



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

Fábio Araújo Ravagnani

Cálculo Diferencial e Integral no Movimento dos Planetas.

São José do Rio Preto

2014

Fábio Araújo Ravagnani

Cálculo Diferencial e Integral no Movimento dos Planetas.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita

Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup>Dr.<sup>a</sup>Tatiana Miguel Rodrigues

São José do Rio Preto

2014

Ravagnani, Fábio Araújo  
Cálculo Diferencial e Integral no movimento dos planetas/  
Fábio Araújo Ravagnani. -- São José do Rio Preto, 2014.  
71 f. : il.

Orientador: Tatiana Miguel Rodrigues  
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual  
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras  
e Ciências Exatas

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Cálculo Diferencial. 3.  
Cálculo Integral. 4. Órbitas. 5. Planetas. 6. Matemática –  
Metodologia. 7. Tecnologia Educacional. I. Rodrigues, Tatiana  
Miguel. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita  
Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.  
III. Título.

CDU -517.2

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Fábio Araújo Ravagnani

Cálculo Diferencial e Integral no Movimento dos Planetas.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof.<sup>a</sup>Dr.<sup>a</sup>Tatiana Miguel Rodrigues

UNESP –Bauru

Orientadora

Profa. Dra. Rita de Cássia Pavani Lamas

UNESP –São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi

UFU– Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto

2014

## RESUMO

Este trabalho aborda o movimento dos planetas, utilizando as Leis de Kepler via o Cálculo Diferencial e Integral. Iniciando com uma abordagem histórica dos principais estudiosos do assunto, em seguida apresentam-se alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e as leis de Kepler.

Além disso, foram feitas atividades relacionadas ao movimento planetário com alunos do ensino fundamental/médio e também foi utilizado um software da área para instigar tais alunos a pensar sobre o tema.

Palavras-chave: movimentação dos planetas, Leis de Kepler, Cálculo Diferencial e Integral.

## ***ABSTRACT***

This work is related to the planets movements, using Kepler's laws through Differential and Integral Calculus. Starting with a historical approach of leading researchers on this field. Afterwards key concepts taken from Calculus and Kepler's law are introduced.

In addition to that, activities related to the planets movements were performed with high school students as well as a computer software on this area was used to instigate such students to think about this subject.

*Keywords: Planets Movement, Kepler's laws, Differential and Integral Calculus.*

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I.....	3
PTOLOMEU .....	4
NICOLAU COPÉRNICO .....	6
TYCHO BRAHE.....	9
GALILEU GALILEI.....	11
NEWTON E LEIBNIZ.....	12
KEPLER.....	14
CAPÍTULO II.....	17
FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL .....	17
FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS.....	22
LIMITES .....	23
DERIVADA .....	29
INTEGRAL .....	36
TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO.....	45
CAPÍTULO III .....	54
LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON .....	54
LEIS DE KEPLER VIA LEI DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON .....	56
CAPÍTULO IV .....	62
ATIVIDADE USANDO SIMULADOR.....	67
CONCLUSÕES.....	69
REFERÊNCIAS .....	70

## INTRODUÇÃO

As antigas civilizações utilizaram conceitos astronômicos como posições do Sol e da Lua para aferir o tempo em dia, meses e anos. Os astrônomos antigos ao observarem os movimentos dos astros foram capazes de determinar as estações do ano para orientar o início das atividades agrícolas além de utilizar os conceitos de movimentos planetários para as navegações. A partir da observação da posição de determinadas estrelas com relação ao meridiano celeste local e ao horizonte, pode-se calcular a posição geográfica correta de um lugar. A partir do século XIV e XV houve a expansão marítima dos países da Europa medieval com destaque para Espanha e Portugal organizando as grandes navegações intercontinentais e iniciando um massivo processo de colonização de territórios na África e América.

Os gregos foram precursores das teorias fundamentais da astronomia utilizando a matemática e a partir de Cláudio Ptolomeu (século II d.C) foi elaborado o primeiro grande modelo celeste que considerava a Terra uma esfera, imóvel, ao centro do universo responsável pelos movimentos planetários e celestes. Esta teoria ficou conhecida como “O geocentrismo”. No século XVII esta teoria foi confrontada, pois quando um observador olha para o céu tem-se a impressão de que é o Sol que se move ao redor da Terra. Estas observações foram à base para o “Heliocentrismo”, o qual afirmava que o Sol era o centro do universo.

O século XVII é particularmente importante na história da matemática por ter apresentado alguns dos matemáticos mais expressivos da história. Harriot e Oughtred elaboraram notações de álgebra, Galileu elaborou a ciência da dinâmica e Kepler contribuiu com suas leis do movimento planetário.

A mecânica celeste é o ramo da astronomia que estuda os movimentos dos corpos celestes.

O objetivo deste trabalho é incentivar os alunos do ensino médio a questionar a movimentação dos planetas, o lugar do Sol e da Terra. Como também mostrar que a matemática fornece a fundamentação teórica para o movimento planetário. No Capítulo II foram estudados conceitos básicos de cálculo diferencial e integral, tais como limite, derivada, integral e suas relações para que o Professor do Ensino Médio os relembre.

Também para este trabalho foi realizada uma revisão bibliográfica relacionando os principais estudiosos envolvidos no desenvolvimento das teorias de movimentos planetários com a finalidade de prover suporte teórico em aulas expositivas para alunos. E por fim foram estudadas as Leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal.

A abordagem pedagógica foi feita em sala de aula envolvendo:

- Aulas expositivas com auxílio de recursos áudio visuais (Data Show, Power Pointer, vídeos, textos);
- Realização de oficinas didáticas envolvendo práticas e aplicações dos conceitos fundamentados nas Leis de Kepler dos movimentos planetários;
- Utilização do simulador online das Leis de Kepler (<http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/kepler.swf>) pelos alunos em sala de aula para resolver questões problematizadas por meio de discussões e sugestões entre docente e alunos.

## CAPÍTULO I

Desde a antiguidade eram conhecidos cinco planetas (os quais eram vistos a olho nu): Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

Um aspecto importante quando se trata de observação de planetas é o fato de que os corpos celestes são muito distantes da Terra, de modo que usualmente só os vemos como pontinhos luminosos e quando falamos de sua posição referimo-nos em geral à direção em que são observados, sem que se possa estimar a sua distância. É natural projetar essas direções sobre a “abóbada celeste”, uma esfera de raio muito grande, como se se tratasse de pontos sobre a superfície de uma esfera. Outro problema é a rotação da Terra em torno do seu eixo. Somos observadores sobre um disco gigante, como um carrossel e os movimentos aparentes dos corpos celestes vistos da Terra refletem este movimento de rotação.

Vamos entender por esfera celeste uma esfera de raio muito grande (muito maior que o raio da Terra) sobre a qual projetamos as posições observadas dos corpos celestes, com seus polos norte e sul, projeções dos polos correspondentes da Terra e o equador celeste, projeção do da Terra sobre a esfera celeste.

Em seu movimento circular aparente diário sobre a esfera celeste, o Sol não retorna exatamente ao ponto de partida após as 24 horas. Isto pode ser observado a cada pôr do Sol, quando as estrelas aparecem, pois a cada noite o Sol se desloca de aproximadamente  $1^\circ$  (cerca de duas vezes seu diâmetro aparente) em relação as estrelas vizinhas no horizonte, descrevendo outro círculo na esfera celeste em um ano. Este círculo, que representa a órbita aparente do Sol na esfera celeste quando descontamos seu movimento diurno aparente, chama-se eclética e é descrito no sentido anti-horário, ou seja, a cada dia o Sol se põe um pouco mais a leste.

Ao contrário da eclética, as órbitas aparentes dos planetas podem se afastar bastante de órbitas circulares descritas com movimentos aproximadamente uniformes. Em certas épocas do ano o planeta tem um movimento retrógrado, isto é, volta para trás, descrevendo uma espécie de laço.

A ideia mais antiga sobre o movimento dos planetas é imaginar que a esfera celeste seja uma esfera material, à qual estão presos os corpos celestes, e que se encontra em rotação uniforme em torno da Terra. Entretanto, este modelo não explicaria a movimentação dos planetas.

Platão, no princípio do século IV a.C. propôs que todo o Universo deveria ser explicável em termos de formas e figuras perfeitas, como círculos e esferas e de movimento uniforme. Eudoxo, um dos discípulos de Platão, pensava em lugar de duas esferas apenas, haveria diversas “esferas celestes” homocêntricas, presas umas às outras de tal forma que lhes permitisse girar em torno de eixos diferentes (inclinados entre si) com movimentos uniformes de velocidades diferentes. Enquanto isso Aristóteles interpretou-as como objetos materiais chegando a um gigantesco mecanismo formado por 55 esferas, todas movidas pela mais externa. Um sistema deste tipo serviu de modelo para o Universo descrito por Dante na “Divina Comédia”.

Este modelo de esferas continha uma contradição, o brilho aparente dos planetas varia no decurso de suas órbitas, particularmente quando realizam o movimento retrógrado, sugerindo que eles se aproximam e se afastam da Terra, o que seria incompatível por estarem se deslocando sobre a esfera geocêntrica (a distância fixa da Terra).

O grande astrônomo grego Hiparco de Rodas propôs outro modelo. Este foi melhorado por Ptolomeu e permanecia fiel ao programa platônico, empregando somente figuras perfeitas (círculos) e movimentos uniformes. O modelo geocêntrico de Ptolomeu permitiu reproduzir, com muito boa aproximação, mesmo os aspectos mais complicados observados no movimento dos planetas.

## **PRINCIPAIS PENSADORES**

### **1.1 PTOLOMEU**

Cientistas e filósofos, historicamente, tentavam entender a distribuição e a organização dos astros no céu. O modelo adotado na Europa até o século XVI foi o chamado modelo geocêntrico. “Geo”, em grego, significa Terra. Assim, geocêntrico significa a Terra no centro. Esse modelo foi sistematizado por Ptolomeu no século II, a partir de ideias preexistentes. Nesse modelo a Terra era o centro do Universo e os demais astros orbitavam ao redor dela. Notou-se que quanto maior o tempo de volta de um planeta ao redor da Terra, maior sua distância. Acreditava-se que a disposição dos planetas era como apresentada pela Figura 1. As estrelas fixas ficavam todas a uma mesma distância, maior do que a do planeta considerado o mais distante na época,

Saturno. Para explicar corretamente os movimentos e brilhos observados dos planetas faltavam conceitos como os equantes e deferentes.

Cláudio Ptolomeu foi um matemático influente, astrônomo, astrólogo, geógrafo e também um poeta. Ele era um cidadão greco-romano e viveu em Alexandria, no Egito. Ptolomeu era famoso por uma série de descobertas, das quais a mais famosa foi uma teoria que explicava que a Terra era o centro do universo. O termo "geocêntrico" surgiu a partir desta teoria. Segundo ele, a Terra era o epicentro orbital de todos os corpos celestes e que sol, lua, estrelas e outros corpos celestes giravam em torno da Terra. Sua realização foi considerada primordial durante o seu tempo e um grande número de astrônomos seguiam-no religiosamente (especialmente os gregos), até o século XVII. Ptolomeu argumentava que tinha aproximadamente 28.968 km de circunferência (dois terços da medida proposta por Eratóstenes). Com este valor Ptolomeu produziu as coordenadas de seu famoso atlas, o qual serviu de modelo até meados do século XV. Estes princípios deram a cosmógrafos e cartógrafos a ideia de que, em um mundo esférico, era possível chegar a leste navegando a oeste. O mapa não descrevia as Américas e mostrava a Ásia a um passo da Europa. Por isso, muitas de suas teorias foram provadas serem erradas. No entanto, ele é considerado um dos principais pensadores que contribuiu para a matemática, geografia e astronomia.

Basicamente a ideia para explicar o movimento retrógrado em termos de movimentos circulares uniformes é que a órbita do planeta em torno da Terra é a resultante de dois movimentos circulares uniformes acoplados. O planeta tem um movimento circular uniforme sobre um círculo (epiciclo) cujo centro, por sua vez, se move em movimento circular uniforme sobre outro círculo (deferente) com centro na Terra. Podemos descrever este movimento como um ponto preso na periferia de um disco de rotação se transportássemos um toca-discos como um todo ao longo de uma trajetória circular, com movimento uniforme.

Ptolomeu ainda teve de introduzir outras modificações nesse esquema para explicar anomalias: a velocidade angular do centro do epiciclo em torno da Terra sofre pequenas variações, e o movimento retrógrado não tem sempre o mesmo aspecto e duração. Ptolomeu mostrou que estas irregularidades podiam ser reproduzidas deslocando a Terra para uma posição T excêntrica, isto é, não coincidente com o centro O do círculo deferente e supondo que o centro C do epiciclo tem velocidade angular não em relação a O ou T, mas com respeito a outro ponto E chamado "equante" (Figura 2).

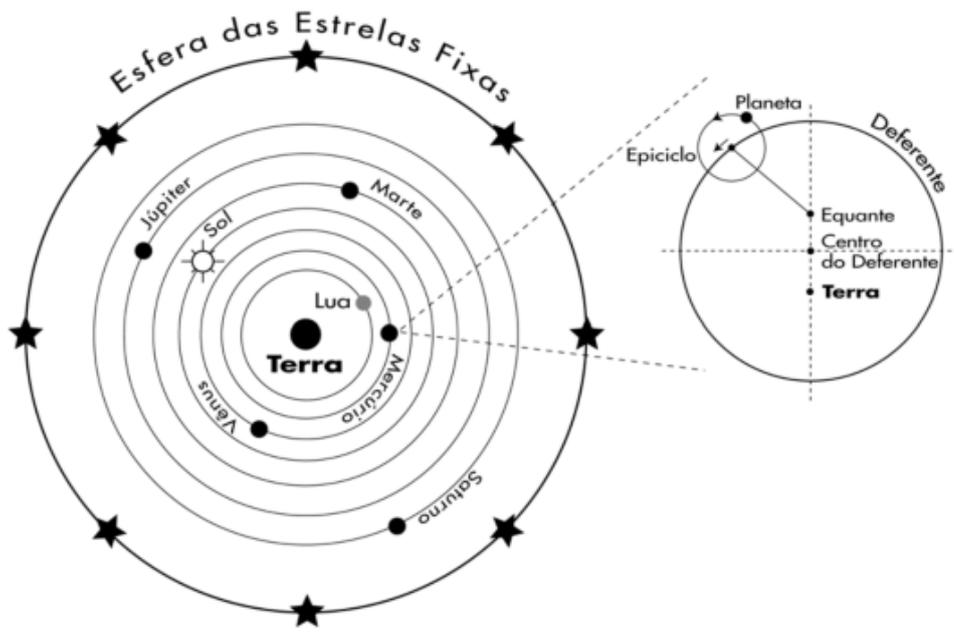


Figura 1. Modelo geocêntrico.

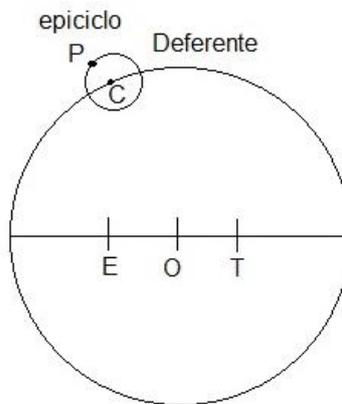


Figura 2: Descrição do Epiciclo e do Deferente

## 1.2 NICOLAU COPÉRNICO

Nicolau Copérnico nasceu em 19 de fevereiro de 1473 em Torun na Polônia. Seu pai era um comerciante e funcionário local. Quando Copérnico tinha 10 anos seu pai morreu, e seu tio, um padre, garantiu a Copérnico uma boa educação. Em 1491, ele foi para Academia da Cracóvia, na Universidade Jagiellonian, e em 1496 viajou para a Itália para estudar Direito. Enquanto estudante na Universidade de Bolonha, ele acompanhou seu professor de matemática, Domenico Maria de Novara, que incentivou os interesses de Copérnico em geografia e astronomia.

Na Itália, Copérnico visitou Roma e estudou nas universidades de Pádua e Ferrara e regressou à Polônia, em 1503. Por sete anos ele trabalhou como secretário de seu tio, o bispo de Ermland. Copérnico assumiu o lugar do bispo após sua morte em 1512 e aumentou sua dedicação à astronomia.

Depois da sua formação na universidade de Cracóvia, Copérnico estudou leis, medicina e astronomia em Pádua e Bolonha. Sua teoria do universo ficou pronta em 1530, mas só foi publicada em 1543, ano de sua morte. A grande obra de Copérnico “*Revolutionibus Orbium Coelestium*” (“Sobre as Revoluções das Esferas Celestes”) a qual afirmava de que a Terra gira diariamente sobre seu eixo e anualmente em torno do sol (modelo Heliocêntrico).

Copérnico, juntamente com outros pesquisadores da época, não apoiava as teorias dos movimentos planetários de Ptolomeu e foi o fundador da Astronomia moderna (a qual utilizava o telescópio de Galileu para fundamentar suas teorias). O modelo heliocêntrico lentamente foi substituindo o modelo geocêntrico à medida que novas evidências surgiram. Um modelo em que o Sol ficaria no centro do Universo já tinha sido proposto por Aristarco de Samos (281 a.C.) e Nicolas de Cusa (1401-1464), porém, essas propostas não incluíam um tratamento matemático, o que foi feito apenas por Copérnico.

A grande vantagem do modelo heliocêntrico é que ele permitiu Copérnico deduzir a escala relativa das distâncias dentro do sistema solar. No sistema geocêntrico, a escala das distâncias era arbitrária: só importava a razão entre os raios do epiciclo e do deferente, e não os valores absolutos desses raios. Já para Copérnico os deferentes dos planetas internos e os epiciclos dos externos se transformam todos na órbita da Terra em torno do Sol, cujo raio médio é hoje chamado de unidade astronômica (U.A.).

A tabela abaixo compara os raios médios das órbitas planetárias obtidas por Copérnico com valores aceitos atualmente.

Planeta	Raio obtido por Copérnico em U.A.	Raio Atual em U.A.
Mercúrio	0,3763	0,3871
Vênus	0,7193	0,7233
Marte	1,5198	1,5237
Júpiter	5,2192	5,2028
Saturno	9,1743	9,5388

Copérnico faleceu em 24 de maio de 1543. A obra de Copérnico atingiu não apenas dogmas científicos, mas também os dogmas religiosos tirando a Terra e, portanto, o homem, como centro do universo. Isso o abalou a tal ponto a Igreja que Giordano Bruno, que havia defendido as ideias heliocêntricas de Copérnico, foi queimado em Roma por ordem da igreja em 1600.

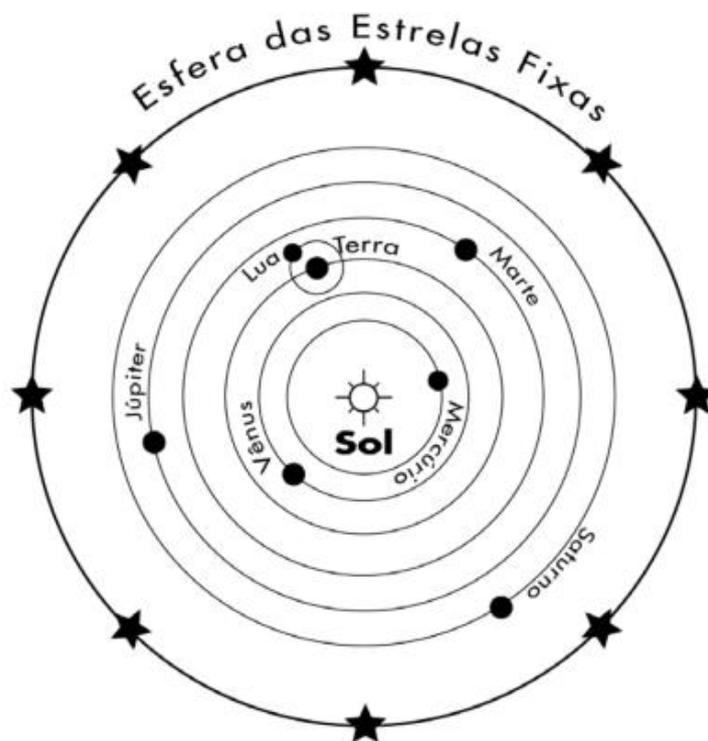


Figura 4. Modelo Heliocêntrico.

### 1.3 TYCHO BRAHE

Tycho Brahe nasceu em 1546 na Dinamarca. Tycho Brahe foi criado por seu tio Jorgen Brahe e tia. Aos sete anos de idade ele aprendeu latim e aos 12 iniciou seus estudos na Universidade de Copenhagen (Retórica e Filosofia). Em 1560, Tycho Brahe provavelmente testemunhou um eclipse solar parcial, e a partir desse momento ele começou seus estudos de astronomia. Em 1562, ele viajou para Leipzig para estudar Direito, mas Tycho estava mais interessado em astronomia. Ele descobriu grandes discrepâncias entre as suas próprias observações das posições dos planetas e as posições observadas por astrônomos antes dele. Tycho Brahe voltou para casa em 1565 e entre 1566 e 1570 estudou astronomia em Rostock, Wittenberg, Basel e Augsburg. Neste período ele construiu seus primeiros instrumentos (em 1564 um radiante de madeira e em 1569 o Grande Quadrante em Augsburg). Em 1570 seu pai morreu, e Tycho voltou para a Dinamarca.

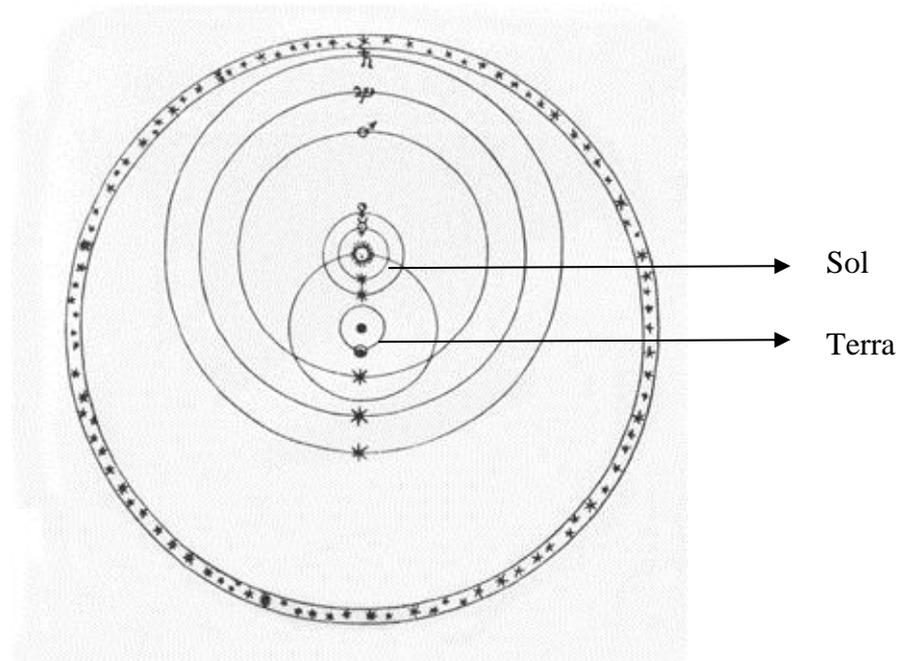
Em 1572, Tycho construiu um laboratório onde observou uma nova estrela na constelação de Cassiopeia. As medições de Tycho mostraram que era realmente uma estrela distante e não qualquer fenômeno local. Isso foi muito interessante para a época, pois a esfera das estrelas era considerada divina e perfeita. Tycho observou seu brilho evoluir até que ele desapareceu no próximo ano. Em 1575, Tycho publicou “De Nova Stella” que deu uma descrição exata de suas observações e do novo instrumento que ele mesmo havia construído. Ele relatou que a estrela tinha mudado de cor durante o seu período de visibilidade. Inicialmente a estrela era brilhante e clara como Vênus e Júpiter, então sua cor passou para vermelho como Marte, finalmente desaparecendo a um brilho opaco, como a luz de Saturno.

Em 1252, Afonso X, o Sábio, Rei de Castela na Espanha, reuniu diversos astrônomos para revisar as Tabelas Afonsinas, que são a compilação de dados astronômicos em tabelas contendo as posições e os movimentos dos planetas, calculadas por Ptolomeu no sistema geocêntrico. Posteriormente essas tabelas foram substituídas pelas tábuas Prutentic (1551) de Erasmus Rheinhold por Efemérides Novae (1556) de Johannes Stadius, sendo que ambos foram baseados na nova teoria heliocêntrica de Copérnico. Usando estas informações, em 1563, com a idade de 17 anos, Tycho

observou uma conjunção de Júpiter e Saturno usando um simples par de compassos, utilizando-os próximos de seu olho para medir o ângulo entre os dois planetas em noites sucessivas. Na manhã do dia 04 de setembro eles estavam tão próximos que não era perceptível ângulo entre eles. Tycho ficou consternado ao descobrir que as antigas Tabelas Afonsinas estavam com um mês inteiro de erro ao tentar prever os movimentos de Júpiter e Saturno e que até mesmo as tabelas Prutentic estavam erradas por vários dias. Este foi o início de sua devoção ao longo da vida para a observação precisa.

Em 1575, ele viajou para o sul e conheceu Wilhelm IV de Hesse, que estava muito interessado em astronomia. Quando voltou para casa novamente ele cogitou deixar a Dinamarca, mas o rei, Frederick II, a pedido de Wilhelm, ofereceu à Tycho Brahe a ilha de Hvene lá foi construído o observatório de Uraniborg (antes pertencente à Dinamarca, hoje fica nos limites da Suécia). Este projeto hoje seria comparável a um grande acelerador de partículas. Todas as observações eram feitas a olho nu, mas com instrumentos de grandes proporções, cuidadosamente calibrados e utilizando dotes de observação. Tycho dedicou sua vida à coleta de dados sobre o movimento dos planetas, conseguindo atingir precisão superior aos dados obtidos na antiguidade.

Tycho propôs um modelo intermediário entre o de Ptolomeu e o de Copérnico, no qual todos os planetas, exceto a Terra, se moveriam em torno do Sol, mas o Sol se moveria em redor da Terra.



**Figura 5. Modelo Cósmico de Tycho Brahe.**

Tycho Brahe morreu em 24 de outubro de 1601. Foi, sem dúvida, um dos maiores observadores de todos os tempos, suas medições de alta precisão permitiram a Kepler deduzir as suas leis sobre a movimentação dos planetas.

#### **1.4 GALILEU GALILEI**

Galileu Galilei nasceu em Pisa, Itália, em 18 de fevereiro de 1564, em uma família de linhagem aristocrática. Quando ele tinha dezessete anos, seu pai o enviou para estudar medicina na Universidade de Pisa, mas como Galileu não obedeceu a seu pai e seguiu sua vocação seguindo os estudos em Matemática e Física. A falta de dinheiro obrigou-o a deixar a escola em 1585, e durante quatro anos ele se sustentou dando aulas particulares de matemática. Em 1589 foi nomeado professor na Universidade de Pisa, onde permaneceu por três anos onde fez diversas descobertas importantes para a época. Entre estas, a mais famosa, ele observou que dois objetos que caem da mesma altura desenvolvem a mesma velocidade, independentemente do seu peso. Em 1592, mudou-se para a Universidade de Pádua, onde permaneceria por mais de 15 anos. Ele também fez pesquisas inovadoras em física, como a lei da inércia e abriu caminho para o trabalho de Sir Isaac Newton no século 17.

Enquanto isso, no meio dos astrônomos, havia um grande debate entre o antigo sistema de Ptolomeu, que colocava a Terra no centro do universo, e do sistema heliocêntrico de Copérnico, que postulava o Sol no centro e a terra em órbita em torno dele. No início do século XVII com a invenção do telescópio, Galileu construiu a sua própria versão do instrumento muito melhor do que os já existentes. Com esta nova ferramenta, ele observou as montanhas e crateras na Lua e descobriu quatro luas orbitando Júpiter. Em 1610 ele publicou Sidereus Nuncius (“Mensageiro Sideral”), catalogando suas descobertas.

Usando novas provas fornecidas pelo seu telescópio, Galileu começou a defender fortemente a teoria de Copérnico. A Igreja Católica, no entanto, desaprovou o heliocentrismo, sentindo que era contrária às declarações na Bíblia: se Deus criou os seres humanos como sua criação suprema, Ele iria colocar o homem no centro de seu cosmo. Em 1616, a Igreja enviou Galileu uma advertência formal, pois consideravam que sua teoria era uma negação à doutrina cristã. Assim, ele absteve-se de publicar qualquer trabalho sobre suas teorias. Porém, com a ascensão de um novo Papa, Urbano VIII, sentiu-se encorajado a publicar suas ideias novamente. A Igreja então acusou Galileu de heresia e o obrigou a renunciar a suas observações.

Galileu ficou cego em 1638 e dedicou o resto de sua vida aos estudantes. Morreu em nove de janeiro de 1642, com setenta e sete anos de idade.

## **1.5 NEWTON E LEIBNIZ**

Esta seção trata dos dois pioneiros em uma das principais ferramentas matemáticas, o cálculo diferencial e integral. Essa ferramenta será usada para fundamentar a Lei da Gravitação.

O cálculo é um produto de um processo longo que começou na Grécia Antiga e continuou no século XIX. Problemas que envolviam calcular, contar, figurar, entre outros, estavam presentes na mente de muitos pensadores do século XVIII. A grande contribuição de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a intrínseca relação entre o problema da tangente de uma função  $f(x)$  e a área sob este mesmo gráfico. Abaixo será feito um breve resumo sobre a biografia de cada um deles e como cada um iniciou a ferramenta chamada cálculo.

Isaac Newton nasceu em 25 de Dezembro de 1642. Filho póstumo de um fazendeiro teve que custear seus estudos trabalhando, e foi graças à ajuda de um tio que conseguiu entrar na Universidade de Cambridge em 1661. Quando se bacharelou em 1665, Isaac Barrow, seu professor de matemática, encorajou-o a permanecer em Cambridge.

Naquela época Londres era uma cidade muito poluída e com saneamento básico muito ruim. No verão de 1665, a peste se alastrou por Londres, dizimando cerca de 70.000 pessoas. Um ano após veio o Grande incêndio de Londres que acabou com dois terços da população. A peste provocou o fechamento da universidade obrigando Newton a se refugiar em sua fazenda em Woolsthorpe. Lá, em menos de dois anos, enquanto Newton ainda tinha menos de 25 anos de idade, ele fez vários avanços revolucionários em matemática, óptica, física e astronomia. Foi nessa época que Newton também começou a pensar sobre a gravidade. O maior feito de Newton foi seu trabalho em física e mecânica celeste, que culminou com a teoria da gravitação universal. Em 1666, Newton tinha versões iniciais de suas três leis do movimento. Usando suas descobertas em óptica, Newton construiu o primeiro telescópio refletor.

Segundo Newton, “em maio de 1665 comecei a pensar na gravidade como se estendendo até a órbita da Lua, e sobre a Lei de Kepler sobre os períodos dos planetas...deduzi que as forças que mantêm os planetas em suas órbitas devem variar inversamente com os quadrados de suas distâncias aos centros em torno dos quais as descrevem: tendo então comparado a força necessária para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra, e encontrado que concordavam muito bem. Tudo isso foi feito nos dois anos de peste, 1665 e 1666, pois estava naqueles dias na flor da idade para invenções, e me ocupava mais de matemática e filosofia (física) do que em qualquer outra época”.

Ele desenvolveu um sistema unificado de leis que podem ser aplicadas a uma enorme gama de fenômenos físicos. Newton publicou seus trabalhos em dois livros: *Opticks* e *Principia*. Este último é considerado como o maior livro científico já escrito. O livro marca o início da física teórica com a abordagem matemática que conhecemos hoje. Em 1705 ele foi nomeado cavaleiro, o primeiro cientista a receber esta honra por seus trabalhos. Newton morreu em 20 de março de 1727, com 84 anos, e foi enterrado na Abadia de Westminster.

Gottfried Leibniz nasceu em 01 julho de 1646, em Leipzig. Seu pai, Friedrich, foi Vice-Presidente da Faculdade de Filosofia e Professor de Filosofia Moral na Universidade de Leipzig. Na infância Leibniz preferia ler história, poesia e literatura. Aos doze anos aprendeu latim e começou a estudar grego. Em 1664, obteve um mestrado em Filosofia e em 1666, quando tinha apenas 21 anos de idade, recebeu o título de doutor em direito.

Sua maior contribuição foi a descoberta de um novo método matemático chamado cálculo. Newton tinha inventado um método semelhante para seu trabalho na gravidade. Portanto, houve um debate duro sobre quem tinha sido o primeiro. Newton começou a trabalhar em sua versão em 1665, mas Leibniz publicou seus resultados em 1684, quase três anos antes de Newton. No entanto, o consenso é que eles descobriram o método simultaneamente.

Leibniz também descobriu o sistema numérico binário e inventou a primeira calculadora que poderia somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Gottfried Leibniz morreu em Hanover, em 14 de novembro de 1716 aos 70 anos.

## **1.6 KEPLER**

Kepler nasceu em 1571 no sul da Alemanha. Dois fatos podem ter influenciado a escolha de Kepler pela astronomia, sua mãe lhe mostra a passagem de um cometa no céu em 1577 e seu pai um eclipse lunar em 1580. Kepler ingressou na universidade em 1589 com o intuito de tornar-se um ministro luterano, porém o interesse em astronomia o fez mudar de rumo. Estudou filosofia, matemática e física, formando-se como mestre em Artes em 1591. Em 1596, Kepler escreveu a primeira defesa pública do sistema de Copérnico.

Em busca das notas mais detalhadas sobre os caminhos dos planetas, Kepler entrou em contato com o astrônomo Tycho Brahe. Em 1600, Brahe convidou Kepler para trabalhar com ele. Brahe designou Kepler para resolver o mistério de Marte, um dos problemas mais intrigantes da astronomia da época. Ironicamente, as informações detalhadas sobre o mistério tornaram-se as ferramentas para entender como funcionava o sistema solar (que será relatado em outro capítulo).

Kepler foi uma personalidade extremamente curiosa, motivado por uma firme convicção, do tipo pitagórico-platônico, de que o universo foi construído de acordo com um plano matemático, cuja estrutura pode ser deduzida por argumentos de perfeição e da harmonia das esferas. Ele aliava toda esta estrutura a dados experimentais, não se satisfazendo com qualquer modelo.

Entre os seis planetas (incluindo a Terra) então conhecidos havia 5 distâncias a explicar, número igual ao dos sólidos regulares ou “perfeitos”, os sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. No seu livro “Mysterium Cosmographicum” (1597), Kepler construiu um modelo utilizando os cinco sólidos regulares inscritos e circunscritos em esferas, procurando mostrar que as proporções assim obtidas seriam as mesmas que aquelas entre os raios das órbitas planetárias obtidas por Copérnico. Entretanto, a concordância não era das melhores.

Tycho Brahe morreu depois de apenas um ano de colaboração, deixando para Kepler o legado de suas observações. Após quatro anos de trabalho árduo, Kepler conseguiu mostrar que, corrigindo a teoria de Copérnico no sentido de dar ao Sol a posição central, obtinha-se melhor acordo com a experiência.

Para a órbita de Marte, persistia um problema, um desvio de 8 minutos de arco. Embora muito pequeno, e compatível com a precisão das observações utilizadas por Copérnico, esse desvio estava em desacordo com a extraordinária precisão das observações de Tycho Brahe, que Kepler sabia serem confiáveis dentro de pelo menos 4 minutos de arco.

Kepler calculou várias distâncias da Terra ao Sol com o engenhoso procedimento de considerar sucessivas posições da Terra ( $T_1, T_2, T_3...$ ) a partir de uma posição de Marte e nos sucessivos retornos de Marte à posição inicial M (ver figura 6).

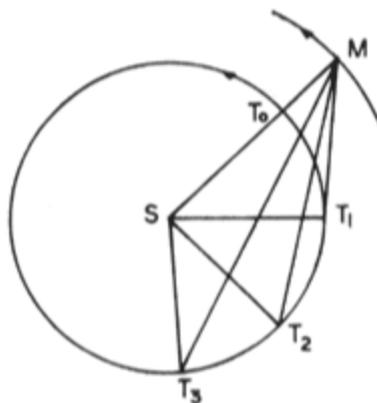
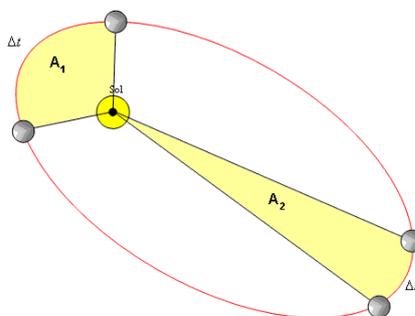


Figura 6: Modelo de Kepler

Com a órbita da Terra definida, Kepler focou-se em Marte. Mais uma vez, ele começou com uma órbita circular, mas quando a lei da área (que se tornaria a 2ª Lei de Kepler, ver Figura 7) foi aplicada a este modelo, Kepler descobriu discrepâncias em seu modelo. Isto significava que o planeta no modelo de Kepler estava se movendo muito rapidamente no afélio e periélio e muito lentamente para os lados.



**Figura 7: Modelo para a Segunda Lei de Kepler**

Para resolver isso, Kepler decidiu mudar a forma da órbita. Unindo os lados do interior do círculo da órbita resultaria em uma representação mais precisa da posição real de Marte. De fato, uma investigação mais aprofundada sobre a posição de Marte em diferentes épocas do ano, confirmou que sua órbita se curvou dentro de um círculo. Assim, Kepler sugeriu uma órbita mais semelhante à forma de uma oval. Kepler agora precisava resolver o problema de calcular a área de uma forma não convencional. Para fins de cálculo, ele escolheu aproximar a forma oval por uma elipse. A lei da área poderia ser aplicada a uma elipse porque as áreas dos setores da elipse eram conhecidas através do trabalho de Arquimedes.

Assim, depois de mais dois anos de trabalho, o resultado obtido foi uma órbita oval em lugar de circular, com o Sol no eixo, mas não no centro. Após inúmeras tentativas de identificar a curva, Kepler acabou descobrindo que a órbita de Marte era uma elipse, com o Sol em um dos focos e que o mesmo valia para os outros planetas.

Além de verificar que a órbita de Marte não é circular, Kepler também percebeu através de suas observações que o movimento do planeta ao longo da órbita não é uniforme, isto é, a velocidade é maior quando ele está mais próximo do Sol. Kepler publicou as duas primeiras leis em seu livro “Astronomia Nova” (1609).

Muitos anos após as duas leis, ele conseguiu formular a terceira. Desde a juventude Kepler tentou relacionar as órbitas planetárias, procurando uma regularidade entre os raios médios das órbitas e seus períodos de revolução. Somente em 1619, perto

do final da sua vida, que ele formulou a sua terceira lei. No seu livro “Harmonices Mundi” Kepler escreveu: “Os dados estão lançados, estou escrevendo este livro – não importa se para ser lido pelos meus contemporâneos ou pela posteridade. Ele pode esperar 100 anos por um leitor, já que Deus pode esperar 6000 anos pelo aparecimento de um contemplador da sua obra”. O título do livro é uma referência à música, pois Kepler considerava que o movimento dos planetas seria uma música celeste.

## CAPÍTULO II

### 2.1 FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

#### NOTA HISTÓRICA (A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO)

Só no século XIX, a ideia de função ganharia forma matemática. Mas desde a antiguidade ela aparece embrionariamente, como, por exemplo, entre os babilônios.

Efetivamente, os babilônios foram exímios produtores de tábuas matemáticas. Uma das remanescentes traz os valores de  $n^3 + n^2$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots 20, 30, 40$  e  $50$ .

Obviamente, não seria forçado associá-la à função  $f(x) = x^3 + x^2$ . Mas, como possivelmente essa tábua foi construída para permitir a resolução de equações do tipo  $x^3 + x^2 = c$ , pode-se ver nela ainda o germe da ideia de função inversa. De fato, ao se resolver a equação  $x^3 + x^2 = 80$ , por exemplo, o que se procura é o número  $n$  tal que  $f(n) = 80$ , ou seja, a “imagem” de 80 pela “função inversa” de  $f$ .

Em sua obra-prima, O Almagesto, Cláudio Ptolomeu (século II d.C) deu um grande passo nessa matéria. Em seu livro I (são 13 ao todo) há uma tábua com as cordas dos arcos de  $\frac{1}{2}^\circ$  a  $180^\circ$  em intervalos de  $(\frac{1}{2})^\circ$ . Essas cordas são, na verdade, os ancestrais mais remotos de nossos senos. Como Ptolomeu usou também suas tábuas em sentido contrário, para achar, por exemplo, o arco de uma dada corda, é plausível dizer que a ideia de função inversa também está presente em sua obra. Mas o grande passo de Ptolomeu consistiu em mostrar como interpolar linhas em sua tábua, para qualquer valor

da “variável independente” (o arco), o que sugeria um caminho para um estudo computacional de fenômenos contínuos.

No período medieval não se verificaram avanços significativos na formação do conceito de função. De um lado porque a álgebra, fundamental para explorar esse conceito, só seria criada no final do século XVI. De outro, porque a ciência ainda não elegera a descrição quantitativa dos fenômenos como meta, o que só aconteceria no Renascimento, graças principalmente a Galileu Galilei (1564 – 1642). Galileu aplicou seu método científico principalmente ao estudo do movimento. Por exemplo, em Diálogos sobre duas novas ciências (1638), encontra-se a seguinte lei: “Os espaços percorridos por um corpo que sai do repouso em movimento uniformemente acelerado estão entre si como os quadrados dos tempos gastos para percorrê-los”. Ou seja, se para percorrer determinado espaço  $s$ , o tempo gasto é  $t_1$  e se para percorrer um espaço  $s$  o tempo gasto é  $t$ , então  $\frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$ . Com o desenvolvimento e a difusão da simbologia algébrica (ignorada por Galileu), essa lei passaria a se escrever assim:

$$S = kt^2, \text{ em que } k = \frac{s_1}{t_1^2}, \text{ destacando-se o espaço em termos do tempo.}$$

Mas quem primeiro conseguiu fundir a ideia de variabilidade em uma simbologia algébrica conveniente, ao representar lugares geométricos por meios de equações algébricas e fazer a correspondência entre as variáveis a fim de poder esboçar o gráfico correspondente, foi o filósofo e matemático francês René Descartes (1596 – 1650), o criador da geometria analítica.

Na segunda metade do século XVII, o matemático alemão G. W. Leibniz (1646 – 1716) usaria pela primeira vez a palavra “função”. Também se deve a Leibniz à introdução das palavras “variáveis”, “parâmetro”, hoje corriqueiras na linguagem matemática. Mas, a notação  $f(x)$  pra indicar uma função só seria introduzida em 1734 pelo matemático suíço L. Euler (1707 – 1783).

## 2.2 APLICAÇÃO – FUNÇÃO

O conceito de função está relacionado à correspondência entre conjuntos. Neste trabalho, os conjuntos envolvidos serão sempre subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . As funções neles definidas são chamadas de funções reais de uma variável real.

**Definição 2.2.1:** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Uma função  $f: A \rightarrow B$  é uma lei ou regra que a cada elemento de  $A$  faz corresponder um único elemento de  $B$ . O conjunto  $A$  é chamado domínio de  $f$  e é denotado por  $D(f)$ .  $B$  é chamado de contradomínio de  $f$ .

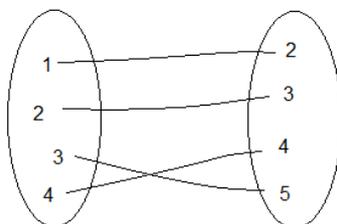
**Notação:**  $f: A \rightarrow B$  ou  $A \rightarrow B$   
 $x \rightarrow f(x)$  ou  $x \rightarrow y = f(x)$ .

**Definição 2.2.2:** As funções  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow B$  são iguais quando  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in A$ . Denota-se  $f = g$ .

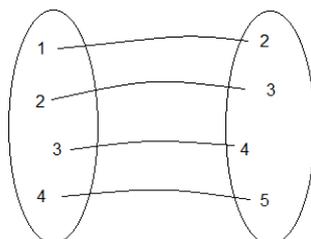
**Exemplos 2.1:**

1) Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 5\}$

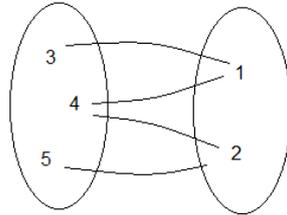
a)  $f: A \rightarrow B$  com a correspondência dada pelo diagrama a seguir é uma função de  $A$  em  $B$ .



b)  $g: A \rightarrow B$  definida por  $g(x) = x+1$  é uma função de  $A$  em  $B$ . Podemos representá-la pelo diagrama.



- 2) Sejam  $A=\{3,4,5\}$  e  $B=\{1,2\}$ . A função  $f: A \rightarrow B$  definida pelo diagrama abaixo não é uma função de  $A$  em  $B$ , pois o elemento  $4 \in A$  tem dois correspondentes em  $B$ .



**Definição 2.2.3:** Seja  $f: A \rightarrow B$ .

- (a) Dado  $x \in A$ , o elemento  $f(x) \in B$  é chamado de valor da função  $f$  no ponto  $x$  ou de imagem de  $x$  por  $f$ .
- (b) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado conjunto imagem de  $f$  e é denotado por  $\text{Im}(f)$ .

**Exemplos 2.2:** Determinar o domínio e a imagem das funções abaixo:

- 1)  $f(x) = 1/x$ . Esta função só não é definida para  $x=0$ . Logo  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ . E  $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ .
- 2)  $g(x) = \sqrt{x-4}$ . Esta função só não está definida em  $x-4 \leq 0$ . Isto é,  $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$  e  $\text{Im}(g) = [0, +\infty)$ .

### 2.3 GRÁFICO DE FUNÇÕES

A representação geométrica de uma função de uma variável real é dada por seu gráfico no plano de coordenadas  $xy$ . O gráfico de uma função  $y = f(x)$  é o seguinte subconjunto do plano:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}.$$

Algumas vezes, a construção dos gráficos é realizada fazendo uma tabela, onde as entradas da tabela são os elementos do domínio e as saídas, as respectivas imagens.

São exemplos de funções reais de variável real:

1. A correspondência  $f(x) = 2x + 1$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . O gráfico de  $f$  é

$$G(f) = \{(x, y) : y = 2x + 1\},$$

que corresponde à reta de  $\mathbb{R}^2$  representada abaixo.

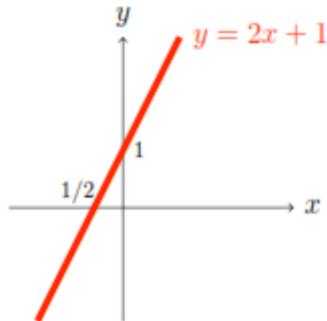


Figura 9: Gráfico da função  $y=2x+1$

2. A correspondência  $f(x)=\ln(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^+$  e o gráfico de  $f$  é  $G(f)=\{(x,y) : x > 0 \text{ e } y=\ln x\}$ . O qual corresponde à curva de  $\mathbb{R}^2$  representada abaixo.

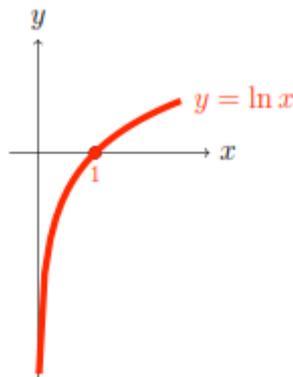


Figura 10: Gráfico da função  $y=\ln x$

## 2.4 FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

**Definição 2.4.1:** Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função  $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . O conjunto  $A$  é o domínio de  $f$  e será indicado por  $D(f)$ . O conjunto  $\text{Im}(f) = \{f(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in D(f)\}$  é a imagem de  $f$ .

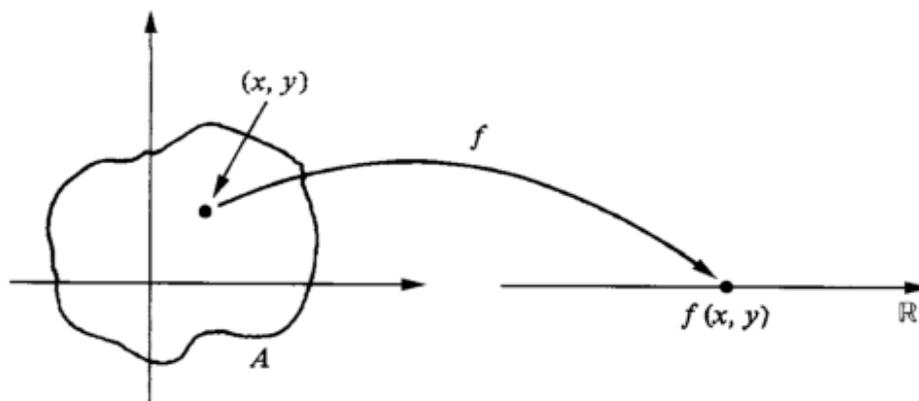


Figura 11: Funções de Valores reais a valor real.

**Exemplo 2.4.1:** Nos itens abaixo vamos representar graficamente o domínio das funções:

a)  $g(x,y) = \ln(x^2 - y)$

b)  $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$

No item a)  $g(x,y) = \ln(x^2 - y)$  está definida somente para  $x^2 - y > 0$ , ou seja,  $y < x^2$ . Assim sendo,  $D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$ .

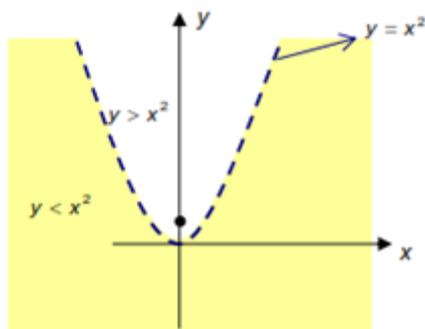


Figura 12: Representação gráfica do domínio da f

b) Como  $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$ , devemos ter  $y \geq 0$ . Assim:  $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ .

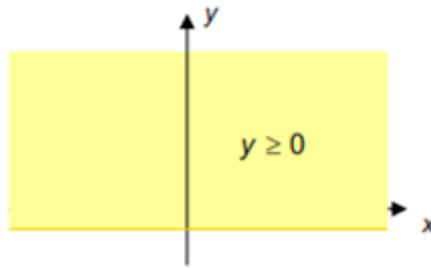


Figura 13: Representação gráfica do domínio da f

Em geral, essa representação pode se tornar bastante complexa sem o auxílio de uma ferramenta computacional.

Da lei gravitacional universal de Newton segue que dada uma partícula de massa  $m_0$  na origem de um sistema de coordenadas  $x$  e  $z$ , o módulo da força  $F$  exercida sobre outra partícula de massa  $m$  situada no ponto  $(x, y, z)$  é dado por uma função de três variáveis independentes:  $F(x, y, z) = \frac{Gm_0m}{x^2+y^2+z^2}$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal.

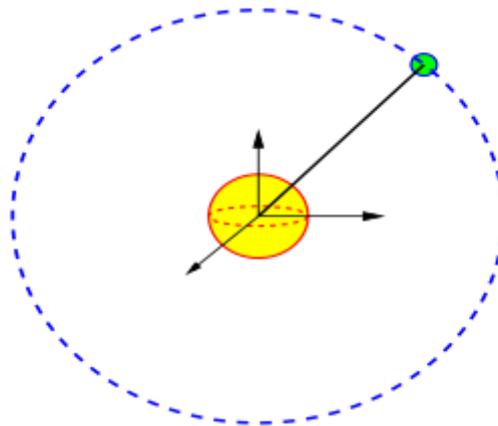


Figura 14: Representação da Lei Gravitacional de Newton

## 2.5 LIMITES

Deve-se saber como a função se comporta quando a variável está muito próxima de um ponto que não pertence ao seu domínio. E para este estudo, nos valem da teoria

de limites. Os limites são essenciais para o cálculo e são usados para definir a continuidade, derivadas e integrais.

**Definição 2.5.1:** Seja  $f(x)$  definida num intervalo aberto  $I$ , contendo  $a$ , exceto possivelmente, no próprio  $a$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  é  $L$  e escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

Este conceito será ilustrado nos exemplos abaixo:

**Exemplo 2.5.1:** Usando a Definição 2.5.1 vamos provar que  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$ .

Pela definição devemos mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta < 0$ , tal que

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$

Analisando as desigualdades temos:

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A última desigualdade sugere uma escolha do  $\delta$ .

Fazendo  $\delta = \varepsilon/3$  e temos

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$ .

**Exemplo 2.5.2:** Calcule o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ .

Vamos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$

Da desigualdade que envolve  $\varepsilon$  temos:

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1||x + 1| < \varepsilon.$$

Precisamos encontrar um valor para  $|x + 1|$ . Neste caso vamos supor  $0 < \delta \leq 1$ . De  $0 < |x - 1| < \delta$  seguem as desigualdades:

$$|x - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2. \text{ Portanto, } |x - 1| < 2.$$

Escolhendo  $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2}, 1)$  temos que, se  $|x - 1| < \delta$ , então:

$$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < \delta \cdot 2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon.$$

## Propriedades dos Limites

**Proposição 2.5.1:** Se  $a$ ,  $m$  e  $n$  são números reais, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n.$$

**Prova: Caso 1:  $m \neq 0$ .** De acordo com a Definição 2.5.1, dado  $\varepsilon > 0$ , devemos mostrar que existe  $\delta > 0$ , tal que

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Podemos obter uma sugestão para  $\delta$  analisando as desigualdades abaixo:

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon \Leftrightarrow |mx - ma| < \varepsilon \Leftrightarrow |m||x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}.$$

Assim, sugerimos que  $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ .

De fato, se  $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$  temos

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |m||x - a| < |m| \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta,$$

portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$ .

**Caso 2:  $m=0$ .** Se  $m=0$ , então  $|(mx + n) - (ma + n)| = 0$  para todos os valores de  $x$ .

Logo, tomando qualquer  $\delta > 0$ , a definição de limite é satisfeita.

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$ .

Usando o mesmo raciocínio podemos mostrar as propriedades abaixo:

**Proposição 2.5.2:** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existem, então:

$$1^a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$2^a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$3^a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ desde que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

$$4^a) \lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$5^a) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, n \in \mathbb{N}^* \text{ e se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0. \text{ (Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0, n \text{ é ímpar).}$$

$$6^a) \lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)), \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$$

$$7^a) \lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

$$8^a) \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

**$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x - 5)$ . Exemplos 2.5.3:**

1) Encontrar  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x - 5)$ . Por propriedades:  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x - 5) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 4x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 4 \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 6$ .

2) Encontre  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^3 - 8x}$ . Por propriedades:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^3 - 8x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 8x} = \sqrt{(-1)^3 - 8(-1)} = \sqrt{-1 + 8} = \sqrt{7}.$$

**Definição 2.5.2:** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $(a, +\infty)$ . Escrevemos,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , quando o número  $L$  satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x > A$ .

**Definição 2.5.3 :** Seja  $f$  uma função definida em  $(-\infty, b)$ . Escrevemos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ , quando o número  $L$  satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $B < 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x < B$ .

Observamos que a Proposição 2.5.2 vale se substituirmos  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow \infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

**Teorema 2.5.1:** Se  $n$  é um número inteiro positivo, então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

**Prova:** Temos que mostrar que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$ , tal que

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ sempre que } x > A.$$

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x^n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Podemos então supor que  $A = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ .

Temos que  $x > A \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$  e desta forma  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

**Exemplo 2.5.4:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+9}$ .

Temos uma indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Vamos dividir o numerador e o denominador por  $x$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x+9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3/x}{1 + 9/x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{3}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{9}{x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} 3/x}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} 9/x} = \frac{2 - 3 \cdot 0}{1 + 9 \cdot 0} = 2.$$

**Observação:** O Teorema também é válido para  $x \rightarrow -\infty$ .

Costuma-se dizer que expressões do tipo

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

são indeterminações.

Por exemplo: sejam  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$ . Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Também temos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

O exemplo abaixo usa artifícios algébricos para retirar a indeterminação.

**Exemplo 2.5.5:** Determine  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ . Fatorando o numerador e o denominador

temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x - 2)} = \frac{-9}{4}. \end{aligned}$$

## 2.6 CONTINUIDADE

Quando definimos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  analisamos o comportamento da função  $f(x)$  para valores de  $x$  próximos de  $a$ , mas diferentes de  $a$ . Vimos em alguns exemplos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pode existir, mesmo que  $f$  não esteja definida no ponto  $a$ . Pode ocorrer que  $f$  esteja definida em  $a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  exista e este limite seja diferente de  $f(a)$ .

Quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  diremos, de acordo com a definição abaixo, que  $f$  é contínua em  $a$ .

**Definição 2.6.1:** Dizemos que uma função  $f$  é contínua no ponto  $a$  se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (a)  $f$  é definida no ponto  $a$ ;
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e
- (c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Exemplos 2.6.1:** 1) A função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  não é contínua em  $a=1$ , pois não está definida em  $a=1$ .

2) A função  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$  não é contínua em  $a=1$ . Mesmo  $g(1)=1$ , porém

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ .

## 2.7 DERIVADA

Leibnitz e Newton iniciaram o estudo do cálculo diferencial e sempre disputaram a primazia das suas propostas. Embora usasse uma notação um tanto complicada, Newton desenvolveu o conceito de derivada e percebeu a sua utilidade na formulação matemática da mecânica. A derivada de uma função  $y = f(x)$  num ponto  $x = x_0$ , é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica à curva representativa de  $y=f(x)$ , no ponto  $x = x_0$ , ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto  $x_0$ .

A derivada de uma função  $y = f(x)$  é a função denotada por  $f'(x)$  tal que seu valor em qualquer  $x \in D(f)$  é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ se este limite existir.}$$

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

A derivada de uma função  $y = f(x)$ , pode ser representada também pelos símbolos:  $y'$  ou  $dy/dx$ .

**Exemplo 2.7.1:** Dada a função  $f(x) = 3x^2 - 4x$ , encontre  $f'(3)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(9 + 6\Delta x + \Delta x^2) - 4(3 + \Delta x) - (3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 + 14\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3\Delta x + 14)}{\Delta x} = 14. \end{aligned}$$

### 2.7.1 Interpretação geométrica da derivada.

A derivada da função  $f$  em  $x_0$  é a inclinação da reta tangente  $t$  ao gráfico de  $f$  em  $P_0$ .

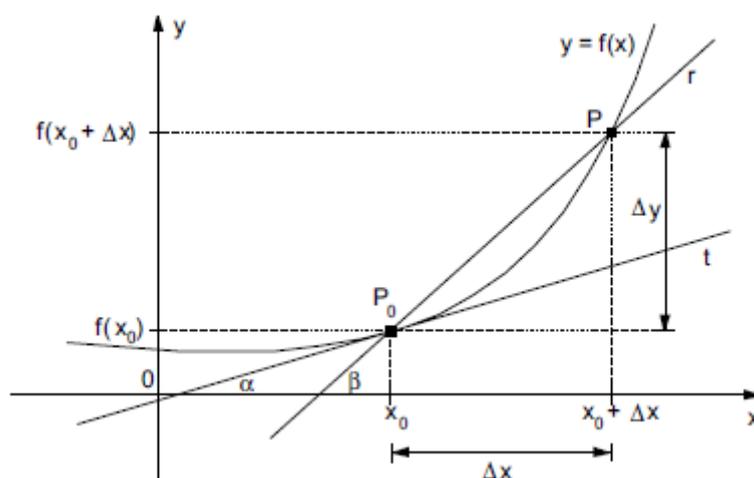


Figura 16: Reta que passa pelos pontos  $P_0$  e  $P$  e reta tangente à  $P_0$ .

Fixado um valor  $x_0$ , sendo definido  $f(x_0)$ , seja  $\Delta x \neq 0$  um acréscimo dado a  $x_0$ . Sendo  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o coeficiente angular da reta  $r$ , secante ao gráfico da curva  $y=f(x)$ , passando pelos pontos  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  e  $P_1(x_1, f(x_1))$ .

Observe que quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , o ponto  $P$  tem como posição limite o ponto  $P_0$ , e a reta secante  $P_0P$  terá como posição limite a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0$ .

Na figura 16, temos

$$\text{tg } \beta = \text{coeficiente angular da reta } P_0P = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

e

$$\text{tg } \alpha = \text{coeficiente angular da reta } t, \text{ tangente a } P_0.$$

Quando  $\Delta x$  tende a 0,  $\beta$  tende a  $\alpha$  e então  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\beta$  tende a  $\text{tg}\alpha$ . Daí  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha$ .

Portanto, com este argumento geométrico, interpretamos  $f'(x_0) = \text{tg}\alpha$  como sendo o coeficiente angular (ou inclinação) da reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, f(x_0))$ .

### 2.7.2 Interpretação cinemática da derivada

Do estudo da cinemática sabemos que a posição de um ponto material em movimento sobre uma curva  $C$  (trajetória) conhecida pode ser determinada, em cada instante  $t$ , através de sua abscissa  $s$ , medida sobre a curva  $C$ . A expressão que nos dá  $s$  em função de  $t$ ,  $s = s(t)$ , é chamada equação horária.

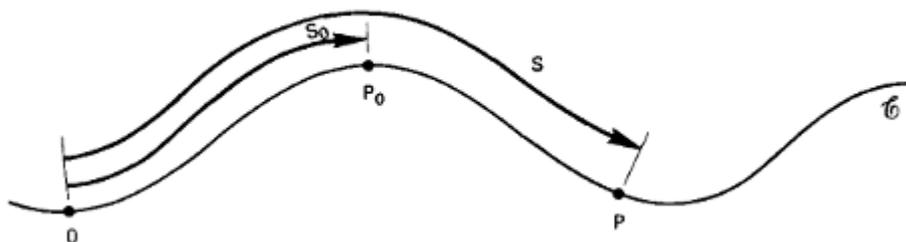


Figura 17: Trajetória do movimento.

Dado um instante  $t_0$  e sendo  $t$  um instante diferente de  $t_0$ , chama-se velocidade escalar média entre os instantes  $t_0$  e  $t$  o quociente  $v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

E chama-se velocidade escalar do ponto do instante  $t_0$  o limite:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} v_m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$

#### Exemplo 2.7.1:

Suponha que duas cidades A e B distam uma da outra 228 km, e um carro vai de A para B em 3 horas. Pela cinemática, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{228}{3} \Rightarrow v_m = 76 \text{ km/h (Velocidade média)}.$$

Se diminuíssemos o intervalo de deslocamento e o intervalo de tempo, cada vez mais teríamos  $\Delta t$  tendendo a zero.

Assim chegamos a velocidade instantânea  $v$ . Dizemos que a velocidade instantânea  $v$  é o limite da velocidade média, quando  $\Delta t$  tende a zero, isto é:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Utilizando o conceito de derivada, dizemos que, em cada instante  $t_0$ , a velocidade instantânea do carro é igual à derivada de  $s$ , posição do carro nesse instante, isso é,  $v(t_0) = s'(t_0)$ .

**Exemplo 2.7.2:** Seja  $s = 10t + 2t^2$  a função horária de um móvel, em que  $s$  é o espaço, medido em metros, e  $t$  é o tempo, medido em segundos. A velocidade desse móvel, em cada instante é dada por  $v(t) = s'(t)$ , isto é, se  $s = 10t + 2t^2$ , então  $s' = 10 + 4t$ . Então  $v(t) = 10 + 4t$ .

A aceleração, em cada instante é dada por  $a = v'(t)$ , então como  $v(t) = 10 + 4t$  assim  $v'(t) = 4$ . Logo,  $a = 4\text{m/s}^2$ .

**Teorema 2.7.1:** Toda função derivável num ponto  $x_0$  é contínua nesse ponto.

### 2.7.3 Regras de derivação

1. Se  $f$ ,  $g$  e  $h$  são diferenciáveis num intervalo aberto  $I$  contido nos respectivos domínios e  $h(x) \neq 0$ , para todo  $x \in I$ , então as funções:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/h$  são deriváveis no intervalo  $I$ .

2. Se  $c$  é constante e  $f(x) = c$  para todo  $x$ , então  $f'(x) = 0$ .

3. Se  $n$  é um inteiro positivo e  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

4. Além disso, valem as seguintes propriedades:

a)  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ,

b)  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ ,

$$c) (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$d) \left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

### Exemplos 2.7.3.1:

1) Se  $f(x) = x^4$  então  $f'(x) = 4x^3$ .

2) Se  $f(x) = 8x^{12} - 15x + 7$  então  $f'(x) = 96x^{11} - 15$ .

3) Se  $f(x) = (x^2 - 2x + 9) \cdot (4x^4 - 7)$  então

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (4x^4 - 7) + (x^2 - 2x + 9) \cdot (16x^3).$$

4) Se  $f(x) = \frac{(x^6 + 3x^2)}{x^2 + 5x - 1}$  então  $f'(x) = \frac{(6x^5 + 6x)(x^2 + 5x - 1) - (x^6 + 3x^2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x - 1)^2}$ .

Seja  $y = f(x)$  e  $x = g(t)$  duas funções deriváveis, com  $\text{Im}(g) \subset D(f)$ . Temos que a composta  $h(t) = f(g(t))$  é derivável e vale:

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t), t \in D(g) \quad (1).$$

Este fato pode ser reescrito de outra forma. Como denotaremos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ e } \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

E, sendo a composta dada por  $y = f(g(t))$ , segue da equação (1) que

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t)) \cdot g'(t) \text{ ou } \frac{dy}{dt} = f'(x)g'(t), \text{ onde } x = g(t).$$

Assim,  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ , onde  $\frac{dy}{dx}$  deve ser calculado em  $x = g(t)$ .

Observe que a partir da regra de derivação para o produto de funções se conclui que sendo  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  uma função derivável num intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  se tem que a função  $af$  é diferenciável em  $I$  e  $(af)'(x) = af'(x)$ .

### Exemplo 2.7.3.2:

Se  $f(x) = (x^2 + 2x)^4$  podemos escrever  $f(x) = g(\varphi(x))$  onde  $\varphi(x) = x^2 + 2x$ , logo  $g(x) = (\varphi(x))^4$ . Assim,

Se  $f'(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ , logo,  $f'(x) = 4(\varphi(x))^3 \cdot \varphi'(x) = 4(x^2 + 2x)^3 \cdot (2x + 2)$ .

## 2.7.4 Regra de L'Hospital

Nesta seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ . Esse método dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita do Teorema do Valor Médio, Teorema de Rolle e da Fórmula de Cauchy que estão abaixo:

**Teorema 2.7.4.1 (Teorema do Valor Médio):** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ , então existirá pelo menos um  $c \in ]a, b[$ , tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Teorema 2.7.4.2 (Teorema de Rolle):** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $]a, b[$  e  $f(a) = f(b)$ , então existirá pelo menos um  $c$  em  $]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Proposição 2.7.4.3 (Fórmula de Cauchy):** Se  $f$  e  $g$  são duas funções contínuas em  $[a, b]$ , deriváveis em  $(a, b)$  e se  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então existe um número  $z \in (a, b)$  tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

**Prova:** Provemos primeiro que  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Como  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c$  em  $(a, b)$  tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Como, por hipótese,  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , temos  $g'(c) \neq 0$  e, assim, pela igualdade (1)  $g(b) - g(a) \neq 0$ .

Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(x) - g(a)].$$

A função  $h$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em  $[a, b]$ , pois:

- (i) Como  $f$  e  $g$  são contínuas em  $[a, b]$ ,  $h$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii) Como  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $(a, b)$ ,  $h$  é derivável em  $(a, b)$ , e
- (iii)  $h(a) = h(b) = 0$ .

Portanto, existe  $z \in (a, b)$  tal que  $h'(z) = 0$ .

Como  $h'(x) = f'(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] g'(x)$ , temos:

$$f'(z) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \cdot g'(z) = 0. \quad (2)$$

Mas  $g'(z) \neq 0$ . Logo, podemos escrever (2) na forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

**Proposição 2.7.4.4 (Regra de L'Hospital):** Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis num intervalo aberto  $I$ , exceto, possivelmente, em um ponto  $a \in I$ . Suponhamos que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \neq a$  em  $I$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ;

**Prova:** Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  tome a forma indeterminada  $0/0$  e que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ .

Queremos provar que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

Consideremos as duas funções  $F$  e  $G$  tais que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Então,  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = G(a)$ .

Assim, as funções  $F$  e  $G$  são contínuas no ponto  $a$  e, portanto, em todo intervalo  $I$ .

Seja  $x \in I$ ,  $x \neq a$ . Como para todo  $x \neq a$  em  $I$ ,  $f$  e  $g$  são deriváveis e  $g'(x) \neq 0$ , as funções  $F$  e  $G$  satisfazem hipóteses da fórmula de Cauchy no intervalo  $[x, a]$  ou  $[a, x]$ . Segue que existe um número  $z$  entre  $a$  e  $x$  tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Como  $F(x) = f(x)$ ,  $G(x) = g(x)$ ,  $F(a) = G(a) = 0$ ,  $F'(z) = f'(z)$  e  $G'(z) = g'(z)$ , vem:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como  $z$  está entre  $a$  e  $x$ , quando  $x \rightarrow a$  temos que  $z \rightarrow a$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

**Exemplo 2.7.4.1:** 1) Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^x - 1}$ .

Quando  $x \rightarrow 0$ , o quociente  $\frac{3x}{e^x - 1}$  toma a forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ . Aplicando a Regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{e^x} = \frac{3}{e^0} = 3.$$

2) Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$ .

Usando a Regra de L'Hospital temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6}{3x^2 + 14x + 5} = \frac{6}{5}.$$

## 2.8 INTEGRAL

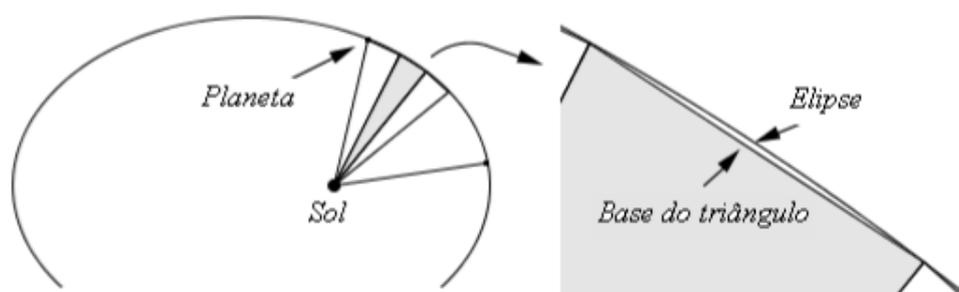
Uma integral é um objeto matemático e pode ser interpretada como uma área ou uma generalização da área. Integrais, juntamente com as derivadas, são os objetos

fundamentais do cálculo. O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração.

Arquimedes, no terceiro século a.C, tinha sido capaz de calcular áreas sob as curvas e volumes de determinados sólidos por um método de aproximação, o chamado método da exaustão, baseado no uso de áreas e volumes conhecidos de retângulos, discos, etc. Seus resultados foram expressos não em termos absolutos, mas em termos de comparações de volumes. Algumas das ideias de Arquimedes eram conhecidas na Renascença, a sua obra sobre a esfera e o cilindro estava disponível em outros idiomas.

Do ponto de vista geométrico, a derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva, enquanto que a integral está relacionada com o problema de determinar a área de certas figuras planas.

Ao tratar problemas de áreas, como da segunda lei, Kepler pensava na área formada por uma infinidade de pequenos triângulos com vértices no Sol (Figura 20) e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma ele pôde usar uma forma grosseira de calcular integral.



**Figura 20:** “Triangularização” da elipse.

A área do círculo, por exemplo, é encontrada desse modo, observando que as alturas dos triângulos infinitamente finos são iguais ao raio. Se chamarmos  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  as bases infinitamente pequenas ao longo da circunferência, então a área  $A$  do círculo (a soma das áreas dos triângulos) será

$$A = \frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + \dots + \frac{1}{2}b_nr + \dots = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots) = \frac{1}{2}rC,$$

onde  $C$  é o comprimento da circunferência, a qual é a soma dos  $b_i$ 's.

Kepler ainda aplicou métodos grosseiros de integração para encontrar volumes de barris de vinhos e outros sólidos de revolução.

Embora passíveis de objeções, sob o ponto de vista do rigor matemático, esses métodos produzem resultados corretos de maneira bem mais simples. Mesmo no século XX e ainda neste século esses métodos “atômicos” ainda são usados bastante regularmente por físicos e engenheiros para resolver um problema, ficando o tratamento rigoroso “por limites” para os matemáticos profissionais.

**Definição 2.8.1:** Seja  $y = f(x)$  uma função contínua, não negativa em um intervalo  $[a,b]$ . A área sob a curva  $y = f(x)$ , de  $a$  até  $b$ , é definida por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

onde para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $c_i$  é um ponto arbitrário do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  e a soma  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  representa a área dos  $n$  retângulos de base  $\Delta x_i$  e altura  $f(c_i)$ . É possível provar que este limite existe e é um número não negativo.

## 2.8.2 Integral indefinida

**Definição 2.8.2:** Uma função  $F(x)$  é chamada uma primitiva da função  $f(x)$  em um intervalo  $I$  (ou simplesmente uma primitiva  $f(x)$ ), se para todo  $x \in I$ , temos  $F'(x) = f(x)$ .

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função  $f(x)$  estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função  $f$ , no mesmo intervalo  $I$ .

### Exemplos 2.8.1:

(i)  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  é uma primitiva da função  $f(x) = x^2$ , pois  $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$ .

- (ii) As funções  $G(x) = x^3 + 4$ ,  $H(x) = 1/3(x^3 + 3)$  também são primitivas da função  $f(x) = x^2$ , pois  $G'(x) = H'(x) = f(x)$ .
- (iii) A função  $F(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(2x) + c$  onde  $c$  é uma constante, é primitiva da função  $f(x) = \cos(2x)$ .
- (iv) A função  $F(x) = (1/2x^2)$  é uma primitiva da função  $f(x) = -1/x^3$  em qualquer intervalo que não contém a origem, pois, todo  $x \neq 0$ , temos  $F'(x) = f(x)$ .

Os exemplos anteriores nos mostram que uma mesma função  $f(x)$  admite mais de uma primitiva. Temos as seguintes proposições.

**Proposição 2.8.2.1:** Seja  $F(x)$  uma primitiva da função  $f(x)$ . Então, se  $c$  é uma constante qualquer, a função  $G(x) = F(x) + c$  também é uma primitiva de  $f(x)$ .

**Prova:** Como  $F(x)$  é primitiva de  $f(x)$ , temos que  $F'(x) = f(x)$ . Assim:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x),$$

o que prova que  $G(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ .

**Proposição 2.8.2.2:** Se  $f'(x)$  se anula em todos os pontos de um intervalo  $I$ , então  $f$  é constante em  $I$ .

**Prova:** Sejam  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Como  $f$  é derivável em  $I$ ,  $f$  é contínua em  $[x, y]$  e derivável em  $(x, y)$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $z \in (x, y)$ , tal que  $f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ .

Como  $f'(z) = 0$ , vem que  $f(y) - f(x) = 0$  ou  $f(y) = f(x)$ . Sendo  $x$  e  $y$  dois pontos quaisquer de  $I$ , concluímos que  $f$  é constante em  $I$ .

**Proposição 2.8.2.3:** Se  $F(x)$  e  $G(x)$  são funções primitivas de  $f(x)$  no intervalo de  $I$ , então existe uma constante  $c$  tal que  $G(x) - F(x) = c$ , para todo  $x \in I$ .

**Prova:** Seja  $H(x) = G(x) - F(x)$ . Como  $F$  e  $G$  são primitivas de  $f(x)$  no intervalo  $I$ , temos  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ , para todo  $x \in I$ . Assim:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Pela Proposição 2.8.2.2, existe uma constante  $c$ , tal que  $H(x) = c$ , para todo  $x \in I$ . Logo, para todo  $x \in I$ , temos:  $G(x) - F(x) = c$ .

Concluimos que, se  $F(x)$  é uma particular primitiva de  $f$ , então toda primitiva de  $f$  é da forma  $G(x) - F(x) = c$ , onde  $c$  é uma constante. Assim, o problema de determinar as primitivas de  $f$  se resume em achar uma primitiva particular.

**Exemplo 2.8.2:** Sabemos que  $(\sin x)' = \cos x$ . Assim,  $F(x) = \sin x$  é uma primitiva da função  $f(x) = \cos x$  e toda primitiva de  $f(x) = \cos x$  é da forma

$$G(x) = \sin x + c,$$

para alguma constante  $c$ .

**Definição 2.8.3:** Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , a expressão  $F(x) + c$  é chamada integral indefinida da função  $f(x)$  e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

De acordo com esta anotação o símbolo  $\int$  é chamado sinal de integração,  $f(x)$  função integrando e  $f(x)dx$  integrando. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado integração. O símbolo  $dx$  que aparece no integrando serve para identificar a variável de integração.

Da definição da integral indefinida, decorre que:

- (i)  $\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ .
- (ii)  $\int f(x)dx$  representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).

A figura 21 mostra uma família de primitivas da função integrando  $f(x) = x^2 + 1$ . Observamos que o valor da constante, para a figura apresentada assumiu os valores  $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .

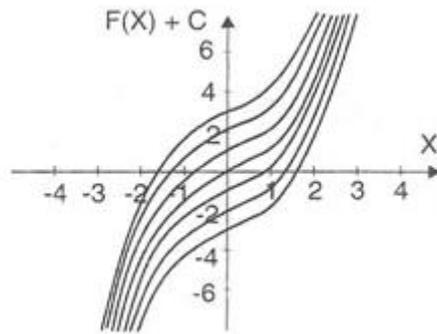


Figura 21: Família de primitivas da função  $f(x)=x^2+1$ .

### 2.8.3.1 Propriedade da Integral Indefinida

**Proposição 2.8.3.1:** Sejam  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $K$  uma constante. Então:

- (i)  $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx.$
- (ii)  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

#### Prova do item (i)

Seja  $F(x)$  uma primitiva de  $f(x)$ . Então,  $KF(x)$  é uma primitiva de  $Kf(x)$ , pois  $(KF(x))' = KF'(x) = Kf(x)$ . Dessa forma, temos:

$$\int Kf(x) dx = KF(x) + c = KF(x) + Kc_1 = K[F(x) + c_1] = K \int f(x)dx$$

#### Prova do item (ii):

Sejam  $F(x)$  e  $G(x)$  funções primitivas de  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente. Então,  $F(x) + G(x)$  é uma primitiva da função  $(f(x) + g(x))$ , pois  $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ .

Portanto,

$$\int (f(x) + g(x))dx = [F(x) + G(x)] + c.$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2, \text{ onde } c = c_1 + c_2.$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas imediatas, a partir das derivadas das funções elementares.

### 2.8.3.2 Tabela de Integrais Imediatas

- (1)  $\int du = u + c;$
- (2)  $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \text{ é constante } \neq -1);$
- (3)  $\int e^u du = e^u + c;$
- (4)  $\int \text{sen } u du = -\text{cos } u + c;$
- (5)  $\int \text{cos } u du = \text{sen } u + c;$
- (6)  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$
- (7)  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c.$

**Exemplo 2.8.3:** Calcular a integral  $\int (4x^3 + 5x + \sqrt{x})dx.$

$$\begin{aligned} \int (4x^3 + 5x + \sqrt{x})dx &= 4 \int x^3 dx + 5 \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = 4 \frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + c \\ &= x^4 + \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{3/2} + c. \end{aligned}$$

### 2.8.4 Integral Definida

A integral definida está associada ao limite da Definição 2.8.1. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas e problemas físicos. De acordo com a terminologia introduzida na seção anterior, temos a seguinte definição.

**Definição 2.8.4:** Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[a, b]$  e seja  $P$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . A integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por  $\int_a^b f(x)dx$ , é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ desde que o limite do 2º membro exista.}$$

Se  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$ , isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Quando a função  $f$  é contínua e não negativa em  $[a, b]$ , a definição da integral definida coincide com a definição da área (Definição 2.8.1). Portanto, neste caso, a integral definida  $\int_a^b f(x)dx$  é a área da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $b$ .

Sempre que utilizamos um intervalo  $[a, b]$ , supomos  $a > b$ . Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite é maior que o limite superior.

**Definição 2.8.5:** (a) Se  $a > b$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx,$$

se a integral à direita existir.

(b) Se  $a = b$  e  $f(a)$  existe, então  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

É muito importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no Cálculo é a classe das funções contínuas. O teorema a seguir, cuja demonstração será omitida, garante que elas são integráveis.

**Teorema 2.8.4.1:** Se  $f$  é contínua sobre  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

### Propriedades da Integral Definida

**Proposição 2.8.4.2:** Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $k$  é um número real arbitrário, então  $k f$  é integrável em  $[a, b]$ , e

$$\int_a^b k f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Prova:** Como  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , existe o limite

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(c_i)\Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx.$$

**Proposição 2.8.4.3:** Se  $f$  e  $g$  são funções integráveis em  $[a, b]$ , então  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ .

**Prova:** Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , existe o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i, \text{ que é a } \int_a^b f(x)dx.$$

Se  $g$  é integrável em  $[a, b]$ , existe o limite  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i$ , que é  $\int_a^b g(x)dx$ .

Escrevemos, então:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i))\Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Observamos que esta proposição pode ser estendida para um número finito de funções, ou seja,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

Vale também para o caso de termos diferença de funções, isto é,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

**Proposição 2.8.4.4:** Se  $a < c < b$  e  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Proposição 2.8.4.5:** Se uma função  $f$  é contínua em  $[a,b]$ , existe um ponto  $c$  entre  $a$  e  $b$  tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

### 2.8.5 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva de uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos calcular a sua integral definida  $\int_a^b f(t)dt$ . Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas práticos que envolvem o cálculo da integral definida.

Para apresentar formalmente o Teorema, inicialmente vamos definir uma importante função auxiliar, como segue.

Tomamos a integral definida  $\int_a^x f(t)dt$ , fixamos o limite inferior  $a$  e fazemos variar o limite superior. Então, o valor da integral dependerá desse limite superior variável, que indicaremos por  $x$ . Fazendo  $x$  variar no intervalo  $[a, b]$ , obtemos uma função  $G(x)$ , dada por  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Intuitivamente, podemos compreender o significado de  $G(x)$  através de uma análise geométrica. Conforme vimos anteriormente, se  $f(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$ , a integral

$$\int_a^b f(t)dt$$

representa a área abaixo do gráfico de  $f$  entre  $a$  e  $b$  (ver Figura 22). Da mesma forma,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

nos dá a área abaixo do gráfico de  $f$  entre  $a$  e  $x$ . Podemos observar que  $G(a) = 0$  e  $G(b)$  nos dá a área da Figura 22.

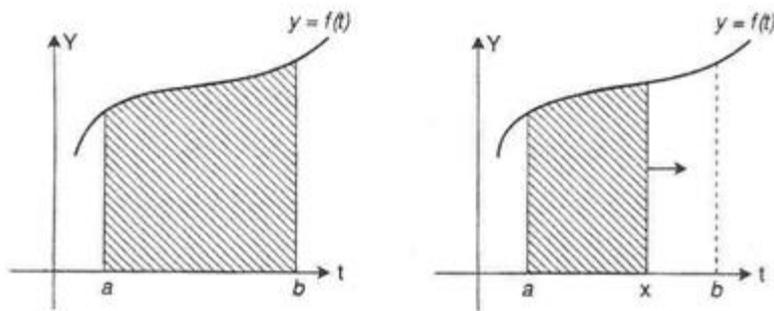


Figura 22: Áreas abaixo da curva.

Vamos, agora, determinar a derivada da função  $G(x)$ . Temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.8.5.1:** Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$ . Então a função  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,

tem derivada em todos os pontos  $x \in [a, b]$  que é dada por:  $G'(x) = f(x)$ , ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

**Prova:** Vamos determinar a derivada  $G'(x)$ , usando a definição:

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

Temos que  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  e também que

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \text{ e } G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Usando a Proposição 2.8.4.4 podemos escrever

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

e, então,

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Como  $f$  é contínua em  $[x, x + \Delta x]$ , por Proposição 2.8.4.5, existe um ponto  $\bar{x}$  entre  $x$  e  $x + \Delta x$  tal que,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = (x + \Delta x - x)f(\bar{x}) = f(\bar{x})\Delta x.$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}).$$

Como  $\bar{x}$  está entre  $x$  e  $x + \Delta x$ , segue que  $\bar{x} \rightarrow x$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Como  $f$  é contínua, temos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x)$ .

$$\text{Logo, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ ou seja, } G'(x) = f(x).$$

Observamos que, quando  $x$  é um dos extremos do intervalo  $[a, b]$ , os limites usados na demonstração serão limites laterais.  $G'(a)$  será uma derivada à esquerda.

Uma importante consequência desta proposição é que toda função  $f(x)$  contínua num intervalo  $[a, b]$  possui uma primitiva que é dada por  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Podemos, agora, estabelecer formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 2.8.5.2:** Se  $f$  é contínua sobre  $[a, b]$  e se  $F$  é uma primitiva de  $f$  neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Prova:** Como  $f$  é contínua sobre  $[a, b]$ , pela Proposição 2.8.5.1, segue que:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de  $f$  nesse intervalo.

Seja  $F(x)$  uma primitiva qualquer de  $f$  sobre  $[a, b]$ . Por Proposição 2.8.2.3, temos que:

$$F(x) = G(x) + c, \forall x \in [a, b].$$

Como  $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$  e  $G(b) = \int_a^b f(t)dt$ , calculando a diferença  $F(b) - F(a)$ , obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Observamos que a diferença  $F(b) - F(a)$  usualmente é denotada por  $F(t) \Big|_a^b$ .

Também escrevemos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

## 2.8.6 Cálculo de Áreas

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

**Caso 1:** Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de  $f$ , pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$  e o eixo dos  $x$ , onde  $f$  é contínua e  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

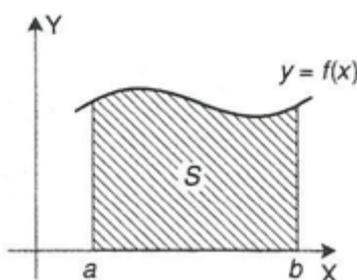


Figura 23: Cálculo de área de figura plana limitada pelo gráfico.

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

**Exemplo 2.8.6.1:** Encontre a área limitada pela curva  $y = 4 - x^2$  e o eixo dos  $x$ .

A curva  $y = 4 - x^2$  intercepta o eixo dos  $x$  nos pontos de abscissa  $-2$  e  $2$  (ver figura 24) .

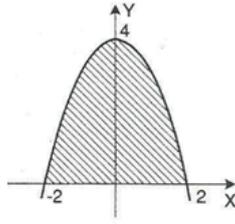


Figura 24: Gráfico de  $y=4-x^2$ .

No intervalo  $[-2, 2]$ ,  $y = 4 - x^2 \geq 0$ . Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de  $y = 4 - x^2$  de -2 até 2.

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}.$$

Portanto,  $A = 32/3$  ( $32/3$  unidades de área).

**Caso II:** Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de  $f$ , pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$  e o eixo  $x$ , onde  $f$  é contínua e  $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$  (ver figura 25).

É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ ou seja, } A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

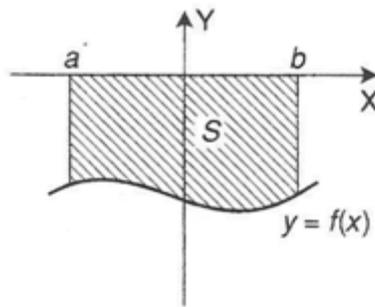


Figura 25: Gráfico de  $f$ , para  $f(x) \leq 0$ .

**Exemplos 2.8.6.2:**

- (i) Encontre a área limitada pela curva  $y = -4 + x^2$  e o eixo do  $x$ . A curva  $y = x^2 - 4$  intercepta o eixo dos  $x$  nos pontos de abcissa -2 e 2 (ver Figura 26).

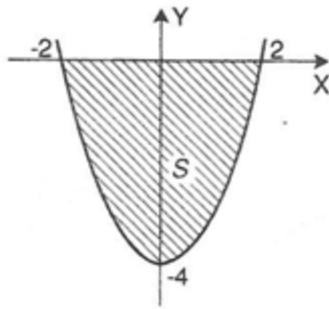


Figura 26: Gráfico de  $y = -4 + x^2$ .

No intervalo  $[-2, 2]$ ,  $y = x^2 - 4 \leq 0$ . Assim

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| \\
 &= \frac{-32}{3} = \frac{32}{3} \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$

- (ii) Encontre a área da região  $S$ , limitada pela curva  $y = \text{sen } x$  e pelo eixo dos  $x$  de  $0$  até  $2\pi$ .

Precisamos dividir a região  $S$  em duas sub-regiões  $S_1$  e  $S_2$  (ver Figura 27).

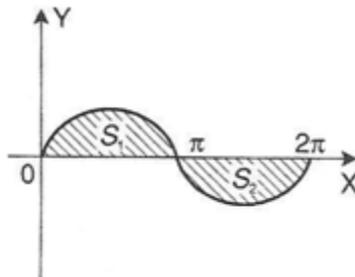


Figura 27: Gráfico da Região  $S$  dividido em duas sub-regiões  $S_1$  e  $S_2$ .

No intervalo  $[0, \pi]$ ,  $y = \text{sen } x \geq 0$  e no intervalo  $[\pi, 2\pi]$ ,  $y = \text{sen } x \leq 0$ . Portanto, se  $A_1$  é a área de  $S_1$  e  $A_2$  é a área de  $S_2$ , temos:

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_0^{2\pi} \right|$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + 1 - \cos 2\pi + \cos \pi$$

$$= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)| = 4 \text{ u. a.}$$

**Caso III:** Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de  $f$  e  $g$ , pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ .

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde  $f$  e  $g$  assumem valores não negativos para todo  $x \in [a, b]$  (ver Figura 28).

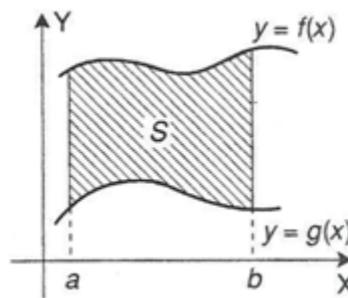


Figura 28: Gráfico de área de figura limitada por  $f(x), g(x)$  e pelas retas  $x=a$  e  $y=b$ .

Então, a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de  $f$  e a área sob o gráfico de  $g$ , ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos  $x$  deslocado de tal maneira que as funções se tornem não negativo,  $\forall x \in [a, b]$ .

Observando a Figura 29, concluímos que:

$$A' = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

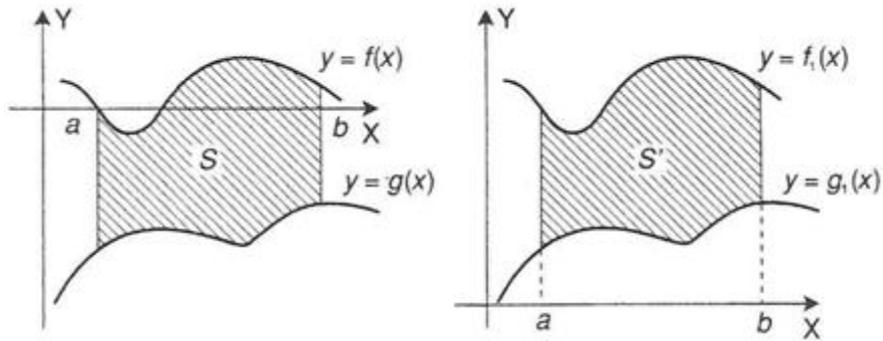


Figura 29: Figura com eixo trasladado.

### Exemplos 2.8.6.3:

(i) Encontre a área limitada por  $y = x^2$  e  $y = x + 2$ .

As curvas  $y = x^2$  e  $y = x + 2$  interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 30).

No intervalo  $[-1, 2]$  temos  $x + 2 \geq x^2$ . Então,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left( \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{9}{2} \text{ u. a.} \end{aligned}$$

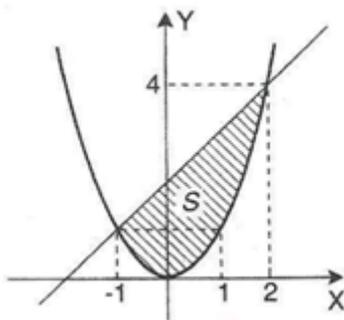


Figura 30: Figura que representa a área da intersecção de  $y=x^2$  e  $y=x+2$ .

(ii) Encontre a área limitada pelas curvas  $y = x^3$  e  $y = x$ .

As curvas  $y = x^3$  e  $y = x$  interceptam-se nos pontos de abscissa -1, 0 e 1 (ver Figura 31).

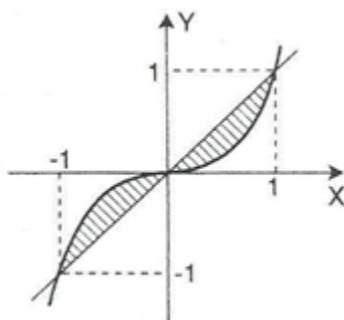


Figura 31: Figura que representa a área da intersecção de  $y=x^3$  e  $y=x$ .

No intervalo  $[-1, 0]$ ,  $x < x^3$  e, no intervalo  $[0, 1]$ ,  $x > x^3$ . Logo,

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{ u. a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2} \text{ u. a.,}$$

Pois a área à esquerda do eixo do  $y$  é igual a que se encontra à sua direita.

## CAPÍTULO III

### 3.1 AS LEIS DE KEPLER

No início dos anos 1600, Johannes Kepler propôs três leis do movimento planetário. Kepler foi capaz de resumir os dados cuidadosamente recolhidos de seu mentor, Tycho Brahe, com três declarações que descrevem o movimento dos planetas em um sistema solar heliocêntrico. Os esforços de Kepler para explicar as razões subjacentes a essas propostas não são mais aceitos, no entanto, as leis propriamente ditas ainda são consideradas uma descrição precisa do movimento de todos os planetas e qualquer satélite.

As três leis de Kepler resumem-se em:

1. As órbitas descritas pelos planetas ao redor do Sol são elipses, com o Sol em um dos focos;
2. O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais;
3. Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias médias ao Sol.

#### 3.1.1 LEI DE GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Tendo como base as leis de Kepler, Newton chegou à conclusão de que se os planetas descrevem órbitas ao redor do Sol estes deveriam estar sujeitos a uma forma centrípeta para que eles pudessem executar trajetórias curvas. Assim, Newton admitiu que suas leis de movimento valessem para corpos celestes.

As Leis de movimento de Newton são:

**1ª Lei de Newton (ou Lei da Inércia):** “Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele”.

**2ª Lei de Newton:** “A variação do momento é proporcional à força impressa, e tem direção da força”.

**3ª Lei de Newton:** “A toda ação corresponde uma reação igual e contrária, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos”.

Baseando-se nas leis do movimento, no que havia estudado do trabalho de Kepler, considerando  $M$  como sendo a massa do Sol e  $m$  a massa de um planeta, Newton concluiu que a força exercida entre o Sol e o planeta seria a manifestação de uma interação universal e enunciou a seguinte lei de gravitação:

“Duas partículas se atraem com força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.”

Assim, considerando  $M$  muito maior que  $m$ , supondo que o corpo de massa  $M$  está em repouso e que este seria o centro de massa de um sistema isolado no qual a única força de interação, a força gravitacional. Esta força tem mesma direção do vetor posição do planeta, porém possui sentido contrário. Logo, temos:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2},$$

onde  $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2/\text{kg}^2$  é a constante gravitacional e  $r$  é a distância entre  $M$  e  $m$ . Esta constante quer dizer que a força de atração gravitacional entre duas massas de 1kg à distância de 1m é de aproximadamente  $6,67 \times 10^{-11} \text{N}$ , ou seja, aproximadamente  $10^{-5}$  vezes o peso de um fio de cabelo.

E como Newton chegou à esta equação?

Para uma órbita circular, a segunda lei de Kepler implica que o movimento é uniforme. Como sabe-se a aceleração centrípeta é dada para uma órbita circular de raio  $R$  e de velocidade angular  $\omega = 2\pi/T$  ( $T$  é o período) por

$$a = -\omega^2 R \hat{r} = -4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{r}$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial. Se  $m$  é a massa do planeta, a força que atua sobre ele é dada pela segunda lei de Newton, isto é,

$$F = ma = -4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{r}$$

que é uma força atrativa central (dirigida para o Sol). Pela terceira lei de Kepler, temos:  $\frac{R^3}{T^2} = C = \text{constante}$ . Logo, podemos reescrever a equação da força:

$$F = -4\pi^2 C \frac{m}{R^2} \hat{r}.$$

A lei dos períodos de Kepler leva à conclusão de que a força gravitacional varia inversamente com o quadrado da distância do planeta ao Sol. Pela 3ª lei de Newton, o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol, a qual deve também ser proporcional à massa  $M$  do Sol. Newton foi levado a seguinte expressão:

$$F = -G \frac{mM}{R^2} \hat{r}.$$

## 3.2 Leis de Kepler via Lei da Gravitação de Newton

### 3.2.1 Primeira lei de Kepler

A primeira lei de Kepler, chamada lei das órbitas elípticas, afirma que, considerando o Sol um referencial fixo, as órbitas dos planetas são elipses e o Sol ocupa um dos focos.

Lembrando que uma elipse é definida como um conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é uma constante a qual é maior do que a distância entre eles. Os pontos fixos são chamados focos da elipse. A distância entre os focos chama-se distância focal.

Os elementos da elipse são: o centro, o eixo maior, o eixo menor, os focos e os vértices. Os eixos de simetria da elipse são:  $x=0$  e  $y=0$ .

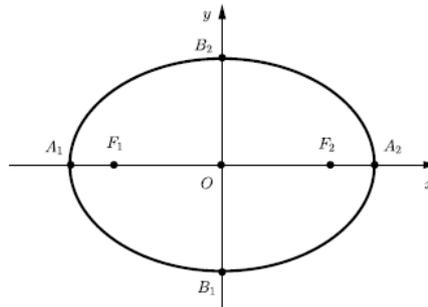
Podemos descrever a elipse como o conjunto:

$$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\},$$

onde  $0 \leq c < a$ ,  $d(F_1, F_2) = 2c$ .

No conjunto acima,  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse. A reta que contém os focos é chamada reta focal. A intersecção da reta focal com a elipse são dois pontos, chamados

vértices  $A_1$  e  $A_2$ . Chamamos de excentricidade a constante  $e=c/a$ . No caso de um círculo temos que  $e=1$  (ver figura abaixo).



**Figura 3: Elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .**

Voltando às Leis de Kepler via Lei da Gravitação de Newton, vamos considerar primeiramente o planeta como sendo uma partícula, pois seu tamanho é desprezível em comparação com a distância ao sol. Então, usamos a teoria da gravitação universal:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r},$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial.

**Definição 3.2.1:** Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação da forma:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

que envolve a incógnita  $y=y(x)$  e suas derivadas ou diferenciais.

**Observações:** 1) Se ao invés de  $x$  tivermos  $t$  podemos usar a notação  $\dot{y}$  para indicar a derivada de  $y$  em relação ao tempo  $t$  e  $\ddot{y}$ , derivada da derivada em relação ao tempo  $t$  (segunda derivada). Por exemplo, considere o movimento de uma partícula de massa  $m$  deslocando-se sobre o eixo  $x$  sob a ação de uma única força  $F$ . A equação que rege este movimento é  $F=m.a$ , que pode ser escrita na forma da equação diferencial:

$$F = m.\ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Supondo que a massa do planeta é constante, (o que está de acordo com os sistemas observados por Kepler), usamos a primeira lei de Newton. Isto é,

$$m\ddot{r} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \text{ isto é, } \ddot{r} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}.$$

Temos:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = G\frac{M}{r^2}\hat{r}. \text{ Assim, } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = G\frac{M}{r^2} \text{ e } r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Da última equação, podemos derivar a conservação do momento angular, multiplicando os dois membros por  $mr$ :

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} = 0, \text{ isto é, } \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

Assim,  $mr^2\dot{\theta} = l$ , onde  $l$  é uma constante, que sabemos ser a magnitude do momento angular.

Podemos transformar derivadas temporais em derivadas em relação a  $\theta$ , a partir da seguinte relação  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{mr^2}$ .

Se tivermos a derivada de qualquer função  $x(t)$  em relação ao tempo, podemos usar a regra da cadeia  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{mr^2} \frac{dx}{d\theta}$ . O que é de grande utilidade na equação diferencial:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -G\frac{M}{r^2}, \text{ daí,} \\ \frac{1}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - r\dot{\theta}^2 &= -G\frac{M}{r^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{mr^2} \left( -2\frac{1}{mr^3} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} \right) - r\dot{\theta}^2 &= -G\frac{M}{r^2} \Rightarrow \\ -2\frac{l^2}{m^2r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - r\dot{\theta}^2 &= -G\frac{M}{r^2}. \end{aligned}$$

É preciso aqui extrair do momento angular uma relação útil:

$$l = mr^2\dot{\theta}, \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}.$$

Substituindo na equação principal, temos:

$$-2\frac{l^2}{m^2r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{l^2}{m^2r^3} = G\frac{M}{r^2}$$

Aqui, convém usar uma transformação de variável:

$$u = r^{-1}, \frac{du}{d\theta} = -r^{-2} \frac{dr}{d\theta}, \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2r^{-3} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^{-2} \frac{d^2r}{d\theta^2}$$

Utilizando-a na equação diferencial e simplificando-a significativamente, temos:

$$-\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{m^2 r^3} = -G \frac{M}{r^2}$$

$$-\frac{l^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{m^2 r} = -GM$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{l^2}$$

A função que satisfaz à essa equação diferencial é:

$$u = \frac{GMm^2}{l^2} + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)$$

Ou seja,

$$r = \frac{l^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)}$$

$\epsilon$  é uma constante arbitrária de integração, e pode ser obtido se for dada a posição do planeta em qualquer instante. Com  $\epsilon$  menor do que 1, temos a equação de uma elipse escrita em coordenadas polares. Se  $\epsilon$  for 0, a equação é a de um círculo.

Assim, derivamos a Primeira Lei de Kepler.

### 3.2.2 Segunda lei de Kepler

A área descrita pelo raio-vetor que liga o planeta à sua estrela durante um certo tempo é dada por  $\sum_i^N a_i$ , onde  $a_i$  são as áreas percorridas em frações desse tempo. Adotamos frações de tempo pequenas, e por consequência teremos um  $N$  cada vez maior. Nada se altera se fizermos o limite em que as frações de tempo tendem a 0, ou seja,

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N a_i.$$

Ao admitir áreas  $a_i$  menores, elas se aproximam da área de um triângulo com base  $\Delta r_i$  e altura  $r_i$ , onde  $r_i$  é a magnitude do raio vetor  $\vec{r}_i$  que liga o planeta à sua estrela em algum instante dentro de um intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ , e  $\Delta r_i = |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$ , com  $r_{i-1}$  sendo o análogo de  $r_i$  em algum instante dentro do intervalo  $[t - \Delta t, t]$ . Ou seja,  $\Delta r_i$  é simplesmente a distância percorrida pelo planeta em certo tempo. Ou seja, as áreas  $a_i$  se aproximam arbitrariamente de  $\frac{r_i \Delta r_i}{2}$ .

Temos que  $\Delta r_i$  também pode se expressado como  $v_i \Delta t$ , onde  $v_i$  é a velocidade do planeta, em algum instante do mesmo intervalo de tempo de  $r_i$ . Quando  $N \rightarrow \infty$  temos  $\Delta t \rightarrow 0$ . Assim,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N a_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N \frac{r_i v_i \Delta t}{2},$$

o que constitui uma integral  $A = \int_0^t \frac{rv}{2} dt$ .

Como  $v = r\dot{\theta}$ , temos  $A = \int_0^t \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} dt$ , onde  $r^2 \dot{\theta}$  é o momento angular sobre a massa, o que nesse caso permanece sempre constante. Assim, a integral resulta em  $A = \frac{l}{2m} t$ .

Se o momento angular é sempre o mesmo, então são percorridas áreas iguais em tempos iguais.

### 3.2.3 Terceira lei de Kepler

A terceira Lei de Kepler é mais sutil. Ela é escrita em função do raio médio, então devemos achar esse raio. Na equação do raio

$$r = \frac{l^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)},$$

a única variável é o  $\cos(\theta + \theta_0)$ , de modo que o raio médio corresponde ao valor médio dessa variável. Esse valor corresponde a

$$\cos(\theta + \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \theta_0) d\theta = \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi + \theta) - \sin\theta) = 0.$$

Assim, o raio médio correspondente é  $r_{\text{med}} = \frac{l^2}{GMm^2}$ .

Podemos pensar também na velocidade angular média, correspondente ao raio médio. Ambos estão ligados através do momento angular ( $l = m\dot{\theta}_{\text{med}} r_{\text{med}}^2$ ). Então

$$l = m\dot{\theta}_{\text{med}} \frac{l^4}{G^2 M^2 m^4} e \dot{\theta}_{\text{med}} = \frac{G^2 M^2 m^3}{l^3}.$$

Uma definição importante é a do período, em função da velocidade angular média  $P = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_{\text{med}}}$ .

A velocidade angular média nessa equação é justificada pelo fato de que deve haver algum valor da velocidade angular, em algum instante, que satisfaça a essa equação. Esse valor é o da velocidade angular média. É possível demonstrar que o período de um planeta com órbita circular de raio  $r_{\text{med}}$  e velocidade angular  $\dot{\theta}_{\text{med}}$  é igual ao período de qualquer planeta com órbita elíptica de raio médio  $r_{\text{med}}$  e velocidade angular média  $\dot{\theta}_{\text{med}}$ . Isso é feito através da Segunda Lei de Kepler. A área total de um círculo é  $\pi r_{\text{med}}^2$ , e a área total de uma elipse é, pela Segunda Lei,  $\frac{1}{2m}P$ . Através da definição de P acima, vemos:

$$A = \frac{1}{2m}P$$

$$A = \frac{l\pi}{m\dot{\theta}_{\text{med}}}$$

$$A = \frac{l^4\pi}{G^2M^2m^4}$$

Lembrando a equação correspondente ao raio médio ( $r_{\text{med}} = \frac{l^2}{GMm^2}$ ), temos

$A = r_{\text{med}}^2\pi$ , que corresponde à área do círculo. Como, pela Segunda Lei, áreas iguais são percorridas em tempos iguais, então o período do planeta de órbita elíptica pode ser tomado a partir do período de uma órbita circular correspondente.

$$P = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_{\text{med}}}$$

$$P = \frac{2\pi l^3}{G^2M^2m^3}$$

$$P = \frac{2\pi r_{\text{med}}^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{med}}^3}{GM}$$

$\frac{P^2}{r_{\text{med}}^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ , o que constitui a terceira lei de Kepler.

## CAPÍTULO IV

Foi realizada com os alunos do 3º ano do ensino médio do colégio Delta em Bebedouro-SP, a atividade sobre as Leis de Kepler abordadas em três momentos: no primeiro, foi realizada a revisão do conteúdo, no segundo, atividades práticas como descritas a seguir em cada seção e no terceiro foi realizado uma atividade prática utilizando um simulador online das Leis de Kepler e os movimentos planetários. Dessa forma buscamos abordar assuntos relacionados com conceitos matemáticos utilizados nos cálculos dos movimentos celestes. Diante desse contexto, percebemos que abordar assuntos referentes à astronomia nos proporciona também a interdisciplinaridade, contribuindo para uma aula diferenciada, que foge da aula tradicional, despertando o interesse pelo conhecimento científico.

**OBJETIVO:** Proporcionar aos alunos do ensino médio um contato com leis fundamentais dos movimentos planetários através de aulas expositivas e a aplicação das três leis de Kepler utilizando exercícios, atividades práticas de baixo custo utilizando materiais do cotidiano e o computador.

**SEÇÃO 1 – 1ª Lei de Kepler (Lei das Órbitas)** *“Os planetas se movem em torno do Sol em órbitas elípticas, com o Sol num dos focos da elipse.”*

**MÉTODOS:** A atividade foi dividida em dois momentos: no primeiro, foi realizada uma aula de revisão sobre as Leis de Kepler e Gravitação Universal, para lembrar aos alunos o assunto já abordado em sala de aula e poder esclarecer algumas dúvidas. No segundo, realizamos a oficina de baixo custo sobre a 1ª Lei de Kepler, em que durante a oficina tivemos a preocupação de deixar um ambiente aberto para perguntas e respostas, tendo uma maior relação com o aluno por meio do diálogo. Utilizando papelão, folha de ofício, barbante, alfinete e lápis, 4 grupos de 5 alunos cada fizeram a construção de uma elipse referente à órbita do planeta anão Plutão do cinturão de Kuiper. Definimos a excentricidade (para facilitar vamos entender por “achatamento”) da elipse como sendo

a razão entre a distância entre os focos  $F = d(F_1, F_2)$  (ou distância focal) e o comprimento do eixo maior (A).

Representamos a excentricidade da elipse pela letra “e”, assim sendo:  $e = \frac{F}{A}$ .

Plutão foi escolhido por apresentar a maior excentricidade (0,25) e, conseqüentemente, uma elipse mais achatada. Para a construção da elipse foi marcado no papel os pontos dos focos da elipse e fixado um barbante nesses pontos com o alfinete, assim os alunos deslizaram o lápis sobre o papel mantendo o fio sempre esticado traçando a elipse. Mostramos também a órbita de todos os planetas do sistema solar para compararmos a excentricidade de suas elipses com a órbita dos planetas.

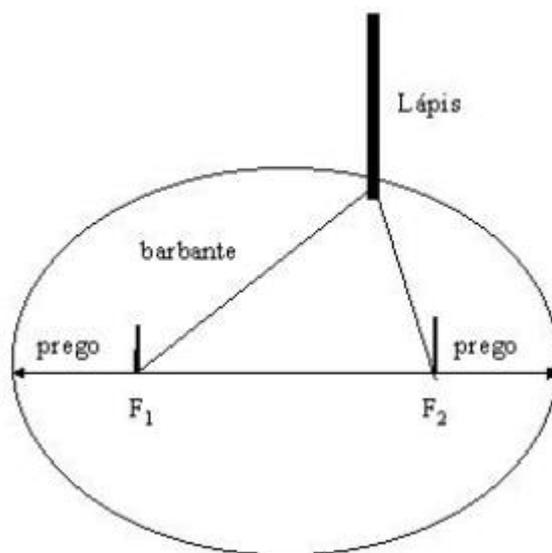


Figura 32: Experimento usado para construir uma elipse

**SEÇÃO 2 – 2ª Lei de Kepler (Lei das Áreas)** “*A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.*”

Nesta atividade fizemos medições de áreas varridas pela linha que liga Plutão ao Sol, em idênticos intervalos de tempo (~ 50 anos), mas em diferentes posições do planeta ao redor do Sol, para comprovarmos que estas áreas são iguais.

**MÉTODOS:** Foram selecionadas duas “áreas” da órbita de Plutão e copiadas sobre uma folha de papel milimetrado, em seguida calculou-se a área. Para medir a área de cada pedaço foram adotados os passos a seguir:

1. Contou-se todos os “centímetros quadrados” do papel milimetrado que estiveram inteiramente dentro do “pedaço” da “área”. Multiplicou-se esse número por 4 pois nossa unidade de área foi o quadradinho com 5 mm de lado, ou seja, um quarto de centímetro quadrado.
2. Na fronteira contamos todos os quadradinhos (de 5 milímetro de lado) em que a linha da fronteira passou por eles. Somamos esses quadradinhos e dividamos por 2.
3. Somando os resultados obtidos nos dois itens anteriores obtivemos a área da seção medida.
4. Repetiu-se o procedimento para outra “área” e observaremos que as áreas foram iguais ou então muito aproximadamente semelhantes, uma vez que usamos um método relativamente grosseiro para calcular a área.

**SEÇÃO 3 – 3ª Lei de Kepler (Lei dos Períodos)** “O quadrado do período de revolução de cada planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao cubo da distância média desse planeta ao Sol.”

A terceira lei de Kepler pode matematicamente ser descrita pela equação:

$$T^2 = k.R^3,$$

onde T = período de revolução, K = constante de proporcionalidade e R = distância da Terra ao Sol (semieixo). Observa-se que quanto maior o semieixo, maior o período, ou seja, maior o ano do planeta.

## MÉTODOS

A tabela abaixo foi passada para os alunos e continha os planetas com seus respectivos períodos e distâncias:

Planeta	Período (T - em anos terrestres)	Distância (D - em U.A. = Unidade Astronômica)
Mercúrio	0,24	0,39
Vênus	0,62	0,72
Terra	1,00	1,00
Marte	1,88	1,52
Júpiter	11,86	5,20
Saturno	29,46	9,54

Foi pedido aos grupos de alunos que utilizassem a tabela e a equação da Terceira Lei de Kepler para resolverem as seguintes questões:

1. Descobrir qual é o valor da constante mencionada na Lei dos Períodos. Para tanto basta calcular o quadrado de cada período e dividir pelo cubo da respectiva distância. Achar o valor dessa constante para cada planeta e calcular seu valor médio, isto é, somar seus valores e dividir pelo número deles.
2. Posteriormente foram descobertos os planetas Urano, Netuno e Plutão, com as seguintes distâncias médias ao Sol, em Unidades Astronômicas (U.A.): 19,19, 30,08 e 39,46, respectivamente. Foi usada a Lei dos Períodos e encontrado os períodos de translações destes planetas.
3. Completar a tabela acima com os valores encontrados no item 2 e fazer um gráfico do quadrado dos períodos (no eixo das ordenadas) em função do cubo das distâncias médias dos planetas ao Sol (no eixo das abscissas) e traçar a reta média através destes

pontos. Verificar que o coeficiente angular desta reta é igual ao valor médio da constante da Lei dos Períodos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Observamos que ao abordar o conteúdo de astronomia na turma de 3º ano do ensino médio, foi possível perceber um maior interesse por parte dos alunos, que até então em sua maioria tratava a matemática e a astronomia como ciências distintas e sem nenhuma ligação. As atividades realizadas foram de suma importância para que os alunos pudessem entender que o que faz os planetas girarem ao redor do Sol é a força gravitacional e que sua intensidade depende da massa dos corpos e da distância entre eles. Pode-se concluir em cada etapa relacionada com as leis:

- **1ª Lei de Kepler:** Os alunos compreenderam as principais diferenças entre um círculo e uma elipse após construir a elipse da órbita de Plutão, entendendo melhor o movimento orbital dos planetas em torno do Sol.
- **2ª Lei de Kepler:** A atividade mostrou que utilizando a órbita do planeta já desenhada, em escala e dividida em iguais intervalos de tempo, foi possível calcular a área varrida pela linha imaginária que liga o Sol ao planeta e confirmar que estas áreas são iguais.
- **3ª Lei de Kepler:** Após os cálculos, os alunos perceberam que os valores do quadrado do período e o cubo da área percorrida pelo respectivo planeta observado mantinham uma igualdade, confirmando assim a 3ª Lei de Kepler.

Esse trabalho apresentou resultados satisfatórios ao levar o conteúdo para os alunos por meio de uma oficina nesta atividade os alunos constroem um experimento relacionado com o conteúdo os ajudando a observar de forma prática o que está sendo abordado de forma abstrata, tornando a aula mais participativa, diferenciada e de grande aceitação pelos estudantes, além de estimular o trabalho em grupo.

## ATIVIDADE USANDO SIMULADOR

Na Internet foi acessado o software pelo site: <http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/kepler.swf> onde está disponível um simulador das Leis de Kepler sobre o movimento planetário. Nesta página o aluno foi capaz de trabalhar com as três Leis de Kepler simultaneamente podendo selecionar o planeta, ajustar valores de excentricidade, tempo de animação em anos/segundo, visualizar os focos da elipse e os eixos maiores e menores.

The image shows the 'Planetary Orbit Simulator' interface. The main window displays an elliptical orbit around a central yellow sun. Labels include 'semiminor axis' (red), 'semimajor axis' (blue), 'center' (marked with 'x'), and 'empty focus' (marked with 'x'). A scale bar indicates '0.5 AU'. A box labeled '1ª Lei de Kepler' points to the orbit. To the right, the 'Orbit Settings' panel includes a planet selector set to 'Mercury', a semimajor axis (AU) slider at 1.00, and an eccentricity slider at 0.400. Below this is the 'Animation Controls' panel with a 'start animation' button and an animation rate (yrs/s) slider at 0.20. The 'Visualization Options' panel has checkboxes for 'show solar system orbits', 'show solar system planets', 'label the solar system orbits', and 'show grid'. At the bottom left, a menu lists 'Kepler's 1st Law', 'Kepler's 2nd Law', 'Kepler's 3rd Law', and 'Newtonian Features'. The 1st Law section is active, showing the equation  $f_1 + f_2 = 2 \times a$  with values  $0.600 \text{ AU} + 1.400 \text{ AU} = 2.000 \text{ AU}$ . Checkboxes for 'show empty focus', 'show center', 'show semiminor axis', and 'show semimajor axis' are all checked. A 'show radial lines' checkbox is unchecked. A 'clear optional features' button is at the bottom right of the settings panel. On the far left, three blue boxes are labeled '1ª Lei de Kepler', '2ª Lei de Kepler', and '3ª Lei de Kepler'. On the right, four blue boxes are labeled 'Seleção de planeta', 'Tamanho do eixo maior', 'Excentricidade', and 'Taxa de animação (anos/s)'. At the bottom left, there are two orange arrows pointing to links: 'Órbita de Marte' and 'Astronomia e Astrofísica'.

Figura 33: Simulação das Leis de Kepler sobre o Movimento dos Planetas

Na interface do programa (figura acima) o aluno foi capaz de interagir com as principais definições da 1ª Lei de Kepler e alterar as características. Os alunos puderam visualizar o “achatamento” da elipse conforme aumentavam os valores de excentricidade.

A figura abaixo mostra a interface da simulação referente à 2ª Lei de Kepler. Ao clicar em *Start sweeping* (iniciar varredura) uma animação mostrava a trajetória do planeta ao redor do sol em um dos focos e preenchia com diferentes cores regiões de áreas iguais varridas em determinados tempo pré-fixados pelos alunos em *Adjustsize* (ajuste de tamanho).

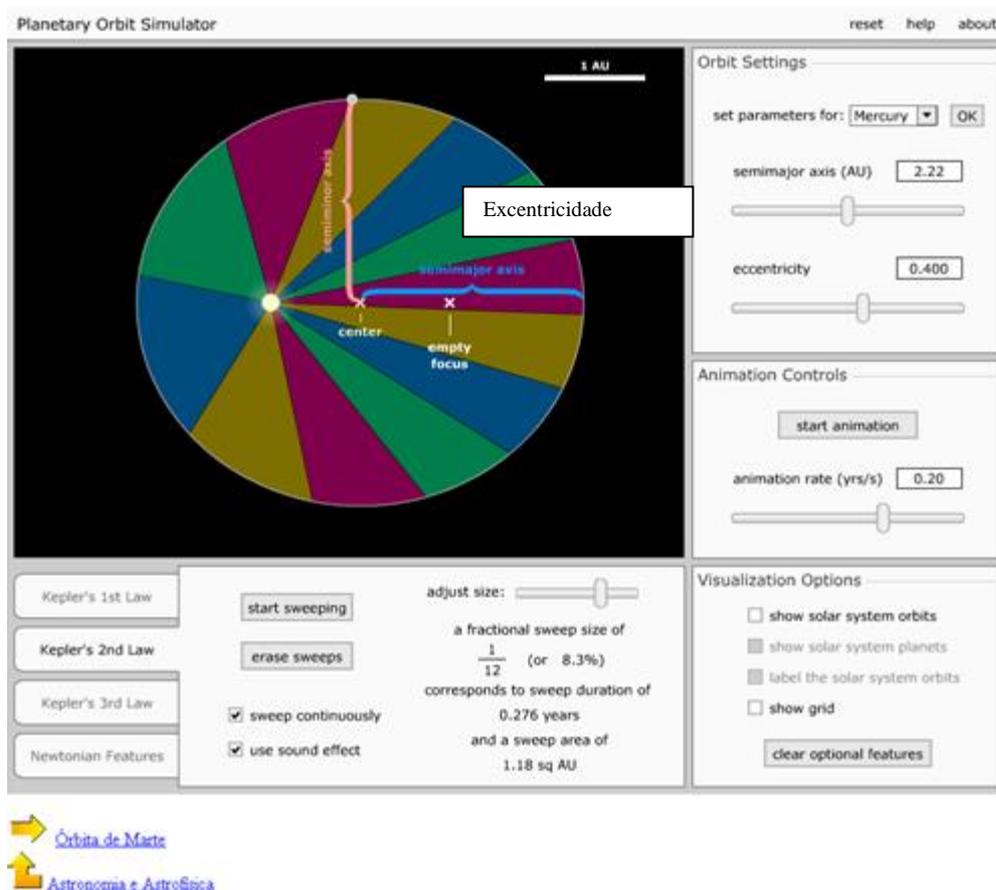
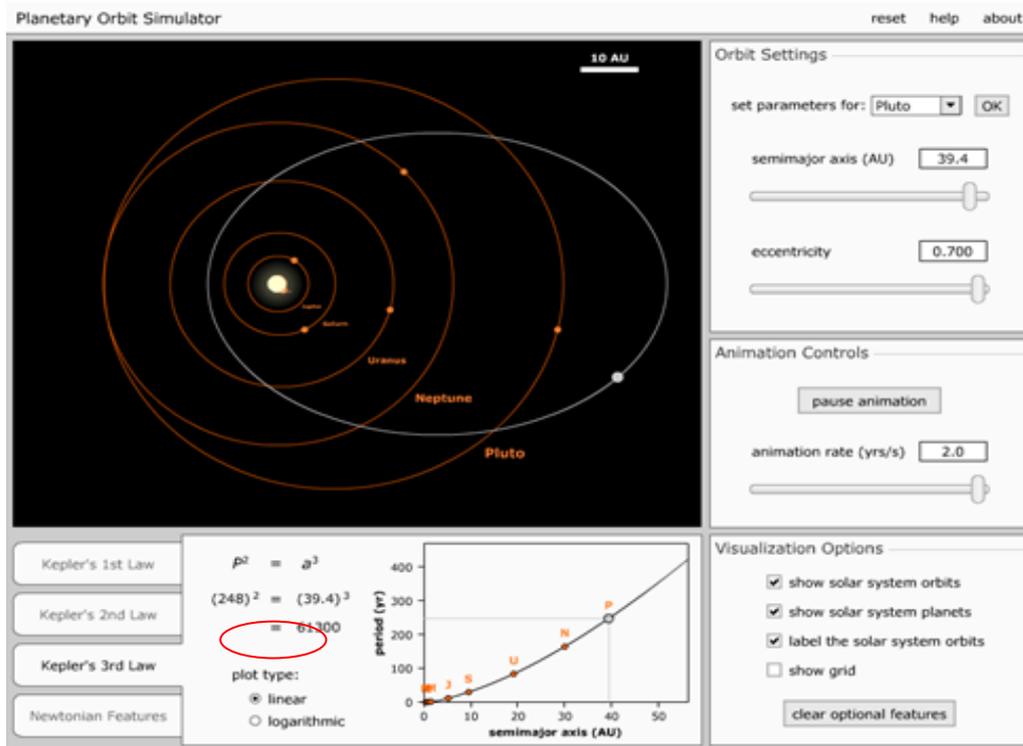


Figura 34: Simulação das Leis de Kepler Sobre a Movimentação dos Planetas

Na opção da 3ª Lei de Kepler pode-se confirmar a definição “O quadrado do período de revolução de cada planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao cubo da distância média desse planeta ao Sol”. Na parte inferior da tela foi dada a expressão  $p^2 = a^3$ , onde  $p$  é período e  $a$  é área. Os alunos perceberam que as igualdades se mantinham automaticamente ao mudarem os valores de tamanho do eixo maior.



➔ [Órbita de Marte](#)

➔ [Astronomia e Astrofísica](#)

Figura 35: Simulação das Leis de Kepler sobre o Movimento dos Planetas

## CONCLUSÕES

Tendo em vista que a matemática dada em sala de aula é abordada de forma apenas teórica e sem muita conjugação com outros ramos, a atividade realizada neste trabalho buscou efetivar uma aprendizagem mais participativa do aluno, fugindo da forma tradicional, a qual o aluno está condicionado a absorver os assuntos ditados pelo professor como forma de verdade absoluta. As oficinas sobre as Leis de Kepler complementadas com as simulações computacionais mostraram aos estudantes a relação da matemática vista em sala com a astronomia e que é possível aprender ciências utilizando materiais do nosso cotidiano, além de estimular a atividade em grupo que reflete um rendimento individual e social do estudante. Desse modo, percebemos a importância de atividades práticas que relaciona o lúdico com o científico, mostrando para nós professores que é necessário inovar no processo de ensino-aprendizagem, despertando um maior interesse físico científico e tornando a aprendizagem mais completa.

## REFERÊNCIAS

ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Vol. 2, p. 311-323. 2007

ARAÚJO, D.C.C., Astronomia no Brasil: das grandes descobertas à popularização. Monografia apresentada ao curso de graduação em física da universidade católica de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em física. Brasília – DF 2010.

AVILA G., Kepler e a órbita elíptica Instituto de Matemática — UNICAMP, 2010.

ÁVILA, G., Cálculo I: funções de uma variável, Editora LTC, 6 Edição 1994.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. (Org.) Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Universidade de Brasília, 1985, c1974. v. ,2.

BRAGA G.R., As leis de Kepler sob o ponto de vista de Newton. Monografia apresentada ao curso de especialização e matemática para professores, do departamento de matemática da Universidade Federal De Minas Gerais.2002

CARVALHO R. M., A invenção do cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o cálculo contemporâneo monografia c urso de especialização em matemática para professores com ênfase em cálculo Belo Horizonte, 2007

CASPER, Max, Kepler, Dover Science, 1993.

FILHO K.S.O., <http://astro.if.ufrgs.br/bib/bibkepler.htm> acessado em 2 março de 2014.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B., Cálculo A – Funções, Limite, Derivação e Integração. Editora da UFSC, 5ª Edição, 1987.

GALILEI, G. Dialogues Concerning Two New Sciences. Trad. para o inglês por Henry Crew e Alfonso de Salvio. Introdução de Antônio Favaro. Nova York, Macmillan, 1914. Reimpresso por Dover, Nova York.

GUIDORIZZI, H.L., Um curso de cálculo, Vol. 2-5ª Ed. 2011.

HOWARD H.; Introdução à história da matemática editora Unicamp 4 edição 2004.

IEZZI, G.; MACHADO, N. J.; MURAKAMI, C., editora ATUAL Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 8 - Limites Derivadas Noções de Integral - 7ª Edição. , 2013.

LOPES, I.C., Giordano Bruno - Crítica ao geocentrismo e defesa universo infinito saberes, Natal – RN, v. 3, número especial, dez. 2010.

MILONE AC.C., WUENCHE C.A., RODRIGUES C.V., JABLONSKI F.J., CEPELATO H.V., VILLAS-BOAS, J.W., CECCATO J.R., NETO T.V. Introdução à astronomia e astrofísica. INPE, 2013.

NUNES L.F.S., <http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm> acessado em 10 março 2014.

NUSSENZVEIG, H.M. Curso de Física Básica, vol.1, Editora Edgard Blücher, 4ª Edição, 2002.

SOARES L.D.S., <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm24/jssp3.htm>, acessado em 25 de março de 2014.

THOMAS, GEORGE B., Cálculo, Vol. 1, Editora Pearson Education do Brasil, 10ª Edição, 2002.