Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Fábio de Abreu Garcez

O conceito de áreas planas e uma proposta de ensino por meio de decomposições

Rio de Janeiro

2014

Fábio de Abreu Garcez

O conceito de áreas planas e uma proposta de ensino por meio de decomposições

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

Rio de Janeiro

2014

de Abreu Garcez, Fábio

O conceito de áreas planas e uma proposta de ensino por meio de decomposições / Fábio de Abreu Garcez - 2014

xx.p

1. Matemática 2. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU 536.21

Fábio de Abreu Garcez

O conceito de áreas planas e uma proposta de ensino por meio de decomposições

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 2 de junho de 2014

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

Mauro Benayon Menezes

Doutor em Matemática - UFF

Cristina Levina Marques

Mestre em Matemática - IMPA

Dedico este trabalho as maiores riquezas que tenho: meus Pais e minha Noiva.

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido inspirado na nossa própria prática de sala de aula, a qual nos fez refletir sobre a importância de uma forma mais abrangente para ensinar o cálculo de áreas de regiões planas, com foco numa construção conceitual e de deduções que reforcem o conceito em si. Destacamos processos de composição e decomposição como meios para muitos procedimentos no cálculo de área. Iniciamos o estudo com uma introdução histórica sobre as primeiras noções de área que se reportam aos egípcios e, posteriormente, destacamos a influência de Euclides sobre o tema. Ambas as visões têm em comum o uso da decomposição e composição de figuras como base para obter os seus resultados, confirmando que essa técnica representa uma habilidades requisitada pela própria natureza do conceito. Continuaremos a observar a presença e a necessidade dessas habilidades no decorrer em todos os segmentos do trabalho. São feitas também algumas abordagens teóricas, considerando regiões planas limitadas por curvas suaves e/ou segmentos de reta, que implicam em diferentes métodos de cálculo de área do mesmo modo que exploram conceitos da matemática como infinito, limite e integral. Buscamos, porém, fazer isso desde os métodos mais básicos até os mais sofisticados para o ensino fundamental e médio. Como exemplo, apresentamos o cálculo de áreas por exaustão, desenvolvendo-o intuitivamente por meio de atividades propostas aos alunos; nesse caso destacamos o recurso utilizado das malhas quadriculadas, as quais visamos conectar da forma mais clara possível com a fundamentação teórica correspondente.

Palavras-chave: área, decomposição, composição, exaustão, malha.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela grandiosa força concedida, me impulsionado a alcançar a graça de concluir um curso de mestrado de alta qualidade.

Ao meu orientador Doutor Leonardo Tadeu Silvares Martins por ter me conduzido a importantes reflexões no estudo de área e pela dedicação prestada em todas as etapas do trabalho. O meu muito obrigado!

A toda equipe de professores do PROFMAT UNIRIO pela excelência na qualidade das aulas, pelo cuidado, incentivos e amizade que sempre tiveram com os alunos.

A todos os companheiros de turma pela solidariedade nos momentos de estudo, principalmente nos períodos que antecediam as avaliações.

Aos Professores doutores membros dessa banca pela disponibilidade e pelas possíveis ponderações e criticas que com certeza contribuirão para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus pais, noiva, amigos e chefes de trabalho pelas vezes que compreenderam algum tipo de ausência minha nos momentos que eu estava mais voltado aos estudos.

Sumário

1 Introdução

A inspiração para esse estudo foi a nossa própria prática de sala de aula, ao ensinar por muitas vezes em diferentes anos de escolaridades, e de diálogos com os colegas professores sobre o ensino de áreas planas, mais especificamente em relação aos aspectos conceituais e às fórmulas mais conhecidas. Estes tópicos são vistos, em maior número, nos anos finais do segundo segmento, na proporção que se tem o aumento do conhecimento das formas geométricas, não sendo muito comum estudar áreas de regiões planas que não sejam delimitadas por figuras específicas (triângulos, paralelogramos, círculos, etc). Sendo assim, notamos que o ensino de área tem se baseado em uma dinâmica de identificar o tipo da região e associá-la a sua fórmula, porém quando falha algo nesse binômio, o aluno não tem atitude de tentar alternativas que podemos denominar de composição e decomposição de figuras, às vezes um traçar de retas para visualizar essa figura em partes para conseguirmos classificá-las e aplicar as fórmulas conhecidas em cada uma dessas partes para alcançar a área total da região.

Há que se destacar a importância das fórmulas, mas estas devem ser melhor exploradas. Utilizaremos as próprias deduções de algumas destas fórmulas, como a área do quadrado e do retângulo, que são as primitivas no estudo de área como uma maneira de desenvolver e fixar o conceito de área. Mostraremos a validade da fórmula do quadrado para todos os casos de medidas dos lados, ressaltando o caso das medidas incomensuráveis com a unidade, que requer um rigor maior. Além disso, destacamos as fórmulas de figuras com nomes definidos (paralelogramo, trapézio, etc) que são obtidas a partir da fórmula da área do retângulo por meio de composição e decomposição de figuras.

As ideias contidas nas deduções das fórmulas de áreas conhecidas, assim como ideias de cálculo por estimativa como da área do círculo, por exemplo, já se aplicavam de forma prática desde o início da civilização egípcia, que demonstravam uma percepção avançada de como imaginar uma região com modificações por partes através da decomposição e recomposição de formas geométricas. Dessa forma, damos destaque a esses fatos com um estudo sobre a parte histórica, pois reforça a importância dessa prática no ensino de áreas.

Num segundo momento desse ensino, percebemos a necessidade de propostas que visem situações-problema e façam o aluno desenvolver mais atitudes a partir de uma base conceitual amadurecida, soluções cujas fórmulas façam parte desse processo como ferramentas a serem utilizadas, mas sempre buscando ir além, priorizando desenvolver habilidades e atitudes de imaginar e criar modificações em uma região que se pretende calcular a área.

O cálculo de área por estimativa será visto através do uso de malhas quadriculadas, uma vez que trataremos de figuras inseridas nas mesmas; nesse caso a medida da área será aproximada por falta ou por excesso. Utilizaremos malhas com diferentes tamanhos para um mesmo tipo de região, a fim de fazer o aluno perceber que o refinamento das malhas implica em um cálculo de área mais preciso, ou seja, quanto mais se decompõe uma região em "quadradinhos", melhor é a cobertura da região, tornando a diferença muito pequena entre a estimativa de cálculo por falta e por excesso. Como exemplo desta técnica, apresentamos uma atividade de cálculo da área da elipse, e estimativa de áreas de curvas que não têm nome específico.

Uma vez alcançada essa noção sobre cálculo de área por estimativa usando o recurso das malhas, teremos desenvolvido implicitamente a mesma ideia das somas de Riemann, aplicada sobre uma região descrita pelo gráfico de uma função específica que, ao ser dividida muitas vezes em retângulos muito pequenos, terá sua área definida pelo cálculo de integral.

Na verdade, quando fazemos uso do cálculo de área por estimativa por excesso e por falta, na medida em que vamos refinando as malhas, buscamos introduzir uma maneira de comunicar e experimentar concretamente um método que é denominado de exaustão. Em outros momentos de nosso estudo, o utilizamos com maior rigor, como nos casos do cálculo área do quadrado de medida não comensurável com a unidade. Outra demonstração em que destacamos o uso deste método é referente à fórmula da área do círculo, que também aparece como proposta de atividade de aula para o ensino básico. Enfatizamos também a riqueza desse método em desenvolver noções intuitivas de infinito e limite.

Destacamos também a importância de estarmos sempre atentos às conexões entre os assuntos e, no avançar dos nossos estudos motivados inicialmente pela problemática da vivenciada no ensino de áreas planas, começamos a perceber que, mesmo trabalhando conceitos básicos de definição de áreas, podemos desenvolver ideias e situações práticas que apresentem, de uma maneira intuitiva, conceitos como infinito, limite e integral.

Portanto, o trabalho irá propor uma reflexão, em nível de ensino básico, sobre o estudo de áreas de regiões planas para a prática de sala de aula. Apresentaremos uma fundamentação teórica sobre o conceito, que inclui uma pesquisa sobre a parte histórica do estudo de áreas, assim como a apresentação das noções e demonstrações de diversos métodos de cálculo. Ao mesmo tempo, pensamos em propostas de atividades que aplicamos em sala de aula ou apresentamos como sugestão, mas que também podem ser utilizadas como reflexões para uma aula sobre conceito de área, área do círculo e área da elipse, o que enriquece bastante o assunto. Essas ideias não estão próximas das salas de aula pelo que percebemos em conversas com os colegas professores e dos livros.

1.1 Objetivos deste trabalho

O objetivo do nosso trabalho é proporcionar aos interessados uma construção do conceito de área como ocupação de uma região plana limitada por segmentos retos e/ ou contornos curvos, cuja finalidade será de calcular a medida de área. Para isso, é importante entender desde a ideia de unidade de área aos diferentes métodos de cálculo, compreendendo-os de forma significativa e ressaltando a importância de estimular nos alunos uma visão de decomposição e composição de regiões, pois são atitudes necessárias e esperadas de quem pretende realizar um cálculo de área.

Dessa forma, esperamos proporcionar um ensino de áreas com proposta diferenciada, na medida em que o aluno terá mais oportunidades de construir o conceito de área de maneira mais concreta, a partir do uso das malhas quadriculadas. O aluno também desenvolverá e aplicará esse conceito através das deduções dos métodos de cálculo de áreas, trabalhando intuitivamente procedimentos e conceitos que permeiam tais demonstrações, como a noção de infinito, limites e somas de Riemann. Sendo assim, para esses objetivos serem alcançados na prática, propomos atividades que estimulem os alunos a imaginar uma região dada com modificações, tendo atitudes de decompor em partes e recompô-la para obter a medida de área.

1.2 Evolução Histórica sobre Noção de Área

Não há precisão quanto às origens da matemática, pelo fato de ser uma ciência muito antiga, sobre a qual os primeiros registros históricos, feitos nas na civilizações babilônica e egípcia, datam dos anos de 1788 a 1580 a.C. .As informações anteriores a essa época dependem muito de interpretações dos historiadores, o que compromete uma consistência maior dos fatos.

Segundo [8, pg. 32], Aristóteles acredita que a matemática nasceu nas vizinhanças do Egito, porque aí era concedido tempo livre à classe sacerdotal, supondo que poderia ter sido criada em momento de lazeres e rituais sacerdotais da época. Para Heródoto, segundo [2], a geometria se originava no Egito, pois associava a sua criação a necessidade de se fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. O que nesse caso caracteriza uma geometria de caráter prático.

Os registros sobre a matemática daquela época estão principalmente em dois grandes documentos, o papiro de Rhind e o papiro de Moscou. Estes papiros registraram muitos problemas do cotidiano ligados à aritmética e a geometria.

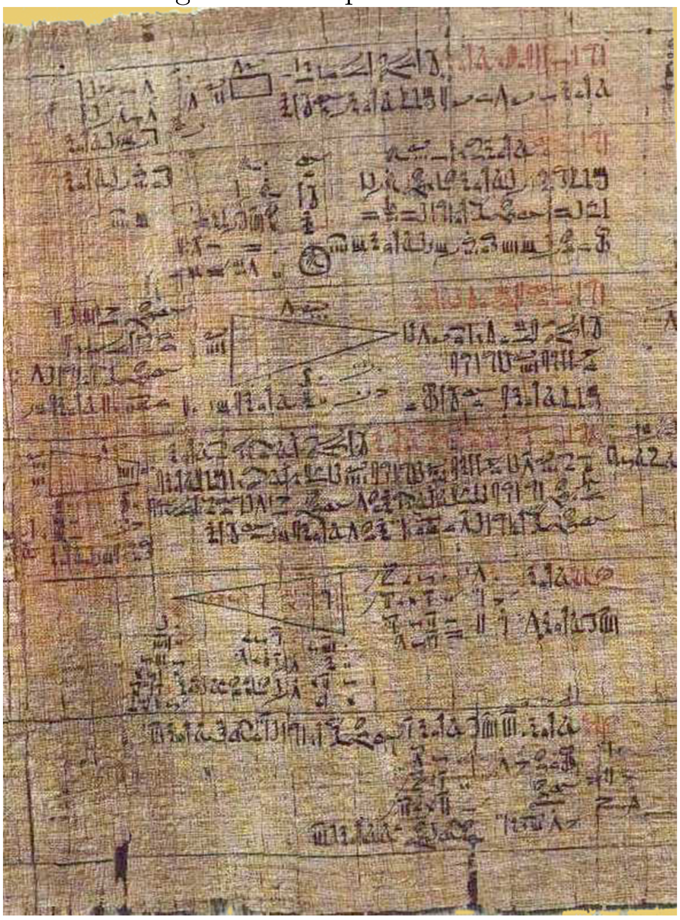
No caso da geometria o seu próprio significado em grego de "terra"e "medida"pode estar relacionado a essa origem egípcia da Matemática, visto nas suas diferentes formas de construções como as das famosas pirâmides e também em problemas documentados nos Papiros, "sendo a maioria desses problemas provindos de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas de terras e de volumes de celeiros"[9].

Além das situações de cálculo de áreas já mencionadas, existem registros de informações sobre outras figuras retilíneas, limitadas por segmentos de retas, como retângulo, triângulo e trapézio isósceles, que são partes dos problemas do Papiro de Rhind, que tinha por características não exigir demonstrações nem serem conhecidas as origens das fórmulas utilizadas. O que se encontra são apenas exemplos comprobatórios, nunca demonstrações. Logo não há registros dos raciocínios empregados, que são, de uma maneira geral, deduzidos a partir de interpretações de estudiosos sobre a origem do assunto.

Sabe-se também que esses cálculos de áreas eram realizados com precisão, provavelmente usando o método de composição e recomposição de figuras, inclusive quando aplicados em terrenos e que as medidas para isso eram determinadas pelos "esticadores de corda".

Esses tipos de figuras geométricas aparecem nos problemas 49, 51 e 52 que apresentam, respectivamente, os cálculos da área do retângulo de comprimento 10 e largura 2, da área do triângulo de base 4 e altura 13, supondo-o isósceles e, por último, da área do trapézio isósceles de bases 6 e 4 e altura 20, como destaca a imagem abaixo.

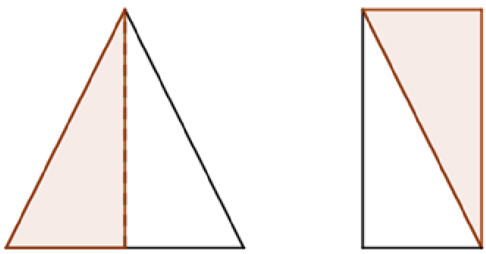
Figura 1.1: Papiro de Rhind



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>

No caso do problema 51, a maneira de calcular área do triângulo é decompondo-o em dois triângulos retângulos que formarão um retângulo.

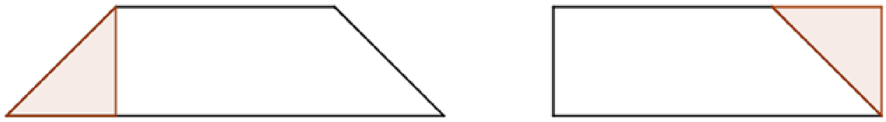
Figura 1.2:



Fonte: própria

O problema 52 também utiliza a decomposição para obter do trapézio isósceles o retângulo e assim calcular tais áreas.

Figura 1.3:



Fonte: própria

No entanto, ressaltamos que os conhecimentos obtidos inicialmente pela civilização egípcia são totalmente de caráter práticos, motivados pelas aplicações imediatas que as técnicas pudessem proporcionar, o que gerou muitos exemplos numéricos. Outros conhecimentos matemáticos mais teóricos, com critérios mais rigorosos que passaram considerar as generalizações, surgiram bem mais tarde, entre 300 a. C e 275 a. C na Grécia. Um dos autores mais notáveis desse período foi Euclides, geometra e autor da obra Os Elementos, que imprimiu um padrão de organização dos fatos a partir de um encadeamento lógico dedutivo, iniciado em certas proposições (axiomas), consideradas óbvias por si mesmas, a partir das quais se permitia demonstrar outras proposições (teoremas).

Euclides não se preocupa definir formalmente o conceito de área, mas expõe claramente a sua noção como a superfície de uma figura, um atributo geométrico e uma grandeza que considera noções de conservação, invariância e equivalência. Ou seja, admite tipos de figuras diferentes com o tributo área equivalentes. Esse conjunto de características em torno da ideia de área de Euclides exige também uma capacidade de visualizar transformações de figuras geométricas por decomposição e recomposição das mesmas. O artigo [3] destaca que Euclides se referia à área de um triângulo como a metade da área do paralelogramo, que, por sua vez, era formado pela junção de dois triângulos iguais. Seguindo assim, por decomposição, pode se constatar a equivalência entre as áreas do paralelogramo e do retângulo quando possuem mesma base e altura.

Sendo assim, deduziu-se que todo polígono pode ser repartido em triângulos e, por meio de transformações por decomposição e recomposição, tomavam outras formas que deveriam levar a um quadrado de área igual a da figura inicial, com base no conceito de equivalência de áreas. O quadrado era adotado pelos gregos como unidade de comparação de área padrão por ser considerada mais simples para dimensionar a área de qualquer figura plana. Mas há de se ressaltar que, em nenhum momento, se calcula numericamente uma área, pois a visão de Euclides sobre área é uma grandeza a se comparar com outras.

Na verdade, os procedimentos descritos anteriormente fazem parte do método de medição de áreas denominado de quadratura, o qual foi a base para definição do método de exaustão para cálculo de área associado a ideia de decomposições "infinitas". Esse raciocínio é iniciado por Euclides quando se calculava áreas de regiões planas, por meio do método de quadratura, em que era necessário usar uma ideia de aproximação para comparar a região original com o quadrado.

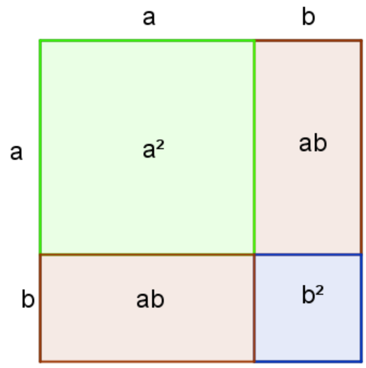
A Geometria Euclidiana não atribuía valores numéricos às medidas de superfícies, assim como não associavam a um segmento de reta a um número correspondente a sua medida, isso se explica em parte pelo conceito de número que os gregos tinham não se enquadrar com as múltiplas expressões dos tempos modernos. Além disso, viam a geometria e aritmética em campos diferentes. A geometria grega se ocupava das formas, das grandezas e raramente recorria a números. O estudo dos números, e mesmo assim apenas os inteiros, estava restrito à aritmética.

Embora os Elementos também tragam conhecimentos sobre aritmética e álgebra, estes possuem uma abordagem bastante geometrizada, sendo frequente a solução de problemas daquelas disciplinas através do cálculo de áreas, muitas vezes através de decomposições. Um exemplo é quadrado da soma o qual destacamos segundo [3]:

"é o equivalente, em linguagem geométrica, da propriedade que hoje conhecemos como "quadrado da soma"(igual ao quadrado do primeiro, mais o quadrado do segundo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo). Euclides enuncia isso geometricamente assim: "se um segmento de reta é dividido em dois, o quadrado construído sobre o segmento inteiro é igual aos quadrados construídos sobre os segmentos parciais e duas vezes o retângulo construído com estes segmentos". Euclides não fala, mas ele está se referindo a áreas, quando diz "... é igual..."."

De fato, podemos constatar que essa ideia é bem atual em nossos livros didáticos, também sendo uma abordagem comum entre os professores ao tratarem de expressões algébricas e produtos notáveis. É bastante enriquecedor trabalhar essa parte da álgebra com o uso de áreas planas por decomposição e recomposição, uma vez que entendemos que o ensino de matemática precisa oportunizar mais situações problemas que estimulem o desenvolvimento dessas importantes habilidades geométricas. Como o exemplo da citação acima, a partir da interpretação geométrica por meio de uma noção de composição e recomposição de figuras, podemos representar a expressão do quadrado da soma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

Figura 1.4:



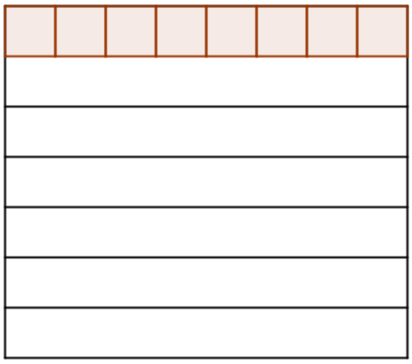
Fonte: própria

Um dos autores que tentaram revisar a obra de Euclides foi o matemático Francês Alexis Claude Clairaut (1713-1765), que buscou uma linguagem mais natural e acessível aos estudantes da obra por meio de proposições seguidas de justificativas. Buscava expor suas ideias através de observações e estimular investigações, descobertas, representações e construções.

Na obra de Clairaut intitulada Os Elementos de Euclides, o autor expõe sua proposta de área a partir da necessidade prática de medir terrenos, mas sem qualquer preocupação com o rigor e formalismo matemático. Dessa forma Clairaut teve a seguinte definição sobre área: "*o meio mais simples e natural é usar-se de uma medida comum que aplicada muitas vezes sobre a superfície a medir, a cubra inteiramente. É evidente que a medida comum da superfície deve ser também uma superfície como por exemplo, a superfície de um metro quadrado, um decímetro quadrado, etc. Assim, medir um retângulo é determinar o número de metros quadrados ou decímetros quadrados, etc, contidos em uma superfície*".

Um exemplo da definição acima, é o cálculo da área de um retângulo um retângulo $ABCD$ de 7 metros de altura e 8 metros de base, considerando características Euclidianas como usar apenas números inteiros e ver a área como ocupação de uma superfície pelo método da quadratura. O procedimento utilizado para calcular a área desse retângulo é dividi-lo em sete retângulos horizontalmente, e dividir cada um deles em 8 quadrados de 1m^2. Logo, a área do retângulo resulta em 56 metros quadrados. Na figura abaixo, podemos visualizar esse raciocínio:

Figura 1.5:



Fonte: própria

Porém esse método apresenta um problema no caso de os lados não serem comensuráveis, pois isso implica na impossibilidade de dividir esses segmentos em outros menores em número inteiro de vezes.

Clairaut também desenvolve estudos sobre casos de área de triângulos ao observar que esta é a metade da área do retângulo. A partir daí, usando o processo de composição e decomposição de figuras, obtém formas de calcular a área de outros tipos de triângulos, paralelogramos e de polígonos regulares decompostos em triângulos.

Legendre (1752-1833) é outro matemático que se interessa a aprimorar pedagogicamente a obra de Euclides ao buscar reordenar e simplificá-la, mas mantém as mesmas estrutura de definições e proposições (teoremas), com as suas respectivas demonstrações. Em um dos livros pertencentes ao seu estudo, ele trata de cálculo de área e apresenta duas definições, segundo [4, pg. 40] que são:

I "Área de uma figura é a relação entre extensão dela e a da unidade de superfície."

Ii "Duas figuras equivalentes são as que têm as mesmas áreas."

Logo após essas definições, ele ressalta que duas figuras de classificações ou tipos diferentes podem ser equivalentes. Em seguida apresenta sete proposições (e suas respectivas demonstrações) sobre o cálculo de área, que se referem à maneira de calcular área por meio de relações de equivalência, propriedades de figuras, proporção e decomposição de figura.

Por último damos destaque a uma proposta nova para Geometria Euclidiana, desenvolvida por David Hilbert (1862-1943), que passa a tratar o objeto geométrico desvinculado da praticidade e do pensamento intuitivo, onde o foco das ideias deixa de estar nos objetos para se voltar para as relações entre propriedades, definições e os elementos geométricos, todos submetidos a uma fundamentação lógica e abstrata.

O modelo de Hilbert estabelece uma correspondência entre a noção geométrica de área com a noção aritmética de *medida* de área, associando a cada figura um número, a medida de sua área (função área).

A função área é definida por Hilbert associando, a cada região limitada, um número positivo chamado área, igual para figuras congruentes e tal que a área da união de duas regiões disjuntas seja a soma das áreas das regiões.

Usando o fato em que, pela definição de área de Hilbert, se duas regiões são disjuntas, a área da união de ambas é a soma das áreas de cada uma. Desta forma, se uma região R está contida propriamente em outra região R', a região $R' - R$ será não vazia e $R' = R \cup (R' - R)$, logo:

$$\text{Área}(R') = \text{Área}(R) + \text{Área}(R' - R) > \text{Área}(R), \text{ pois Área}(R' - R) > 0.$$

Portanto, isto justifica, por exemplo, alguns usos do Método de Exaustão, que consiste de aproximar uma área que se deseja calcular por duas sequências de áreas, uma de regiões contendo a que se quer medir, e outra contida, e de forma que as áreas convirjam, isto é, se aproximem uma da outra.

2 Fundamentação Teórica

Os estudos mais recentes e rigorosos sobre área, segundo Lima (2009), concorrem para uma ideia de área como medida de uma região plana (uma parte do plano) ocupada por uma figura, a qual comparada com a unidade de área utilizada, resultará no cálculo de área dessa região, por um número que indicará quantas vezes a tal referida figura contém a unidade de área.

Inicialmente, partiremos dessa noção de área para tratarmos das demonstrações das áreas do quadrado e do retângulo que são os primeiros tipos de figuras estudados, por exemplo, numa introdução ao cálculo de área no Ensino Básico.

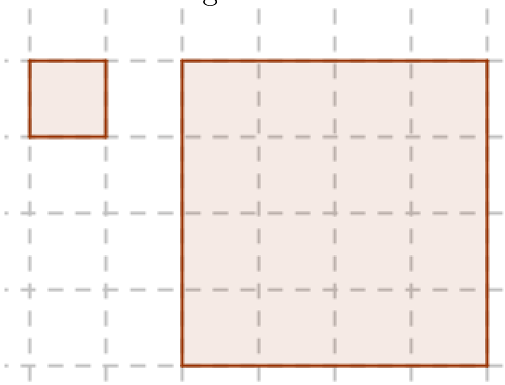
2.1 Área do Quadrado

No caso do quadrado de lado a, sabe-se que a área S é dada por a^2, ou seja, $S = a^2$. Utilizando a ideia de área apresentada acima, essa fórmula é obtida tomando-se um quadrado unitário como unidade de medida de área e calculando quantas vezes o quadrado de lado a contém o quadrado unitário. Porém, a medida a do lado do quadrado pode ser:

1. $a = n$, com n natural:

   Quando a medida do lado do quadrado é um inteiro n, o quadrado pode ser decomposto por n retas paralelas a cada um de seus lados de e assim todo o quadrado ficará coberto por $n \times n = n^2$ quadrados unitários, valor esse que é a medida da área do quadrado. Assim, $S = n^2 = a^2$. Na figura abaixo mostramos um caso particular de $n = 4$ para ilustrar o desenvolvimento dessa ideia.

Figura 2.1:



Fonte: própria

2. $a = \frac{1}{n}$, com n natural:

   Se o quadrado tem por medida do lado $\frac{1}{n}$, vamos pensar que ele pode ser formado decompondo o quadrado unitário por retas paralelas aos seus lados, como no caso acima e assim também é possível contar n^2 quadrados menores. Assim $n^2 \times S = 1$, logo
$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2.$$

3. $a = \frac{m}{n}$, com m e n naturais:

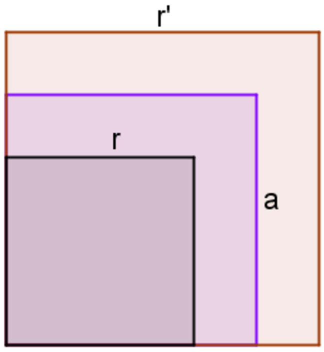
   No caso da medida do lado a ser da forma $\frac{m}{n}$ deve-se proceder ao mesmo raciocínio anterior, dividindo o quadrado em m segmentos paralelos aos respectivos lados (horizontais e verticais) que, ao se interceptarem, formarão m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$, logo
$$S = m^2 \times \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2.$$

4. a é um número irracional:

   Por fim, destacamos o caso do lado de um quadrado com medida irracional a, ou seja, incomensurável com o lado do quadrado unitário. Por isso não existe um segmento que caiba um número exato de vezes no lado a quadrado e no lado do quadrado unitário. Vamos mostrar que também nesse caso vale a igualdade $S = a^2$.

   Sejam r e r' racionais tais que $r < a < r'$, e, consequentemente, $r^2 < a^2 < (r')^2$. Podemos construir os quadrados de lados de medidas r e r', como apresentado na figura abaixo.

Figura 2.2:



Fonte: própria

Como r e r' são racionais, as áreas dos quadrados de lados r e r' serão, respectivamente, r^2 e $(r')^2$. Denotando por S a área do quadrado de lado a, como este quadrado está contido no de lado r' e contém o de lado r, temos

$$r^2 < S < (r')^2. \tag{2.1}$$

Vamos mostrar que $S = a^2$. Para isso, vamos supor por absurdo o contrário, ou seja,$S \neq a^2$. Logo, deveríamos ter $a^2 < S$ ou $a^2 > S$.

- Caso $a^2 < S$:

  Como sempre existe um racional entre dois números reais dados, podemos tomar o racional r' de forma que $a < r' < \sqrt{S}$, o que implica $a^2 < (r')^2 < S$. Mas isto é um absurdo, pois, por (2.1), $S < (r')^2$.

- Caso $a^2 > S$: Da mesma maneira, basta tomar o racional r tal que $\sqrt{S} < r < a$, que implica em $S < r^2 < a^2$. Mas, isso é um absurdo, pois, por (2.1), $S > r^2$.

Logo, a única opção possível é $S = a^2$.

2.2 Área do retângulo

A área do retângulo pode ser pensada a partir das ideias vistas no quadrado considerando suas particularidades. No caso de medidas inteiras como a e b basta usarmos o quadrado unitário como unidade de medida, e aplicar o princípio multiplicativo na contagem dos quadrados, obtendo que $a \times b$ indica a área do retângulo.

Se o retângulo tiver medidas racionais como $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{u}$, deve-se notar que é possível dividir a medida a em ru segmentos de tamanho $\frac{1}{su}$, assim como a medida b em ts segmentos de tamanho $\frac{1}{su}$. Logo, a unidade de medida utilizada para medir a área desse retângulo é o quadrado de área $\frac{1}{(su)^2}$. Sendo possível contarmos ru quadrados por segmentos paralelos ao lado a e ts quadrados a cada semento paralelo ao lado b, totalizando $ru \times ts$ quadrados de área $\frac{1}{(su)^2}$, pelos quais se obtém a área do retângulo igual a

$$S = ru \times ts \times \frac{1}{(su)^2} = \frac{r}{s} \times \frac{t}{u} = a \times b.$$

O caso em que as medidas dos lados do retângulo são incomensuráveis requer o uso do método de exaustão para demonstração da fórmula da área do retângulo como foi feito para o caso do quadrado, ou seja, a ideia é análoga, utilizando duas variáveis para representar as medidas dos lados, ao invés de uma.

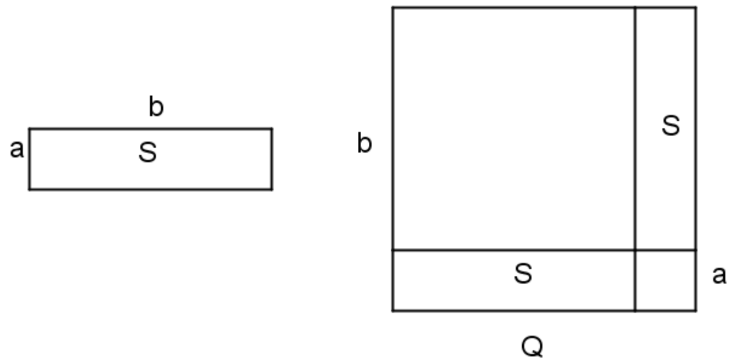
O acréscimo de variáveis nas demonstrações envolvendo o retângulo é um dos motivos que nos fez buscar outro processo demonstrativo, que independe do universo de medidas que os lados possam assumir. Mas há também objetivo de mostrar outra opção de demonstração mais usual no Ensino Básico, a qual toma como base o processo de composição e decomposição.

A ideia inicial é considerar um retângulo de área S com lados de medidas a e b, como se fosse uma primeira peça para formar um quadrado cujas medidas dos lados, por construção, devem ser $(a + b)$, como mostra o desenho adiante. Mas uma vez, conhecida a fórmula da área do quadrado, denominaremos essa área de Q sendo igual a $(a + b)^2$. Assim,

$$a^2 + b^2 + 2S = Q = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

logo, $2ab = 2S$. Com isso, temos $S = a \times b$.

Figura 2.3:

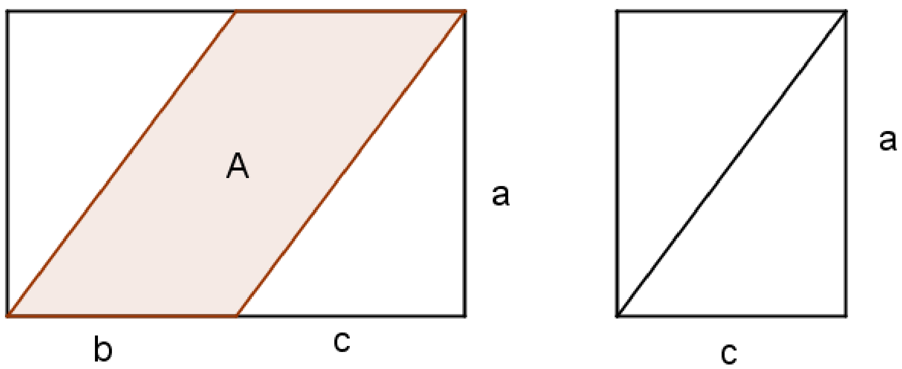


Fonte: própria

2.3 Área de outros tipos de figuras

O retângulo também funciona como uma ideia base para o cálculo de outros tipos de figuras conhecidas como no caso de um paralelogramo de área A cuja altura mede a e base mede b. Por construção façamos esse retângulo contido em um retângulo de medidas $(b + c)$ e a sobre o qual por decomposição podemos desmembrá-lo em um paralelogramo e em um outro retângulo, como mostra a representação abaixo:

Figura 2.4:

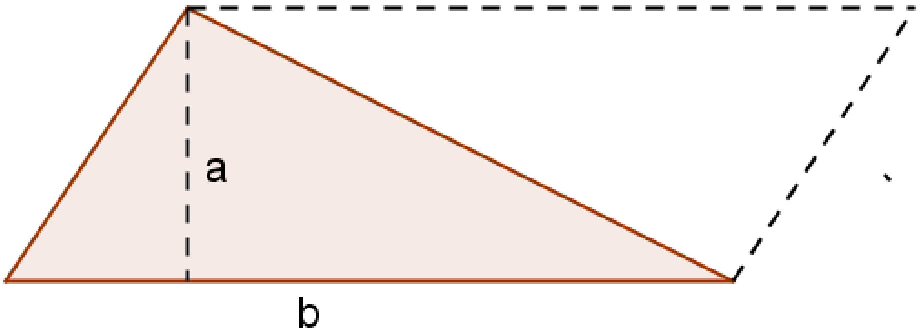


Fonte: própria

Logo, o primeiro retângulo tem área $(b + c) \times a$, assim como o segundo tem a área ac. E, ainda usando tais cálculos, podemos obter a igualdade $ab + ac = ac + A$, que nos permite concluir e determinar a área $A = ab$.

Considere um triângulo de medida da base igual b e altura de medida a. Podemos compor um paralelogramo, para recorrermos ao que já conhecemos, como indica o desenho abaixo:

Figura 2.5:



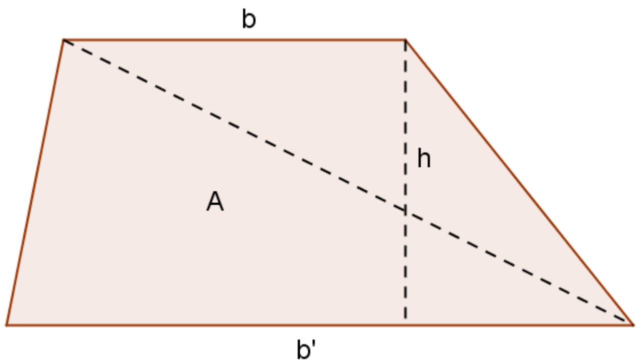
Fonte: própria

Então, como a área do paralelogramo é $a \times b$, e este paralelogramo pode dividido em dois triângulos congruentes, concluímos que a área de cada um será $\frac{a \times b}{2}$.

É fácil notar, usando a própria prática, que todo polígono pode ser decomposto em triângulos. Essa observação, utilizada no exemplo acima, está por trás do estudo de diversas outras áreas.

Dado um trapézio cujas medidas das bases são b e b', considere ainda a distância entre as bases igual a h, e denominemos a sua área de A. Assim, temos a representação desse trapézio abaixo:

Figura 2.6:



Fonte: própria

Usamos a diagonal do trapézio para dividi-lo em dois triângulos, os quais tem altura comum e respectivas áreas representadas por $\frac{b \times h}{2}$ e $\frac{b' \times h}{2}$. Quando somadas, estas áreas resultam na área do trapézio, dada então por

$$A = \frac{b \times h}{2} + \frac{b' \times h}{2} = \frac{(b + b') \times h}{2}.$$

2.4 Uma Definição Geral para Área de uma Região Plana

Quando pensamos em regiões planas não poligonais, consideraremos regiões limitadas por curvas simples no plano, isto é, curvas que não se auto-intersectem e que sejam suaves, podendo admitir, entretanto, uma quantidade finita de bicos. Estas curvas dividem o plano em dois conjuntos (duas componentes conexas), um externo à curva e um interno; uma *região plana* será o conjunto dos pontos internos à curva.

A dificuldade de calcular a área de uma região como essa se torna maior, uma vez que as suas características impedem o cálculo de uma medida de área com precisão, pois não se pode determinar com precisão quantas vezes uma unidade de medida padrão, o quadrado, cabe nessas regiões curvas. Uma alternativa é o cálculo de área por estimativa, a partir de *exaustões*.

Necessitamos antes, porém, de uma definição de área mais abrangente. Dada uma região limitada plana S, não necessariamente poligonal, associamos a ela um número real não negativo $a(S)$, chamado de *área*, de maneira que:

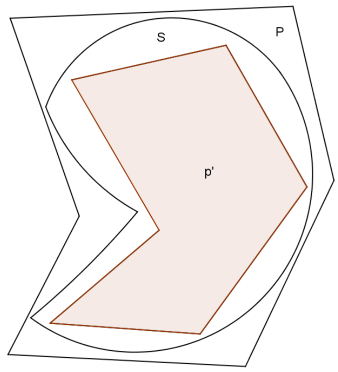
- a área de qualquer região poligonal contida em S é menor que $a(S)$;
- a área de qualquer região poligonal que contenha a região S é maior que $a(S)$.

Para obtermos o valor $a(S)$ da área a ser determinada, a aproximamos, por falta ou por excesso, por poligonais. Dessa forma, temos por definição que os valores de $a(S)$ por falta são as áreas dos polígonos contidos em S. Da mesma maneira que os valores de $a(S)$ por excesso são as áreas dos polígonos que contém S.

Portanto, podemos destacar a seguinte representação entre as áreas de região plana não especifica e os polígonos internos (P') e externos (P) a ela. Ou seja

$$a(P') \leq a(S) \leq a(P).$$

Figura 2.7:



Fonte: própria

Logo, é fácil compreender de forma intuitiva que, para uma melhor aproximação da área da figura, é necessário aumenta o número de lados dos polígonos internos e externos.

Na seção Cálculo de Áreas por Integrais, apresentaremos também uma demonstração de que as áreas calculadas por falta e excesso convergem para a área da região. Isto é, dados k e k' tais que $k' < a(S) < k$, existem polígonos P e P' tais que $k' < a(P') < a(s) < a(P) < k$.

Uma aplicação imediata dessas ideias é o cálculo da área do círculo pela aproximação com polígonos inscritos e circunscritos.

2.5 Um exemplo: a área do círculo por aproximação

Inicialmente, vamos destacar que a ideia de calcular a área do círculo é muito antiga, como podemos encontrar documentado no Papiro de Rhind, nos problemas 48 e 50, que tratam de uma aproximação satisfatória para π. Esta aproximação, criada pelos egípcios, era utilizada para atender a demanda prática da época, para calcular volume de pirâmides e cilindros retos (os celeiros cilíndricos).

O problema 48 apresenta a solução ilustrada geometricamente e apenas compara a área de um círculo de diâmetro 9 com um quadrado que o circunscreve. Chegando a conclusão que área do círculo é menor que as 81 da unidade de área desse quadrado.

Figura 2.8:

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>

O problema 50, que apresenta um círculo de diâmetro 9 e trata de um método cálculo para a área do círculo, não é completo nas suas resoluções (assim como os demais), o que exige dos estudiosos desenvolver as possíveis e prováveis deduções dos raciocínios. De forma prática, os egípcios resolvem esse problema retirando 1/9 do diâmetro, logo, sendo 9 sua medida, sobra um comprimento de 8, que é elevado ao quadrado, obtendo-se 64 unidade de área do círculo.

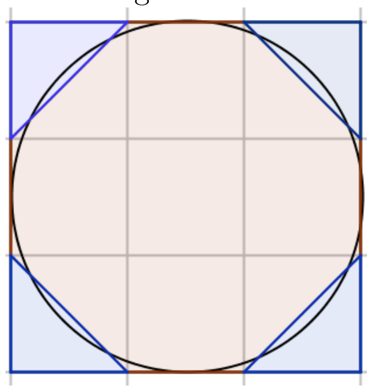
A interpretação algébrica, algo que não existia na época, para o caso acima pode ser expressa inicialmente pela fórmula $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, no entanto se, compararmos com os conhecimentos de hoje podemos fazer a seguinte interpretação dos raciocínios inclusos nas fórmulas:

$$\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \therefore \pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3,160493.$$

Essa é uma aproximação para π com um erro de apenas $0,0189$, ou seja a maneira de cálculo deles atendia as suas necessidades práticas.

A fim de analisar e aproveitar as ideias desenvolvidas por historiadores da matemática sobre algumas explicações para o método egípcio de cálculo da área do círculo, destacamos a que a aproxima da área de um octógono inscrito no quadrado sobre uma malha quadriculada, na qual ainda é inserido um círculo. Nota-se que partes do octógono ficam exteriores ao círculo, da mesma forma que partes do círculo são exteriores ao octógono. De maneira intuitiva, essas partes se compensam e permitem aos egípcios concluírem que círculo e octógono ocupam aproximadamente a mesma região, como ilustra a figura abaixo:

Figura 2.9:



Fonte: própria

Portanto, se a medida do diâmetro do círculo é d, os lados dos quadrados da malha terão medida $\frac{d}{3}$, e a área de cada um deles será $\frac{d^2}{9}$. Se subtrairmos, da área do quadrado, os quatro triângulos retângulos formados nos vértices do quadrado, teremos a área do octógono

$$d^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d^2}{9} = \frac{7d^2}{9} = \left(\frac{7d^2}{9}\right) \times \frac{9}{9} = \frac{63d^2}{81} \cong \frac{64d^2}{81} = \left(\frac{8}{9}d^2\right)^2.$$

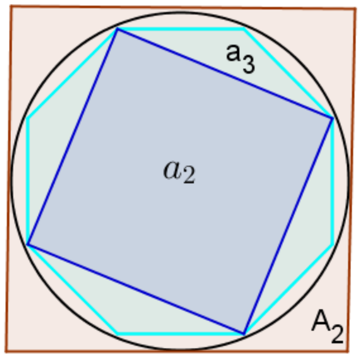
Essa é, portanto, uma dedução para o método Egípcio para o cálculo de área do círculo.

O ponto de partida desse estudo em nível mais rigoroso é um circulo C de raio R, sobre o qual mostraremos algumas formas de obter a área. Utilizaremos inicialmente aproximações por polígonos regulares inscritos, de 2^n lados (com $n \geq 2$), que chamaremos de P_n. Denotaremos a área de um desses polígonos P_n por a_n. Assim, variando n, estamos trabalhando com quadrados, octógonos, etc.

Cada polígono P_n está contido no interior do círculo, logo a_n é menor que a área $A(C)$ do círculo. Assim,

$$a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots < A(C).$$

Figura 2.10:



Fonte: própria

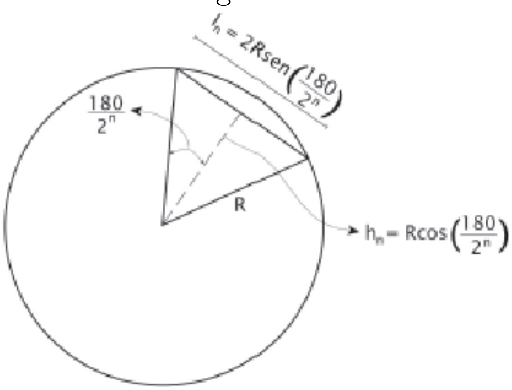
Com isso, a_n é uma sequência crescente e limitada, logo, existe $s = \lim_{n\to+\infty} a_n$, com $s \leq A(C)$

Então, s é o limite das áreas dos polígonos P_n de 2^n lados, os quais podem ser divididos em 2^n triângulos isósceles congruentes de lados R, base l_n e altura h_n, com o ângulo oposto à base de cada triângulo igual medindo $\frac{360°}{2^n}$. Pelas relações trigonométricas, temos

$$l_n = 2R\left(\operatorname{sen}\frac{180°}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad h_n = R\left(\cos\frac{180°}{2^n}\right),$$

como representado na figura abaixo.

Figura 2.11:



Fonte: própria

Com isso,

$$a_n = 2^n \frac{l^n\, h_n}{2} = 2^n \cdot 12 \cdot 2R\left(\operatorname{sen}\frac{180°}{2^n}\right)\cdot R\left(\cos\frac{180°}{2^n}\right) = 2^n R^2\left(\operatorname{sen}\frac{180°}{2^n}\right)\cdot R\left(\cos\frac{180°}{2^n}\right).$$

Assim,

$$s = \lim_{n\to+\infty} 2^n R^2\left(\operatorname{sen}\frac{180°}{2^n}\right)\cdot R\left(\cos\frac{180°}{2^n}\right).$$

Como $\frac{180°}{2^n} \to 0$, sabemos que $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{180°}{2^n}\right) = 1$. Chamando de x a medida de $\frac{180°}{2^n}$ em radianos, temos $x = \frac{\pi}{2^n}$, logo $2^n = \frac{\pi}{x}$. Com isso,

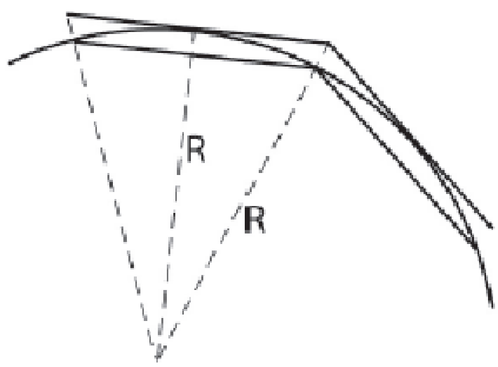
$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{180°}{2^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi}{x}\operatorname{sen} x = \pi \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \pi.$$

Da mesma forma, podemos determinar a fórmula do círculo partindo de polígonos circunscritos que denominaremos de P'_n de 2^n lados, com $n \geq 2$, e representando por A_n suas respectivas áreas. Cada polígono P'_n contém o círculo em seu interior, logo A_n é maior que a área $A(C)$ do círculo. Assim,

$$a_2 < a_3 < \ldots < a_n < s < A(C) < \ldots < A_{n+1} < A_n < \ldots < A_3 < A_2 = 2R^2.$$

Consideremos agora os polígonos inscritos e circunscritos P_n e P'_n, respectivamente com 2^n lados. Cada um deles é composto por triângulos isósceles, com alturas $h_n = R\cos\left(\frac{180^2\circ}{2^n}\right)$ para o inscrito e $H_n = R$ para o circunscrito. Podemos melhor entender através da figura abaixo:

Figura 2.12:



Fonte: própria

Dessa maneira, usamos o fato de os triângulos serem semelhantes e a relação que há entre as áreas a_n e A_n, que é representada do seguinte modo:

$$\frac{a_n}{A_n} = \left(\frac{h_n}{H_n}\right)^2 = \left(\cos\frac{180°}{2}\right)^2 \therefore a_n = \left(\cos\frac{180°}{2}\right)^2 A_n.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty}(A_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n\left[1 - \left(\cos\frac{180°}{2}\right)^2\right] = 0,$$

pois $A_n \leq 4R^2$ e $\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{180°}{2} = 1$.

Assim, $\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \pi R^2$.

2.6 Áreas de regiões curvas e somas de Riemann

Seja f uma função real e um intervalo $[a, b]$ na qual ela está definida, podemos definir uma partição deste intervalo como um conjunto

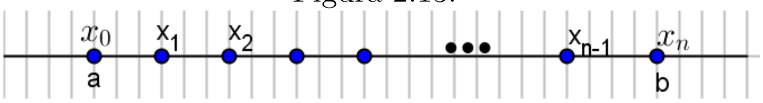
$$\rho : \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, com\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

As partições podem ser escolhidas de maneira que a distância entre dois valores consecutivos seja sempre a mesma, que no caso será $\frac{b-a}{n}$. Ou seja, a partição será da forma

$$\rho : \left\{a + i\frac{b-a}{n}, i = 0, \ldots, n\right\}.$$

O conjunto ρ é definido pelos elementos representados na reta numérica abaixo, os quais determinam a divisão do intervalo $[a, b]$ em partes iguais.

Figura 2.13:



Fonte: própria

Considerando uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *a soma de Riemann inferior de f associada à partição ρ* é a soma das áreas dos retângulos definidos pelos tamanhos constantes dos intervalos a partir da partição escolhida e os valores mínimos de obtidos a cada intervalo, representada pela seguinte notação:

$$s(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \min\{f(x), x \in I_i\},$$

onde I_i é o intervalos $[x_{i-1}, x_i] = \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}\right]$ e $\min\{f(x), x \in I_i\}$ é menor valor assumido por f nesse intervalo. Estaremos supondo que esse menor valor sempre existe, o que pode não ser verdade para algumas funções com as quais não trabalharemos. Funções limitadas e descontínuas em, no máximo, um conjunto finito de pontos, admitem este menor valor em qualquer intervalo fechado.

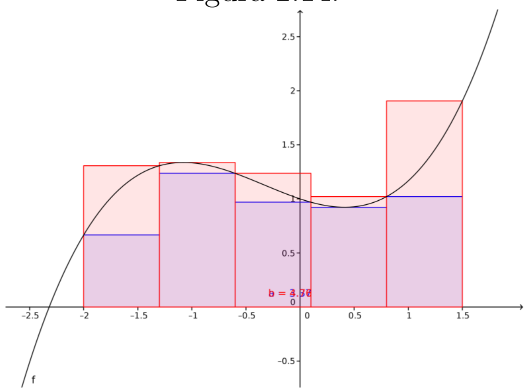
Da mesma forma, a *a soma de Riemann superior de f associada à partição ρ* é definida por

$$S(f,\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \max\{f(x), x \in I_i\},$$

onde $\max\{f(x), x \in I_i\}$ é maior valor de f no intervalo I_i. As condições de existência do max serão análogas às do min.

Portanto, suponha que gráfico da função seja o da figura abaixo e assim visualize as regiões retangulares ora formadas por excesso, ora formadas por falta.

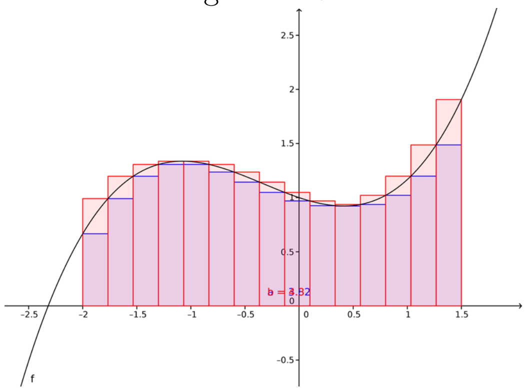
Figura 2.14:



Fonte: própria

Como o objetivo é calcular a área da região sob o gráfico usando as somas inferiores e superiores de retângulos, estas devem se aproximar cada vez mais uma da outra. Se a função considerada tiver certas propriedades, por exemplo, for limitada e descontínua no máximo em um conjunto finitos de pontos, basta fazer o número n de divisões do intervalo $[a, b]$ aumentar. Sendo assim, o valor da medida de área é garantido com bastante precisão e o porquê disso pode ser mais bem compreendido pela figura abaixo:

Figura 2.15:

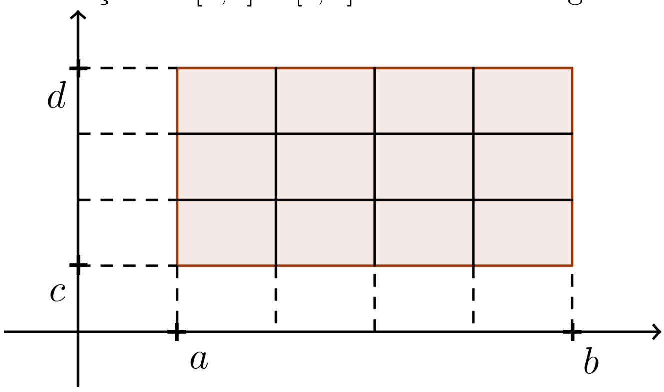


Fonte: própria

Se imaginarmos essas divisões sucessivas do intervalo $[a, b]$, podemos pensar no limite das somas quando $n \to +\infty$, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, que resultará na área sob o gráfico da função.

Agora, vamos expandir as questões discutidas no âmbito do $\mathbb{R}^2$ sobre área de regiões planas para o $\mathbb{R}^3$. Considere uma função $f(x, y)$ de duas variáveis e com valor real. Tome um retângulo $[a, b] \times [c, d]$ do $\mathbb{R}^2$ e o divida em n por m retângulos congruentes, como ilustra figura abaixo.

Figura 2.16: Partição de $[a, b] \times [c, d]$ em 4×3 retângulos congruentes.



Fonte: própria

Temos então uma partição $\mathcal{P}$ com n por m retângulos congruentes. Podemos definir as somas de Riemann inferior e superior, respectivamente, por

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{Área}(R_{ij}) \cdot \min\{f(x, y), (x, y) \in R_{ij}\},$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{Área}(R_{ij}) \cdot \max\{f(x, y), (x, y) \in R_{ij}\},$$

onde $\min\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}$ e $\max\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}$ são, respectivamente, o valor mínimo e máximo de f no retângulo R_{ij}. Como no caso em que f era função de apenas uma variável, aqui também estaremos supondo que o menor e o maior valor existem em cada retângulo. Isto sempre será verdade quando f for limitada e descontínua, no máximo, nos pontos de uma curva simples. As funções com as quais trabalharemos a seguir serão desta forma.

Observe que, como os retângulos são congruentes, temos

$$\text{área}(R_{ij}) = \Delta x \Delta y,$$

onde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \Delta y = \frac{d-c}{m}.$$

Assim,

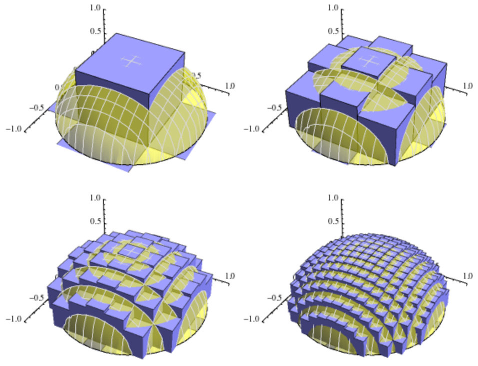
$$\begin{aligned} s\,(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\min\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}\ \Delta x\Delta y \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\min\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}\times\frac{b-a}{n}\times\frac{d-c}{m}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S\,(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}\ \Delta x\Delta y \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max\{f(x,y),(x,y)\in R_{ij}\}\times\frac{b-a}{n}\times\frac{d-c}{m}. \end{aligned}$$

Observe que o valor das somas de Riemann será a soma dos volumes dos pequenos paralelepípedos formados, que têm como base o retângulo da partição, e como altura o valor mínimo ou máximo da função $f(x,y)$ naquele retângulo.

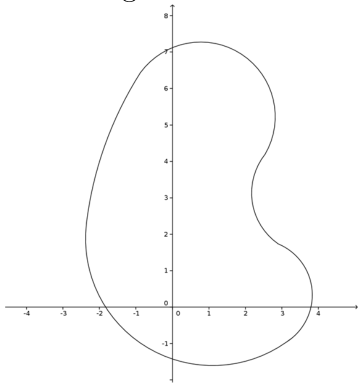
Figura 2.17:



Fonte: <http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-8/new-and-improved-scientific-and-information-visualization/visualize-3d-riemann-sums.pt-br.html>

Consideraremos agora um conjunto C no R^2 dado pela região limitada por uma curva, como mostra a figura abaixo:

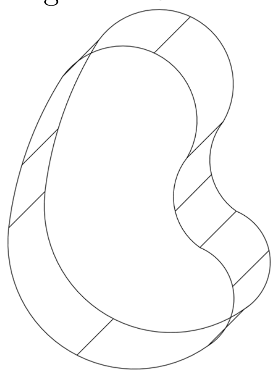
Figura 2.18:



Fonte: própria

Se for dada outra dimensão à região de C, isto é, considerado um sólido de altura 1 tendo C como base, a área da base C será numericamente igual (isto é, sem considerar as unidades) ao volume do sólido ($V = b \cdot h = B \cdot 1$, onde B é a área da base):

Figura 2.19:



Fonte: própria

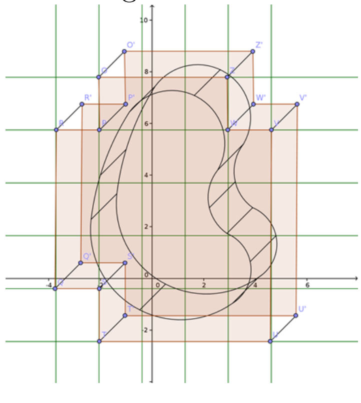
Para tentar calcular esse volume a partir do conceito de somas de Riemann, Considere a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{se } (x,y) \in C \\ 0, \text{se } (x,y) \notin C \end{cases}$$

Nota-se que o gráfico da função é, inclusive, semelhante à figura anterior, uma vez que fora do conjunto a função vale 0. A função f é chamada de *função característica da região* C.

Sendo assim, escolhida uma partição de um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ do $\mathbb{R}^2$ contendo C, isto é, uma divisão de R em retângulos R_{ij} menores, o valor máximo da função em um retângulo R_{ij} será 1 se o retângulo contiver algum ponto do conjunto, e 0 se não contiver. Assim, dada uma partição, temos a seguinte representação para soma superior dos volumes.

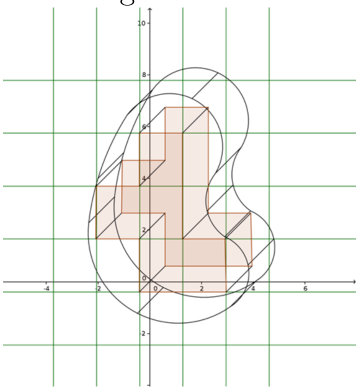
Figura 2.20:



Fonte: própria

Já para soma inferior (por falta) dos volumes temos a seguinte representação:

Figura 2.21:

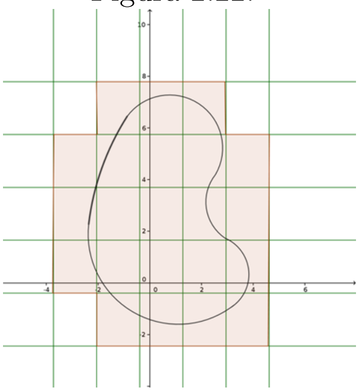


Fonte: própria

Como a altura dos sólidos acima, que representam as somas superior e inferior na partição, é 1, seus volumes serão numericamente iguais às áreas das suas bases, ou seja, as áreas abaixo:

No primeiro caso temos a área da região calculada por excesso.

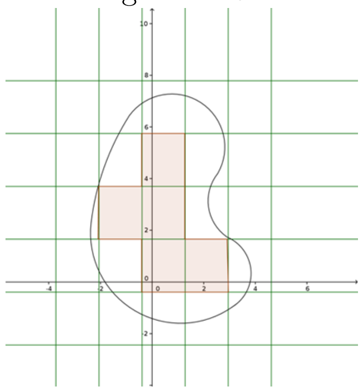
Figura 2.22:



Fonte: própria

E no caso seguinte temos a área da região calculada por falta.

Figura 2.23:



Fonte: própria

No entanto, constata-se que as aproximações acima estão distantes da ideal, pois, como os retângulos são poucos, logo grandes, o excesso e a falta são muito grandes. Para funções como a que estamos considerando (isto é, limitadas e descontínuas no máximo ao longo de uma curva simples), se aumentarmos o número de retângulos da partição, tanto na horizontal quanto na vertical, teremos uma área cada vez mais próxima da área desejada. E assim, a área pode ser indicada pela integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

As regiões formadas pelos retângulos totalmente contidos, como na estimativa da área da região por falta, ou por retângulos que contém algum ponto, como no caso da região por excesso, são poligonais, que contém ou estão contidas, respectivamente, na região cuja área estamos calculando. Refinando a partição, as áreas dessas poligonais convergem para a integral, que é a área da região. Com isso, mostramos que existem poligonais contendo e contidas na região, cuja área converge para a área da figura, o que prova o método da exaustão.

A integral também poderia ser calculada a partir de uma avaliação prévia a qual selecionaria se os retângulos (a formarem a poligonal) acrescentaria muito ou pouco no cálculo da área da região como um todo, ou seja dependeria de uma tomada de decisões por parte de quem calcula, mas usando partições mais refinadas as possíveis escolhas diferentes de cálculos da área de uma mesma região devem convergir para um mesmo valor. Enfim, essa situação pode ser definida da seguinte forma: em cada retângulo R_{ij} de uma partição, poderia ser escolhido um ponto arbitrário $x_{ij} \in R_{ij}$, e a soma de Riemann pode ser feita

$$\overline{S}(f,\rho)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(x_{ij})\Delta x\Delta y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{ij=1}^{m}f(x_{ij})\frac{b-a}{n}\times\frac{d-c}{m}.$$

Como f pode ser 0 ou 1, conforme o x_{ij} esteja ou não na região, estaríamos aproximando a área por poligonais que poderiam conter pontos de fora e de dentro da região calculada. Ainda assim, a soma de Riemann convergiria para a integral de f, logo para a área da região.

3 Sugestões de atividades para aplicação

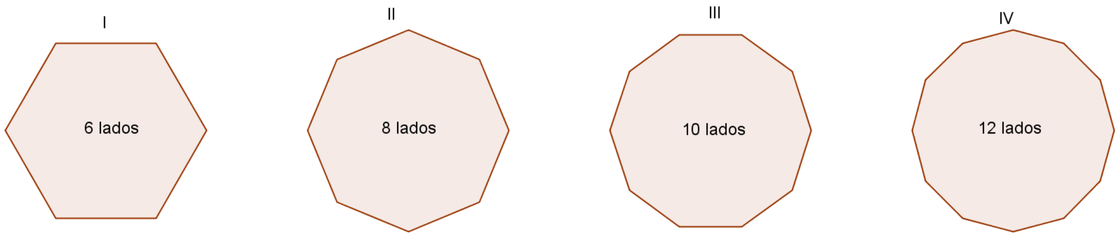
3.1 Uma proposta de aula para o cálculo da área do círculo

Apresentamos uma proposta de aula, que pode ser aplicada no 9° ano e no ensino médio, para ensinar uma forma de calcular a área do círculo que usa a fórmula de área dos polígonos regulares, os quais podem ser inscritos ou circunscritos.

Inicialmente, a aula pode ser introduzida a partir das seguintes perguntas:

1. A sequência de polígonos regulares abaixo vai se aproximar de qual figura?

Figura 3.1:



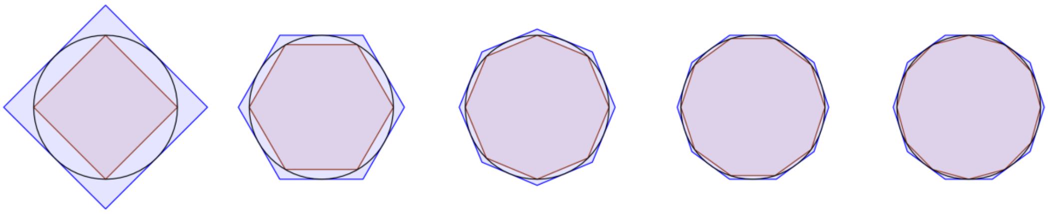
Fonte: própria

2. Será que isso tem a ver com o fato do polígono ser regular ou com o fato do número de lados estar crescendo?

3. Será que aconteceria se o número de lados crescesse mas os polígonos não fossem regulares?

4. Observe, abaixo, as sequencias de polígonos inscritos e circunscritos e a seguir pense em responder as respectivas perguntas:

Figura 3.2:



Fonte: própria

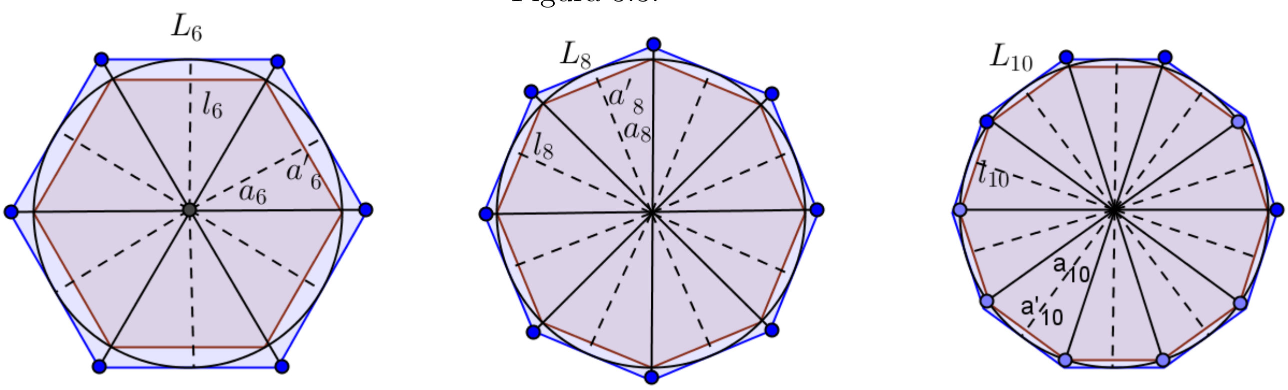
Em cada um desses casos, qual das figuras tem a maior área: o polígono inscrito, o circunscrito ou o círculo? Qual tem a menor?

Considerando as respostas dadas pelos alunos, encaminha-se para a conclusão da questão, que deve apontar que o círculo possui área maior que a do polígono inscrito e menor que a do circunscrito.

5. As áreas do polígono circunscrito e do inscrito estão se aproximando da área de que figura?

   Em seguida, apresenta-se uma breve análise sobre a fórmula da área de um polígono regular dada por $A_n = \frac{a_n P_n}{2}$ onde a_n é a medida do apótema e P_n é o perímetro do polígono regular de n lados. Essa fórmula se baseia no processo de calcular área de um polígono qualquer, o qual consiste subdividi-lo em triângulos, como mostra a sequência abaixo.

Figura 3.3:



Fonte: própria

Definimos L_n l_n como as medidas dos lados dos polígonos regulares inscritos e circunscritos respectivamente. Os a_n e a'_n representam as medidas dos apótemas dos polígonos inscritos e circunscritos respectivamente. Já A_n e A'_n indicarão as respectivas áreas.

Na figura I temos o hexágono e escrevemos relação entre as áreas do polígono inscrito e circunscrito com a área do círculo, através dos seguintes elementos os quais se conhece, como:

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2};\ a'_6 = R;\ l_6 = R;\ L_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Assim,

$$A_6 = 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \cong 2,6\,R^2$$
$$A'_6 = 6\frac{2R^2\sqrt{3}}{6} = 2R^2\sqrt{3} \cong 3,4\,R^2.$$

Logo, $A_6 \leq \pi R^2 \leq A'_6$.

Nesse caso do hexágono temos que A_6 e A'_6 são as áreas do polígono inscrito e circunscrito respectivamente, nas outras situações será usada apenas à notação pelo fato das regiões internas e externas se tornarem muito próximas como deve ser observado na sequencia das figuras.

Para as demais figuras e de acordo com número de lados podemos obter as seguintes conclusões sobre a área do círculo a partir do calculo da área do polígono regular, sendo que, em cada um dos casos, a sequência se aproxima da medida da área da região circular como podemos ver abaixo:

$$A_8 = 2\sqrt{2}R^2 \cong 2,83R^2 \leq \pi R^2 \cong 3,14R^2 \leq 3,31R^2 \cong 8R^2(\sqrt{2}-1)R^2 = A'_8,$$

$$A_{10} = \frac{5}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}R^2 \cong 2,94R^2 \leq \pi R^2 \cong$$
$$\cong 3,14R^2 \leq 3,25R^2 \cong \frac{10(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}R^2 = A'_{10}.$$

Portanto, o desenvolvimento do raciocínio acima também mostra, por meios algébricos, que a sequência de polígonos se aproxima cada vez mais do círculo.

6. O que foi necessário para garantir a aproximação acima?

A resposta aguardada deve mostrar que o aluno percebeu que o número de lados deve aumentar para que o apótema se aproxime da medida do raio e que as somas dos lados do polígono possam se aproximar do comprimento da circunferência.

7. Seria possível um processo semelhante ao que foi feito acima utilizando uma sequencia de polígonos não regulares, em que o número de lados fique cada vez maior?

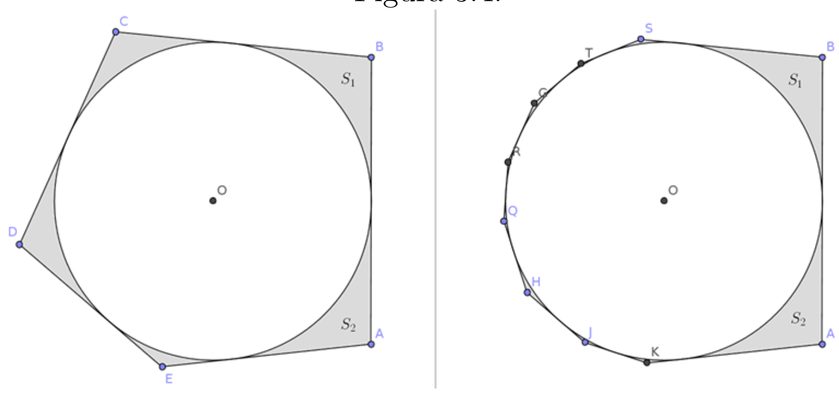
   As respostas devem convergir para o sim, pois a própria justificativa para aplicação da fórmula no polígono regular vale no caso do não regular, desde que o polígono se "aproxime"do círculo). Cabe ao professor orientar aos alunos para considerar o caso dos polígonos circunscritos, pelo fato de permitir a visualização necessária sobre questão da medida do apótema se aproximar do raio R.

8. Uma vez intuído o fato de que é necessário tornar-se muito grande o número de lados do polígono, em busca da aproximação com o círculo, pergunta-se:

   Isso é suficiente para garantirmos esse raciocínio? Sim ou não? Use o par de figuras abaixo para auxiliar as Justificativas.

   Aqui se espera que os alunos e o professor concluam que não basta o número de lados se tornarem muito grandes. Também é necessário que as medidas dos lados fiquem muito pequenas.

Figura 3.4:

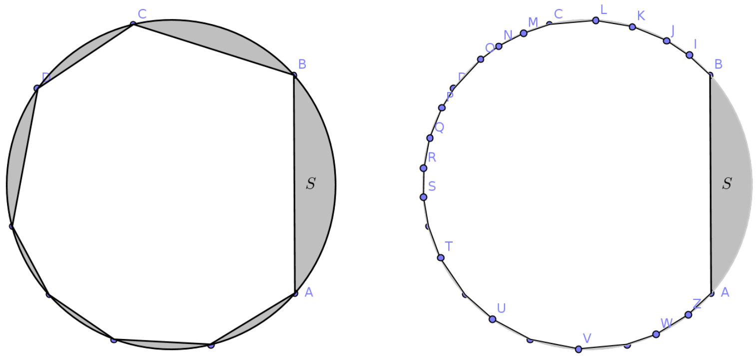


Fonte: própria

De fato, se o polígono permanecer com a medida de um dos lados fixa, ocasionará regiões como $S_1 \cup S_2$, delimitadas por esse lado fixo, pelos lados adjacentes a ele e o círculo. Mas, além disso, há outras regiões tão pequenas quanto se deseja entre os lados menores e o circulo. Isso se justifica, uma vez que a região limitada pelo polígono menos a região interior ao círculo é a região cinza, na qual estão contidas as regiões S_1 e S_2. Assim, a área do polígono menos a do círculo é maior que a de $S_1 \cup S_2$.

No caso do polígono inscrito vamos constatar que a área do circulo menos a do polígono é sempre maior que S a qual é constante em ambas as situações abaixo devido à fixação da medida de um dos lados do polígono e como se sabe mesmo que aumente bastante o número de lados, tornando as medidas dos lados muito pequenas como mostra a segunda figura e apesar de parte do polígono se aproximar muito do círculo teremos ainda a diferença entre o círculo e o polígono maior que S, já que S é uma parte da região cinza, mas não toda.

Figura 3.5:



Fonte: própria

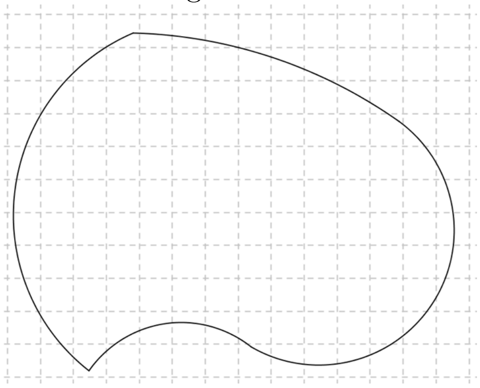
Por fim, esperamos alcançar com essa abordagem uma ideia significativa de aproximação em matemática e por meio dela concluir que é possível obter a fórmula da área do círculo a partir da fórmula de área do polígono e para que isso aconteça devem ser atendidas tais condições: o número de lados do polígono deve crescer na mesma proporção em que as medidas de todos os seus lados se aproximam de zero.

3.2 Uma proposta de aula: o cálculo de área da elipse através do uso de malhas

3.2.1 Cálculo de área por estimativa através do uso de malhas

O conceito de área visto a partir da definição de unidade de área pode ser bem desenvolvido por meio do uso de malhas. A proposta é medir quantas vezes a unidade de área cabe em uma dada figura. No entanto, para o cálculo de área de regiões de contornos não retilíneos, é necessário usar a ideia de estimativa, como no caso do exemplo abaixo:

Figura 3.6:



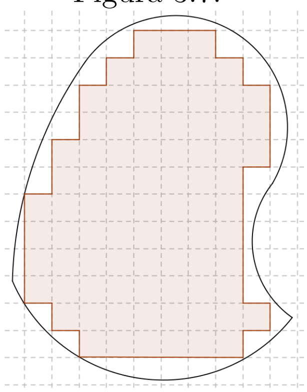
Fonte: própria

Ressaltamos que o exemplo trabalhado deve conter contornos suaves, podendo ter uma quantidade finita de "bicos", e ter comprimento finito.

O método consiste, basicamente, em estimar, por falta ou excesso, a área da região dada. Quando consideramos apenas os quadradinhos totalmente contidos na região, estamos estimando por falta; quando se leva em conta também os quadradinhos que possuem alguma interseção com a região, estamos estimando por excesso. É natural que haja discrepâncias, pois, quando a borda da região passa bem em cima de um dos lados de um quadradinho, gera-se uma dúvida em quem utiliza o método. A seguir mostramos algumas dessas técnicas, em casos, de estimar áreas aplicadas ao exemplo apresentado anteriormente.

- Caso 1: por falta.

Figura 3.7:

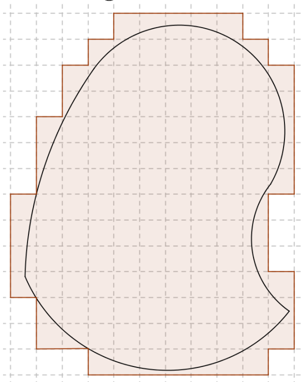


Fonte: própria

Obtemos 81 u.a., valor menor que a área da curva.

- Caso 1: Por excesso.

Figura 3.8:



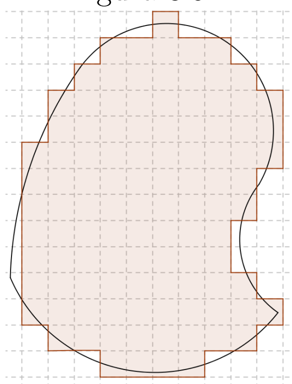
Fonte: própria

Como nesse caso basta o quadradinho conter um ponto do interior da curva para ser considerado na estimativa da área, assim temos 126 u.a. que é um valor maior que a área da curva.

As próximas situações são intermediárias, ou seja, o valor para a área da região estará entre o obtido “por falta”e o “por excesso”.

- Caso 3: Considerando ou não um quadrado na fronteira

Figura 3.9:



Fonte: própria

Nesse caso é avaliado se deve considerar ou não um quadrado que contenha pontos de dentro ou de fora da região (os quadrados “da fronteira”), caso a interseção do quadrado com a região interior seja “grande”ou “pequena”. Na nossa estimativa a área é de 104 u.a.

Obtemos 81 u.a., valor menor que a área da curva.

- Outra forma de fazer esse cálculo por estimativa com mais precisão é considerar a área do caso 1, e somar, em cada quadrado "da fronteira", uma área estimada para a região nele contida, que estaria entre 0 e a área total deste quadrado. Buscamos compensações entre as partes do quadrado para estimar 100 u.a

Aplicamos uma atividade, que se encontra no apêndice, com um grupo de 20 alunos escolhidos aleatoriamente de duas turmas de 8º ano. Três dos exercícios foram propostos e se referiam a estimativa de áreas por malhas quadriculadas com refinamentos diferentes. Os alunos, surpreendentemente, concluíram praticamente por unanimidade que a malha maior seria a mais precisa. Isso ressalta a importância de se discutir um pouco mais o processo com o aluno. Talvez a opinião do aluno seja por que a malha maior é mais "prática"ou "rápida"e não atentaram que os tamanhos do quadrado influenciam numa cobertura mais adequada da região e, consequente, uma estimativa da área com mais precisão. Comparando as estimativas das áreas das regiões feitas pelos alunos, observamos que a maneira de estimar deles foi muito parecida e deixamos livres para que estimassem da maneira que achassem mais precisa.

Na primeira malha, houve uma variação pequena nas contagens dos quadrados que melhor cobriam a região. Esse número variou entre 25 a 30, com grande parte dos alunos achando 26 quadrados. Os que acharam 25, obtiveram uma área de 400, já que cada quadrado que formava a 1ª malha tinha área 16. Essa situação era a única em que o primeiro desses exercícios apresentava o menor valor para região, mesmo assim esses alunos também optaram por medida de área como a mais adequada dos três casos.

Os alunos que contaram 26 quadrados estimaram valores muito próximos de áreas (entre 412 e 411) nas malhas seguintes, mais refinadas. Isto pode indicar que esses alunos foram coerentes e tiveram uma característica no modo de estimar, já que as outras estimativas apresentavam uma discrepância considerável entre os resultados.

Um fator que também pode ter sido determinante para apontar a região da primeira malha como a mais precisa foi à questão de ter uma estimativa da medida da área maior do que as outras, mesmo com a exceção citada acima.

Alguns casos acertaram a contagem por estimativa, mas erraram o cálculo da área dos quadradinhos que constituem a malha. Numa das tentativas de estimar, mais de um aluno contou 104 quadradinhos e, em um erro de conta, o resultado que deveria ser 416 acabou sendo 412.

Uma forma simples, mas diferente, de contagem dos quadradinhos foi apresentada por dois alunos. Eles dividiram a região curva num maior retângulo possível contido nela e, com as medidas dos lados traçadas sobre as malhas, calculavam a área do retângulo. Somavam à área obtida as áreas obtidas por estimativa dos demais quadradinhos que faziam parte da região.

A discrepância entre os valores obtidos entre as diferentes técnicas se tornará menor na medida em que a malha for sendo "refinada", isto é, subdivida em quadrados menores. Este fato é justificado na fundamentação teórica, uma vez que, a contagem de quadrados, nada mais é que a integração, na região limitada pela curva, de uma função característica (nos caso de (1) a (3)). Nas técnicas (1) a (3), o que está sendo trabalhado, intuitivamente com os alunos, é uma soma de Riemann da função característica na qual o R é a região limitada pela curva dada,

$$f(P) = \begin{cases} 1, P \in R \\ 0, P \notin R. \end{cases}$$

Os resultados alcançados com a técnica destacada no caso 4 resultam sempre em um valor intermediário aos obtidos no uso das diferentes escolhas do caso 3.

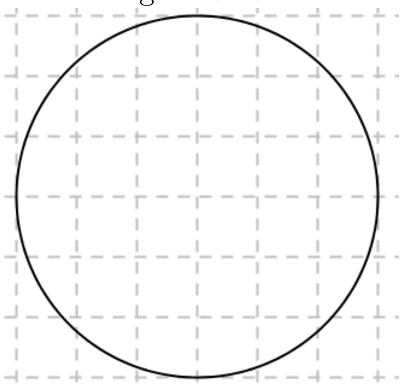
Outro aspecto é que podem surgir dúvidas na hora de se decidir se um quadrado contém ou não pontos do interior da região, devido à espessura do traço, a qualidade da impressão, etc. Mas, também nestes casos, o refinamento da malha reduzirá a discrepância.

3.2.2 A área da Elipse

Problema 1:

Estime a área aproximada da região circular abaixo, por falta, por excesso e por estimativa. Sabe-se que os quadradinhos da malha tem lado 1 cm.

Figura 3.10:



Fonte: própria

Por falta: $A_c = 16$.

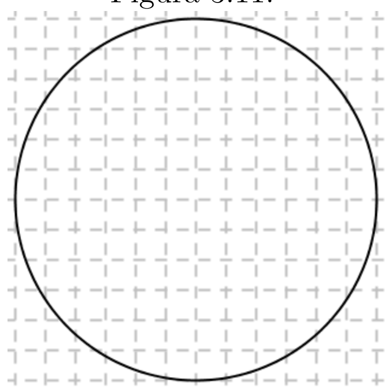
Por excesso: $A_c = 36$.

Por estimativa: A_c deve ficar entre os valores acima, sendo 32 uma resposta esperada, imaginando que o aluno irá desconsiderar apenas os quatro quadradinhos dos cantos da contagem por excesso.

Problema 2:

Se refinarmos a malha quadriculada para medidas de 0,5 cm. Quais serão as estimativas da área do círculo?

Figura 3.11:



Fonte: própria

Como se sabe a área de cada quadradinho é $0,5 \times 0,5 = 0,25$.

Por falta: $A_c = 88 \times 0,25 = 22$.

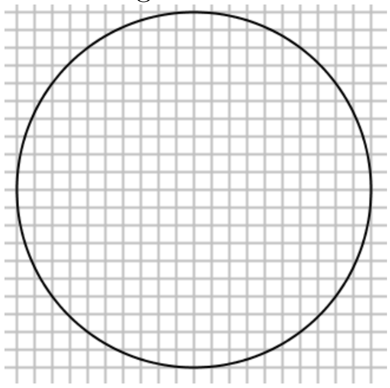
Por excesso: $A_c = 132 \times 0,25 = 33$.

Por estimativa: Um valor razoável seria $A_c = 120 \times 0,25 = 30$.

Problema 3:

E com a malha refinada para medidas com 0,3 cm. Qual será a medida da área do círculo?

Figura 3.12:



Fonte: própria

Sabe-se que a área de cada quadradinho é $0,3 \times 0,3 = 0,09$.

Por falta: $A_c = 304 \times 0,09 = 27,36$.

Por excesso: $A_c = 328 \times 0,09 = 29,52$.

Por estimativa: Um bom palpite seria $A_c = 320 \times 0,09 = 28,8$.

Nos casos acima, o raio do círculo é sempre 3, logo a área, como sabemos, é aproximadamente 28,26. Portanto, nota-se que esse método melhora a precisão da estimativa quando há um refinamento da malha, já que as três técnicas usadas nos exemplos acima convergem para valor obtido pela fórmula da área do círculo. Sendo assim, após os alunos terem experimentados o cálculo da área do círculo por estimativas através do uso das malhas podemos leva-los a seguinte reflexão através das perguntas:

- Em qual das três malhas (1ª, 2ª ou 3ª) a área do círculo mais se aproxima do valor obtido pelo uso da fórmula?

  Resposta esperada: A 3ª malha

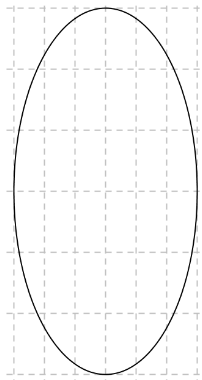
- O que permite uma melhor precisão da estimativa para área independente da técnica utilizada (por excesso, por falta ou por estimativa)?

  Resposta esperada: O refinamento das malhas.

Problema 4:

Considere a figura do problema 1 (o círculo com a malha). Vamos esticar a figura verticalmente, de modo que os comprimentos de cada segmento vertical dobrem, e mantendo os comprimentos horizontais, obtemos assim uma nova figura [nova figura]. Repare que cada quadrado da malha se transformou em um retângulo. O círculo se transformou em um "círculo alongado", chamado elipse.

Figura 3.13:



Fonte: própria

Perguntas:

(a) Qual a área de cada um dos retângulos na malha?

Resposta: $1 \times 2 = 2$.

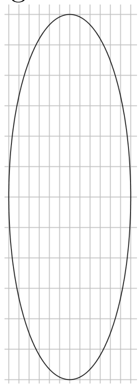
(b) Utilizando as estimativas dadas no Problema 1 acima e sabendo a área de cada retângulo (item a), dê uma estimativa para a área da elipse da figura?

Resposta: No caso da estimativa da região circular por falta tínhamos 16 quadrados, que correspondem aos 16 retângulos considerados para mesmo tipo de cálculo na elipse que resultará em 32cm^2. A mesma relação entre as figuras se repete quando usamos a mesma opção de estimativa escolhida para o problema 1, sendo assim são levados em conta 32 retângulos, de área 2 e consequentemente se obtém os 64cm^2 de área para a elipse

Problema 5:

Considere a figura do problema 2. Vamos esticar, como antes, a figura verticalmente, de modo que os comprimentos de cada segmento vertical tripliquem, e mantendo os comprimentos horizontais, obtemos assim uma elipse. Responda:

Figura 3.14:



Fonte: própria

(a) Qual a área de cada um dos retângulos na malha?

Resposta: $0,5 \times 1,5 = 0,75$.

(a) Utilizando uma das estimativas do Problema 2 acima e sabendo a área de cada retângulo (item a), dê uma estimativa para a área da elipse da figura?

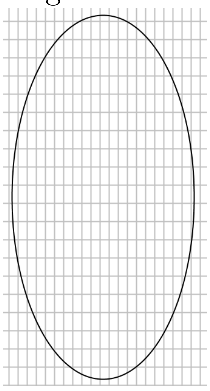
Resposta: Se usarmos como base a área da região circular por excesso obtida através dos 132 quadradinhos que cobrem a região. Também vamos notar que serão 132 retângulos menores que cobrem agora a elipse formada ao triplicarmos a medida vertical da figura. Sendo assim, a área da elipse é indicada por $A_e = 132 \times 0,75 = 99$.

Portanto, deve-se perceber, por exemplo, que as aproximações da área do círculo obtidas no problema 1 estão diretamente ligadas às da elipse, já que a duplicação da figura do círculo no sentido vertical implicará também na duplicação da área dessa figura. Logo, $A_e = 32(A_c) \times 2 = 64$. A mesma ideia podemos observar em relação ao problema 2 e ao problema 5, quando observamos as relações entre as áreas, $A_e = 33(A_c) \times 3 = 99$, utilizando a estimativa por excesso.

Problema 6:

Da mesma forma, utilizando a estimativa do problema 3, dê uma estimativa para a área da elipse. Dado que os comprimentos de cada segmento na vertical sejam dobrados e os da horizontal mantidos.

Figura 3.15:



Fonte: própria

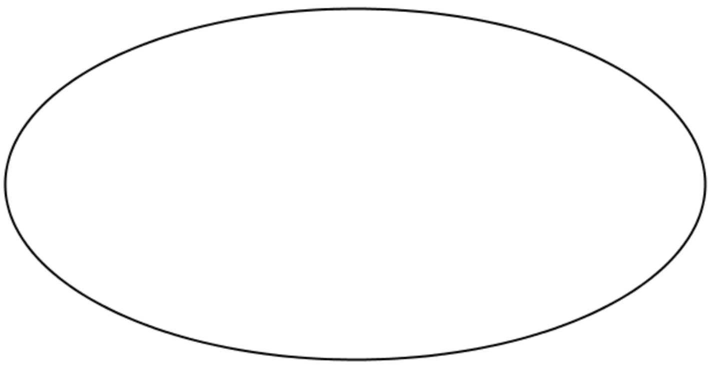
Respostas esperadas: Escolhendo a estimativa por falta do problema 3 em que são considerados 304 quadradinhos que após o alongamento da figura equivalem a 304 retângulos na elipse formada, os quais têm cada um 0,18cm^2 de área totalizando a estimativa de 54,72cm^2 de área para região. Outra forma de fazer seria notar que os segmentos da figura do círculo foram dobrados no sentido vertical e que isso implica em ter a área da elipse igual ao dobro da área do círculo, ou seja $a_e = (A_c) \times 2 = 27,36 \times 2 = 54,72$.

Relacione os problemas anteriores com as seguintes situações problemas:

Problema 7:

Se considerarmos o círculo de raio 3, dobrarmos o comprimento horizontal e mantivermos o vertical (isto é, uma elipse de semieixo horizontal 6 e vertical 3.), estime a área da região.

Figura 3.16:



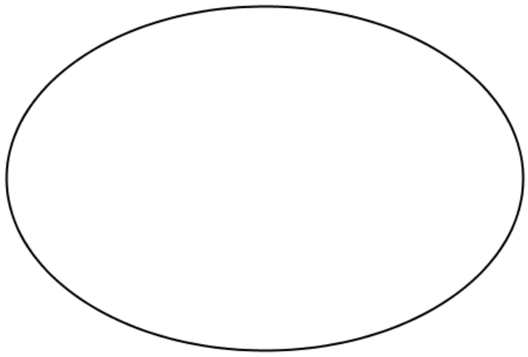
Fonte: própria

Resposta: Se tomarmos o cálculo por estimativa da terceira malha do círculo que tem área de 28,8, vamos obter a seguinte área para elipse de acordo com alongamento em questão. Logo, a área da elipse pode ser estimada $28,2 \times 2 = 57,6$.

Problema 8:

E se o círculo, agora, for transformado numa elipse de semieixo horizontal 9 e vertical 6, estime a área da região.

Figura 3.17:



Fonte: própria

Resposta: Usando as mesmas referências do problema anterior e observando os alongamentos feitos no círculo, temos como área da elipse indicada por $A_e = 28,8 \times 3 \times 2 = 172,8$.

Uma conclusão

Logo, se partirmos de um círculo de raio r e alongamos um eixo para a (tendo assim uma elipse de eixos a e r), a área será multiplicada por $\frac{a}{r}$. Se alongarmos o outro eixo para comprimento b, essa área será multiplicada por $\frac{b}{r}$, resultando em uma multiplicação por $\frac{ab}{r^2}$. Por fim, a generalização do cálculo da área da elipse parte de, a partir de um círculo de raio 1, obter o cálculo da área da elipse de semieixos a e b. O comprimento horizontal foi multiplicado por a e o comprimento vertical foi multiplicado por b, logo, a área do círculo fica multiplicada por a e por b resultando na área da elipse, representada por

$$A_e = a \times b \times A_c = \pi ab.$$

4 Atividades aplicadas em sala de aula

4.1 Relato de atividades sobre as ideias das fórmulas de áreas planas

Realizamos uma atividade com duas turmas de oitavo ano, que foram divididas em grupos de três alunos, para que pudessem deduzir as fórmulas de áreas das figuras planas mais usuais. Inicialmente, essas duas turmas tinham estudado com os seus professores apenas a introdução do conceito de área, além do cálculo da área do quadrado e do retângulo. A partir destas fórmulas, foi dada uma aula com base na atividade em anexo para que pudessem obter outras fórmulas de áreas.

Os materiais utilizados foram peças de cartolina que podiam ser cortando com tesouras. O primeiro objetivo era transformar uma figura em outra, ambas de formas comuns, mas apenas uma com a fórmula da área já conhecida, para que o aluno pudesse chegar a área da outra figura. Para isso ser possível, buscamos estimular a visão intuitiva deles associada à ideia de áreas iguais por cobertura de uma mesma região e, no fim de cada etapa, esperava-se que alunos conseguissem deduzir a fórmula.

A prática da atividade foi conduzida por mim usando oralidade e quadro para levar os alunos às reflexões e atitudes necessárias, pois eles começavam a estudar áreas nessa época. Sendo assim, os orientava a, primeiramente, imaginar como iriam cortar a figura e depois fizessem a decomposição da mesma, bem como a recomposição das peças, para que pudessem concluir que as duas figuras cobriam a mesma região. É fato que muitos, mesmo em grupo, tiveram muita dificuldade para imaginar como fazer isso. Fica claro que não é natural para o aluno pensar na figura de uma forma diferente, por exemplo, “em partir”a figura, habilidade essa fundamental no estudo de geometria e muito comum para lidar com áreas planas.

Em algumas associações entre figuras, eles tiveram muita dificuldade para compreender. No caso do trapézio, eram dadas duas peças idênticas em cartolina, na forma do trapézio, para que pudessem associar a uma figura de conhecimento deles. Era esperado que, juntando as duas peças que tinham em mãos, formaseem o paralelogramo. Neste ponto, tivemos que dar algumas dicas para a maior parte da turma perceber a relação entre essas figuras. Em outra abordagem sobre a área do trapézio, dávamos uma peça desse formato e pedíamos que pensassem em uma forma de decomposição utilizando, mais uma vez, conhecimentos anteriores, e poucos alunos tiveram a iniciativa de cortar a figura em dois triângulos.

Também tivemos que ser mais incisivos na explicação oral no raciocínio do cálculo da área do losango, quando demos uma peça retangular com um losango inscrito, e era esperado que os alunos usassem o que sabiam sobre o retângulo para associar ao calculo da área do losango, observando que essa é exatamente a metade da área do retângulo. Isto ficava claro com a decomposição das peças e uma recomposição das partes obtidas formando dois losangos iguais. Depois de terem apresentado dificuldades para chegar até essa conclusão, por meio da montagem das peças houve compreensão total.

Uma vez entendidas essas ideias, e descobrindo assim as relações de área de uma figura com a outra, dávamos dois exemplos em sequência para que pudessem aplicá-las usando medidas numéricas. Nessa parte da atividade, os alunos se saíram relativamente bem, em comparação às demais, principalmente na questão da rapidez e da autonomia. O exemplo em que tivemos que interferir mais foi o do cálculo da área do trapézio, decompondo em dois triângulos, aos quais os alunos já sabiam aplicar a fórmula. Houve dificuldade em visualizar as medidas para aplicação da fórmula por duas vezes e juntar os resultados. Ficou, neste ponto, claro, que o fato de um dos triângulos estar de cabeça para baixo já é um fator complicador, além da dificuldade em juntar partes da área de uma região para obter o todo.

Por último, buscávamos a obtenção das fórmulas de áreas, tentando fazer uma transposição dos raciocínios aplicados nos exemplos anteriores, ou seja, tentávamos relacionar as medidas, de antes, com as variáveis usadas para alcançarmos a generalização em cada método de cálculo. Fizemos essa analogia para auxiliar na representação das variáveis como medidas das figuras, no entanto, usamos como base da fundamentação formal das fórmulas as ideias desenvolvidas através peças de cartolina.

Observação: Vamos comentar a parte o item 1.8 da Atividade 1 (em anexo), pela sua importância e pelo direcionamento totalmente livre de qualquer ideia de fórmulas de área. E também com o objetivo de destacar que era uma situação problema já presente no Rapiro de Rhind, o que já demostra uma exigência, nos estudos daquela época, das habilidades de composição e decomposição de figuras para cálculo de área.

Nesse item, propomos uma questão para avaliar apenas a noção de área como cobertura de uma região e atitude de compor e decompor figuras, para que pudéssemos analisar como comparariam as três figuras desse exercício e de quais seriam as suas conclusões.

Inicialmente, orientamos que imaginassem como recortar o triângulo e o trapézio, transformando-os respectivamente, através de suas partes ("pedaços"), em retângulo de mesma área de ambas as figuras iniciais. Pedimos que simulassem essas situações com auxilio da malha quadriculada, a fim de que as partes das figuras que deveriam ser cortadas para a remontagem desejada fossem pintadas. Assim, deveriam visualizar e formar o retângulo com as condições mencionadas no exercício, mantendo a mesma área. Tive que explicar que o retângulo seria a minha figura referencial e de comparação, e que cada "quadradinho" da malha seria minha unidade de medida, ou seja, a partir da questão, buscamos reforçar a noção de área.

Contudo, um dos objetivos da questão foi alcançado, uma vez que a maior parte compreendeu a ideia de área por cobertura de uma região, pois, a decomposição do triângulo e posterior recomposição em retângulo foi bem compreendida pelos alunos. No caso do trapézio, os resultados ficaram divididos; enquanto alguns grupos conseguiram concluir, mais de um grupo não concluiu totalmente, já que formaram o retângulo a partir da recomposição do trapézio mas não atentaram à alteração da medida da área, pois o retângulo ficava com 4 quadrados da malha, sendo 3 o correto. Dentre os que conseguiram, nota-se, pela folha de exercícios, que foram necessárias algumas tentativas. O resultado do exercício, como um todo, foi satisfatória, mas percebe-se que as atitudes de decompor e recompor figuras não são naturais na imaginação dos alunos, pois tivemos que sinalizar aos alunos de forma explicita para esse tipo de raciocínio.

Aplicamos uma segunda atividade com quatro exercícios de fixação, a qual está no anexo, com alguns alunos de ambas as turmas, em um dia em que foi feita uma explicação objetiva, ressaltando algumas informações dadas. Na primeira questão, esperava-se que os alunos fizessem uma decomposição, obtendo uma figura dividida em duas partes para, em seguida, fazer a recomposição para obter um quadrado e calcular a sua área. Tivemos que orientar alguns alunos a pensar em decomposição e recomposição, e então a maioria conseguiu finalizar.

O segundo exercício era um tipo de figura que não tem um nome definido na nomenclatura poligonal, e exige dos alunos que a dividam em partes, nesse caso já definidas pelos próprios traços presentes na figura. Houve também alguns erros de medidas, mesmo com auxilio das malhas, que era um fator facilitador, e muitos tiveram que ser alertados para juntar valores. Os raciocínios envolvidos no último exercício eram os mesmos desse problema, mas sem auxilio das malhas, o que criou ainda mais confusões sobre as medidas utilizadas no cálculo da área das partes, pois estas variaram de acordo com a visão do aluno. Alertamos, porém, que todos deveriam, após juntar as partes, obter a mesma medida de área para região total.

Outro exercício era uma repetição da peça de cartolina retangular com losango inscrito, cujos vértices eram pontos médios do retângulo. A maioria dos alunos apresentou como resposta apenas o valor obtido pela fórmula da área do retângulo. Dos 20 alunos que participaram da atividade, 18 deram essa resposta e um errou completamente. Um único aluno acertou, dividindo o retângulo em dois, calculando a áreas de cada uma destas metades, dividindo a área obtida novamente pela metade (usando o fato de cada uma dessas partes ter a metade coberta por um triângulo que corresponde à metade do losango) e, finalmente, multiplicando por dois para obter a área do losango.

Esta atividade aplicada foi pensada a partir das habilidades e competências básicas necessárias para o ensino de áreas de regiões planas, a saber: o conceito de área como cobertura de uma região plana, a questão da visualização por composição e decomposição de figuras e as ideias de somar partes para obter a área de um todo, assim como subtrair de um todo uma parte para obter a área de uma região procurada.

Anexo

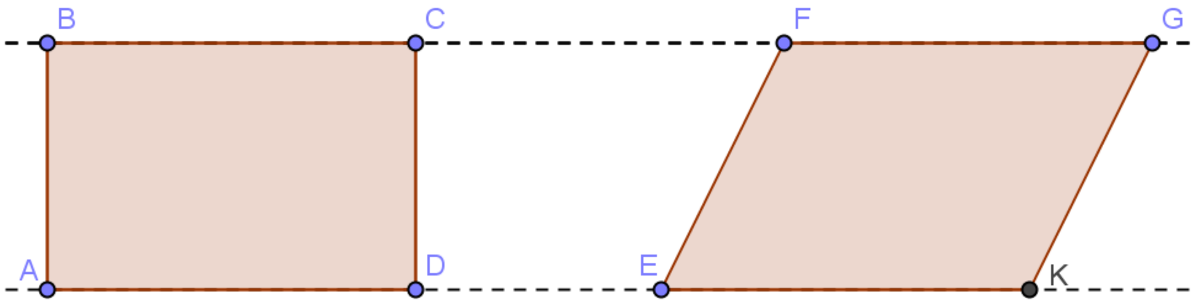
Nas páginas seguintes, apresentamos o material impresso entregue aos alunos nas atividades 1 e 2 aplicadas. As dicas presentes em algumas questões não constavam no documento dado ao aluno e foram inseridos aqui para fins de registro, já que fizeram parte da condução da ativiadde por meio da fala.

Atividade 1:

Aula de Geometria sobre as relações de áreas entre algumas figuras notáveis da geometria plana com o objetivo de desenvolver o conceito de área e compreender as fórmulas de cálculo de área em um contexto proporcionado por essa atividade que a visualização é base para alcançar tais objetivos.

Questão 1:

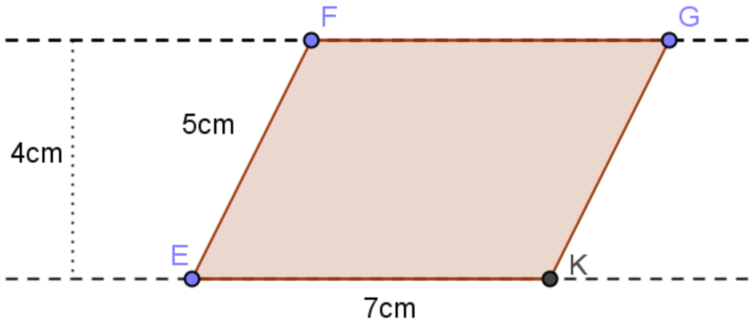
1.1- Qual a relação entre a área do retângulo e do paralelogramo abaixo? (os segmentos AD e BC têm mesmo comprimento)



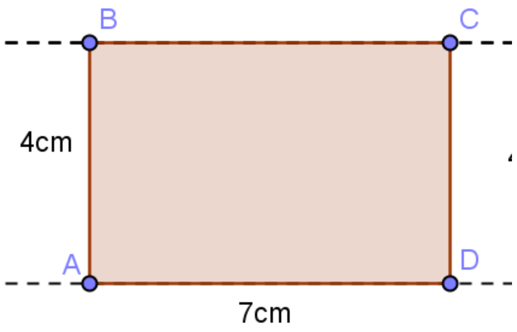
1.2- Pense e descubra de que maneira essas peças em cartolina e a tesoura podem ajudar a responder a pergunta acima.

1.3 – (**Dica**) Usou? (   ) SIM ou (   ) Não Dica: (Avisar que podem cortar uma das figuras de forma que os pedaços cubram a outra)

1.4- Calcule a área do paralelogramo.



1.5- Calcule a área do retângulo.

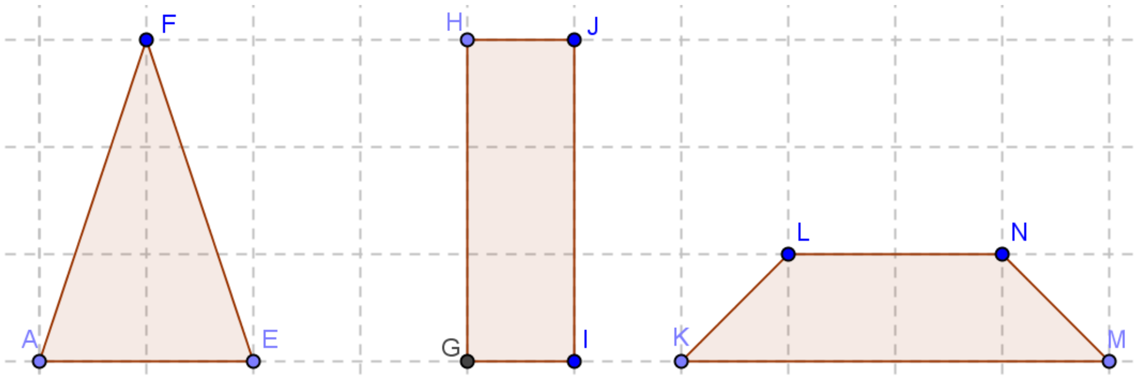


1.6- Qual a área do paralelogramo? (DICA) Usou? (   ) SIM ou (   ) Não.

Dica: Avisar para usar o problema 1.1 e a resposta em 1.5 para responder 1.4(será falado em sala por mim).

1.7- Se você usar as letras --- e --- como as medidas necessárias para calcular a área do paralelogramo inicial obtêm a sua fórmula de área. Como pode escrevê-la?

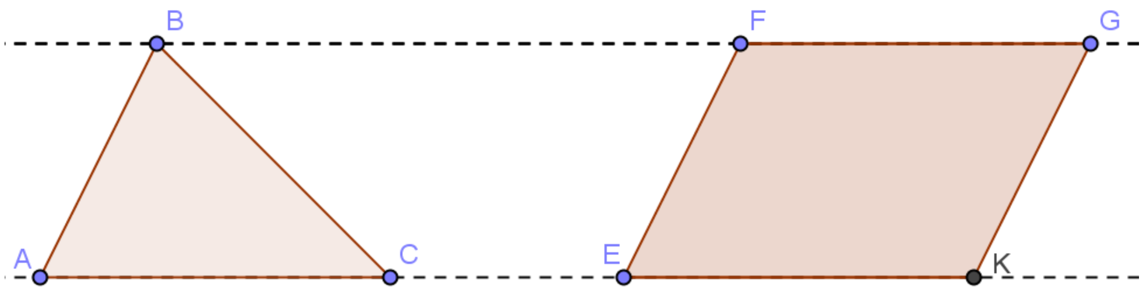
1.8- Mostre (explicando e/ou pintando partes da malha) que as três figuras tem áreas iguais usando o argumento de cobertura de região.



1.9- Use as três peças dadas para mostrar que elas têm áreas iguais. (DICA). Usou? (   ) Sim ou (   ) Não. Dica: Avisar que eles podem escolher o retângulo para deixar inteiro e cortar as outras peças de maneira que os pedaços de cada uma cubram o retângulo.

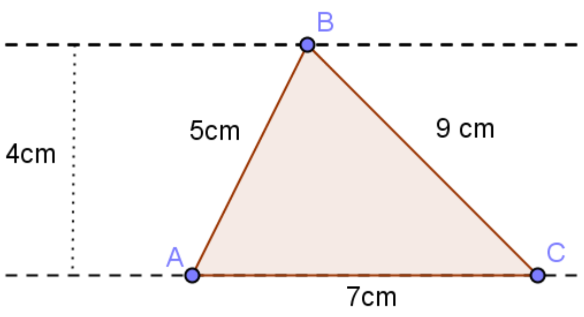
Questão 2:

2.1- Qual a relação entre a área de um triângulo e de um paralelogramo?



2.2- Se necessário use a peça de cartolina e a tesoura para ajudar a responder a pergunta acima.

2.3- Calcule a área do triângulo.

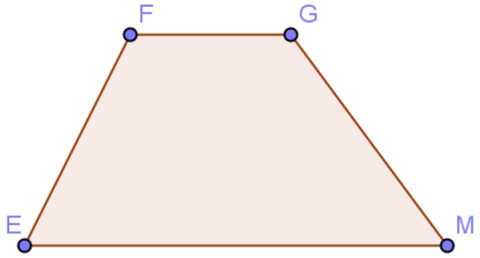


2.4- Substituindo as medidas usadas no cálculo da área do triângulo acima pelas letras ---- e ---.

Escreva a fórmula da área para o triângulo.

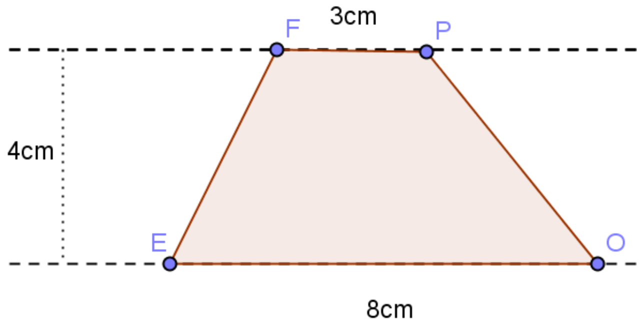
Questão 3:

3.1- Podemos achar uma relação para cálculo de medida de área do trapézio com que tipo de figura?



3.2 Use a peça dada na forma de trapézio e tesoura para achar essa relação? (DICA). Usou? (   ) Sim ou (   )Não? DICA: (Avisar para cortar o trapézio em dois triângulos).

3.3 Calcule área do trapézio.



3.4) Escreva a fórmula geral do cálculo da área do trapézio substituindo as medidas numéricas do item anterior pelas letras B, b e H?

Questão 4:

4.1- Use as duas peças idênticas de cartolina na forma de trapézio, sem corta-las e responda:

a) Que tipo de figura você consegue forma com as duas peças?(Dica!) Usou? ( ) sim ou ( ) Não. Dica: (Avisar para encaixar o lado congruente das figuras).

b) Se a área dos dois trapézios juntos é 4 u.a, qual é a área de um trapézio?

c) Se a área de um trapézio fosse representada por A. Quanto seria a área dos dois trapézios juntos?

4.2- Considere que cada peça tem bases iguais a 3 cm e 8cm e altura 4cm. Calcule a medida de área da figura formada no item 4.1 letra (a).

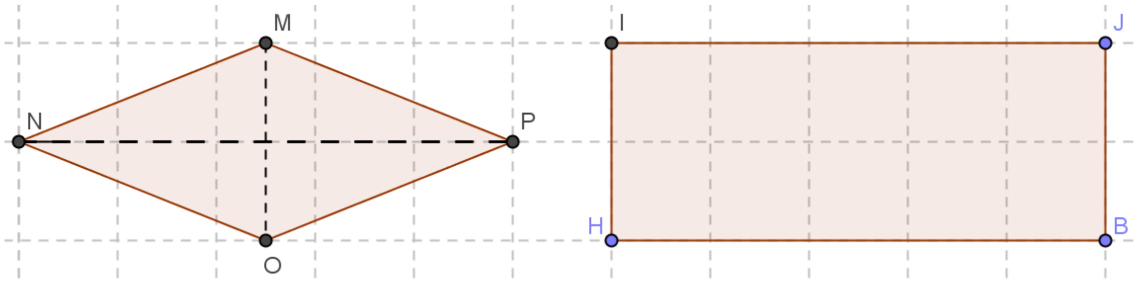
4.3 - Repetindo o mesmo cálculo do item anterior, agora usando letras para representar as medidas dos trapézios tais que: B e b são as medidas das bases e h a da altura. Escreva a expressão que representa a área da figura formada por esses trapézios.

.

4.4- A partir da expressão acima concluam sobre a sua relação com a área do trapézio, justificando e escreva a fórmula de área do trapézio.

Questão 5:

5.1- Como podemos obter uma relação entre os cálculos de área do losango e do retângulo?



5.2- Quais os elementos das figuras acima tem as mesmas medidas entre si?

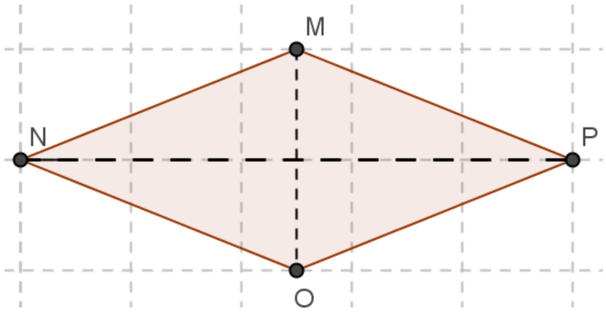
5.3- Observe a peça dada, qual a relação entre o losango e a parte externa do losango?

5.4-Usando a tesoura de que maneira você pode obter dois losangos idênticos com a peça dada?

5.6- Então o que podemos afirmar sobre a maneira de calcular a área do losango em relação à área do retângulo?

5.7- Calcule a área do losango para ter as medidas necessárias considere os lados dos quadradinhos que formam a malha igual a 1 cm.(DICA!) Usou? (   ) Sim ou (   ) Não.

Dica: Avisar para imaginar o retângulo na malha que contenha o losango e as suas respectivas medidas para partir da sua área calcular a do losango.



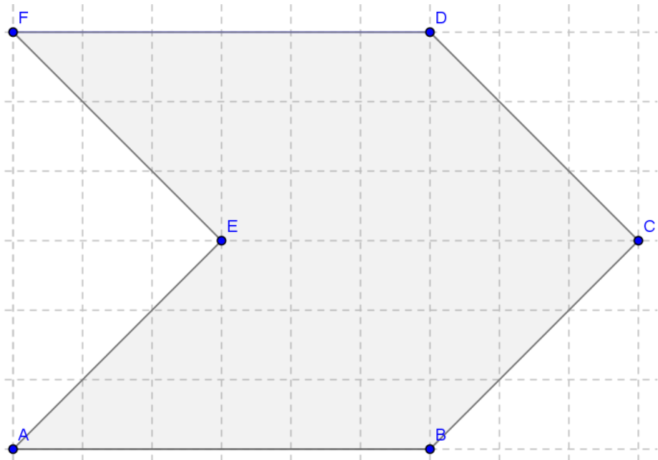
5.8- Substituam as medidas utilizadas no item anterior elas letras D e d para escrever a fórmula do cálculo da área do losango.

Atividade 2:

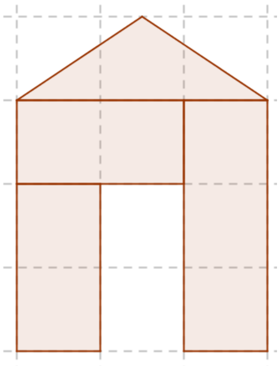
<u>Exercícios sobre o cálculo de área de regiões planas</u>

1) Calcule a área das regiões pintadas que estão sobre as malhas quadriculadas compostas de quadrados de lado 1 cm:

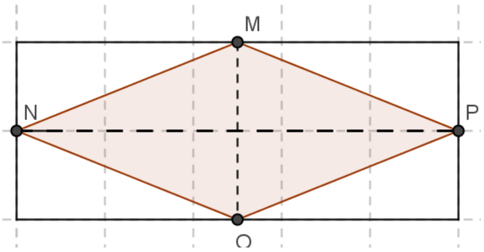
a)



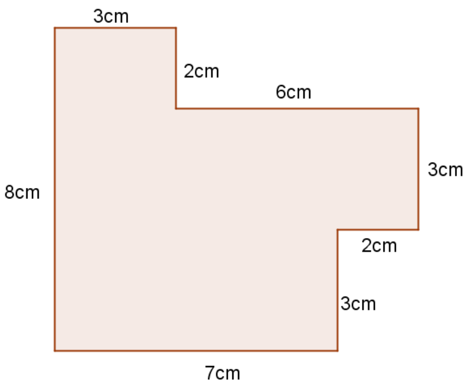
b)



c)

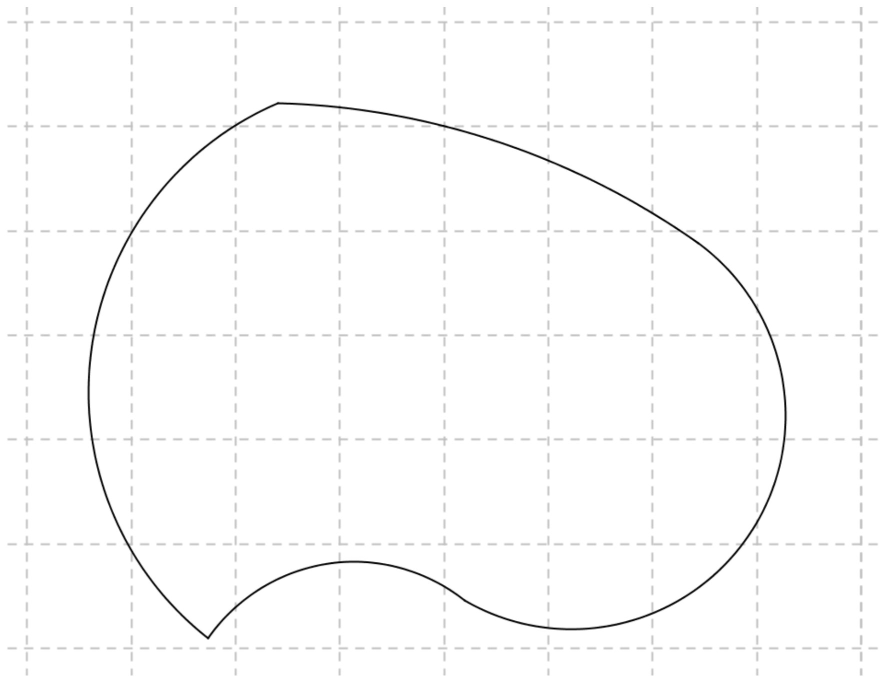


2) Calcule a área da figura abaixo:

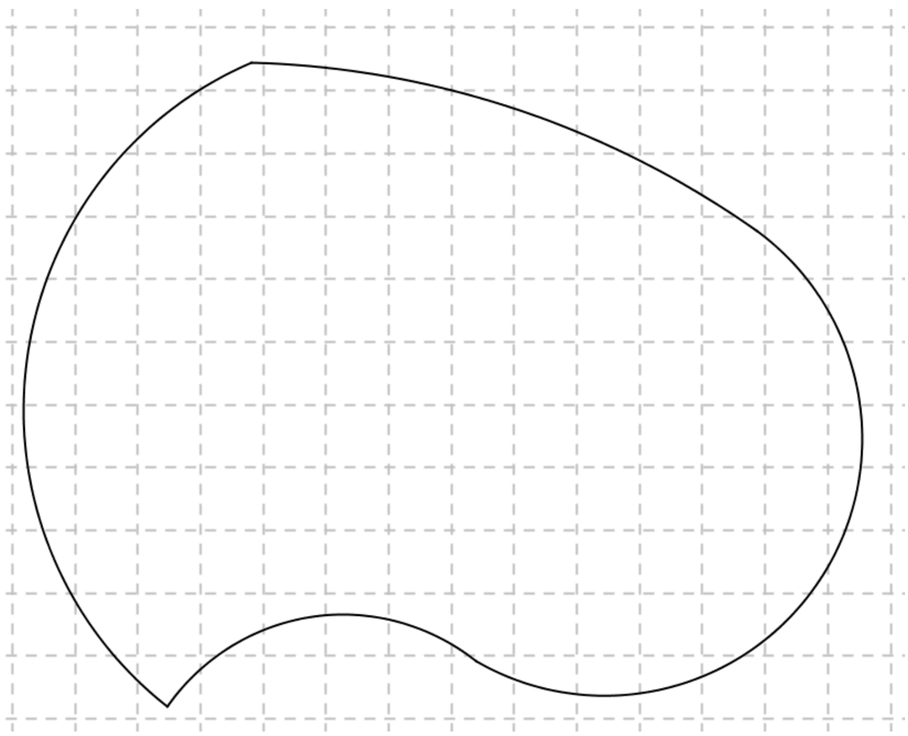


Fórmulas: A= bxh e A= $\frac{bxh}{2}$

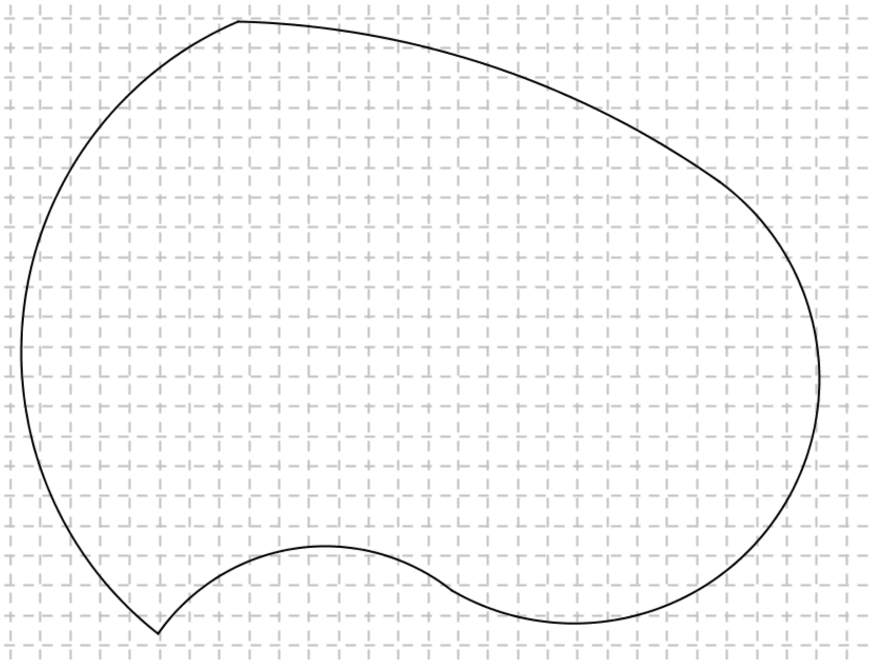
3) Para cada um dos tipos de malha quadriculadas abaixo formadas por quadradinhos de lados 4cm, 2cm e 1cm respectivamente tem sempre a mesma região curva do mesmo tamanho. Calcule a área da região curva em cada um dos casos por meio das áreas dos quadradinhos que compõem as malhas.



Cálculo da área região curva =



Cálculo da área região curva =



Cálculo da área região curva =

Em qual das três malhas temos a opção melhor (a mais precisa) do cálculo de área para a região curva?

Referências bibliográficas

[1] Maria T. Gaspar and Suzeli Mauro, *Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatemática*, VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (2004).

[2] Carl B. Boyer, *História da Matemática*, 2a. edição, Fundamentos da Matemática Elementar, Edgard Blüncher Ltda, 1996.

[3] Geraldo Ávila, *Euclides,Geometria e Fundamentos*, Revista do Professor de Matemática **45** (2001).

[4] Anderson Secco, *Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas*, Dissertação de Mestrado, PUCSP, 2007.

[5] Sonia R. Facco, *Conceito de Área Uma Proposta de Ensino Aprendizagem*, Dissertação de Mestrado, PUCSP, 2003.

[6] Mauro L. Alvarenga, *O Método de Exaustão e Sua Contribuição Para O Desenvolvimento do Conhecimento Matemático*, Trabalho de conclusão de curso de graduação, UCB, 2006.

[7] Elon L. Lima, *Medida e Forma em Geometria*, 4a. Edição, Coleção do Professor de Matemática, vol. 9, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[8] D. Burton, *A História da matemática-Uma Introdução*, Wm.C. Brown, 1985.

[9] H. Eves, *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula-História da Geometria*, Atual Editora, 1992.