ACF, tem-se:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \Leftrightarrow \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

Importante: Diga aos alunos que a cossecante de um ângulo é igual ao inverso do seno desse mesmo ângulo e, consequentemente, $\operatorname{cosec}(\alpha) = \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto oposto}}$.

c) Conforme vimos no exercício 4 da atividade 2, o ângulo $E\widehat{A}D$ é congruente ao ângulo $B\widehat{D}A$, pois são ângulos alternos internos. Portanto, como $B\widehat{D}A = \alpha$, aplicando a relação tangente do ângulo α no triângulo ABD, tem-se:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{cotg}(\alpha)} \Leftrightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

Importante: Fale aos alunos que a cotangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente desse mesmo ângulo e, consequentemente, $\operatorname{cotg}(\alpha) = \dfrac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{cateto oposto}}$.

d) Seja α e β ângulos complementares. Usando as relações propostas, tem-se:

$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sec(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\beta)} = \sec(\beta).$$

Importante: Informe aos alunos que a cossecante de um ângulo α é igual à secante do ângulo β que é complementar a α. Diga inclusive, que a palavra "cossecante" é empregada justamente por ser a secante do ângulo complementar.

e) No triângulo ABD o ângulo $D\hat{A}B$ é complementar ao ângulo α, então $D\hat{A}B = \alpha$. Portanto, aplicando a relação tangente do ângulo β no triângulo ABD, tem-se:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg}(\beta) = \frac{\text{cotg}(\alpha)}{1} \Leftrightarrow \text{tg}(\beta) = \text{cotg}(\alpha).$$

Importante: Diga aos alunos que a cotangente de um ângulo α é igual à tangente do ângulo β que é complementar a α. Diga inclusive, que a palavra "cotangente" é empregada justamente por ser a tangente do ângulo complementar.

Dica ao professor:

1. É importante para o aluno que ele tenha total entendimento das relações trigonométricas encontradas nessa seção, por esse motivo é válido que se façam exercícios usando o *círculo trigonométrico 2*, onde o aluno possa testar essas relações trigonométricas usando os valores encontrados na janela de álgebra do *software* Geogebra.

5.5 Gráfico das funções trigonométricas

Esta seção, embora não tenha como foco o estudo de funções, tem o propósito de mostrar como é possível usar o *software* GeoGebra e a construção feita na seção 4.4 para visualizar os gráficos das funções trigonométricas.

O uso do *Gráfico das funções trigonométricas*, construído no *software* GeoGebra, possibilita visualizar os valores que seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um ângulo assumem para cada ângulo pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$. Com a construção dos gráficos das funções trigonométricas no *software* GeoGebra é possível complementar os estudos de funções trigonométricas, pois tem a precisão necessária para não permitir erros de entendimento que podem acontecer com a imprecisão nas construções com régua e compasso.

Atividade 5. Construção dos gráficos das funções trigonométricas

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem e mostrar aos alunos como construir os gráficos das funções trigonométricas.

Pré-requisitos: Ideia de funções; Unidades de medida do ângulo e conversão de unidades e conhecimentos mínimos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 4 horas/aula.

Exercício 8. Fazendo uso da construção feita na seção 4.4, e sendo x o valor do ângulo α, realize as atividades a seguir:

a) Construa o gráfico da função $y = \text{sen}(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

b) Observando o gráfico feito no item (a) escreva os valores que $\text{sen}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\text{sen}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

c) Construa o gráfico da função $y = \cos(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

d) Observando o gráfico feito no item (c) escreva os valores que $\cos(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\cos(\alpha)$ assume em cada quadrante;

e) Construa o gráfico da função $y = \text{tg}(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

f) Observando o gráfico feito no item (e) escreva os valores que $\text{tg}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\text{tg}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

g) Construa o gráfico da função $y = \sec(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

h) Observando o gráfico feito no item (g) escreva os valores que $\sec(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\sec(\alpha)$ assume em cada quadrante;

i) Construa o gráfico da função $y = \text{cosec}(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

j) Observando o gráfico feito no item (i) escreva os valores que $\text{cosec}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\text{cosec}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

k) Construa o gráfico da função $y = \text{cotg}(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

l) Observando o gráfico feito no item (k) escreva os valores que $\text{cotg}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\text{cotg}(\alpha)$ assume em cada quadrante.

Solução da Atividade 5:

Observações:

1. Usando a construção feita na seção 4.4, em cada um dos gráficos exigidos no exercício 8 é preciso marcar a função que se deseja construir, e desmarcar a função que não se deseja construir. Para marcar/desmarcar a função basta, na janela de álgebra, clicar no ponto a esquerda das palavras seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente;

2. Em todas as construções dos gráficos é possível fazer a construção através de uma animação em: janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse no ponto B, depois clicar na opção animar. Dessa forma a construção do gráfico se faz automaticamente. Pode-se repetir o processo se desejar parar animação.

Exercício 8

a) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função seno e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 62:

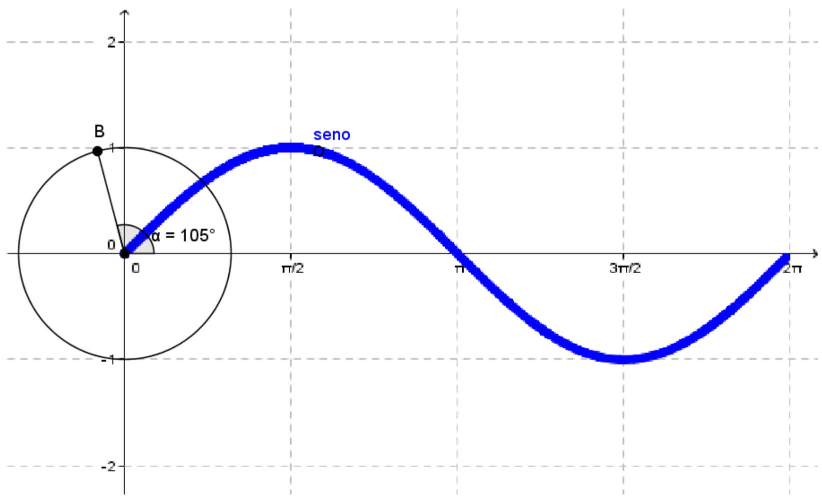

Figura 62 – Gráfico da função seno

b) Usando o gráfico do item (a), encontram-se os seguintes valores para sen(α), conforme a Tabela 5:

Tabela 5 – Valores de sen(α)

α	sen(α)
$0°$	0
1º quadrante/$\alpha \in (0°, 90°)$	sen$(\alpha) \in (0, 1)$
$90°$	1
2º quadrante/$\alpha \in (90°, 180°)$	sen$(\alpha) \in (0, 1)$
$180°$	0
3º quadrante/$\alpha \in (180°, 270°)$	sen$(\alpha) \in (-1, 0)$
$270°$	-1
4º quadrante/$\alpha \in (270°, 360°)$	sen$(\alpha) \in (-1, 0)$

c) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função cosseno e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 63:

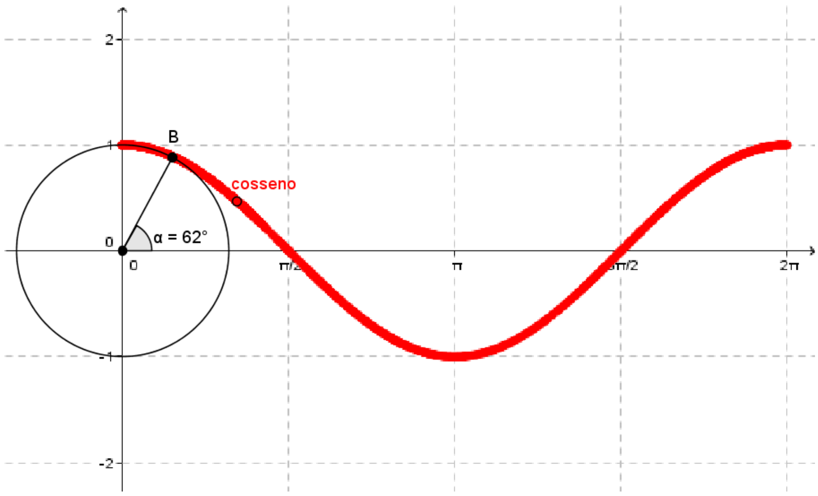

Figura 63 – Gráfico da função cosseno

d) Usando o gráfico do item (c), encontram-se os seguintes valores para $\cos(\alpha)$, conforme a Tabela 6:

Tabela 6 – Valores de $\cos(\alpha)$

α	$\cos(\alpha)$
$0°$	1
1^o quadrante/$\alpha \in (0°, 90°)$	$\cos(\alpha) \in (0, 1)$
$90°$	0
2^o quadrante/$\alpha \in (90°, 180°)$	$\cos(\alpha) \in (-1, 0)$
$180°$	-1
3^o quadrante/$\alpha \in (180°, 270°)$	$\cos(\alpha) \in (-1, 0)$
$270°$	0
4^o quadrante/$\alpha \in (270°, 360°)$	$\cos(\alpha) \in (0, 1)$

e) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função tangente e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 64:

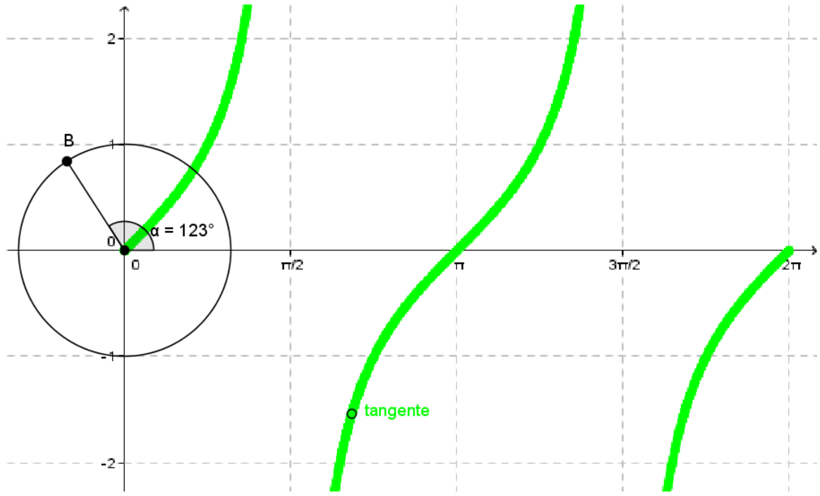

Figura 64 – Gráfico da função tangente

f) Usando o gráfico do item (e), encontram-se os seguintes valores para tg(α), conforme a Tabela 7:

Tabela 7 – Valores de tg(α)

α	tg(α)
$0°$	0
1º quadrante/$\alpha \in (0°, 90°)$	tg(α) $\in (0, +\infty)$
$90°$	$\nexists$
2º quadrante/$\alpha \in (90°, 180°)$	tg(α) $\in (-\infty, 0)$
$180°$	0
3º quadrante/$\alpha \in (180°, 270°)$	tg(α) $\in (0, +\infty)$
$270°$	$\nexists$
4º quadrante/$\alpha \in (270°, 360°)$	tg(α) $\in (-\infty, 0)$

g) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função secante e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 65:

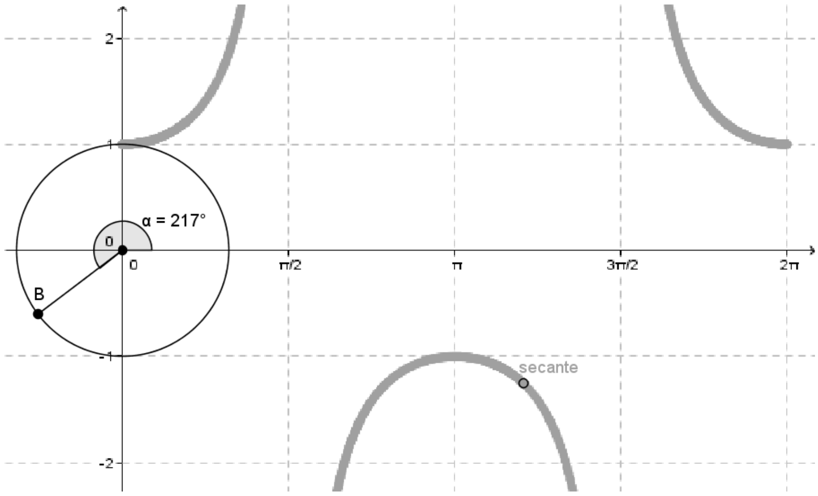

Figura 65 – Gráfico da função secante

h) Usando o gráfico do item (g), encontram-se os seguintes valores para sec(α), conforme a Tabela 8:

Tabela 8 – Valores de sec(α)

α	sec(α)
0 rad	1
1º quadrante	$\sec(\alpha) \in (1, +\infty)$
$\frac{\pi}{2}$ rad	$\nexists$
2º quadrante	$\sec(\alpha) \in (-\infty, -1)$
π rad	-1
3º quadrante	$\sec(\alpha) \in (-\infty, -1)$
$\frac{3\pi}{2}$ rad	$\nexists$
4º quadrante	$\sec(\alpha) \in (1, +\infty)$

i) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função cossecante e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clique no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 66:

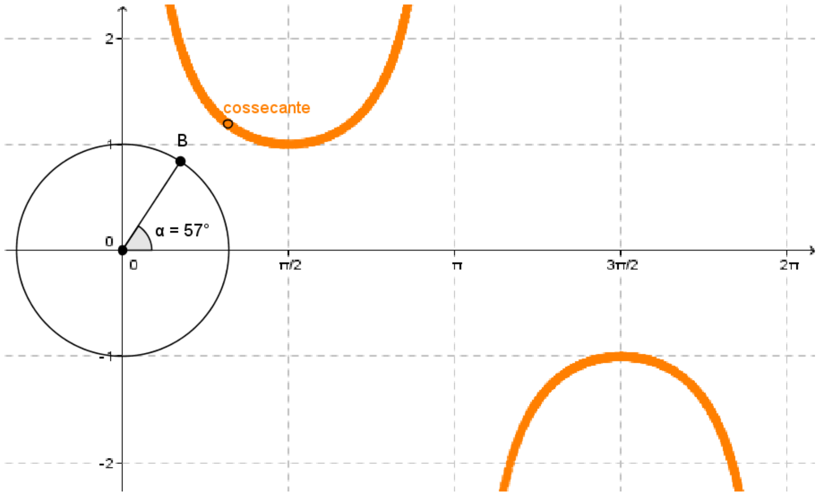

Figura 66 – Gráfico da função cossecante

j) Usando o gráfico do item (i), encontram-se os seguintes valores para cosec(α), conforme a Tabela 9:

Tabela 9 – Valores de cosec(α)

α	cosec(α)
0 rad	$\nexists$
1º quadrante	$\text{cosec}(\alpha) \in (1, +\infty)$
$\frac{\pi}{2}$ rad	1
2º quadrante	$\text{cosec}(\alpha) \in (1, +\infty)$
π rad	$\nexists$
3º quadrante	$\text{cosec}(\alpha) \in (-\infty, -1)$
$\frac{3\pi}{2}$ rad	-1
4º quadrante	$\text{cosec}(\alpha) \in (-\infty, -1)$

k) Usando a construção feita na seção 4.4, marcar a função cotangente e desmarcar as outras funções, conforme a observação 1, em seguida: na barra de recursos, clicar no botão 1, depois clicar na opção mover. Na janela de visualização arrastar o ponto C sobre o círculo traçando o gráfico manualmente. É possível fazer a construção automaticamente conforme a observação 2. Veja a Figura 67:

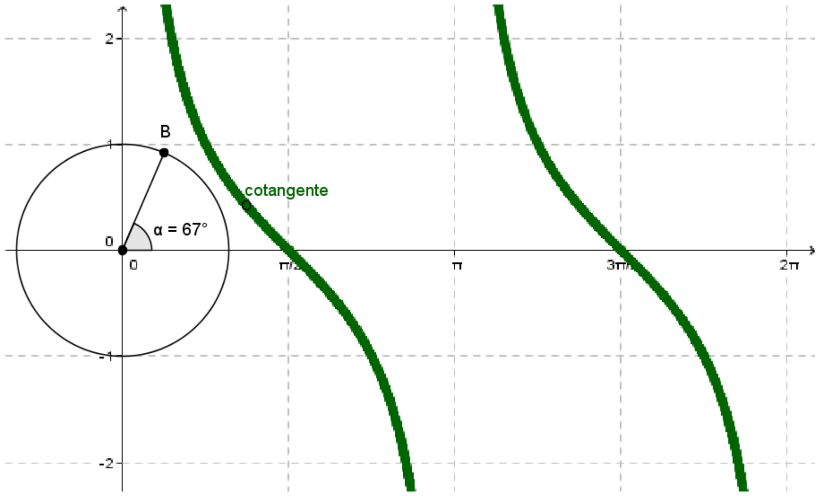

Figura 67 – Gráfico da função cotangente

l) Usando o gráfico do item (k), encontram-se os seguintes valores para cotg(α), conforme a Tabela 10:

Tabela 10 – Valores de cotg(α)

α	cotg(α)
0 rad	$\nexists$
1º quadrante	cotg(α) $\in (0, +\infty)$
$\frac{\pi}{2}$ rad	0
2º quadrante	cotg(α) $\in (-\infty, 0)$
π rad	$\nexists$
3º quadrante	cotg(α) $\in (0, +\infty)$
$\frac{3\pi}{2}$ rad	0
4º quadrante	cotg(α) $\in (-\infty, 0)$

5.6 Trigonometria em um triângulo qualquer

Esta seção tem o propósito de trabalhar trigonometria não somente nos triângulos retângulos, mas sim em um triângulo qualquer.

Com o *software* GeoGebra é possível construir um triângulo qualquer e visualizar as medidas dos lados e da altura na janela de álgebra possibilitando conferir as relações trigonometricas encontradas. Embora seja possível fazer estas construções com regua e compasso, com estas construções tem-se mais precisão e não existe a necessidade de fazer um desenho manualmente para cada situação.

Atividade 6. Encontrando relações trigonométricas em um triângulo qualquer

Objetivos: Estimular os alunos ao uso de recursos tecnológicos na aprendizagem e mostrar aos alunos como encontrar a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Pré-requisitos: Relações trigonométricas em triângulos retângulos; Teorema de Pitágoras e conhecimentos sobre utilização do *software* GeoGebra.

Material necessário: Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, além do material escolar usual.

Tempo necessário: 4 horas/aula.

Exercício 9. No *software* GeoGebra construa um triângulo qualquer e trace o segmento referente à altura de um dos lados, conforme as instruções a seguir:

1. Não exibir os eixos x e y da janela de visualização em: janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, em seguida clicar no botão eixos para retirar os eixos x e y;

2. Criar os vértices do triângulo em: barra de recursos, clicar no botão 2, em seguida clicar na opção ponto. Na janela de visualização clicar em três pontos diferentes, criando assim os pontos A, B, e C, vértices do triângulo;

3. Traçar os lados do triângulo em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção segmento. Na janela de visualização: clicar no ponto B e em seguida clicar no ponto C, criando o segmento $a = \overline{BC}$ que é o lado oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$; clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto C, criando o segmento $b = \overline{AC}$ que é o lado oposto ao ângulo $C\widehat{B}A$; e clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto B, criando o segmento $c = \overline{AB}$ que é o lado oposto ao ângulo $A\widehat{C}B$;

4. Criar a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção reta. Na janela de visualização: clicar no ponto B e em seguida clicar no ponto C, criando a reta $d = \overline{BC}$;

5. Criar a reta perpendicular so segmento $\overline{BC}$ que passa pelo vértice A em: barra de recursos, clicar no botão 4, em seguida clicar na opção reta perpendicular. Na janela de visualização: clicar no ponto A e em seguida clicar na reta $d = \overline{BC}$, criando a reta e;

6. Criar o ponto de interseção entre as retas d e e em: barra de recursos, clicar no botão 2, em seguida clicar na opção interseção de dois objetos. Na janela de visualização: clicar na reta d e em seguida clicar na reta e, criando o ponto D;

7. Traçar os segmentos de reta $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção segmento. Na janela de visualização: clicar no ponto

B e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $f = \overline{BD}$; clicar no ponto C e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $g = \overline{CD}$; e clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $h = \overline{AD}$ que é a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC;

8. Desmarcar as retas d e e em: janela de álgebra, clicar no ponto à esquerda da reta d, e clicar no ponto à esquerda da reta e, ocultando essas retas na janela de visualização;

9. Criar os ângulos $B\widehat{A}C$, $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$ e $C\widehat{D}A$ em: barra de recursos, clicar no botão 8, em seguida clicar na opção ângulo. Na janela de visualização: clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e em seguida clicar no ponto C, criando o ângulo $\alpha = B\widehat{A}C$; clicar no ponto C, depois clicar no ponto B, e em seguida clicar no ponto A, criando o ângulo $\beta = C\widehat{B}A$; clicar no ponto A, depois clicar no ponto C, e em seguida clicar no ponto B, criando o ângulo $\gamma = A\widehat{C}B$; e por fim, clicar no ponto C, depois clicar no ponto D, e em seguida clicar no ponto A, criando o ângulo $\delta = C\widehat{D}A = 90°$.

Exercício 10. Usando a figura encontrada no exercício 9, faça as seguintes atividades:

a) Aplique a relação seno do ângulo γ no triângulo ACD e encontre uma equação equivalente com o valor de h isolado no primeiro membro da equação;

b) Aplique a relação seno do ângulo β no triângulo ABD e encontre uma equação equivalente com o valor de h isolado no primeiro membro da equação;

c) Pelos itens (a) e (b), pode-se perceber que existem duas formas de escrever o valor da altura h. Pode-se perceber também que o segundo membro da equação encontrada no item (a), e o segundo membro da equação encontrada no item (b) são iguais, portanto escreva a equação que representa essa igualdade;

d) Usando a equação encontrada no item (c), divida ambos os lados da equação por $\text{sen}(\beta).\text{sen}(\gamma)$ e simplifique a equação;

e) Escreva a equação que teria sido encontrada se os itens (a), (b), (c) e (d) tivessem sido feitos com a altura relativa ao lado c do triângulo ABC;

f) Observando as equações encontradas nos itens (d) e (e), percebe-se que temos a igualdade entre três razões, escreva essa igualdade.

Dica ao professor:

1. É importante que o professor auxilie os alunos no exercício 10, ajudando na interpretação de cada item.

Exercício 11. Usando a figura encontrada no exercício 9, faça as seguintes atividades:

a) Aplique a relação cosseno do ângulo β no triângulo ABD e encontre uma equação equivalente com o valor de f isolado no primeiro membro da equação;

b) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD usando os valores c, f e h e encontre uma equação equivalente com o valor h^2 isolado no primeiro membro da equação;

c) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD usando os valores b, h e $a - f$ (pois $a = f + g$) e encontre uma equação equivalente com o valor b^2 isolado no primeiro membro da equação e simplifique o segundo membro da equação;

d) Use o valor de h^2, encontrado no item (b), substitua na equação encontrada no item (c), e simplifique o segundo membro da equação;

e) Use o valor de f, encontrado no item (a), substitua na equação encontrada no item (d), e simplifique o segundo membro da equação;

f) Escreva as equações que teriam sido encontradas se os itens (a), (b), (c), (d) e (e) tivessem sido feitos com as altura relativas ao lado b e com a altura relativa ao lado c do triângulo ABC.

Dica ao professor:

1. É importante que o professor auxilie os alunos no exercício 11, ajudando na interpretação de cada item.

Solução da Atividade 6:

Exercício 9

Seguindo as instruções propostas, tem-se uma figura com essas características:

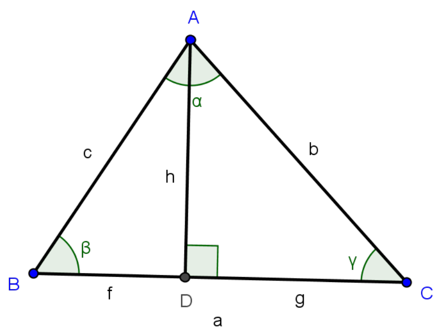

Figura 68 – Atividade 6, exercício 9 - Solução

Exercício 10

a) Aplicando a relação seno do ângulo γ no triângulo ACD, tem-se:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \cdot \text{sen}(\gamma).$$

b) Aplicando a relação seno do ângulo β no triângulo ABD, tem-se:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

c) O segundo membro da equação encontrada no item (a) é igual ao segundo membro da equação encontrada no item (b), portanto tem-se:

$$b \cdot \text{sen}(\gamma) = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

d) Dividindo por $\text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)$ ambos os membros da equação encontrada no item (c), tem-se:

$$\frac{b \cdot \text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)} = \frac{c \cdot \text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)} \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}.$$

e) A relação do item (d) foi encontrada quando se traçou a altura relativa ao lado a, se repetirmos os itens (a), (b), (c) e (d) após traçar a altura relativa ao lado c, teríamos encontrado a relação:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)}.$$

f) Observando as equações encontradas nos itens (d) e (e), percebe-se que temos a seguinte igualdade entre três razões:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}.$$

Importante: Informe aos alunos que a relação encontrada no item (f) do exercício 10 tem o nome de **Lei dos Senos**.

Exercício 11

a) Aplicando a relação cosseno do ângulo β no triângulo ABD, tem-se:

$$\cos(\beta) = \frac{f}{c} \Leftrightarrow f = c \cdot \cos(\beta).$$

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, tem-se:

$$c^2 = h^2 + f^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - f^2.$$

c) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD, tem-se:

$$b^2 = h^2 + g^2 \Leftrightarrow b^2 = h^2 + (a - f)^2 \Leftrightarrow b^2 = h^2 + a^2 - 2af + f^2.$$

d) Usando o valor de h^2, encontrado no item (b), e substituindo na equação do item (c), tem-se:

$$b^2 = h^2 + a^2 - 2af + f^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - f^2 + a^2 - 2af + f^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2af.$$

e) Usando o valor de f, encontrado no item (a), e substituindo na equação do item (d), tem-se:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2af \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta).$$

f) A relação do item (e) foi encontrada quando se traçou a altura relativa ao lado a, se repetirmos os itens (a), (b), (c), (d) e (e) após traçar a altura relativa ao lado b e também após traçar a altura relativa ao lado c, teríamos encontrado as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Importante: Informe aos alunos que as relações encontradas nos itens (e) e (f) do exercício 11 tem o nome de **Lei dos Cossenos**.

Dicas ao professor:

1. É aconselhável que se façam exercícios usando os valores encontrados na janela de álgebra da Figura 68, construída no exercício 9, para testar a lei dos senos e a lei dos cossenos.

2. Peça para os alunos usarem o *círculo trigonométrico 1* para encontrar os valores de sen(α), sen(β), sen(γ), cos(α), cos(β) e cos(γ). É importante dizer aos alunos que os valores encontrados na janela de álgebra podem conter erros de arredondamento ou de truncamento;

3. Peça para os alunos que modifiquem o triângulo encontrado na Figura 68 e testem a lei dos senos e a lei dos cossenos em mais de uma possibilidade, inclusive com triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo.

6 Possíveis continuações ou desdobramentos

Uma boa continuação para esse trabalho é sua aplicação, não somente em uma turma mas em várias, dessa forma é possível encontrar os pontos positivos e negativos das atividades e, consequentemente, descobrir o que pode ser melhorado.

Outra possível continuação é a elaboração de atividades de trigonometria, com o uso do *software* GeoGebra, visando alunos do Ensino Médio.

Também é possível dar sequencia ao trabalho usando o *software* GeoGebra para desenvolvimento de outras atividades que não se restringem apenas ao estudo da trigonometria.

7 Considerações finais

Ultimamente a sociedade vem passando por grandes problemas. A falta de estrutura familiar, o acesso a conteúdos impróprios para a faixa etária das crianças, falta de orientação, limites e afeto a que muitas crianças e adolescentes são submetidos podem gerar grandes problemas na sua formação intelectual das crianças e adolescentes e também gera problemas em auto-estima e falta de perspectiva de vida. Soma-se a isso o fato de normalmente as escolas manterem métodos tradicionais de ensino em meio a uma sociedade em constante transformação. Isto faz com que a escola não seja atrativa aos olhos de muitos alunos, gerando desestímulos, reprovação e evasão escolar.

Tornar a escola mais atrativa e estimulante é um grande desafio aos profissionais da educação atualmente. Nesse contexto, os professores de Matemática tem o grande desafio de tornar uma matéria considerada difícil, pela grande maioria dos alunos, em algo acessível, estimulante, capaz de gerar interesse e com um aprendizado satisfatório.

Tentando colaborar com a superação desse grande desafio, através desse trabalho disponibilizou-se aos professores de Ensino Fundamental, um pouco da história da trigonometria, algumas construções no *software* GeoGebra, e uma proposta de atividades usando essas construções com intuito de levar os alunos à conclusão das principais relações trigonométricas.

No decorrer deste trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica em 5, dos 10 livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, colocados a disposição dos professores da rede pública de ensino pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura) através do PNLD 2014 (Programa Nacional do Livro Didático). Nesta pesquisa ficou constatado que, dos livros consultados, nenhum deles menciona a existência do círculo trigonométrico, embora um deles apresente um instrumento para encontrar os valores de seno e cosseno de um ângulo agudo, que é uma reprodução do primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Também ficou constatado que, embora um desses livros apresente como usar o programa *Microsoft Mathematics*, livros que usam recursos tecnológicos são exceções. Além disso, esses livros definem seno, cosseno e tangente apenas para ângulos agudos e nenhum desses livros faz referência à secante, cossecante, e cotangente, quase nada se fala a respeito de outras relações trigonométricas e se detém aos estudos de trigonometria no triângulo retângulo.

Foram apresentadas seis atividades: a primeira propõe um exercício com o círculo trigonométrico de Hiparco; a segunda apresenta três exercícios usando o círculo trigonométrico 1; a terceira traz dois exercícios onde trabalha-se com o cículo trigonométrico 1, e o triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1, para conclusão de algumas relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo; a quarta apresenta um exercício com o uso do círculo trigonométrico 2 para a conclusão das principais relações trigonometricas envolvendo secante, cossecante e cotangente de um ângulo; a quinta trabalha com os gráficos das funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, e cotangente e a sexta se dedica aos estudos da trigonometria em um triângulo qualquer para a obtenção das leis de seno e leis de cosseno. Em todas as atividades são disponibilizados os objetivos, os pré-requisitos, o material e o tempo necessários para a resolução das mesmas em sala de aula.

Os exercícios de cada atividade estão todos resolvidos, onde se usou as construções no *software* GeoGebra. A maioria das atividades servem de pré-requisito para a atividade subsequente, portanto torna-se interessante seguir a ordem, mas fica a critério do professor decidir a forma de usar que mais lhe convém, e se adapta à turma. O professor também pode criar seus próprios exercícios com as construções do *software* GeoGebra e uma das possibilidades é testar as relações trigonométricas usando os valores encontrados na janela de álgebra. Além disso, nos anexos foram disponibilizadas as atividades sem as resoluções, caso o professor julgue necessárias suas aplicações e queira imprimir.

A utilização do *software* GeoGebra e de outras tecnologias no estudo da trigonometria no Ensino Fundamental pode ser um excelente recurso para auxiliar os professores nas suas aulas, tornando-as mais atrativas e significativas aos olhos dos alunos. Se o professor tiver a sensibilidade de entender as dificuldades de cada turma e elaborar aulas específicas de acordo com essas dificuldades usando esses recursos tecnológicos, aumenta-se a probabilidade dos alunos se sentirem motivados na aprendizagem da Matemática e, consequentemente, a probabilidade dos alunos tomarem gosto pela disciplina pode aumentar consideravelmente.

Referências

BENTLEY, P. J. *O Livro dos Números: Uma História Ilustrada da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 22.

BIANCHINI, E. *Matemática, 9º ano*. São Paulo: Moderna, 2012. Citado na página 25.

BICUDO, P. I. *Geometria Grega*. 2010. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=xTKu7FgaMts>. Acesso em: 17.01.2014. Citado na página 19.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática: Teoria e Contexto, 9º ano*. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado na página 25.

COSTA, M. V. *A escola tem futuro?* Rio de Janeiro: Lamparina, 2007. Citado na página 24.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações (Manual do Professor)*. São Paulo: Ática, 1999. Citado na página 15.

FILHO, P. C. F. de M. *Bhaskara I e Bhaskara II*. 2014. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Bhaskara.htm>. Acesso em: 26.03.2014. Citado na página 23.

FILHO, P. C. F. de M. *Brahmagupta*. 2014. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Brahmagu.html>. Acesso em: 22.03.2014. Citado na página 22.

FILHO, P. C. F. de M. *Menelau de Alexandria*. 2014. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/MenelauA.html>. Acesso em: 03.02.2014. Citado na página 20.

KENNEDY, E. S. *Trigonometria: História da Matemática Para Uso em Sala de Aula*. São Paulo: Atual, 1992. Citado na página 18.

LEONARDO, F. M. de. *Projeto Araribá Matemática, 9º ano*. São Paulo: Moderna, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

LIBÂNEO, J. C. *Adeus professor, adeus professora? Novas exigências educacionais e profissão docente*. São Paulo: Cortez, 2001. Citado na página 24.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)*. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 23.04.2014. Citado na página 28.

ONAGA, D. S.; MORI, I. *Matemática: Ideias e Desafios, 9º ano*. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

SANTIAGO, E. *Cláudio Ptolomeu*. 2012. Disponível em: <http://www.infoescola.com/biografias/claudio-ptolomeu/>. Acesso em: 07.02.2014. Citado na página 21.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. *Matemática, 8ª série*. São Paulo: Moderna, 2001. Citado na página 19.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Vontade de Saber Matemática, 9º ano*. São Paulo: FTD, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 27.

USP. *História da Trigonometria*. 2000. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/>. Acesso em: 03.01.2014. Citado 6 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21, 22 e 23.

VASCONCELOS, G. *Almagesto*. 2014. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Geraldo/almagesto.htm>. Acesso em: 10.02.2014. Citado na página 21.

VASCONCELOS, G. *Cláudio Ptolomeu*. 2014. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Geraldo/ptolomeu.htm>. Acesso em: 10.02.2014. Citado na página 21.

Anexos

ANEXO A – Atividade 1

Exercício 1

Leitura: Há aproximadamente 500 a.C. os gregos, especialmente Pitágoras de Samos (569 a 475 a.C., aproximadamente), já tinham conhecimento da relação entre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, inclusive com demonstração, conhecida como Teorema de Pitágoras, em que era possível calcular a medida de um dos lados de um triângulo retângulo conhecidas as medidas dos outros dois lados. No entanto, nos estudos de astronomia do grego Hiparco de Nicéia (190 a 125 a.C.), considerado o "Pai da trigonometria", surgiu a necessidade de saber como calcular um dos lados do triângulo retângulo sabendo-se apenas a medida de um dos catetos e um dos ângulos agudos. Hiparco, fazendo uso dos conhecimentos em semelhança de triângulos propostos por Tales de Mileto (624 a 548 a.C.), criou o que podemos chamar de "primeiro círculo trigonométrico", com a finalidade de encontrar triângulos semelhantes e compará-los.

Sabendo-se dessa importância, faça as atividades a seguir:

a) No círculo de Hiparco, construído no *software* GeoGebra, escolha um valor qualquer para a medida do raio, e um valor qualquer para a medida do ângulo α (Escolha entre o círculos de Hiparco 1 e 2);

b) No círculo criado no item (a), justifique que os triângulos ACD e $AC'D$ são congruentes, e consequentemente, são triângulos retângulos:

c) Encontre um triângulo, no círculo de Hiparco do *software* GeoGebra, que seja semelhante ao triângulo EFG, da Figura 69, e calcule o valor de x por semelhança de triângulos, usando o valor da medida do segmento $\overline{CD}$ (correspondente à *meia corda* $\overline{CC'}$) exposto na janela de álgebra.

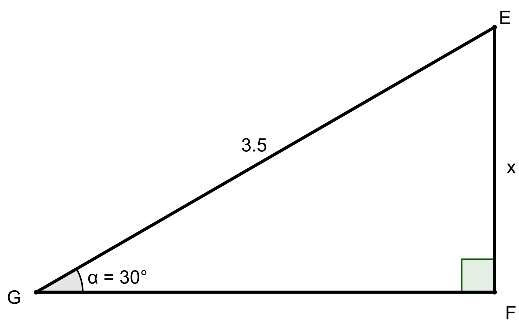

Figura 69 – Triângulo EFG

d) Repita o que foi feito no item (c), porém utilizando raio unitário no círculo de Hiparco.

ANEXO B – Atividade 2

Exercício 2

De posse do *círculo trigonométrico 1*, construído no *software* GeoGebra, faça as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 1a*, faça o ângulo α variar automaticamente através de uma animação. Para fazer esta animação deve-se clicar com o botão direito do mouse no ponto C, da janela de álgebra, ou da janela de visualização, e abrirá uma janela, em seguida deve-se clicar na opção animar;

b) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que seno, cosseno e tangente do ângulo α assumem quando: $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$;

c) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que seno, cosseno e tangente do ângulo α assumem em cada quadrante: $0° < \alpha < 90°$ (1º quadrante), $90° < \alpha < 180°$ (2º quadrante), $180° < \alpha < 270°$ (3º quadrante) e $270° < \alpha < 360°$ (4º quadrante);

d) Compare os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos C e D.

Exercício 3

De posse do *círculo trigonométrico 2*, construído no *software* GeoGebra, faça as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 2a*, faça o ângulo α variar automaticamente através de uma animação. Para fazer esta animação deve-se clicar com o botão direito do mouse no ponto C, da janela de álgebra, ou da janela de visualização, e abrirá uma janela, em seguida deve-se clicar na opção animar.

b) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que secante, cossecante e cotangente do ângulo α assumem quando: $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ e $\alpha = 270°$;

c) Observando a janela de álgebra, escreva os valores que secante, cossecante e cotangente do ângulo α assumem em cada quadrante: $0° < \alpha < 90°$ (1º quadrante), $90° < \alpha < 180°$ (2º quadrante), $180° < \alpha < 270°$ (3º quadrante) e $270° < \alpha < 360°$ (4º quadrante);

d) Compare os valores de secante, cossecante e cotangente do ângulo α com os valores das coordenadas dos pontos D, E e F.

Exercício 4

De posse do *círculo trigonométrico 2*, construído no *software* GeoGebra, escolha um valor para α entre 0° e 90°. Em seguida, demonstre que os triângulos ACE, ACF, ABD e AEF são semelhantes e demonstre que os triângulos ACF e ABD também são congruentes. Observação: O segmento $\overline{AD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{EF}$.

ANEXO C – Atividade 3

Exercício 5

Realize as atividades a seguir:

a) No *círculo trigonométrico 1* construído no *software* GeoGebra, encontre um triângulo semelhante ao triângulo da Figura 70;

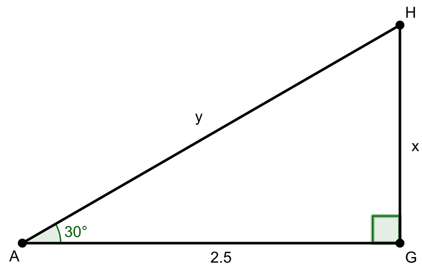

Figura 70 – Triângulo AGH

b) Calcule os valores de x e y da Figura 70 comparando este triângulo aos triângulos semelhantes encontrados no item (a) e usando os valores das medidas dos lados expostos na janela de álgebra;

c) Construa o triângulo AGH, da Figura 70, sobreposto ao *círculo trigonométrico 1* no *software* GeoGebra.

Exercício 6

Considere um ângulo α agudo qualquer no *triângulo sobreposto ao círculo trigonométrico 1* construído no *software* GeoGebra, conforme a Figura 71. Faça as atividades a seguir:

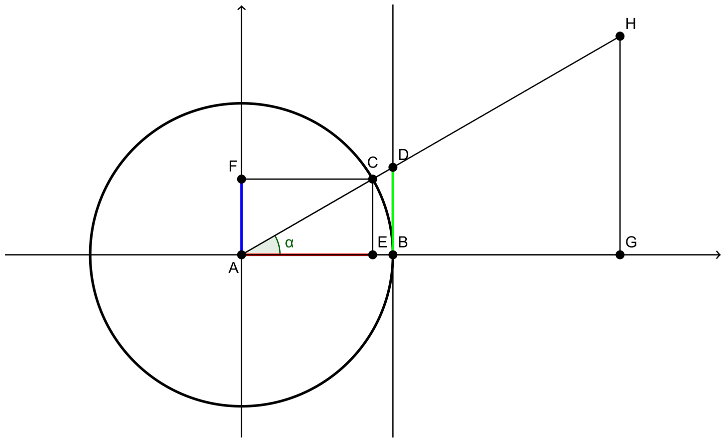

Figura 71 – Triângulo AGH sobreposto ao círculo trigonométrico 1

Observação: os itens (a), (b) e (c) podem ser feitos seguindo a ideia do que foi feito no exercício 5, item (b), da atividade 3.

a) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonomé-trigo ACE, determine uma relação que permita generalizar os valores de sen(α);

b) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonomé-trigo ACE, estabeleça uma relação que permita generalizar os valores de cos(α);

c) Comparando o triângulo qualquer AGH com o triângulo do círculo trigonomé-trigo ABD, encontre uma relação que permita generalizar os valores de tg(α);

d) Verifique o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE;

e) Compare os triângulos ADB e ACE e encontre uma relação entre sen(α) e cos(α) que seja igual à tg(α). Dica: use apenas as medidas dos catetos opostos e dos catetos adjacentes ao ângulo α;

f) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ACE aplique a relação cosseno (encontrada no item (b)) do ângulo α e aplique a relação seno (encontrada no item (a)) do ângulo $E\widehat{C}A$, compare o que foi encontrado nas duas relações e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β;

g) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ACE aplique a relação seno (encontrada no item (a)) do ângulo α e aplique a relação cosseno (encontrada no item (b)) do ângulo $E\widehat{C}A$, compare o que foi encontrado nas duas relações e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β;

h) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ABD aplique a relação tangente (encontrada no item (c)) do $A\widehat{D}B$ e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β.

ANEXO D – Atividade 4

Exercício 7

Considere um ângulo α agudo qualquer no *círculo trigonométrico 2* construído no *software* GeoGebra, conforme a Figura 72. Faça as atividades a seguir:

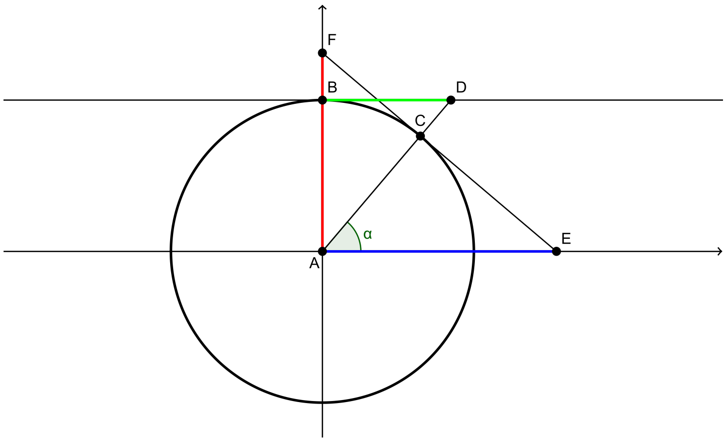

Figura 72 – Círculo trigonométrico 2

a) Aplique a relação cosseno do ângulo α no triângulo ACE e encontre uma expressão que permita relacionar a secante do ângulo α com o cosseno do ângulo α;

b) Aplique a relação seno do ângulo α no triângulo ACF e encontre uma expressão que permita relacionar a cossecante do ângulo α com o seno do ângulo α;

c) Aplique a relação tangente do ângulo α no triângulo ABD e encontre uma expressão que permita relacionar a cotangente do ângulo α com a tangente do ângulo α;

d) Seja β o ângulo complementar a α. Use a igualdade encontrada no item (b) do exercício 7 da atividade 4, em seguida use a igualdade encontrada no item (g) do exercício 6 da atividade 3, depois use a igualdade encontrada no item (a) do exercício 7 da atividade 4, e encontre uma relação entre os ângulos α e β;

e) Seja β o ângulo complementar a α. No triângulo ABD aplique a relação tangente do ângulo β e encontre uma relação trigonométrica entre os ângulos α e β.

ANEXO E – Atividade 5

Exercício 8

Fazendo uso da construção feita na seção 4.4, e sendo x o valor do ângulo α, realize as atividades a seguir:

a) Construa o gráfico da função $y = \text{sen}(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

b) Observando o gráfico feito no item (a) escreva os valores que $\text{sen}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\text{sen}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

c) Construa o gráfico da função $y = \cos(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

d) Observando o gráfico feito no item (c) escreva os valores que $\cos(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\cos(\alpha)$ assume em cada quadrante;

e) Construa o gráfico da função $y = \text{tg}(x)$ para x pertencente ao intervalo $[0°, 360°)$;

f) Observando o gráfico feito no item (e) escreva os valores que $\text{tg}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$, e os valores que $\text{tg}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

g) Construa o gráfico da função $y = \sec(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

h) Observando o gráfico feito no item (g) escreva os valores que $\sec(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\sec(\alpha)$ assume em cada quadrante;

i) Construa o gráfico da função $y = \text{cosec}(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

j) Observando o gráfico feito no item (i) escreva os valores que $\text{cosec}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\text{cosec}(\alpha)$ assume em cada quadrante;

k) Construa o gráfico da função $y = \text{cotg}(x)$ para x pertencente ao intervalo [0 rad, 2π rad);

l) Observando o gráfico feito no item (k) escreva os valores que $\text{cotg}(\alpha)$ assume para $\alpha = 0$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, e os valores que $\text{cotg}(\alpha)$ assume em cada quadrante.

ANEXO F – Atividade 6

Exercício 9

No *software* GeoGebra construa um triângulo qualquer e trace o segmento referente à altura de um dos lados, conforme as instruções a seguir:

1. Não exibir os eixos x e y da janela de visualização em: janela de visualização, clicar com o botão direito do mouse e abrirá uma janela, em seguida clicar no botão eixos para retirar os eixos x e y;

2. Criar os vértices do triângulo em: barra de recursos, clicar no botão 2, em seguida clicar na opção ponto. Na janela de visualização clicar em três pontos diferentes, criando assim os pontos A, B, e C, vértices do triângulo;

3. Traçar os lados do triângulo em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção segmento. Na janela de visualização: clicar no ponto B e em seguida clicar no ponto C, criando o segmento $a = \overline{BC}$ que é o lado oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$; clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto C, criando o segmento $b = \overline{AC}$ que é o lado oposto ao ângulo $C\widehat{B}A$; e clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto B, criando o segmento $c = \overline{AB}$ que é o lado oposto ao ângulo $A\widehat{C}B$;

4. Criar a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção reta. Na janela de visualização: clicar no ponto B e em seguida clicar no ponto C, criando a reta $d = \overline{BC}$;

5. Criar a reta perpendicular so segmento $\overline{BC}$ que passa pelo vértice A em: barra de recursos, clicar no botão 4, em seguida clicar na opção reta perpendicular. Na janela de visualização: clicar no ponto A e em seguida clicar na reta $d = \overline{BC}$, criando a reta e;

6. Criar o ponto de interseção entre as retas d e e em: barra de recursos, clicar no botão 2, em seguida clicar na opção interseção de dois objetos. Na janela de visualização: clicar na reta d e em seguida clicar na reta e, criando o ponto D;

7. Traçar os segmentos de reta $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ em: barra de recursos, clicar no botão 3, em seguida clicar na opção segmento. Na janela de visualização: clicar no ponto B e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $f = \overline{BD}$; clicar no ponto C e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $g = \overline{CD}$; e clicar no ponto A e em seguida clicar no ponto D, criando o segmento $h = \overline{AD}$ que é a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC;

8. Desmarcar as retas d e e em: janela de álgebra, clicar no ponto à esquerda da reta d, e clicar no ponto à esquerda da reta e, ocultando essas retas na janela de visualização;

9. Criar os ângulos $B\widehat{A}C$, $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$ e $C\widehat{D}A$ em: barra de recursos, clicar no botão 8, em seguida clicar na opção ângulo. Na janela de visualização: clicar no ponto B, depois clicar no ponto A, e em seguida clicar no ponto C, criando o ângulo $\alpha = B\widehat{A}C$; clicar no ponto C, depois clicar no ponto B, e em seguida clicar no ponto A, criando o ângulo $\beta = C\widehat{B}A$; clicar no ponto A, depois clicar no ponto C, e em seguida clicar no ponto B, criando o ângulo $\gamma = A\widehat{C}B$; e por fim, clicar no ponto C, depois clicar no ponto D, e em seguida clicar no ponto A, criando o ângulo $\delta = C\widehat{D}A = 90°$.

Exercício 10

Usando a figura encontrada no exercício 9, faça as seguintes atividades:

a) Aplique a relação seno do ângulo γ no triângulo ACD e encontre uma equação equivalente com o valor de h isolado no primeiro membro da equação;

b) Aplique a relação seno do ângulo β no triângulo ABD e encontre uma equação equivalente com o valor de h isolado no primeiro membro da equação;

c) Pelos itens (a) e (b), pode-se perceber que existem duas formas de escrever o valor da altura h. Pode-se perceber também que o segundo membro da equação encontrada no item (a), e o segundo membro da equação encontrada no item (b) são iguais, portanto escreva a equação que representa essa igualdade;

d) Usando a equação encontrada no item (c), divida ambos os lados da equação por $\text{sen}(\beta).\text{sen}(\gamma)$ e simplifique a equação;

e) Escreva a equação que teria sido encontrada se os itens (a), (b), (c) e (d) tivessem sido feitos com a altura relativa ao lado c do triângulo ABC;

f) Observando as equações encontradas nos itens (d) e (e), percebe-se que temos a igualdade entre três razões, escreva essa igualdade.

Exercício 11

Usando a figura encontrada no exercício 9, faça as seguintes atividades:

a) Aplique a relação cosseno do ângulo β no triângulo ABD e encontre uma equação equivalente com o valor de f isolado no primeiro membro da equação;

b) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD usando os valores c, f e h e encontre uma equação equivalente com o valor h^2 isolado no primeiro membro da equação;

c) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD usando os valores b, h e $a - f$ (pois $a = f + g$) e encontre uma equação equivalente com o valor b^2 isolado no primeiro membro da equação e simplifique o segundo membro da equação;

d) Use o valor de h^2, encontrado no item (b), substitua na equação encontrada no item (c), e simplifique o segundo membro da equação;

e) Use o valor de f, encontrado no item (a), substitua na equação encontrada no item (d), e simplifique o segundo membro da equação;

f) Escreva as equações que teriam sido encontradas se os itens (a), (b), (c), (d) e (e) tivessem sido feitos com as altura relativas ao lado b e com a altura relativa ao lado c do triângulo ABC.