UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Juliana Martins de Freitas

Os três problemas clássicos da Matemática grega

São José do Rio Preto

2014

Juliana Martins de Freitas

Os três problemas clássicos da Matemática grega

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos

São José do Rio Preto

2014

Juliana Martins de Freitas

Os três problemas clássicos da Matemática grega

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos

UNESP – São José do Rio Preto

Orientador

Prof. Dr. Marcio de Jesus Soares

UFSCar – São Carlos

Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade

UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

22 de setembro de 2014

Dedico este trabalho

Aos meus pais, Adélia e José Pedro, por darem a mim a base de toda minha educação, força nos meus momentos de fraqueza, luz para iluminar meus caminhos e a paz que necessito para o meu descanso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que está acima de todas as coisas.

Às minhas irmãs, Daniela e Thaís, pelas críticas, ajuda e companheirismo.

Ao Marcelo, por seu amor, paciência e compreensão.

A todos os professores do PROFMAT, pela orientação e auxílio, indispensáveis para a realização desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos, pela dedicação e disponibilidade, sempre dando apoio, sugestões e contribuições sem as quais o desenvolvimento desse trabalho não seria possível.

RESUMO

Os séculos V e IV a.C. constituíram um período extremamente ativo da matemática no mundo grego. Aproximadamente neste período, têm início o estudo dos três problemas clássicos da matemática grega, os quais iremos abordar como tema principal. Esses problemas ficaram conhecidos como duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo. Aparentemente de enunciados simples, são problemas geométricos que envolvem construções utilizando unicamente régua não graduada e compasso. O estudo destes três problemas geométricos desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais durante mais de dois mil anos, e somente no século XIX demonstrou-se a impossibilidade dessas construções utilizando-se apenas régua não graduada e compasso. Em suma, a concepção fundamental que este trabalho tem a proporcionar é que a magia da Matemática não se restringe apenas nas respostas dos problemas, antigos ou atuais, mas nas novas descobertas, estratégias e métodos empregados advindos dos caminhos que conduzem às resoluções. O objetivo deste trabalho é apresentar estes três problemas, a impossibilidade da resolução dos mesmos utilizando-se apenas régua não graduada e compasso, resoluções possíveis utilizando-se outros instrumentos e uma aplicação da duplicação do cubo em sala de aula, utilizando origami.

Palavras-chave: duplicação do cubo; trissecção do ângulo; quadratura do círculo.

ABSTRACT

The fifth and fourth centuries BC were an extremely active period of mathematics in the Greek world. About this period, begin the study of three classical problems of Greek mathematics, which we will address as the main theme. These problems were known as duplicating the cube, trisection of the angle and squaring the circle. Apparently simple statements are geometric problems involving constructions using only not graduate ruler and compass. The study of these three geometric problems challenged the inventive power of numerous mathematicians and intellectuals for over two thousand years, and only in the nineteenth century demonstrated the impossibility of such constructions using only not graduate ruler and compass. In short, the fundamental conception that this work has to provide is the magic of mathematics is not only restricted in the responses of former and current problems, but the new findings, strategies and methods employed arising out of the paths that lead to resolutions. The objective of this paper is to present these three problems, the impossibility of solving them using only not graduated ruler and compass, possible resolutions using other instruments and an application of the doubling cube in the classroom, using origami.

Keywords : doubling the cube, trisection of the angle, squaring the circle .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO…………………………………………………………………..…..10

CAPÍTULO I: PONTOS CONSTRUTÍVEIS E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA..13

1.1 Construções por meio de régua não graduada e compasso...13

1.2 Pontos e Números Construtíveis..16

1.3 Extensões Algébricas e Transcendentes..20

1.4 Impossibilidade da resolução dos três problemas clássicos por régua não graduada e compasso..30

CAPÍTULO II: OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA: SOLUÇÕES POSSÍVEIS...33

2.1 Duplicação do Cubo...33

2.1.1 A Máquina de Platão...40

2.1.2 A Solução de Menécmo...42

2.1.3 A Máquina de Eratóstenes...43

2.1.4 A Solução de Hierão..46

2.1.5 O Método de Diócles..48

2.2 A quadratura do círculo...52

2.2.1 A Quadratriz...53

2.3 A trissecção do ângulo...56

2.3.1 Casos particulares da trissecção do ângulo...........................57

2.3.2 A contribuição de Arquimedes: uma solução do problema por *neusis*...59

2.3.3 A trissecção do ângulo por Nicomedes................................61

2.3.4 A solução atribuída a Hípias: a trissecção do ângulo usando a quadratriz...64

CAPÍTULO III: O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO ATRAVÉS DO ORIGAMI: UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA...........................67

3.1 Origami..67

3.2 Resolvendo o problema da duplicação do cubo com origami........69

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS...75

INTRODUÇÃO

Das épocas mais primitivas até os nossos dias, a Matemática tem desafiado e cativado estudiosos instigados pela busca de conhecimento, pela curiosidade, pela necessidade de exploração e pela beleza desta ciência.

Em nossos dias, os problemas de construção geométrica desafiam o raciocínio por se revelarem em sua essência como um jogo, cujas regras básicas exigem um amplo conhecimento dos teoremas de geometria e das diversas propriedades das figuras geométricas. Todavia, já na Grécia Antiga, local de registro das origens da geometria enquanto ciência dedutiva, os sábios gregos se depararam com um enigma que incidia na busca de resolução dos problemas de construção geométrica através do uso exclusivo de dois instrumentos: a régua não graduada e o compasso.

Apesar da capacidade e habilidade dos matemáticos gregos, alguns problemas se tornaram notórios por resistirem a todos os exaustos esforços dos sábios da época.

Foi no início do período helênico (séc. VI a.C. - séc. V a.C.) que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais, durante mais de dois mil anos. Estes três problemas de construção resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos empregados por Euclides nos Elementos. Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos, mas não estavam de acordo com as regras do jogo.

Os problemas que ficaram conhecidos como os *Três Problemas Clássicos da Matemática Grega* são:

- a duplicação do cubo;
- a quadratura do círculo;
- e a trisecção do ângulo.

Duplicar um cubo consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um dado cubo, utilizando-se somente régua e compasso. Não se sabe precisamente quando e por quem o problema da duplicação do cubo foi formulado pela primeira vez, pois existem vários relatos a respeito. O que se sabe é que já era conhecido pelos pitagóricos que dado um quadrado era possível construir, por régua e compasso, um novo quadrado com o dobro de sua área.

"Quadrar" uma região plana consiste em traçar, somente com régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área da região dada. O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos Elementos de Euclides e, uma vez resolvida a quadratura de regiões poligonais, o próximo passo seria tentar "quadrar" regiões limitadas por linhas curvas, na qual o círculo passa a ser uma escolha óbvia.

Nos Elementos, Euclides demonstra também como bissectar um ângulo somente com régua e compasso. Logo, uma vez que se sabe como bissectar um ângulo, é natural que se pergunte como dividir um ângulo em n partes, particularmente, em três partes (trissecção do ângulo).

Os três problemas clássicos da Matemática Grega têm encantado sucessivas gerações de matemáticos profissionais e amadores durante séculos, estimulando o pensamento e descobertas matemáticas ao longo de dois milênios, e moldaram muito das atividades de pesquisa matemática dos gregos. Da mesma maneira que a Matemática moderna cresce com respostas aos desafios de novos problemas, muito da Matemática Grega se desenvolveu devido a tentativas de resolver os três problemas clássicos.

Para abordar as questões da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, e pôr um fim em uma discussão que havia durado mais de 20 séculos, o matemático francês *Pierre Laurent Wantzel* (1814 – 1848) que era linguística e engenheiro da prestigiosa *École Polytechnique*, foi quem apresentou, em 1837, a impossibilidade destas construções com os instrumentos inicialmente impostos. Posteriormente, em 1882 *F. Lindemann* solucionou (também negativamente) o problema da quadratura do círculo, ao provar a transcendência de π sobre o corpo dos números racionais. Tais demonstrações vêm a ser fruto do desenvolvimento da Aritmética, da Álgebra e da Análise durante o século XIX.

No entanto, não se deve ter a falsa ideia de que os gregos, na resolução de problemas de construções geométricas, trabalhavam somente com a régua e o compasso. Essa ideia é negada por inúmeras construções em que, exatamente como hoje, os gregos utilizavam-se de todas as ferramentas e instrumentos disponíveis, ou até mesmo criavam novas ferramentas apropriadas. Porém, as construções em que se utilizavam somente a régua e o compasso eram consideradas mais elementares, e sempre que estes dois instrumentos bastassem, métodos mais avançados não deveriam ser usados.

Embora não tenham conseguido resolver estes problemas com os instrumentos especificados, os matemáticos gregos não se deixaram intimidar e, com engenho notável, foram capazes de achar soluções para os problemas usando vários outros tipos de instrumentos e construções.

Para um melhor entendimento, demonstraremos no Capítulo I a impossibilidade de resolução destes três problemas com régua não graduada e compasso. Para isto desenvolvemos parte da teoria de extensões de corpos, o mínimo suficiente para obter o conjunto dos números reais construtíveis e, a partir daí, dar respostas negativas aos três problemas gregos. No Capítulo II vamos exibir e demonstrar algumas técnicas e construções feitas por matemáticos do passado que resolveram os problemas citados buscando alternativas de construções que não se baseiam apenas na utilização da régua não graduada e compasso. No Capítulo III apresentamos uma maneira de duplicar o volume de um cubo utilizando o origami, em sala de aula.

CAPÍTULO I

PONTOS CONSTRUTÍVEIS E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA

Neste capítulo mostraremos que os problemas clássicos da Matemática Grega, a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo, são impossíveis de serem resolvidos utilizando-se apenas uma régua não graduada e compasso. Tomamos por régua não graduada como um instrumento que nos permita ligar dois pontos no plano, ou seja, que não possui qualquer marca.

1.1 Construções por meio de régua não graduada e compasso

Construir com régua e compasso, significa efetuar as seguintes construções:

• Com a régua é possível traçar uma reta que passa por dois pontos distintos previamente dados.

• Com o compasso é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto dado e passando por um segundo ponto determinado.

• Se certos pontos são dados inicialmente, demais pontos podem ser construídos através de uma sequência de operações de intersecções de retas com retas, circunferências com circunferências e ainda reta com circunferência e, consequentemente, novas retas e circunferências podem ser traçadas pelos novos pontos obtidos e assim sucessivamente.

Da sequência de operações possíveis com régua e compasso, fica perceptível que determinadas construções não são permitidas como, por exemplo, valer dos seguintes artifícios: empregar uma graduação previamente estabelecida da régua ou do compasso, traçar uma circunferência de raio ou centro arbitrário, considerar sobre uma reta um ponto arbitrário, deslizar a reta até uma posição determinada, entre outras impossibilidades. Desta forma, fica subentendido que no decorrer deste trabalho ao nos reportarmos à régua e ao compasso, fazemos referência aos instrumentos cujas características foram expostas anteriormente.

Primeiramente, iremos determinar quais seriam os pontos construtíveis utilizando-se apenas estes dois instrumentos.

Consideremos um subconjunto $\mathcal{P}$ do plano, tal que $\mathcal{P}$ contém pelo menos dois pontos distintos. Determinamos ainda que uma reta r do plano está contida em $\mathcal{P}$ se existem dois pontos distintos A e B da reta que pertencem a $\mathcal{P}$.

Determinamos também que uma circunferência Γ do plano, de centro C, está contida em $\mathcal{P}$ se o centro de Γ pertence a $\mathcal{P}$ ($C \in \mathcal{P}$) e existe um ponto D de Γ que pertence a $\mathcal{P}$, ($D \in \mathcal{P}$).

Sendo assim, chamaremos de (I), (II) e (III) as operações elementares em $\mathcal{P}$, descritas abaixo.

(I) Interseção de duas retas em $\mathcal{P}$.

(II) Interseção de uma reta em $\mathcal{P}$ e uma circunferência em $\mathcal{P}$.

(III) Interseção de duas circunferências em $\mathcal{P}$.

Dizemos que um ponto P do plano é construtível a partir de $\mathcal{P}$ se podemos determinar P através de uma sequência dessas operações elementares em $\mathcal{P}$. Denotaremos por $<\mathcal{P}>$ o subconjunto dos pontos do plano que são construtíveis a partir de $\mathcal{P}$.

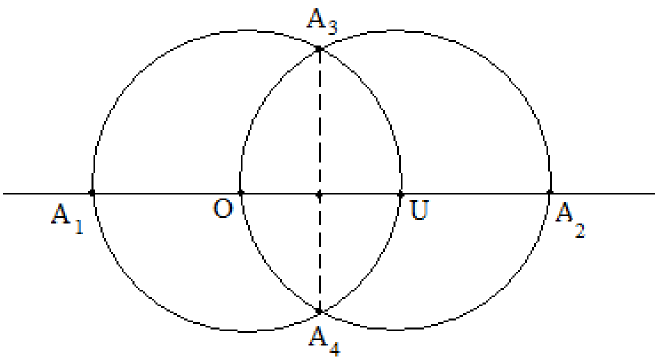
Vejamos:

Se $\mathcal{P}_0 = \{O, U\}$ onde $O(0,0)$ e $U(1,0)$, então,

$$< \mathcal{P}_0 >=\{ O, U, A_1, A_2, A_3, A_4\},$$

onde $< \mathcal{P}_0 >$ é o subconjunto dos pontos do plano construtíveis a partir de $\mathcal{P}_0$, conforme obtido a seguir:

Constrói-se, a partir da reta suporte do segmento OU, uma circunferência Γ_1 de centro U e raio $\overline{OU}$ e uma circunferência Γ_2 de centro O e raio $\overline{OU}$, determinando através das operações (I), (II) e (III) descritas anteriormente, os 4 pontos A_1, A_2, A_3, A_4, como mostra a figura a seguir:



A partir dos pontos A_1, *O* e *U* podemos construir uma reta perpendicular a reta suporte do segmento *OU* passando por *O*, denotando-a por *Oy*, e por *Ox* a reta suporte do segmento *OU*. Assim, montamos um sistema ortogonal de coordenadas no plano.

De acordo com as construções, temos:

$A_1(-1, 0)$, $A_2(2,0)$, $A_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

De agora em diante, denotemos $O(0,0)$, $U(1,0)$ e $\mathcal{P}_0 = \{O, U\}$,

$\mathcal{P}_1 = <\mathcal{P}_0>$, $\mathcal{P}_2 = <\mathcal{P}_1>$, ... , $\mathcal{P}_{n+1} = <\mathcal{P}_n>$, para todo $n \in N$.

Logo, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathbb{R}^2$

Seja $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Podemos notar que $\mathcal{P}_\infty$ é um subconjunto infinito do plano embora cada $\mathcal{P}_n$ seja um subconjunto finito do plano. Desde que $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_i$ para quaisquer *i* e $j \in N$ com $j < i$ é imediato que $<\mathcal{P}_\infty> = \mathcal{P}_\infty$ e $P(m, v) \in \mathcal{P}_\infty$, para todos $m, v \in \mathbb{Q}$.

Definições:

(i) Os pontos do plano que pertencem a $\mathcal{P}_\infty$ são chamados de *pontos construtíveis*;

(ii) As retas e circunferências em $\mathcal{P}_\infty$, são chamadas de *retas construtíveis* e *circunferências construtíveis*, respectivamente;

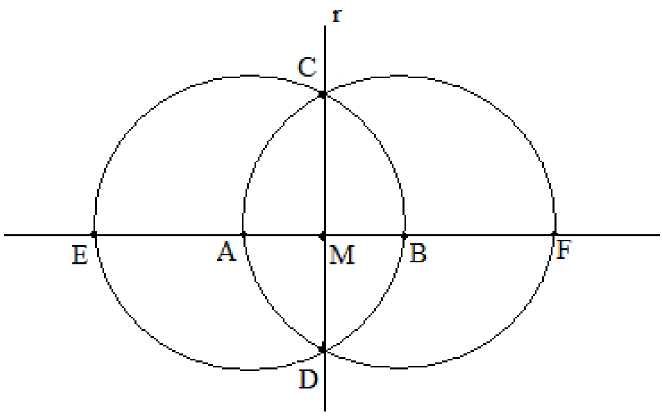
(iii) Um número real *a* diz-se *construtível* se $P(a, 0) \in \mathcal{P}_\infty$.

1.2 Pontos e Números Construtíveis

Uma vez definidos ponto e número real construtíveis, agora faremos algumas construções com régua e compasso necessárias para fecharmos este tópico relacionando pontos e números reais construtíveis. Vejamos pontos e números contrutíveis assim determinados.

Proposição 1: *Se A e B são distintos pontos construtíveis então o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é construtível e as retas perpendiculares a $\overline{AB}$ passando pelos pontos A, B e M também são construtíveis.*

Demonstração: Usando duas circunferências centradas em cada um dos pontos e passando pelo outro, como na figura abaixo, fica provada a primeira parte da proposição 1, pois os pontos *C*, *D*, *E* e *F* são construtíveis e mais ainda, *A* é o ponto médio de $\overline{EB}$ e *B* é o ponto médio de $\overline{AF}$.



■

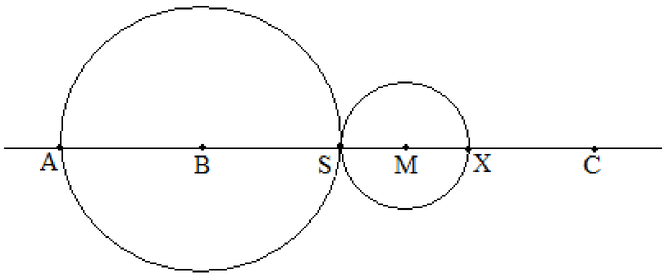
Proposição 2: *Sejam A e r, respectivamente, um ponto construtível e uma reta construtível tais que A $\in$ r. Se B e C são pontos construtíveis, então existe um ponto construtível X tal que X $\in$ r e os segmentos AX e BC possuem o mesmo comprimento.*

Demonstração: Usando circunferências centradas em *B* e centradas em *A*, podemos assumir que *A*, *B* e *C* pertencem a reta *r* (pois, caso *B* e *C* não estejam sobre a reta *r*, pela proposição 1, é possível traçar duas perpendiculares a r, passando por B e C, tais que essas perpendiculares intersectam r nos pontos B' e C', de tal forma que os segmentos $B'C'$ e BC tenham o mesmo comprimento)

Agora, seja M o ponto médio de BC (que demonstramos ser construtível na proposição 1) e $S \in r$ um ponto também construtível tal que os segmentos AB e BS possuem o mesmo comprimento.

Assim, $A, B, C, M, S \in r$ são pontos construtíveis.

Seja $X \in r$ o ponto construtível, como na figura seguinte, tal que os segmentos *SM e MX possuem* o mesmo comprimento.

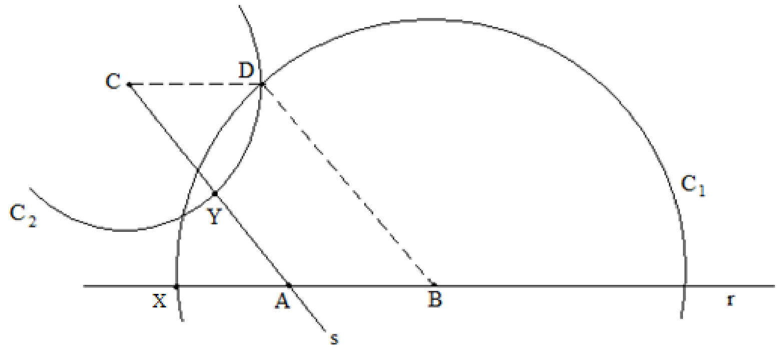


Segue, portanto, dessa construção, que os segmentos AB, BS e XC possuem o mesmo comprimento. Logo, os segmentos AX e BC também possuem o mesmo comprimento, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 3: *Sejam A, B e C três pontos construtíveis não alinhados. Então existe um ponto construtível D tal que A, B, C e D formam um paralelogramo. Em particular, a reta passando por C e paralela ao segmento AB é construtível.*

Demonstração: Sejam r e s as retas suportes, respectivamente, dos segmentos AB e CA. Aplicando a proposição 2, para $B \in r$ encontramos um ponto construtível $X \in r$ tal que os segmentos BX e AC possuem o mesmo comprimento. Aplicando o mesmo resultado para $C \in s$ encontramos um ponto construtível $Y \in s$ tal que os segmentos CY e AB possuem o mesmo comprimento. Agora o ponto D é encontrado, como na figura seguinte, intercectando as circunferências C_1 de centro B e passando por X e C_2 de centro C e passando por Y. O ponto D assim obtido, deve ser tal que as retas suportes dos segmentos AC e BD não se intersectam.



■

Proposição 4 : *Um ponto A(a,b) do plano é construtível se e somente se as suas coordenadas a, $b \in R$ são números construtíveis.*

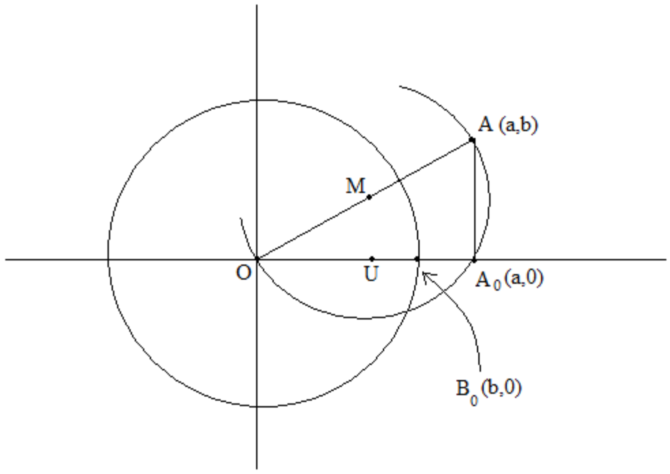
Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Sejam *A(a,b)* um ponto construtível e seja *M* o ponto médio do segmento OA. As coordenadas do ponto *M* são $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ pois o vetor $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. A circunferência de centro *M* e raio $\overline{OM}$ intercepta a reta *OX* na origem e num ponto $A_0(x,0)$. Provemos que *x = a*. Temos:

$$r = \overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \text{ e } r = \overline{MA} = \left\|\left(x - \frac{a}{2}, 0 - \frac{b}{2}\right)\right\|.$$

Destas relações tiramos $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2}$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2-4ax+a^2+b^2}$. Cancelando $\frac{1}{2}$ e elevando a expressão ao quadrado, obteremos: $a^2+b^2 = 4x^2-4ax+a^2+b^2$, o que nos fornece $4x(x-a)=0$. Logo *x* = 0 ou *x* = *a*.

Uma vez construído o ponto $A_0(a,0)$, podemos, pela proposição 2, encontrar o ponto $B_0(b,0)$ traçando a partir de *O* uma circunferência de raio $\overline{A_0A}$.



(⇐) Reciprocamente, suponhamos a e b construtíveis, isto é, $A_0(a,0)$ e $B_0(b,0) \in \mathcal{P}_\infty$. É fácil ver que a reta determinada por $O(0,0)$ e por $U(0,1)$ é construtível. Assim sabemos construir $B_0'(0,b)$ a partir de $B_0(b,0)$. Como sabemos traçar paralelas (ou perpendiculares) segue imediatamente a construção de $A(a,b)$ a partir de $A_0(a,0)$ e $B_0(0,b)$, e isto prova a proposição.

■

Da proposição 4, concluímos que para conhecer os pontos do plano que são construtíveis basta conhecer quais números reais são construtíveis. Vamos denotar por $\mathcal{C}_R$ o conjunto dos números reais construtíveis.

Para determinar o conjunto dos números reais construtíveis $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$, vamos precisar dos conceitos de extensões algébricas, transcendentes e alguns resultados sobre elas.

1.3 Extensões Algébricas e Transcendentes

Para o que segue, vamos admitir os conceitos de corpos, subcorpos e espaços vetoriais.

Notação: Se F é um subcorpo de K, também dizemos que K é uma *extensão* de F, e denotemos por K_F, ou seja, uma extensão de um corpo F é um corpo K que o contém.

Notação: Como K é um espaço vetorial sobre F com as operações usuais de K; o *grau desta extensão*, denotado por $[K:F]$ é a dimensão de K como espaço vetorial sobre F.

Por exemplo, denotemos por $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o seguinte subconjunto do corpo $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2},\, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Então $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau 2, isto é: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

De fato, é fácil demonstrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é fechado para subtração, multiplicação no corpo $\mathbb{R}$ e, se $\alpha = a + b\sqrt{2}$ é não nulo, então $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, pois

$$\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\,.$$

Logo, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ que contém $\mathbb{Q}$. Portanto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$. A prova de que $\{1, \sqrt{2}\}$ é uma base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sobre $\mathbb{Q}$ também é rotineira.

<u>TEOREMA 1</u> (*Multiplicidade dos Graus*): *Sejam F, K e L corpos tais que $F \subset K \subset L$. Então $[L:F]$ é finito se, e somente se, $[L:K]$ e $[K:F]$ são finitos. Além disso, $[L:F] = [L:K].\,[K:F]$.*

Demonstração: Suponha $[L:F]$ finito. Como K é um subespaço do F-espaço vetorial L, vem que $[K:F]$ é finito. Também, como uma base B da extensão L_F, gera o espaço L_K (pois $F \subset K$), de B é possível extrair uma base para a extensão L_K**.** Como B é finita vem que $[L:K]$ é finito. Para a recíproca é suficiente provar que $B_1.B_2=\{\, u_i.v_j,\ 1 \le i \le m \text{ e } 1 \le j \le n \,\}$ é base para L_F , em que $B_1=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ é uma base para o espaço vetorial L sobre K, e $B_2 =\{v_1, v_2,..., v_n\}$ é uma base para o espaço vetorial K sobre F. ■

Denotemos por $F[X]$ o anel de polinômios na indeterminada X sobre F.

Definição: Seja L_F uma extensão de corpos.

(i) Um elemento $\alpha \in L$ é *algébrico* sobre F, se existe um polinômio não nulo $f(X) \in F[X]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Caso contrário, α é dito *transcendente* sobre F. Para $F = \mathbb{Q}$, diremos simplesmente algébrico ou transcendente.

(ii) Uma extensão L_F é dita *algébrica*, se todo elemento de L é algébrico sobre F. Caso contrário, é dita *transcendente*.

Exemplos:

(1) Um número real que vai nos interessar bastante é o número π. Em 1882 Ferdinand Von Lindemann demonstrou que π é transcendente, estendendo a demonstração aplicada por Hermite para provar a transcendência do número e definido por: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Logo a extensão $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ é transcendente.

(2) Todo número $\alpha \in F$ é algébrico sobre F, pois é raiz do polinômio não nulo $X - \alpha \in F[X]$.

(3) A extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{Q}}$ é algébrica, pois todo número $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é raiz do polinômio não nulo $X^2 - 2aX + a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Definição: Dado $\alpha \in L_F$ algébrico sobre F. O polinômio não-nulo e mônico de menor grau $p(X) \in F[X]$ tal que $p(\alpha) = 0$ é dito polinômio minimal de α sobre F. A notação para ele será: $\min(\alpha, F)$, ou $irr(\alpha, F)$.

Note que, pelo fato de α ser algébrico sobre F, $\min(\alpha, F)$ existe e ele é irredutível, pois é o polinômio de menor grau tal que α é raiz. De fato, se $p(X) = h(X).g(X)$ em F[X], com os graus de h(X) e g(X) maiores que zero, então α seria raiz de h(X) ou de g(X) que tem graus menores que o grau de p(X). Como h(X) e g(X) podem ser tomados mônicos, teríamos um absurdo.

Um método que muitas vezes nos ajuda a ver a irredutibilidade de um polinômio é o

Critério de Eisenstein: Seja $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in Z[X]$. Se existe um número primo $p > 0$ em $\mathbb{Z}$ tal que para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$, p divide a_i, p não divide a_n e p^2 não divide a_0, então $f(X)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplos:

(a) $4X^3+3X^2-9X+6$ é irredutível em $\mathbb{Q}$ [X], pois basta usar p=3 no critério de Eisenstein.

(b) Para todo primo $p > 0$ em $\mathbb{Z}$, $X^n - p$ é irredutível pelo critério de Eisenstein. Logo, $\min(\sqrt[n]{p},\ \mathbb{Q}) = X^n - p$.

Definição: Vamos considerar novamente uma extensão de corpos L_F e $\alpha \in L$. Definimos $F[\alpha] := \{f(\alpha), f \in F[X]\}$. Como $F[\alpha]$ é um domínio (pois está contido em L), podemos considerar seu corpo de frações:

$$F(\alpha) := \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}, f, g \in F[X], g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

Por recorrência definimos $F(S)$, onde $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \}$, $n \geq 2$, fixado, por

$$F(S) = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) := F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})(\alpha_n)$$

e, dizemos ser o corpo obtido de F por adjunção S ou de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

TEOREMA 2: *Sejam $\alpha \in L_F$ um elemento algébrico sobre F e $p(X) = \min(\alpha, F)$, sendo n o grau de p(X). Então*

(i) $F(\alpha) = F[\alpha]$

(ii) $B := \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ *é uma F-base para $F(\alpha)$. Em particular,* $[F(\alpha) : F] = n$.

Demonstração: (i) Basta demonstrar que $F(\alpha) \subset F[\alpha]$ e para isto consideremos $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in F(\alpha)$. Se demonstrarmos que $g(\alpha)$ é inversível em $F[\alpha]$, o item (i) está feito. Como $g(\alpha) \neq 0$, p(X) não pode dividir g(X) e como p(X) é irredutível *mdc*(*p*(X), *g*(X))=1. Pela identidade de Bezout temos: 1=p(X).*h*(X)+*g*(X).*h* 1(X), com *h*(X) e h_1(X) em *F*(X). Assim

$$1 = 1(\alpha) = p(\alpha).h(\alpha) + g(\alpha).h_1(\alpha) = g(\alpha).h_1(\alpha),$$

pois $p(\alpha) = 0$. Logo $g(\alpha)$ tem inverso em *F*[α], e $g(\alpha)^{-1} = h_1(\alpha)$.

(ii) Pelo algoritmo da divisão, para todo $f(X) \in F[X]$ existem $q(X), r(X) \in F[X]$ tais que $f(X) = q(X).p(X) + a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$, onde $r(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.
Como $p(\alpha) = 0$ temos $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$. Logo, *B* gera $F(\alpha)$. Agora, se existem $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in F$ não todos nulos tais que $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = 0$, então α é raiz do polinômio $s(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} \in F[X]$. Seja j o maior dos índices tais que $a_j \neq 0$. Assim, α é raiz do polinômio mônico $\frac{1}{a_j} s(X)$ de grau menor que *n.* Isto contraria a minimalidade de min(α ,*F*)= *p*(X). Portanto, todos os a_i são nulos para $i = 1, \cdots, n-1$.

■

<u>TEOREMA 3:</u> *Toda extensão finita L_F é algébrica.*

Demonstração: Seja *n* = [*L*:*F*]. Qualquer que seja $a \in L$, $\{1, a, a^2, \cdots, a^n\}$ é um subconjunto linearmente dependente, pois tem mais de *n* elementos. Então, *a* é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes em *F*.

■

A análise dos números construtíveis faz referência ao sistema de coordenadas (*x*,*y*), em que os elementos dados são representados por pontos ou segmentos no plano de coordenadas cartesianas. Neste sistema de coordenadas cartesianas é possível expressar a construtibilidade de um ponto *P(a,b)* em termos das suas coordenadas reais *a* e *b* (veja proposição 4).

Apresentaremos, a seguir, algumas análises relacionando algebricamente a construtibilidade de tais pontos. Tais observações e análises serão de extrema importância para as demonstrações de teoremas posteriores.

Toda construção geométrica é realizada mediante um conjunto de retas e circunferências. Como sabemos, novos pontos são obtidos através de cruzamentos de pares desses objetos, tais como a interseção de duas retas, a interseção de uma reta e uma circunferência e a interseção de duas circunferências.

Podemos afirmar que os pontos obtidos a partir de tais interseções originam-se da resolução de processos correspondentes a solução de sistemas.

Note que, a interseção de duas retas equivale a resolver um sistema de duas equações do primeiro grau:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$, onde a, a_1, b, b_1, c, c_1 são números racionais.

Ou seja,

$$x = \frac{-cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, y = \frac{-ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Analisando o denominador, $ab_1 - a_1b \neq 0$, pois do contrário, as duas retas seriam paralelas ou coincidentes.

Como podemos ver, as coordenadas *x* e *y* são obtidas a partir de operações de adição, subtração e multiplicação entre os coeficientes a, a_1, b, b_1, c, c_1 das equações. Logo, podemos afirmar que se os coeficientes a, a_1, b, b_1, c, c_1 das retas em questão estão em um corpo *F*, as soluções *x* e *y* obtidas acima também estão no corpo *F*.

Considerando agora a interseção de uma reta e uma circunferência, isto equivale a solucionar um sistema composto por uma equação do primeiro grau (reta) e uma equação do segundo grau (circunferência):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$, onde $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ são elementos de um corpo F.

Neste caso, a solução se restringe a um ponto ou dois, dependendo da posição da reta em relação à circunferência. Entretanto, independentemente dessa posição, ambas as coordenadas dos pontos são da forma $p + q\sqrt{r}$, onde p, q, r são elementos do corpo *F*. Assim se *r* não é um quadrado em *F* a solução do sistema está na extensão $F(\sqrt{r})_F$. De fato, se $b \neq 0$ (isto é: a reta não é paralela ao eixo *Oy*) isolando *y* na segunda equação, obtemos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

E, substituindo-o na primeira equação, teremos:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + \alpha x + \beta\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + \gamma = 0$$

$$\left(a^2 + b^2\right)x^2 + \left(2ac + \alpha b^2 - \beta ba\right)x + \left(c^2 - \beta bc + \gamma\right) = 0$$

Chamando $A = \left(a^2 + b^2\right), B = \left(2ac + \alpha b^2 - \beta ba\right), C = \left(c^2 - \beta bc + \gamma\right)$, podemos escrever

$Ax^2 + Bx + C = 0$, cuja solução é dada por:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

E, analogamente, podemos obter *y* através de uma fórmula semelhante. Denotando

B^2 - 4*AC* por *r*, segue o que afirmamos.

Finalmente, vamos analisar a interseção de duas circunferências, em que ambas possuem centros e passam por pontos expressos por coordenadas que estão em um corpo *F*. Pode-se resumir o problema à resolução de um sistema construído por duas equações do segundo grau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

Subtraindo-se a segunda equação da primeira, temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \left(\alpha - \alpha'\right)x + \left(\beta - \beta'\right)y + \left(\gamma - \gamma'\right) = 0 \end{cases}$$

Ou seja, novamente temos um sistema composto por uma equação do segundo grau e uma equação linear, cujas soluções compreendem um ou dois pontos com ambas as coordenadas da forma $p+q\sqrt{r}$, onde p,q,r são elementos de *F*. Novamente, se *r* não é um quadrado em *F*, as soluções estão numa extensão quadrática de *F*. Então, vamos ver que para obter todos os números reais construtíveis será necessário, a partir de um corpo original (e ele será o corpo dos números racionais), fazer uma "infinidade" de extensões quadráticas para obtê-los. Assim sendo, estamos prontos para dar respostas negativas aos problemas geométricos da duplicação do cubo, quadratura do círculo e da trissecção do ângulo θ, com régua não graduada e compasso. Comecemos com o

<u>TEOREMA 4</u>: $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha$ *construtível*$\}$ *é um subcorpo de* $\mathbb{R}$ *contendo* $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Sabemos que $\mathbb{Z} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$. Temos que provar,

(1) $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \beta - \alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$;

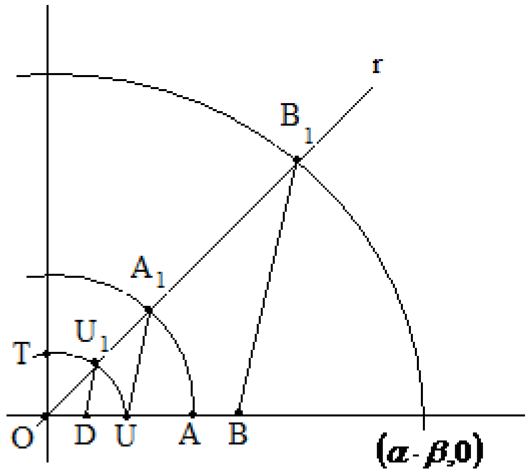
(2) $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$;

(3) e $0 \neq \alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, $\beta > \alpha > 0$. Seja $A(\alpha, 0)$ e $B(\beta, 0)$. Pela Proposição 2, segue imediatamente que podemos construir *X* à direita de *O* sobre a reta suporte do segmento *OU* tal que os segmentos *OX* e *AB* possuem a mesma medida e isto nos diz que $X(\beta - \alpha, 0)$ e isto demonstra (1).

Antes de demonstrar a validade de (2) e (3) observe que existem retas construtivas contendo *O* além das retas suportes dos segmentos *OU* e *OT* onde *T(0,1).*

Seja *r* uma reta construtível como na figura a seguir e sejam A_1, $B_1 \in r$ construídos de modo que os segmentos OA_1 e *OA* tenham medidas iguais a α, e o segmento BB_1 seja paralelo ao segmento UA_1. Por semelhança de triângulos, $\Delta(OA_1U) \cong \Delta(OB_1B)$, temos que $\dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\beta}$ e isto nos diz que a medida do segmento OB_1 é igual a $\alpha \cdot \beta$ e daí segue imediatamente que $\alpha \cdot \beta$ é construtível.



Na figura acima seja $U_1 \in r$ tal que a medida do segmento OU_1 é igual a 1 e $D \in OU$ tal que o segmento DU_1 seja paralelo ao segmento UA_1. Da semelhança dos triângulos $\Delta(OU_1D) \cong \Delta(OA_1U)$ segue que a medida do segmento OD é igual a $\frac{1}{\alpha}$ e portanto $\frac{1}{\alpha}$ é construtível. E isto demonstra o Teorema 4.

■

Antes de demonstrar o próximo teorema vamos dar algumas definições.

Se $A(u,v) \in \mathcal{P}_n$ dizemos que u e v são coordenadas de $\mathcal{P}_n$, e denotamos por $\mathcal{A}_n$ o conjunto de todas as coordenadas de $\mathcal{P}_n$. Assim, $\mathcal{A}_n$ é um subconjunto finito, pois $\mathcal{P}_n$ é finito para cada $n \in N$. Sabemos, pelas proposições anteriores, que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $K_0 = \mathbb{Q}$, $K_1 = \mathbb{Q}(\mathcal{A}_1)$, ... , $K_n = \mathbb{Q}(\mathcal{A}_n)$, ... Como $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$, temos

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

Denotemos por K_∞ a reunião $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Observe também que se $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ então $(\alpha,0) \in \mathcal{P}n$ para algum n, isto é, $\alpha \in \mathcal{A}_n$ para algum n, e portanto $\alpha \in K_n$. Daí segue imediatamente que:

$$K_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

Nós vamos usar essa interpretação de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ para provarmos o teorema abaixo.

<u>TEOREMA 5:</u> *$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ é uma extensão algébrica dos racionais tal que para todo $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ o grau $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ é uma potência de 2.*

Demonstração: Desde que extensões finitas são algébricas (Teorema 3) é o bastante provarmos que para todo $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ tem-se que $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in K_n = \mathbb{Q}(\mathcal{A}_n)$. Como $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ divide $[K_n : \mathbb{Q}]$, (pelo Teorema da Multiplicidade dos graus), é suficiente provarmos que $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que $[K_n : \mathbb{Q}]$ é potência de 2 por indução sobre n.

Se $n = 0$ temos $K_0 = \mathbb{Q}$ e o teorema é válido [se $n = 1$ temos que $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e o teorema também é válido].

Vamos supor, por indução, que $[K_i : \mathbb{Q}]$ é potência de 2 para todo $0 \leq i < n$, e vamos provar que $[K_n : \mathbb{Q}]$ é potência de 2.

Como $K_{n-1} \subset K_n$ e pelo Teorema 1 $[K_n : \mathbb{Q}] = [K_n : K_{n-1}] \cdot [K_{n-1} : \mathbb{Q}]$, por hipótese de indução é suficiente provarmos que $[K_n : K_{n-1}]$ é potência de 2.

Seja $L = K_n$ e $L_0 = K_{n-1}$. Sabemos que $L = L_0(\mathcal{A}_n)$. Se $\mathcal{A}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ temos então que $L = L_0(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$.

Se denotarmos, $L_0 \subset L_1 = L_0(\alpha_1) \subset L_2 = L_1(\alpha_2) \subset \ldots \subset L_i = L_{i-1}(\alpha_i) \subset \ldots \subset L_k = L$ então é suficiente provarmos que $[L_i : L_{i-1}]$ é potência de 2.

De fato, vamos provar que $[L_i : L_{i-1}] = 1$ ou 2, $1 \leq i \leq k$, $L_i = L_{i-1}(\alpha_i)$ e $\alpha_i \in \mathcal{A}_n$. Assim existe $\beta_i \in \mathcal{A}_n$ tal que $A_i(\alpha_i, \beta_i)$ ou $B_i(\beta_i, \alpha_i) \in \mathcal{P}_n$. Sem perda de generalidade vamos supor que $A_i(\alpha_i, \beta_i) \in \mathcal{P}_n$.

Como $\mathcal{P}_n = < \mathcal{P}_{n-1} >$ temos que $A_i(\alpha_i, \beta_i)$ é obtido por uma das 3 operações elementares em $\mathcal{P}_{n-1}$. Pode-se provar, sem grandes dificuldades que α_i terá que satisfazer uma equação de grau menor ou igual a 2 (será grau 1 na operação elementar (I) com coeficientes sobre o corpo $K_{n-1} = \mathbb{Q}(\mathcal{A}_{n-1})$).

Ora, como $K_{n-1} = L_0 \subset L_{i-1}$, $1 \leq i \leq k$, segue que α_i é raiz de um polinômio de grau 1 ou 2 sobre o corpo L_{i-1} e isto nos diz que $[L_i : L_{i-1}] = 1$ ou 2, como queríamos demonstrar.

■

1.4 Impossibilidade da resolução dos três problemas clássicos por régua não graduada e compasso

Já vimos na Proposição 4 que para conhecer quais pontos são construtíveis basta conhecer quais números reais são construtíveis, pois estes constituem exatamente as coordenadas dos pontos construtíveis. Isto nos levou ao estudo das extensões algébricas de $\mathbb{Q}$ que nos deu uma propriedade dos números reais construtíveis, a saber que um número real α é construtível se a extensão $\mathbb{Q}(\alpha)_{\mathbb{Q}}$ tem como grau uma potência de 2. Isto é suficiente para demonstrar que os problemas clássicos da duplicação do cubo, da quadratura do círculo e da trisecção do ângulo não podem ser resolvidos apenas com uso de régua não graduada e compasso, pois os pontos necessários para a solução destes problemas não são construtíveis.

<u>CORORÁRIO 1:</u> *Se n é um número ímpar* $n \geq 3$ *e p é um número primo* $p \geq 2$ *então* $\sqrt[n]{p}$ *não é construtível. Em particular,* $\sqrt[3]{2}$ *não é construtível.*

Demonstração: Seja $\alpha = \sqrt[n]{p}$. Pelo critério de Eisenstein *min*$(\alpha, \mathbb{Q}) = X^n - p$. Pelo Teorema 2 (ii) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = n$ é ímpar e, assim pelo Teorema 5 α não é construtível.

■

<u>COROLÁRIO 2:</u> $u = \cos\dfrac{2\pi}{18}$ *não é construtível.*

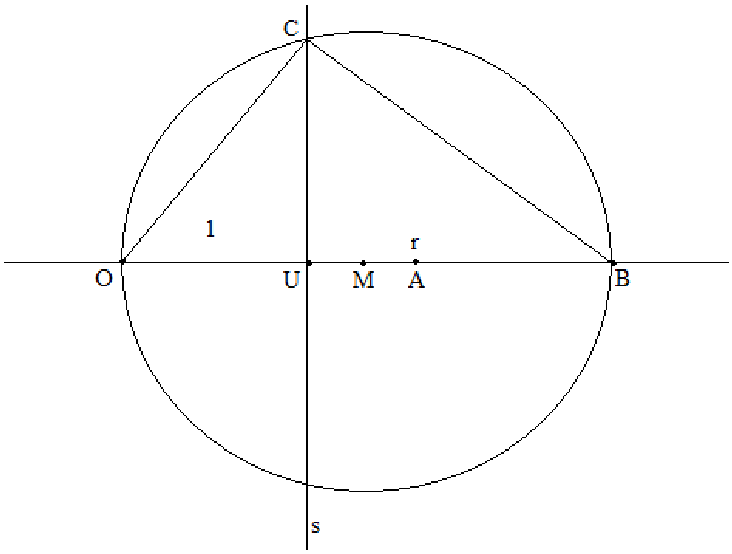
Demonstração: Se $\theta = \dfrac{2\pi}{18}$ então $3\theta = \dfrac{2\pi}{6}$. Sabemos que, $\dfrac{1}{2} = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ e daí segue, $8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0$, isto é, $u = \cos\dfrac{2\pi}{18}$ é raiz do polinômio $p(X) = 8X^3 - 6X - 1$. Como $p(X)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ (pois não possui raiz em $\mathbb{Q}$), pelo Teorema 2 (ii) temos $[\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q}] = 3$. Portanto, u não é construtível.

■

<u>Proposição 5:</u> *Se* $r \geq 0$ *é um número real construtível, então* $\sqrt{r}$ *também é construtível. Em particular* $\sqrt[2^i]{m}$ *é construtível para todo* $i, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja *A(r,0)* e seja *B(1 + r, 0)*. Assim, como r é construtível, segue que A e B são construtíveis. Seja s a reta (construtível) perpendicular ao segmento OU passando por U e seja M o ponto médio do segmento OB. Sendo C um dos pontos de interseção da reta s com a circunferência de centro M e raio $\overline{MB}$ temos que $C \in \mathcal{P}_\infty$ (veja figura abaixo). Pela geometria vem que $\overline{UC} = \sqrt{r}$.

Assim segue imediatamente que $\sqrt{r}$ é construtível, como queríamos demonstrar.



■

Finalmente, os problemas clássicos da duplicação do cubo, da quadratura do círculo e da trissecção do ângulo, que por muito tempo foram preocupações dos gregos serão respondidos nos seguintes teoremas.

TEOREMA 6: *Não existe $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$, tal que o volume do cubo de aresta α seja o dobro do volume do cubo de aresta* 1.

Demonstração: Suponhamos que exista $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ tal que o volume do cubo de aresta α seja o dobro do volume do cubo de aresta 1. Logo, teríamos $\alpha^3 = 2$. Então, pelo critério de Eisenstein *min* $(\alpha, \mathbb{Q}) = X^3 - 2$. Pelo Teorema 2 (ii) temos $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ e pelo Teorema 5 segue que α não é construtível (absurdo).

■

TEOREMA 7: *Não existe* $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$*, tal que a área do quadrado de lado* α *seja igual a área do círculo de raio* 1.

Demonstração: Supondo que exista $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ nessas condições, então $\alpha^2 = \pi$, assim $\alpha = \sqrt{\pi} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$. Como π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$, segue que $\pi \notin \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$. Como $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ então, pelo Teorema 4 (2), $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \alpha \, . \, \alpha$ é construtível pela operação de multiplicação e, consequentemente, π é algébrico pelos Teoremas 5 e 3, o que é um absurdo.

■

TEOREMA 8: *É impossível com o uso apenas de régua não graduada e compasso, trissectar o ângulo de 60°.*

Demonstração: Se $\theta = \dfrac{2\pi}{18} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ podemos ver facilmente que $u = \cos\theta$ também seria construtível, mas isto contraria o Corolário 2.

■

CAPÍTULO II

OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA: SOLUÇÕES POSSÍVEIS

Com o uso apenas da régua não graduada e do compasso, os matemáticos gregos realizaram inúmeras construções geométricas. Belos e engenhosos problemas da geometria foram solucionados, fundamentados em um conjunto extenso de construções executáveis, como por exemplo: a construção de retas paralelas a uma outra reta e que passa por um ponto dado; a bissecção de um ângulo ou um segmento; a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto; a construção de circunferências e arcos, entre outras.

Por fim, uma vez que o conjunto de noções e relações primitivas da geometria faz referência à régua não graduada e ao compasso, torna-se impossível avaliar a importância destes instrumentos, inseridos na história das construções geométricas, e a influência propícia à expansão do campo de conhecimentos geométricos, tendo em vista que um vasto número de problemas geométricos resistiram à limitação destas ferramentas.

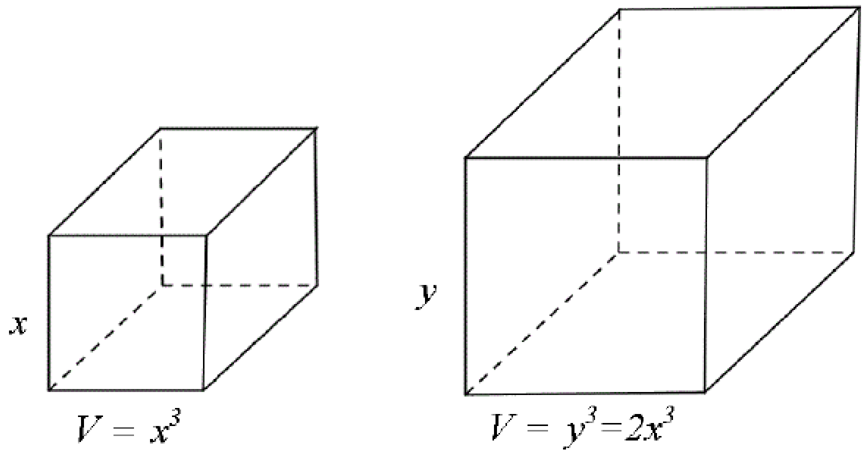
Como visto no capítulo anterior, apesar da impossibilidade de solução dos três problemas clássicos da geometria usando apenas a régua não graduada e o compasso, diversas contribuições possibilitaram o desenvolvimento de novos mecanismos geométricos frutíferos às resoluções subsequentes e, por conseguinte, a ampliação da Matemática.

Os mais famosos destes problemas investigamos a seguir.

2.1 A Duplicação do Cubo

O problema da duplicação do cubo consiste em construir com régua não graduada e compasso a aresta de um cubo que tenha o dobro do volume de um cubo dado.

Partindo de um cubo arbitrário cuja aresta tenha tamanho x, seu volume é dado por x^3. Logo, a duplicação de um cubo de aresta x requer a construção de um novo cubo de aresta y, cujo volume é $y^3 = 2x^3$, assim sendo, o problema se reduz a construir uma aresta de medida $y = x\sqrt[3]{2}$. Como sabido, a solução se submete à teoria das equações cúbicas, no entanto, este conhecimento emergiu apenas no século XVI, na Europa. Ou seja, há dois milênios antes que a natureza dos números algébricos fosse criada e desenvolvida, os gregos já buscaram solucionar problemas equivalentes à solução de equações cúbicas ou de maior grau. O empreendimento de novos conceitos e técnicas tornou possível elucidar tarefas e promover respostas ou aproximações.



Hipócrates e suas Meias Proporcionais

Hipócrates de Quios (viveu em torno de 430 a. C.) concebeu a primeira tentativa de resolução do problema da duplicação do cubo ao reduzir o problema à construção de meias proporcionais (ou médias proporcionais) entre duas grandezas, ou seja, devemos achar duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2.

Com efeito, se

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2},$$

vemos que

$$x^2 = y$$

e, portanto, multiplicando ambos os membros por x, obtemos

$$x^3 = xy$$

Mas como

$$xy = 2$$

temos que

$$x^3 = 2.$$

De fato, o que Hipócrates assegura é que se dado um cubo de aresta *a*, encontramos segmentos *x* e *y*, chamados de meias proporcionais entre os segmentos *a* e *b*, tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

e disso vemos que

$$x^2 = ay$$

e que

$$xy = ab$$

e daí segue-se que

$$x^3 = axy = a^2b$$

e assim

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a},$$

então o cubo de aresta *x*, possui o volume ampliado na razão $\frac{b}{a}$.

Particularmente, a duplicação do cubo é considerada quando $b = 2a$ e existem *x* e *y* que satisfazem

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

A dedução das proporcionalidades é elucidada a partir das relações

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

logo

$$(1)\ x^2 = ay \quad \text{e}$$

$$(2)\ y^2 = 2xa$$

De (1) temos que

$$y = \frac{x^2}{a},$$

substituindo em (2) encontramos

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2xa \quad \text{ou} \quad x^4 = 2a^3x \text{ o que nos dá } x^3 = 2a^3,$$

e assim,

$$x = \sqrt[3]{2}a,$$

ou seja, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do cubo de aresta a.

A razão dos volumes dos cubos de aresta a e x, respectivamente, é de $\frac{1}{2}$, uma vez que

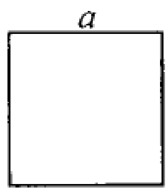
$$\frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}.\frac{a}{x}.\frac{a}{x}\right) = \frac{a}{x}.\frac{x}{y}.\frac{y}{2a} = \frac{1}{2}.$$

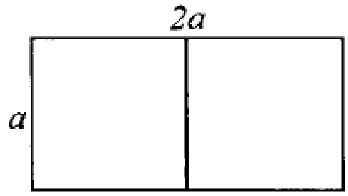
Comentários

Não se sabe qual foi o raciocínio de Hipócrates para ter reduzido o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar duas meias proporcionais. No entanto, é natural aceitar a analogia com o problema da duplicação do quadrado.

De fato, se o problema da duplicação do quadrado pode ser reduzido ao problema de encontrar *uma meia proporcional* entre a aresta e o seu dobro, não seria de se esperar que o problema da duplicação do cubo pudesse ser reduzido ao problema de encontrar *duas meias proporcionais* entre a aresta e o seu dobro? Assim, tendo em conta esta analogia, vamos começar por dar alguma atenção ao problema da duplicação do quadrado.

Seja dado um quadrado de lado *a;* juntando dois desses quadrados obtemos um retângulo cuja área é o dobro da do quadrado inicial. A questão que agora se coloca é quadrar este retângulo, isto é, construir um quadrado com a mesma área do retângulo em questão.



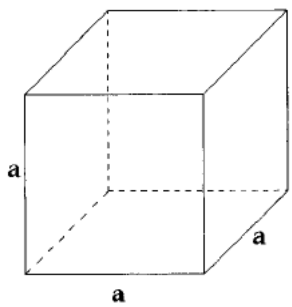


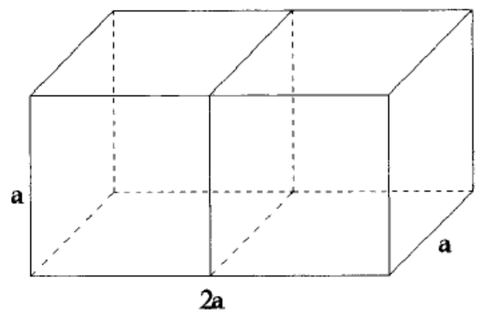
Esta quadratura resolve-se construindo a meia proporcional *x* entre os segmentos *a* e *2a.* E construir uma meia proporcional com régua não graduada e compasso não era difícil para os geômetras da época.

Observe que da proporção $\frac{a}{x}=\frac{x}{2a}$ deduzimos que $x^2 = 2a^2$, o que prova que o quadrado de lado *x* tem o dobro da área do quadrado de lado *a.*

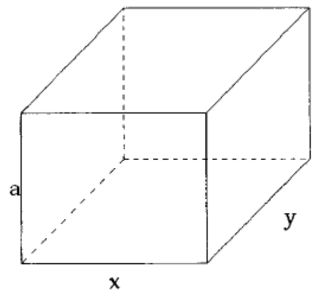
Relativamente ao problema da duplicação do cubo, é possível que Hipócrates tenha efetuado um percurso análogo ao seguinte raciocínio :

1- Consideremos um cubo de lado *a;* juntando dois desses cubos obtemos um paralelepípedo de arestas *2a, a,* e *a,* cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial.





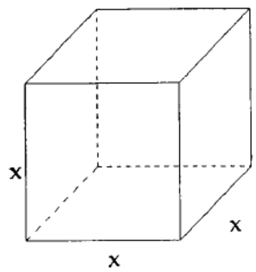
2- Suponhamos, agora, que pretendemos transformar o paralelepípedo em outro com o mesmo volume, a mesma altura *a*, mas com uma das arestas da base *x* . Tendo em vista que o volume terá de se manter o mesmo, a outra aresta da base terá de se alterar, vamos denotá-la por *y*.



Como o volume e a altura dos sólidos das últimas duas figuras se mantiveram, temos que $xy = 2a^2$ onde

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \quad (1)$$

3- Finalmente vamos transformar o paralelepípedo da figura anterior num cubo, mantendo o volume, mas de aresta *x*.



Assim, a face de arestas *a* e *y* transformou-se numa face quadrada de aresta *x*, mas com a mesma área: $ay=x^2$, e assim temos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

4- De (1) e (2) deduzimos então, como pretendíamos, que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Não se tem registros de que Hipócrates tenha sido capaz de construir as duas meias proporcionais a que se refere na sua redução do problema da *duplicação do cubo* ao problema das *duas meias proporcionais;* aliás, será que ele procurou tal construção?

É amplamente aceito que Hipócrates reduziu o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar duas meias proporcionais entre duas linhas dadas. Mais tarde os geômetras reconheciam claramente que uma *redução* não é ela própria equivalente a uma *solução* do problema proposto.

Alguns Métodos de Duplicação do Cubo

Depois de Hipócrates ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar duas meias proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que as tentativas subsequentes de duplicação do cubo basearam-se em encontrar uma construção para as duas meias proporcionais entre estes dois segmentos de reta.

Apresentaremos agora algumas soluções do problema da duplicação do cubo, quase todas baseadas em achar duas meias proporcionais entre duas grandezas, usando construções que não podem ser efetuadas somente com régua não graduada e compasso e curvas que não podem ser traçadas usando somente estes dois instrumentos.

2.1.1 A Máquina de Platão

O filósofo grego Platão (viveu de 429 a 347 a.C.) tinha grande interesse pela Matemática e lhe atribuía importância particular. Gravitaram em torno dele alguns excelentes matemáticos, como, por exemplo, Árquitas, Eudoxo, Menecmo, Teeteto, entre outros.

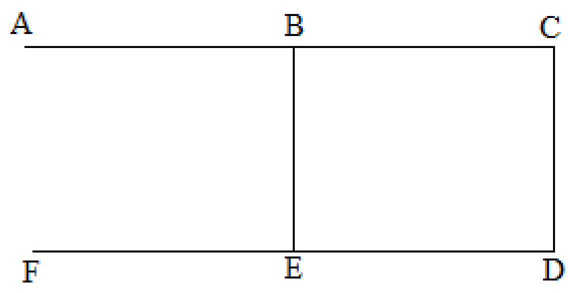
Eutócio atribui a Platão uma solução de cunho mecânico para o problema da duplicação do cubo, ou melhor, para o problema da inserção de duas meias proporcionais entre dois segmentos de reta.

No entanto, é amplamente aceito que esta solução foi incorretamente atribuída a Platão. É bem conhecido que Platão desprezava construções mecânicas, materiais em Matemática. Assim, é irônico que a solução discutida a seguir seja conhecida como “máquina de Platão”.

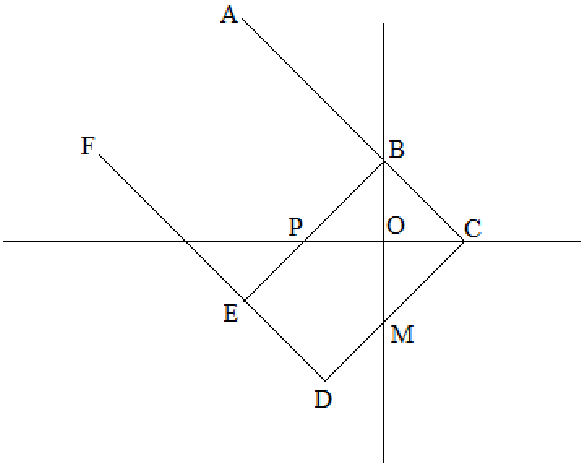
Existem duas teorias relativas à autoria da solução mecânica atribuída a Platão para resolver o problema da duplicação do cubo. Uma que defende que Platão inventou esta solução mecânica para ilustrar como é fácil descobrir tais soluções; a outra, talvez a mais aceita, que defende que esta solução mecânica foi inventada pelos seus discípulos na Academia.

Como sabemos que o cubo não pode ser duplicado somente com régua não graduada e compasso, esta construção não pode ser efetuada usando somente estes instrumentos. Vejamos então em que consiste a solução mecânica atribuída a Platão.

A “máquina de Platão” é um dispositivo, formado por partes rígidas, em que *ACDF* é uma peça rígida, com os segmentos de retas *AC* e *FD* paralelos, e o segmento *CD* perpendicular a ambos. O segmento *BE* é paralelo ao segmento *CD* e pode deslizar ao longo de *AC* e de *FD*, conforme ilustra a figura a seguir.



Para achar duas meias proporcionais entre $\overline{OP} = a$ e $\overline{OM} = b$, movimentamos *ACDF* de maneira que o segmento *CD* passe por M, C esteja sobre o eixo horizontal e fazemos *BE* deslizar até que passe por *P* e *B* esteja sobre o eixo vertical, como mostrado na figura seguinte.



Vemos que os triângulos *POB* e *MOC* são semelhantes e, portanto,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}}.$$

Como os triângulos *POB* e *OCB* também são semelhantes, temos que

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$$

e assim, chegamos a

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} \Rightarrow \frac{a}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{b},$$

o que mostra que $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são de fato meias proporcionais entre *a* e *b*.

2.1.2 A Solução de Menécmo

A fama de Menécmo, matemático do século IV *a.C,* está relacionada com as curvas que hoje conhecemos pelo nome de cônicas - elipse, parábola e hipérbole; nomeadamente com a descoberta de que estas curvas se podem obter por intersecção de um cone reto de base circular, com um plano perpendicular a uma geratriz.

As descobertas de Menécmo advieram da sua procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema de encontrar as duas meias proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções de Menécmo, preservadas por Eutócio, têm por base a construção de um certo ponto como a intersecção de duas cônicas, num dos casos uma parábola e uma hipérbole equilátera, no outro caso duas parábolas.

Tendo em vista a redução feita por Hipócrates, o problema que então se coloca é determinar duas *meias proporcionais* entre dois segmentos *a* e *2a* (sendo *a* a aresta do cubo a duplicar), ou seja, a determinação de *x* e *y* tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}. \quad (1)$$

Na linguagem da atual geometria analítica é fácil reconhecer que para se verificar a relação anterior basta que se verifiquem duas das três equações seguintes:

$$x^2 = ay, \quad (2)$$

$$xy = 2a^2, \quad (3)$$

$$y^2 = 2ax. \quad (4)$$

Para tornar-se mais elucidativo, de (2) podemos ainda deduzir

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad (5)$$

e de (4) deduzimos

$$x = \frac{y^2}{2a}. \quad (6)$$

Portanto, podemos obter x de dois modos:

- como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a hipérbole equilátera $xy = 2a^2$ - *a primeira solução de Menécmo*

- como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a parábola $x = \frac{y^2}{2a}$ - *a segunda solução de Menécmo.*

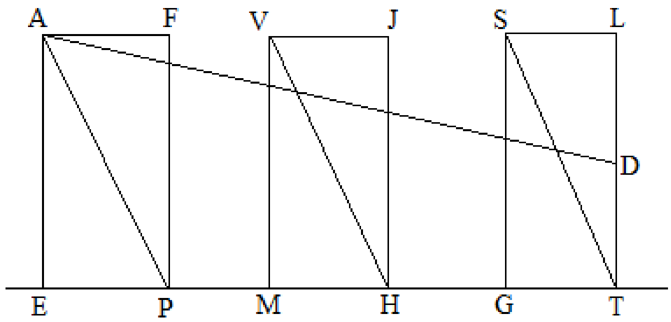
Note-se que, em ambos os casos, se conclui que $x^3 = 2a^3$, ou seja, *x é* a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo dado, de aresta *a*. A luz dos nossos conhecimentos (e notações) atuais estas soluções parecem simples, mas para Menécmo que não podia recorrer à geometria analítica - um legado de Descartes no séc. XVII - são muito elaboradas, e não é de admirar que tenham exigido de Menécmo uma atenção especial às propriedades das curvas em questão.

É claro que Menécmo não formulou sua solução usando a representação analítica das parábolas ou hipérboles, mas seu raciocínio é equivalente a isso.

2.1.3 A Máquina de Eratóstenes

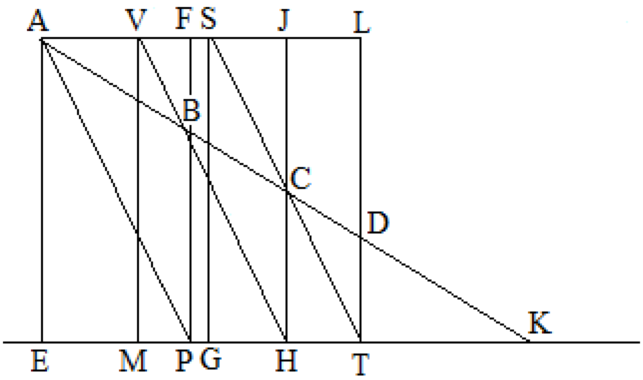
O nome de Eratóstenes de Cirene não está apenas associado ao problema da duplicação do cubo. Está também associado a uma solução do problema em encontrar as duas meias proporcionais, através de um instrumento mecânico.

Considere três placas retangulares *AEPF*, *VMHJ*, e *SGTL* que podem deslizar sobre uma reta de maneira que a placa média, (*VMHJ*) pode passar por traz da primeira, (*AEPF*), e que a última, (*SGTL*), deslize por traz da do meio. Suponha que desejamos achar duas meias proporcionais entre $a = \overline{AE}$ e $b = \overline{DT}$, conforme a figura seguinte.



Traçamos o segmento *AD* e fazemos as placas deslizarem, como descrito anteriormente, de maneira que o lado direito *PF* da primeira placa (*AEPF*), intercepta a diagonal *VH* da segunda placa (*VMHJ*), exatamente sobre *AD*, no ponto *B*.

De maneira semelhante, fazemos deslizar a terceira placa (*SGTL*) de tal forma que o lado direito *JH* da segunda placa corte a diagonal *ST* exatamente sobre *AD*, no ponto *C*, como mostrado na figura a seguir.



Com efeito, como os triângulos *AEK* e *BPK* são semelhantes, temos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KP}}. \quad (1)$$

Temos também que os triângulos *BPK* e *CHK* são semelhantes, e, portanto

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}. \quad (2)$$

Da semelhança dos triângulos *CHK* e *DTK* segue-se que

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}}. \quad (3)$$

Da semelhança dos triângulos *APK* e *BHK* decorre

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}}. \quad (4)$$

Além disso, como os triângulos *BHK* e *CTK* são semelhantes, vemos que

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}. \quad (5)$$

De (3) e (5) obtemos

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}, \quad (6)$$

pois ambos têm $\frac{\overline{KH}}{\overline{KT}}$ em comum.

Como (2) e (6) têm $\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ em comum, segue-se que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}}. \quad (7)$$

Como (1) e (4) têm $\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$ em comum, segue-se que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}}. \quad (8)$$

De (7) mantenhamos somente as razões que nos interessam:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}}. \quad (9)$$

De (8) mantenhamos somente as razões que nos interessam:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KH}}. \quad (10)$$

Como (9) e (10) têm $\frac{\overline{KP}}{\overline{KH}}$ em comum, obtemos, enfim, que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}}, \quad (11)$$

como queríamos demonstrar.

■

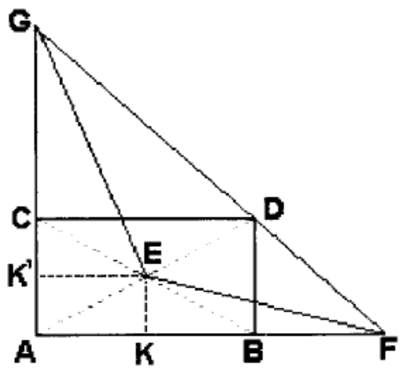
O processo descoberto por Eratóstenes pode ser usado para inserir qualquer número de meias proporcionais entre *a* e *b*. Para inserir *n* meias proporcionais, é suficiente tomar *n+1* retângulos e proceder como acima.

2.1.4 A Solução de Hierão

A solução de Hierão de Alexandria, matemático que possivelmente terá vivido no séc. I d.C, aparece nas suas obras *Mecânica* e *Belopoeica* e é também umas das onze soluções transmitidas por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro.* Vejamos em que consiste essa construção

Esta solução da duplicação do cubo baseia-se na determinação de dois pontos, G e F, com características especiais. Tais pontos não serão possíveis de se construir com o uso da régua não graduada e compasso mas, como veremos, será possível se a régua empregada tiver uma borda com marcas.

Sejam $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ as medidas de dois segmentos entre os quais pretendemos construir as duas meias proporcionais. Construímos o retângulo *CABD,* sendo E o ponto de intersecção das suas diagonais. Traçamos o segmento FG de modo que FG passa pelo ponto D e encontra o prolongamento de AB no ponto F e o prolongamento de AC no ponto G. Além disso, os pontos F e G são determinados de modo que $\overline{EF} = \overline{EG}$. Observe a figura a seguir.



Assim, as medidas dos segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{BF}$ são as meias proporcionais procuradas, isto é,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DB}}.$$

Para demonstrarmos estes fatos, devemos usar a Proposição II.6, dos *Elementos* de Euclides, cujo enunciado é o seguinte:

“Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada é igual, se lhe for adicionado o quadrado sobre a metade da reta, ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada.”

Seja K o ponto médio de $\overline{AB}\ \left(=\overline{CD}\right)$, então (utilizando a Proposição II.6 acima) temos

$$\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{BK}^2=\overline{FK}^2.$$

Adicionando $\overline{KE}^2$ a ambos os membros obtemos

$$\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{BK}^2+\overline{KE}^2=\overline{FK}^2+\overline{KE}^2,$$

e, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos BKE e FKE, obtemos

$$\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{EB}^2=\overline{EF}^2. \quad (1)$$

Seja agora K' o ponto médio de $\overline{AC}$, então, tendo em vista a Proposição II.6 acima, temos

$$\overline{AG}.\overline{CG}+\overline{CK'}^2=\overline{GK'}^2.$$

Adicionamos $\overline{K'E}^2$ a ambos os membros, obtemos

$$\overline{AG}.\overline{CG}+\overline{CE}^2=\overline{GE}^2. \quad (2)$$

Como $\overline{EB}=\overline{CE}$ e $\overline{EF}=\overline{GE}$, de (1) e (2) obtém-se que

$$\overline{AF}\cdot\overline{FB}=\overline{AG}\cdot\overline{CG},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{FB}}. \quad (3)$$

Consideremos agora os triângulos GCD, GAF e DBF, os quais são semelhantes entre si, tem-se que

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{FB}}{\overline{DB}}.$$

Assim, considerando (3) tem-se que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{DB}},$$

isto é, $\overline{CG}$ e $\overline{BF}$ são as meias proporcionais entre os segmentos dados, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$, como queríamos demonstrar.

■

2.1.5 O Método de Diocles

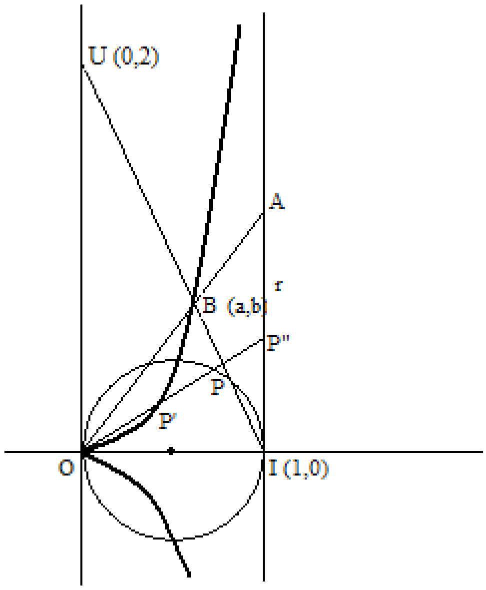
Durante longo período de tempo tudo o que se conhecia sobre a obra e vida de Diocles, matemático do início do séc. II a.C, era através de dois fragmentos da sua obra *Dos Espelhos Cáusticos,* preservados por Eutócio no comentário ao já referido texto de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro.* Um desses fragmentos é a contribuição de Diocles para o famoso problema de Delos.

Deve-se a Diocles a solução do problema da duplicação do cubo por meio de uma nova curva - a *cissóide.* Segundo parece não foi Diocles quem lhe atribuiu este nome, pois nos seus escritos ele utiliza o termo 'linha' para se referir a tal curva e além disso, o nome *cissóide* ('forma de hera') é mencionado pela primeira vez por Gemino no séc. I a.C, isto é, cerca de um século depois da morte do inventor Diocles.

Mais tarde, o método usado para gerar a curva atribuída a Diocles foi generalizado e todas as curvas geradas por um processo análogo ao da cissóide de Diocles são designadas por cissóides.

Comecemos por definir a curva cissóide no seu caso geral.

Seja uma circunferência que passa pela origem O do sistema de coordenadas, tem seu centro sobre o eixo dos x e diâmetro igual a 1. Sejam I (1,0) e U (0,2). Seja r a reta vertical que passa por I. Seja P um ponto qualquer sobre a circunferência. A reta que passa por O e por P intercepta r no ponto P''. Tome o ponto P' sobre a reta suporte do segmento OP tal que $\overline{OP} = \overline{P''P'}$. A cissóide é o lugar geométrico do ponto P' quando P percorre a circunferência.



A equação polar de uma circunferência que passa pela origem, tem raio R e centro sobre o eixo dos x é

$$\frac{\rho}{2R} = \cos\theta,$$

onde $(*)$ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sen\theta. \end{cases}$

Como, neste caso, $R = \frac{1}{2}$, a equação se reduz a $\rho = \cos\theta$.

Por outro lado, $\overline{OP''} = \frac{1}{\cos\theta}$, (pois, $\frac{\overline{P''I}}{1} = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{P''I}}{\overline{OP''}}$) e

Como $\overline{OP'} + \overline{P'P''} = \overline{OP''}$ e $\overline{OP} = \overline{P'P''}$, segue-se que $\overline{OP'} = \overline{OP''} - \overline{OP}$, de maneira que a equação polar da cissóide é

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{sen^2\theta}{\cos\theta}.$$

Desta equação obtemos $\rho\cos\theta = sen^2\theta$ que, junto com as equações de (*) obtemos $x = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2$. Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, a equação cartesiana da cissóide é

$$x = \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

ou seja,

$$x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

Consideremos agora o ponto de intersecção, *B(a,b)*, da reta suporte do segmento *IU* com a cissóide. A equação cartesiana da reta suporte do segmento *IU* é y = 2(1 – x), de maneira que b = 2(1 – a), e assim, como *B* pertence à cissóide,

$$a(a^2 + b^2) - b^2 = 0$$

$$a^3 + ab^2 - b^2 = 0$$

$$a^3 = b^2(1 - a) = \frac{b^3}{2}$$

$$2a^3 = b^3.$$

Determinamos agora a intersecção da reta $y = \sqrt[3]{2}x$, que passa por *O* e por *B* com a reta x = 1. Esta interseção é o ponto *A*:

$$y = \sqrt[3]{2}.$$

Temos, então, que as coordenadas de *A* são $\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$. Se temos um cubo cuja aresta mede 1, para duplicar seu volume, devemos achar a aresta *y* de um cubo que tem volume 2. Ou seja, devemos ter $y = \sqrt[3]{2}$. Assim vemos, portanto, que a ordenada *y* do ponto *A*, determinada anteriormente, resolve o problema.

2.2 A quadratura do círculo

Como já dissemos, “quadrar” o círculo, ou seja, traçar, com régua não graduada e compasso, um quadrado com área igual à área do círculo é um problema bem natural, uma vez resolvido o problema de fazer a quadratura de formas poligonais.

Análogo aos outros dois problemas gregos, o problema que tem por pretensão a construção de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo dado, utilizando apenas a régua e o compasso, foi solucionado somente no século XIX, ou seja, demonstrou-se que o problema da quadratura do círculo não tem solução.

O primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas apenas com régua não graduada e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em

1837. Mas foi o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) quem demonstrou formalmente, em 1882, que π é um número transcendente sobre o corpo dos números racionais (veja [F]), pelo que é impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua não graduada e compasso, como já vimos no final do primeiro capítulo.

Em síntese, o quadrado procurado deve possuir lados de comprimento $\sqrt{\pi}$.

Embora existam aproximações consideráveis, é impossível quadrar o círculo com os instrumentos euclidianos. No *Papiro Rhind* ou *Ahmes* é dado uma solução plana para se construir um quadrado de área próxima a de um círculo. Para isso o lado do quadrado deveria ser $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Embora esta não seja uma construção geométrica precisa é uma boa aproximação, pois corresponde a tomar *3,1605* como valor para π ao invés de *3,14159...*.

Porém os gregos antigos também tentaram achar outras soluções, através de algumas curvas que foram inventadas, ou através de construções mecânicas.

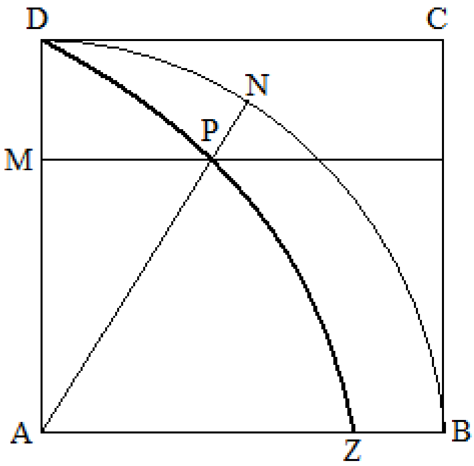
Anaxágoras foi o primeiro matemático do qual temos registro de ter tentado solucionar este problema.

Dinóstrato desenvolveu um método para quadrar o círculo através de *quadratriz ou trissectriz de Hipias*.

Veremos agora como os matemáticos gregos encontraram maneiras de resolver este problema usando curvas e construções que não podem ser construídos somente com régua não graduada e compasso.

2.2.1 A Quadratriz

Esta curva notável resolve dois dos problemas clássicos: a quadratura do círculo e a trisecção de um ângulo arbitrário. Para construí-la, suponhamos que no quadrado *ABCD* o lado *AD* gira com movimento circular uniforme em torno de *A* até que coincide com o lado *AB*. Ao mesmo tempo, o lado *DC* desce com velocidade constante até coincidir com *AB*. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, *DC* e *AD* coincidam com *AB* no mesmo instante.



A quadratriz é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva *DPZ* da figura anterior.

A quadratriz foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinóstrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez usou esta curva para fazer a quadratura do círculo.

Afirmamos que $\overline{AZ} = \frac{2a}{\pi}$, com a o comprimento do lado do quadrado. Com efeito, sejam θ o ângulo $P\hat{A}Z$, $x = \overline{MP}$, $y = \overline{AM}$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DC} = a$. Então, devido à proporcionalidade dos dois movimentos, temos que $\frac{y}{\theta} = k$, com k a constante de proporcionalidade. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k,$$

de maneira que

$$k = \frac{2a}{\pi}$$

e podemos concluir que

$$y = \frac{2a\theta}{\pi}.$$

Colocando x e y na forma polar: $x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho sen\theta,$

onde ρ é a medida do segmento $\overline{AP}$, temos,

$$\rho = \frac{y}{sen\theta} = \frac{2a\theta}{\pi sen\theta}.$$

Como $\overline{AZ} = \lim_{\theta\to 0}\rho$ segue que

$$\overline{AZ} = \lim_{\theta\to 0}\rho = \lim_{\theta\to 0}\frac{2a\theta}{\pi\, sen\theta} = \frac{2a}{\pi}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{sen\theta} = \frac{2a}{\pi}.$$

(pois $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{sen\theta} = 1$)

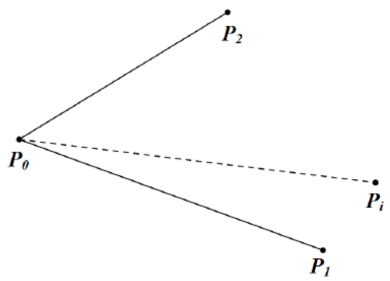
e assim vemos que

$$\overline{AZ} = \rho = \frac{2a}{\pi}.$$

Após obter um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ é imediato construir π para fazer a quadratura do círculo. Com efeito, é fácil dividir, usando somente régua e compasso, $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$ e, em seguida, tomar o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

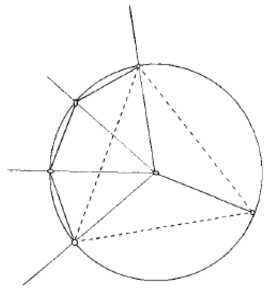
2.3 A Trisecção do Ângulo

“A partir de um ângulo arbitrário construir um ângulo igual à terça parte do ângulo dado, utilizando apenas a régua e o compasso”, desta forma se consagrou o problema da trissecção do ângulo. Em outras palavras, dados pontos P_0, P_1 e P_2, os quais determinam um ângulo, desejamos a construção de um ponto P_i, tal que o ângulo $P_i\hat{P}_0P_1$ seja exatamente um terço do ângulo $P_2\hat{P}_0P_1$.



Há pelo menos dois aspectos em que o problema da trissecção do ângulo (dividir um ângulo arbitrário, apenas com régua não graduada e compasso, em três partes iguais) difere dos outros dois clássicos problemas da geometria grega - a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Em primeiro lugar não existe nenhuma lenda que lhe esteja associada; em segundo lugar, enquanto que não é possível duplicar um cubo ou quadrar um círculo, com régua não graduada e compasso, por mais especiais que sejam os valores da aresta do cubo ou do raio do círculo é, no entanto, possível trissectar ângulos de determinadas amplitudes.

Não é conhecida a origem do problema da trissecção do ângulo, mas é muito provável que tenha surgido no seguimento da construção de polígonos regulares. Por exemplo, para construir um polígono regular de nove lados é necessário trissectar um ângulo de 120°.



No entanto, não será de excluir a hipótese deste problema ter nascido como uma extensão natural da bissecção de um ângulo, tarefa extremamente fácil e possível de executar com régua não graduada e compasso. A divisão de um segmento de reta em várias partes iguais, com os instrumentos euclidianos, é simples e poderá, também, ter levado ao problema da trissecção do ângulo, num esforço de transpor para ângulos o que era possível efetuar em segmentos de reta. Deste modo, o problema da trissecção de um ângulo - ou o mais geral, de dividir um ângulo em um número qualquer de partes iguais - podia surgir naturalmente.

Tendo em vista o simples enunciado deste clássico problema, dividir um ângulo em três partes iguais parecia ser uma tarefa trivial e, talvez por esse fato, tenha sido difícil de aceitar, desde a Grécia clássica até ao nosso século, que não era possível encontrar uma solução de acordo com os requisitos euclidianos.

2.3.1 Casos particulares da trissecção de ângulos

Como vimos, além das origens obscuras, o problema da trissecção do ângulo difere dos demais problemas clássicos da geometria. Enquanto quadrar o círculo e duplicar o cubo via régua não graduada e compasso é impossível, trissectar alguns ângulos particulares são possíveis usando somente os instrumentos euclidianos.

A divisão do ângulo em três partes iguais, apenas com régua e compasso, só é exeqüível em alguns casos particulares (por exemplo: 45°, 90°, 180°, 270°, etc.), sendo impossível de uma maneira geral. Neste contexto, a questão chave do problema da trissecção se resume a: quais ângulos podem ser trisseccionados atendendo à restrição dos instrumentos tradicionais?

A questão sobre a construtibilidade de um ângulo está intrinsecamente relacionada aos conceitos advindos da trigonometria. Se um ângulo θ qualquer é construtível, consequentemente, seu seno e cosseno também o são, neste sentido, o problema da trissecção do ângulo θ é naturalmente traduzido para a construção de $\cos\frac{\theta}{3}$ ou $sen\frac{\theta}{3}$. Tal panorama culminou na admissão da seguinte relação originária das identidades trigonométricas.

Para $a = \frac{\theta}{3}$, temos que:

$$\cos\theta = \cos(2a + a).$$

Ou seja,

$$\cos\theta = \cos 2a.\cos a - sen2a.sena$$

$$\cos\theta = (\cos^2 a - sen^2 a).\cos a - 2.sena.\cos a.sena$$
$$\cos\theta = [\cos^2 a - (1-\cos^2 a)]\cos a - 2.sen^2 a.\cos a$$
$$\cos\theta = [2.\cos^2 a - 1].\cos a - 2.(1-\cos^2 a)\cos a$$
$$\cos\theta = 2\cos^3 a - \cos a - 2.\cos a + 2.\cos^3 a$$
$$\cos\theta = 4.\cos^3 a - 3.\cos a.$$

Portanto, temos que:

$$\cos\theta = \cos\left(2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \left(\frac{\theta}{3}\right)\right) = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Equivalentemente, se tomarmos $\cos\theta = m$ e $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = p$ o problema passa então a ser encontrar as raízes da equação $4p^3 - 3p = m$, ou ainda, $4p^3 - 3p - m = 0.$

Como já foi dito, os gregos não possuíam o instrumental matemático necessário para prover as soluções de determinadas equações, entretanto no período que se seguiu é aplausível inferir que as tentativas de resolução do problema da trissecção do ângulo foram favoráveis ao desenvolvimento da geometria.

A seguir, veremos algumas resoluções deste problema utilizando curvas e construções que não podem ser efetuadas somente com régua não graduada e compasso.

2.3.2 A Contribuição de Arquimedes: uma solução do problema por *neusis*.

Arquimedes de Siracusa foi um célebre geômetra do século III a.C, e um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Embora não se conheçam construções diretamente a ele atribuídas para a solução do problema da trissecção do ângulo, pelo menos dois dos seus trabalhos indicam soluções para o referido problema: a proposição 8 do *Livro dos Lemas* e a curva espiral definida na obra *Acerca das Espirais.*

Primeiramente, descreveremos sobre as construções por ajustamento ou por *neusis*.

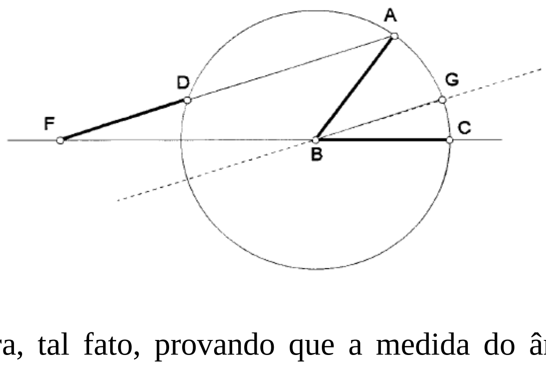
Em uma construção por *neusis* deve-se ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado.

Embora nada tenha chegado até nós sobre o interesse direto de Arquimedes pelo problema da trissecção do ângulo, sendo este um problema tão famoso na época é de estranhar que Arquimedes não lhe tenha dado uma especial atenção. Sobretudo, porque utilizou construções por *neusis* em várias proposições na sua obra *Acerca das Espirais* e, provavelmente, nessa época já era conhecida a redução do problema da trissecção do ângulo a uma construção por *neusis*.

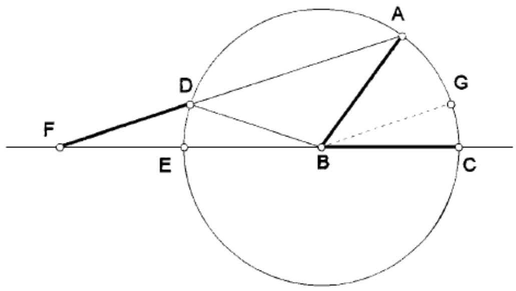
Em termos de teoria matemática a maior parte das construções por *neusis* dos gregos requerem o uso de cônicas ou curvas de grau superior a dois.

A construção que mostraremos a seguir, que utiliza *neusis*, é um exemplo das várias soluções do problema da trissecção do ângulo proposta por Arquimedes.

Considere-se o ângulo agudo $A\hat{B}C$ o qual pretendemos trissectar. Construa-se uma circunferência de centro *B* e raio *r* (arbitrário), intersectando os lados do ângulo nos pontos *A* e C. O segmento de reta *FD*, de comprimento igual ao raio *r*, é *inserido* entre a reta suporte do segmento *CB* e a circunferência, de tal modo que o ponto *A* esteja no seu prolongamento. Tracemos uma reta paralela ao segmento *AF*, que passe pelo ponto *B*, intersectando a circunferência num ponto que vamos designar por *G*. Assim, o ângulo $G\hat{B}C$ é a terça parte do ângulo $A\hat{B}C$.



Provemos, agora, tal fato, provando que a medida do ângulo $A\hat{B}G$ *é* o dobro da medida do ângulo $G\hat{B}C$. Pelo paralelismo de *BG* e *FA*, podemos tirar duas conclusões. Por um lado, as medidas dos ângulos $G\hat{B}C$ e $D\hat{F}B$ são iguais, por serem ângulos correspondentes no sistema das retas paralelas cortadas pela transversal *FB.* Por outro lado, as medidas dos ângulos $B\hat{A}F$ e $A\hat{B}G$ são iguais, por serem ângulos alternos internos no sistema das mesmas paralelas cortadas pela transversal *AB.*



Tendo em vista que $\overline{FD}$, $\overline{DB}$ e $\overline{AB}$ são iguais, os triângulos *BAD* e *FBD* são isósceles, assim, vem que as medidas dos ângulos $D\hat{F}B$ e $E\hat{B}D$ são iguais, e de igual modo são iguais as medidas dos ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{D}B$. Note-se que $A\hat{D}B$ é um ângulo externo ao triângulo *FBD* e, podemos concluir que a medida do ângulo $A\hat{D}B$ é igual à soma das medidas dos ângulos internos opostos, $F\hat{B}D$ e $D\hat{F}B$. Mas, tendo em vista que a medida do ângulo $F\hat{B}D$ é igual à do ângulo $D\hat{F}B$, podemos afirmar que a medida do ângulo $B\hat{A}D$ (que é igual à do ângulo $A\hat{D}B$) é o dobro da medida do ângulo $D\hat{F}B$, ou seja, a medida do ângulo $A\hat{B}G$ é o dobro da do ângulo $G\hat{B}C$. Tínhamos visto anteriormente que a medida do ângulo $D\hat{F}B$ era igual à do ângulo $G\hat{B}C$, logo provamos o que pretendíamos, isto é, que a medida do ângulo $A\hat{B}G$ é o dobro da do ângulo $G\hat{B}C$. ■

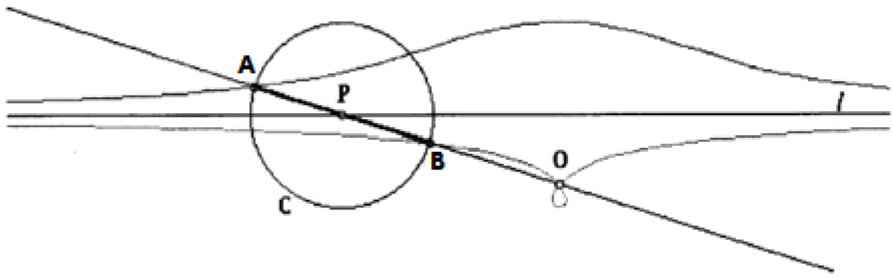
Embora se possa afirmar que temos uma solução para o problema da trissecção do ângulo, o segmento de reta em questão não pode ser inserido apenas com régua não graduada e compasso. Segundo parece, Arquimedes não apresentou um processo para inserir o segmento *FD;* no entanto, podemos mover adequadamente uma régua com duas marcas (cuja distância seja *r*, o comprimento requerido para o segmento *FD)* de modo a inserir tal segmento. Mas, obviamente, esse não é o único caminho, pois foram inventados instrumentos mecânicos que permitem resolver esta *neusis*.

2.3.3 A Trissecção do Ângulo por Nicomedes.

Segundo parece, Nicomedes inventou a *conchóide* (curva em forma de concha), para resolver quer o problema da trissecção do ângulo quer o problema da duplicação do cubo.

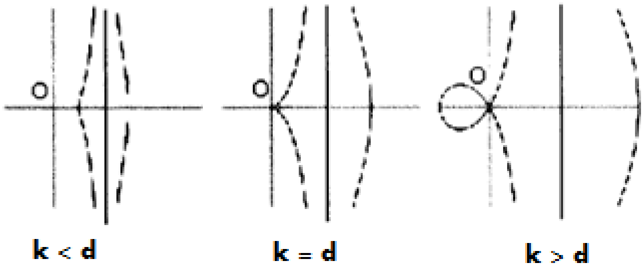
Comecemos por definir a conchóide de uma curva: considere uma curva qualquer, um ponto fixo *O*, exterior à curva, e uma dada distância k. Trace uma reta passando por *O* e encontrando a curva no ponto *P*. Se *A* e *B* forem pontos sobre a reta suporte do segmento *OP* tais que $k = \overline{AP} = \overline{BP}$, então *A* e *B* desenham a conchóide da curva em questão em relação ao ponto fixo *O*. Note-se que a conchóide de uma curva varia de acordo com o ponto fixo escolhido, bem como com a distância k, previamente considerada.

Um caso particular, e aquele que irá nos interessar, é a conchóide de uma reta. Descrevemos sua construção: considere-se uma reta *l*, um ponto *O* exterior à reta e uma circunferência C cujo raio seja igual à distância *k* (previamente definida) e com o seu centro sobre a reta *l*, como ilustra a seguinte figura.



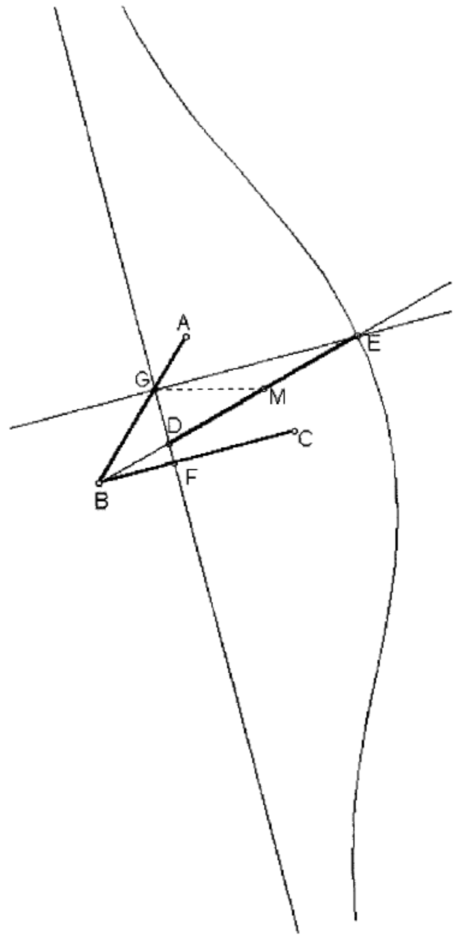
Consideremos a circunferência, de centro *P*, movendo-se ao longo da reta *l*, isto é, sempre com o centro sobre a reta. Seja ainda a reta que une o ponto *O* ao ponto *P*. Os pontos *A* e *B*, de intersecção desta reta com a circunferência, quando esta se move, desenham os dois ramos da conchóide.

A curva conchóide tem dois ramos e, dependendo da relação entre a distância predefinida *k* e a distância *d*, entre o ponto *O* e a reta *l*, *(k < d, k = d, k > d)* obtemos, respectivamente, uma conchóide de cada um dos seguintes tipos:



Vejamos, agora, como podemos utilizar a conchóide de Nicomedes para efetuar a trissecção do ângulo, ou mais propriamente, resolver o respectivo problema por neusis. O que pretendemos é inserir um segmento de reta, de comprimento predefinido, entre duas retas, de modo que um certo ponto se encontre no prolongamento desse segmento. Dado um ângulo agudo $A\hat{B}C$, o qual pretendemos trissectar, podemos construir a conchóide pretendida do seguinte modo:

Por um ponto *G* de um dos lados do ângulo, traçamos uma paralela e uma perpendicular ao lado *BC* do ângulo, designando por *F* a intersecção da perpendicular com o lado *BC*. Traça-se a conchóide de Nicomedes definida pela reta suporte do segmento *GF*, pelo ponto *B* e por uma circunferência de raio $2\overline{GB}$ e centro sobre *GF*.



Seja *E* a intersecção da conchóide, no lado oposto ao ponto *B* com relação a *GF*, com a reta paralela ao lado *BC*, que passa por G. Assim, utilizando a conchóide de Nicomedes, inserimos o segmento *DE*, cuja medida é o dobro da do segmento *BG*, entre *GF* e *GE*, e passando pelo ponto *B*.

Assim, podemos concluir (tendo em vista o que foi anteriormente provado em 2.3.2) que a medida do ângulo $D\hat{B}C$ é a terça parte da medida do ângulo $A\hat{B}C$.

Observe que, contrariamente ao que se passa com outras curvas, em que a mesma curva permite trissectar qualquer ângulo, com uma dada curva conchóide só podemos trissectar um determinado ângulo. Isto é, para cada ângulo que pretendemos trissectar necessitamos de uma conchóide adequada, pois a construção da conchóide depende do ponto escolhido e da distância previamente definida. Isto quer dizer que, se tivermos uma conchóide, é possível ajustar o ângulo que queremos trissectar a um dos dois parâmetros da curva, à distância $2\overline{GB}$ ou à posição do ponto *B* (mais propriamente a distância do ponto *B* a *GF*), mas não a ambos simultaneamente. Embora a conchóide de Nicomedes permita obter uma solução para o problema da trissecção do ângulo, o nosso problema inicial continua sem solução, já que não é possível desenhar a conchóide de Nicomedes apenas com régua não graduada e compasso.

2.3.4 A Solução Atribuída a Hípias: a trissecção do ângulo usando a quadratriz

O nome de Hípias de Elis, geômetra do séc. V a.C, ficou marcado na história da matemática principalmente pela sua contribuição com uma solução para o problema da trissecção do ângulo.

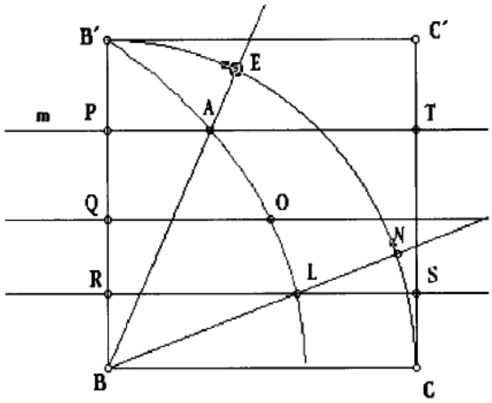
Papo de Alexandria no livro IV da sua *Coleção Matemática* descreve uma das mais antigas curvas da matemática, talvez a primeira depois da reta e da circunferência. A descrição dada por Papo sobre a principal propriedade desta curva torna bastante admissível que esta tenha sido inventada durante as tentativas de trissecção do ângulo. Esta curva foi posteriormente usada por Dinóstrato para a quadratura do círculo e como tal é chamada umas vezes *trissectriz,* outras vezes *quadratriz.*

Como já dissemos, a quadratriz foi utilizada em primeiro lugar para resolver o problema da trissecção do ângulo. Como acontece frequentemente em Matemática, às vezes uma ideia que permite atacar com sucesso um problema mostra, posteriormente, ser capaz de resolver outros problemas. Isso aconteceu com a quadratriz, pois foi logo depois observado que ela também permite resolver o problema da quadratura do círculo.

Vamos então agora trissectar um ângulo agudo $A\hat{B}C$ utilizando a quadratriz. Começaremos por construir um quadrado *BB'C'C*, a partir do lado *BC* do ângulo $A\hat{B}C$.

Construímos a quadratriz (conforme já descrita anteriormente no item 2.2.1) e designemos por *A* (sem perda de generalidade) o ponto de intersecção de um dos lados do ângulo $A\hat{B}C$ com a curva. Por *A,* traçamos uma paralela a *B*'*C*'e designamos por *P* o ponto de intersecção dessa paralela com o segmento *BB'*.

Trissectamos o segmento *BP* (a trissecção de um segmento é possível com régua não graduada e compasso), sendo $\overline{BR}$ a sua terça parte. Por *R* traçamos uma outra paralela *a BC* e designamos por *L* o ponto de intersecção dessa paralela com a quadratriz. Assim, a medida do ângulo $L\hat{B}C$ é a terça parte da medida do ângulo $A\hat{B}C$.



Provemos, agora, tal fato. Começaremos, de acordo com a figura anterior, por designar por *E* e *N* os pontos de intersecção do arco $B'C$ com *BA* e *BL*, respectivamente. E por *T* e *S os* pontos de intersecção do lado *CC'* (do quadrado) com as retas suporte dos segmentos *PA* e *RL*, respectivamente.

Note-se que *PT* e *BE* se intersectam num ponto da quadratriz, *A*, e que *RS* e *BN* se intersectam num outro ponto da quadratriz, *L*.

Pelas propriedades da quadratriz, é válida a seguinte relação:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = \frac{arcoEC}{arcoNC} = \frac{med(A\hat{B}C)}{med(L\hat{B}C)},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = \frac{med(A\hat{B}C)}{med(L\hat{B}C)}.$$

Mas, como a medida do segmento de reta $\overline{BR}$ é a terça parte da medida do segmento de reta $\overline{BP}$, também a medida do ângulo $L\hat{B}C$ é a terça parte da medida do ângulo $A\hat{B}C$. Mais ainda, tendo em vista que se reduziu uma questão de proporcionalidade entre ângulos a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de reta, a quadratriz permite reduzir a multissecção de um ângulo agudo à multissecção de um segmento de reta.

■

Observe que, embora seja possível construir, com régua não graduada e compasso, alguns pontos da curva quadratriz, não é possível desenhar a curva na sua totalidade, com o uso apenas dos instrumentos euclidianos. Continuamos, assim, sem uma solução para o problema de acordo com as regras de resolução inicialmente impostas.

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO ATRAVÉS DO ORIGAMI: UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

3.1 Origami

Origami, é a arte japonesa de dobrar o papel. A origem da palavra advém do japonês ori (dobrar) e kami (papel). Apesar de ser um patrimônio da cultura japonesa, é provável que tenha começado na China, a qual é considerada "o berço do papel". Geralmente utiliza-se um pedaço de papel quadrado, cujas dobras são feitas sem poder cortar o papel. Conforme se foram desenvolvendo métodos mais simples de criar papel, o papel foi tornando-se menos caro, e o origami, cada vez mais uma arte popular.

Atualmente as diversas fontes para pesquisa na internet e a acessibilidade cada vez maior aos computadores podem trazer esse recurso para dentro das escolas na mesma velocidade que a rede avança. O Brasil é o sétimo maior produtor de celulose do planeta e a quantidade de papel presente em nossa sociedade prova que os meios podem ser encontrados em diversos locais e de forma bem acessível.

O conceito moderno do origami não só dobra papéis, mas também ajuda a dobrar utilidades, soluções e tecnologias ao redor do mundo. Os benefícios nos campos da Matemática, Ciência e Arte, por exemplo, se estenderam por diversas universidades sendo objeto de estudo em diferentes locais do planeta. Um bom exemplo está na Universidade de Nova Jersey nos Estados Unidos onde o origami é utilizado nas aulas de geometria computacional em 3 dimensões a algum tempo.

A presença do origami em nossa vida cotidiana é maior do que pensamos. Hoje o origami tem aplicabilidades que ultrapassam a nossa percepção na correria do dia-a-dia. O origami está presente nos automóveis onde - por meio de dobras - foi conseguida uma total eficiência no equipamento de segurança conhecido como “air-bag”, evitando explosões quando inflados. Nos aviões também, por meio das maiores envergaduras de asas já obtidas e dispositivos que se “dobram e desdobram” aumentando a eficiência das aeronaves e economizando espaço.

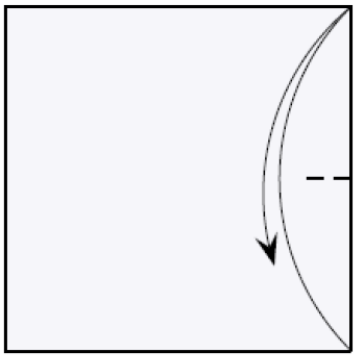
Um fato curioso foi que a forma mais eficiente para levar objetos grandes e planos ao espaço, tais como antenas e painéis solares de satélites, de maneira tal que ocupem pouco espaço durante o transporte, e uma vez no destino final, possam ser abertos rapidamente e com o mínimo gasto de energia, foi solucionada com o origami. O mesmo principio pode ser aplicado para dobrar mapas.

Com o origami, foi possível também desenvolver embalagens mais práticas como as caixas de comida chinesa, caixas de hambúrgueres, sacolas de compra etc. Até na moda o origami ajudou e ajuda a definir novos conceitos com roupas que podem ser dobradas e encaixadas para formar novas peças e novos estilos. São inúmeras as aplicabilidades do origami e isso significa que os países mais desenvolvidos já visualizaram o quanto é produtivo, utilizar origami em locais onde se produz conhecimento e desenvolvimento como escolas, universidades e centros de pesquisa. No Japão, por exemplo, o origami é aplicado na educação desde 1972 e as crianças são iniciadas pelos pais quando ainda pequenas.

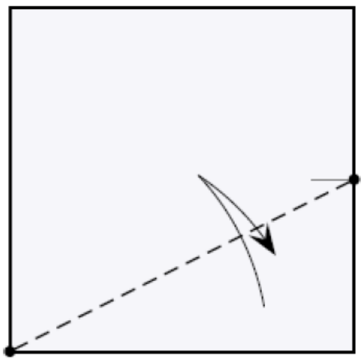
3.2 Resolvendo o problema da duplicação do cubo com origami

Partimos de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária. A solução consta de duas etapas, na primeira devemos dividir a folha em três partes iguais. Isso pode ser feito pelos seguintes passos:

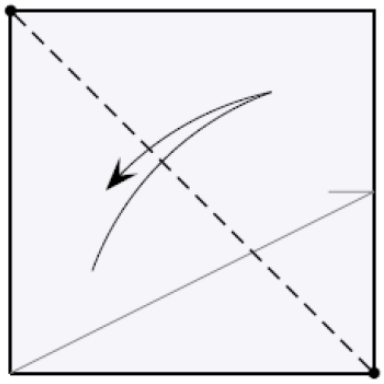
(1) Marcar o ponto médio na borda direita.



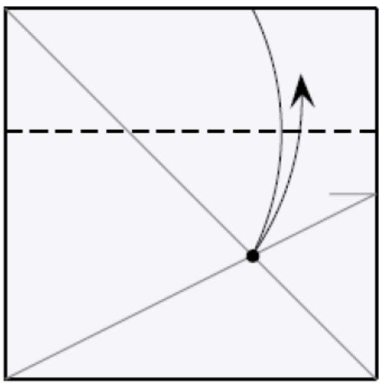
(2) Dobrar e abrir.



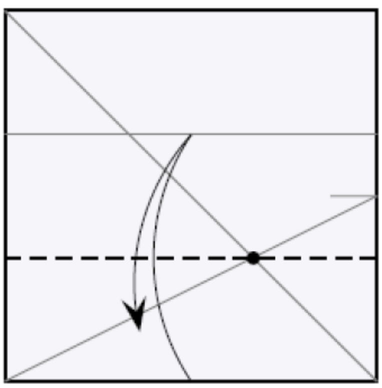
(3) Dobrar e abrir.



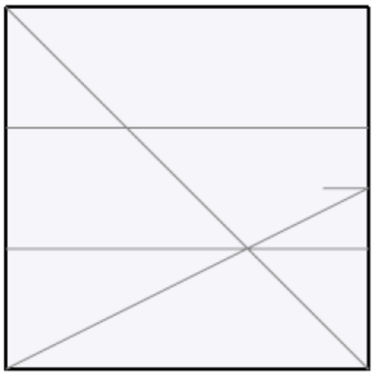
(4) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda superior toque a interseção das linhas de dobrado anteriores, e abrir.



(5) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda inferior toque a linha de dobrado anterior, e abrir.

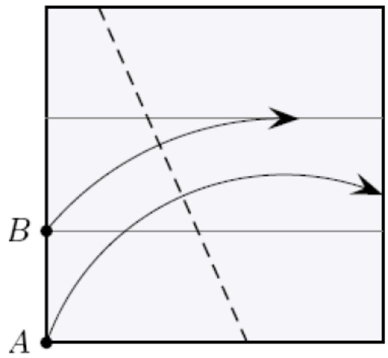


(6) As linhas de dobrado horizontais dividem a folha em três partes iguais.

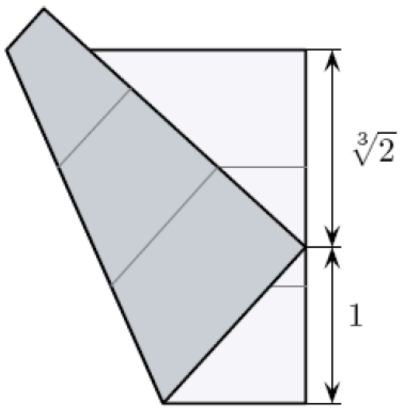


Os passos a seguir determinam $\sqrt[3]{2}$. As linhas que não são relevantes foram eliminadas para maior clareza.

(7) Dobrar de forma que o ponto A fique sobre a borda direita, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada.

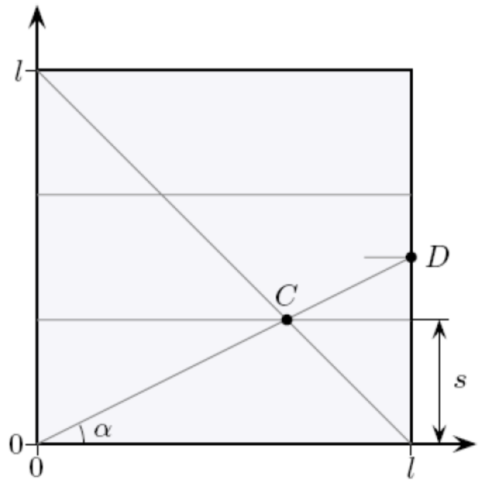


(8) Resultado final.



Demonstração

Primeiro demonstraremos que a seqüência de passos (1)-(6) divide a folha de papel em 3 partes iguais. O seguinte diagrama reproduz o resultado no passo (6). Temos colocado um par de eixos cartesianos , com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel. O comprimento dos lados da folha é *l*, indicado abaixo:



O ponto *C* está à mesma distância das bordas inferior e direita da folha, que chamamos de *s*, portanto suas coordenadas são $(x_C, y_C) = (l - s, s)$. As coordenadas do ponto *D* são $(x_D, y_D) = \left(l, \frac{l}{2}\right)$. Podemos então dizer que:

$$tg(\alpha) = \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l-s}$$

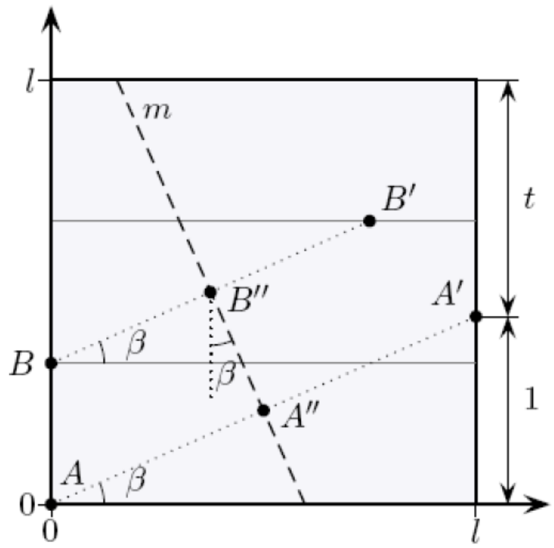
$$= \frac{y_D}{x_D} = \frac{1}{2}$$

Igualando as equações, obtemos:

$$\frac{s}{l-s} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2s = l - s \Rightarrow s = \frac{l}{3}$$

Pelos passos (4) e (5), a distância entre as linhas de dobrado horizontais, e entre a linha superior e a borda superior da folha, também deve ser $\frac{l}{3}$.

Agora, demonstraremos que a dobra do passo (7) determina $\sqrt[3]{2}$ sobre a borda direita da folha. Para isso, colocamos novamente um par de eixos cartesianos *x* e *y*, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel, conforme a figura seguinte.



Os pontos *A* e *B* são os indicados no passo (7) anterior, e têm coordenadas $(x_A, y_A) = (0,0)$ e $(x_B, y_B) = \left(0, \frac{l}{3}\right)$, respectivamente. Nesse mesmo passo, realizamos a dobra sobre a linha *m*, e os pontos *A* e *B* passam a ocupar as posições *A'* e *B'*, respectivamente, de coordenadas $(x_{A'}, y_{A'}) = (l,1)$ e $(x_{B'}, y_{B'}) = \left(a, \frac{2l}{3}\right)$, onde *a* designa a abscissa do ponto *B'*. Os pontos *A''* e *B''*, sobre a linha do dobrado, são os pontos médios dos segmentos *AA'* e *BB'*, respectivamente, e têm coordenadas $(x_{A''}, y_{A''}) = \left(\frac{l}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $(x_{B''}, y_{B''}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{l}{2}\right)$.

Pela geometria da figura, os três ângulos designados por β, com vértice em *A*, *B* e *B''*, são iguais. Calculemos o valor de $tg(\beta)$ em cada caso:

$$tg(\beta) = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{1-0}{l-0} = \frac{1}{l} \quad (1)$$

$$= \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}}{a-0} = \frac{\frac{2l-l}{3}}{a} = \frac{\frac{l}{3}}{a} \quad (2)$$

$$= \frac{x_{A''} - x_{B''}}{y_{B''} - y_{A''}} = \frac{\frac{l}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{l}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{l-a}{2}}{\frac{l-1}{2}} = \frac{l-a}{2} \cdot \frac{2}{l-1} = \frac{l-a}{l-1} \quad (3)$$

Igualando as equações (1) e (2) obtemos:

$$\frac{1}{l} = \frac{\frac{l}{3}}{a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Similarmente, igualando (1) e (3):

$$\frac{1}{l} = \frac{l-a}{l-1}$$

Substituindo o valor de *a* nesta última equação e operando, resulta em:

$$\frac{1}{l} = \frac{l - \frac{l^2}{3}}{l-1} \Rightarrow l - 1 = \frac{3l^2 - l^3}{3}$$

$$3l - 3 = 3l^2 - l^3 \Rightarrow l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

Esta equação cúbica pode ser escrita na forma:

$$(l-1)^3 - 2 = 0$$

Portanto, substituindo $t = l - 1$, obtemos:

$$t^3 - 2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[B_1] BORLIN, Harlley: *Resolução do problema da duplicação do volume do cubo utilizando origami.* Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96619/Harley.pdf?sequence=1. Acesso em 16/01/2014.

[B_2] BOYER, Carl: *História da Matemática.* Editora Edgard Blücher, 1993.

[C] CARVALHO, João P.: *Os três problemas clássicos da Matemática grega*. Disponível em: www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf. Acesso em 06/01/2014.

[E] EVES, Howard: *Introdução à história da Matemática*. Editora da UNICAMP, 1997.

[F] FIGUEIREDO, Djairo G.: *Números irracionais e transcendentes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, S.B.M., 1985.

[G_1] GONÇALVES, Adilson.: *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA – RJ, 1979.

[G_2] GUERRA, Vanessa C.: *Impossibilidade em construções geométricas: Aspectos históricos e matemáticos.* Disponível em: www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/VanessaGuerraTCC2011.pdf. Acesso em 06/01/2014.

[S] SOUSA, José M. R.: *Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: As soluções na Grécia Antiga.* Disponível em: repositório-aberto.up.pt/bistream/10216/10387/313565_TM_01_P.pdf. Acesso em 06/01/2014