UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FABRÍCIO FIGUEREDO MONÇÃO

UMA LEITURA DOS ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Vitória da Conquista – BA
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FABRÍCIO FIGUEREDO MONÇÃO

UMA LEITURA DOS ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto-Sensu Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Profª. Drª. Maria Aparecida Roseane Ramos.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2015

FABRÍCIO FIGUEREDO MONÇÃO

UMA LEITURA DOS ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto-Sensu Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Profª. Drª. Maria Aparecida Roseane Ramos.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Maria Aparecida Roseane Ramos (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Profª. Drª. Selma Rozane Vieira
Instituto Federal da Bahia - IFBA

Vitória da Conquista.
2015

Dedico este trabalho à minha família.
Que Deus os abençoe!

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter-me dado o maior de todos os presentes: a vida, em plenitude de graças.

À minha família, pelo amor, carinho e incentivo, além de aceitar, sem ressalvas, as ausências, dando todo apoio. Em especial a minha esposa Geidielma pela ajuda e meus filhos Iury e Lara.

À Prof.ªDrª. Maria Aparecida Roseane Ramos pela orientação e pelos “puxões de orelha” com visas na melhoria da qualidade do presente trabalho.

À Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior pelo apoio financeiro e à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia pelo suporte institucional.

Ao Mestre José Hermelino pelas dicas valorosas.

A Geancarlo pelas conversas e pelo apoio oferecido.

Aos amigos da Escola Rômulo Sales de Azevedo pelo grande apoio e compreensão.

Aos demais professores que enriqueceram a minha passagem pela UESB.

Aos amigos de maneira geral, mas principalmente àqueles que estiveram mais próximos durante meus anos em Vitória da Conquista – BA.

Aos colegas do Profmat, muitos dos quais se tornaram amigos de verdade, em especial Dani e Driza.

Meu agradecimento a todos aqueles que colaboraram direta e indiretamente para a conclusão desse trabalho e encerramento dessa etapa da minha vida.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivos identificar, categorizar e analisar os procedimentos e possíveis erros cometidos por estudantes dos cursos de Zootecnia e Engenharia Agrônoma da Universidade Estadual de Montes Claros, campus Janaúba, Minas Gerais, na resolução de questões da disciplina do Cálculo Diferencial e Integral I. A análise dos erros teve como pressuposto teórico principal em Cury (1995, 2004, 2007) além do suporte em outros trabalhos dos pesquisadores Torre (2007), Luckesi (2008), Pinto (2009), Lima (2010) e Lima (2014). Para observar os possíveis erros dos estudantes pesquisados, um questionário foi aplicado para traçar o perfil da população-alvo, bem como, um teste com questões abertas e semiabertas referente ao conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral I, com o intuito de aferir tais erros. Portanto, o trabalho de cunho qualitativo e diagnóstico possibilitou apresentar as características bem evidenciadas nos resultados obtidos e nas considerações finais do trabalho, de modo que a análise dos resultados revelou que o baixo desempenho dos estudantes nessa disciplina deve-se à deficiência de aprendizagem de conceitos matemáticos da Educação Básica com maior ênfase na noção de função e nas operações com números reais, devido ao grande volume de erros obtidos no teste. O que abriu a expectativa para continuidade deste trabalho numa próxima etapa.

Palavras Chave: Análise de Erros. Cálculo Diferencial e Integral. Matemática na Educação Básica.

ABSTRACT

This study aims to identify, categorize and analyze the procedures and possible mistakes made by students of Animal Science courses and Agronomic Engineering at the State University of Montes Claros, campus frangipani, Minas Gerais, in the resolution of the differential calculus discipline issues and Integral I. The analysis of errors was mainly theoretical assumption in Cury (1995, 2004, 2007) as well as support in other studies of researchers Tower (2007), Luckesi (2008), Pinto (2009), Lima (2010) and Lima (2014). To observe the possible errors of the surveyed students, a questionnaire was used to profile the target population as well, a test with open and semi-open questions on the content of Differential and Integral Calculus I, in order to assess such errors. Therefore, the qualitative nature of work and diagnosis possible present well evidenced features the results and final considerations of the work, so that the analysis of the results revealed that the poor performance of students in this discipline due to the concepts of learning disabilities mathematicians of Basic Education with emphasis on the notion of function and in operations with real numbers, due to the large volume of errors obtained in the test. What opened the expectation for continuing this work in a next step.

Keywords: Error Analysis. Differential and Integral Calculus. Mathematics in Basic Education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em minha trajetória escolar, desde o Ensino Fundamental, gostava de estudar Matemática, após cursar o Ensino Médio, três anos vinculado ao Magistério na cidade de Janaúba, Minas Gerais, ingressei na Universidade Federal de Viçosa (UFV), no curso de Licenciatura em Matemática. Posteriormente, fiz o curso de Pós–Graduação Lato Sensu em Estatística na Universidade Federal de Lavras (UFLA) e em 2012 ingressei no programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Atualmente sou professor no ensino superior, mesmo com pouca experiência como professor responsável para ministrar as disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral, já observava as dificuldades e frustrações dos estudantes ao cursarem essas disciplinas.

A realização do presente trabalho tem por objetivos identificar, categorizar e analisar os procedimentos e possíveis erros cometidos por estudantes dos cursos de Zootecnia e Engenharia Agrônoma da Universidade Estadual de Montes Claros-UNIMONTES, campus Janaúba, Minas Gerais, na resolução de questões do Cálculo Diferencial e Integral.

Para tanto, contamos com a contribuição do meu ex-professor de Matemática da UFLA, que proporcionou o acesso às suas turmas do 3º período de Agronomia e 3º período de Zootecnia como população alvo deste trabalho. Nesta direção, interessamos em pesquisar se as dificuldades apresentadas no desempenho de estudantes nessa disciplina seriam ou não causadas pela não apreensão de conhecimentos matemáticos da educação básica.

O primeiro capítulo, **O ERRO** apresenta a fundamentação teórica do trabalho com ênfase na teoria de análise de erros, no firme propósito de responder, dentre outras, às seguintes questões: O que é um erro? Errar é importante? O que leva um estudante a cometer um erro matemático? Como um professor deve proceder diante do erro do aluno? O que a teoria da análise de erros pode contribuir na melhoria do processo de ensino e aprendizagem em Matemática? Quais são os trabalhos mais representativos de estudiosos sobre o erro? Como falar sobre o Cálculo Diferencial e Integral sem abordar o que a história da matemática revela sobre os seus protagonistas e como se deu a evolução destes conhecimentos?

Os pressupostos em Cury (1995, 2004, 2007), Torre (2007), Pinto (2009), Luckesi (2008) e Lima (2010) foram relevantes para realizarmos uma análise de erros da resolução de um teste com questões do Cálculo Diferencial e integral, com os assuntos de Funções, Limites, Continuidade, Derivada, Integrais indefinidas, Integrais definidas, Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações da integral.

O segundo capítulo **O PERFIL DOS PESQUISADOS**, apresenta uma análise e discussão do questionário aplicado para traçarmos o perfil de 64 estudantes de duas turmas do 3º período de Zootecnia e 3º período de Engenharia Agrônoma da Universidade Estadual de Montes Claros - UNIMONTES da cidade de Janaúba, MG, que cursaram as disciplinas de Cálculo 1 no 2º período do curso.

No terceiro capítulo **SOBRE AS QUESTÕES DO TESTE APLICADO**, achamos relevante realizar, antes da discussão dos resultados, uma apreciação do teste com cinco questões com conteúdos de Cálculo Diferencial e integral aplicados aos 64 estudantes, bem como realizar uma discussão e uma análise das respostas esperadas, apresentando pelo menos uma solução para cada uma das questões.

O quarto capítulo, **DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DO TESTE APLICADO**, aponta que o nível de conhecimento dos conteúdos da Educação Básica influencia de forma significativa o desempenho dos estudantes nas disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral. Por consequência, as duas categorias criadas no presente trabalham com fundamentos nos autores de nossos pressupostos teóricos e na análise do questionário e do teste de conhecimentos aplicados aos pesquisados confirmam que aqueles que ingressam no ensino superior em cursos da área tecnológica apresentam deficiências de aprendizagem de conteúdos matemáticos não somente nas disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral, sobretudo de conhecimentos da Educação Básica, dentre eles, detectamos os conceitos de funções, de expressões algébricas e as operações elementares com números reais,

CAPÍTULO 1
O ERRO

“Errar é humano; perdoar é divino.”
(Alexander Pope)

1.1 Introdução

O presente trabalho caracteriza-se como diagnóstico, pois com pressupostos teóricos na análise de erros, com maior ênfase em Cury (1995, 2004, 2007), buscou trazer à tona uma categorização, quantificação e uma leitura dos erros cometidos na resolução de questões da disciplina do Cálculo Diferencial e Integral por estudantes dos cursos de Zootecnia e Engenharia Agronômica.

Sobre este assunto, Cury (2007) aponta que:

> [...] ao analisar erros dos alunos, especialmente em conteúdos de Cálculo 1 tendo contato com diferentes trabalhos que abordaram produções escritas dos alunos, [...] notei que, independentemente das teorias que fundamentavam as pesquisas e da forma como as respostas eram apresentadas, eu estava analisando o conteúdo da produção, ou seja, empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como análise de conteúdo. (Cury, 2007, p.63)

Bardini (1979), em seu livro *Análise de conteúdo*, citado por Cury (2007) remete a origem dos estudos investigativos da análise de erros à publicação de artigos nos Estados Unidos (EUA) na época da primeira e da segunda guerras mundiais :

> A história de análise de conteúdo, como método de investigação sistematizado, com regras e princípios teve origem na análise de artigos, principalmente com base nos estudos realizados na Escola de Jornalismo de Colúmbia, EUA, e foi intensificado pela necessidade de analisar a propaganda durante as duas Grandes Guerras Mundiais do século passado. (BARDIN, 1979 *Apud* CURY, 2007, p.64)

Historicamente, podemos observar que realizar um estudo investigativo sobre a produção humana na decodificação de mensagens pode ser utilizado em todas as áreas. Segundo Cury (2007), esse método vem sendo empregado por pesquisadores nas áreas de Educação, Sociologia, Psicologia, Linguística e Comunicação, em todas as circunstâncias investigativas onde os participantes ou pesquisados expressam suas opiniões, percepções, crenças ideias e opiniões. Para conceituar e caracterizar, técnicas e princípios de Análise de Conteúdos dentro da modalidade de Pesquisa Qualitativa de Análise de Erros.

Cury (2007) assim se posiciona:

> Designa-se sob o termo análise de conteúdo: Um conjunto de técnicas de análise de comunicações, visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/percepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1979 a*pud* CURY, 2007, p.64)

À luz desta definição, verifica-se que para analisar as respostas dos pesquisados, é fundamental se realizar uma correção mais sistemática de toda a produção realizada pelos mesmos, de modo a tentar avaliar o que foi produzido como um todo.

Com foco em nosso trabalho, Bardin (1979) citado por Cury (2007), elenca algumas etapas básicas que são importantes para realizar uma análise de conteúdos dos erros na resolução em questões desenvolvidas por estudantes. Destacamos três delas, que podem ser subdivididas de acordo com as necessidades do pesquisador: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Neste sentido, o foco nos trabalhos de Cury (2007) foi preponderante no desenvolvimento do presente trabalho, uma vez que para a autora:

> [...] a análise de erros é uma abordagem de pesquisa – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula. (CURY, 2007, p. 91)

Desta forma, segundo essa autora, a análise de erros não se trata apenas de catalogar os erros ocorridos na resolução de tarefas, mas também é um método de ensino que em muito pode contribuir para a reflexão e a (re) leitura da prática escolar, não somente em Matemática, mas em todas as áreas do ensino.

1.2 O conceito de erro

O erro é uma ação que faz parte do ser humano. Todos os dias, erros são cometidos no trabalho, com familiares, na escolha profissional, na vida sentimental. Alguns não são tão graves, outros são irreversíveis. Torre (2007) ao refletir sobre isto diz que:

> O erro é objeto de consideração por parte da sabedoria popular, da estatística, da física, da história, da orientação, da filosofia, do ensino, da língua, da matemática, das novas tecnologias, da literatura, do direito, da política, da linotipia, etc. A elas se juntaram as variáveis relativas aos sujeitos que os comete (criança ou adulto) a erros de pensamento, linguagem, ação ou engano voluntário. (TORRE, 2007, p.11.)

Nenhuma criação do homem é imune a erros. No entanto, o erro não é uma ação sempre negativa: ele serve como aprendizagem, crescimento pessoal, relacional e intelectual, como aqui será apresentado.

Encontramos no Dicionário Aurélio Ferreira os seguintes significados para o verbete “errar”. Todos possuem uma conotação negativa, a saber, enganar-se; falhar, equivocar; juízo falso, engano; inexatidão, incorreção; desvio do caminho considerado correto ou apropriado.

Infelizmente, no ensino aprendizagem em Matemática não é diferente, pois os erros existentes na resolução de exercícios ou problemas são apontados como falhas dos alunos e não como norteadores para uma reflexão do processo educativo. Pelo fato dessa ciência ter por objetivo desenvolver habilidades de raciocínio lógico-dedutivo em seus aprendizes (pelo menos é o que se espera que isso ocorra), a visão estática de uma matemática pronta e acabada e o uso do erro como punição ao aluno é discutida por Pinto (2009):

> Numa concepção de matemática excessivamente voltada de um conhecimento feito e estabelecido, com todo um aparato de rigor e exatidão de um conhecimento pronto para ser utilizado, o erro constitui algo que deve ser eliminado e punido: jamais analisado e tratado, pois representa à falha, o déficit, a negação, a inconsistência, a contradição, o engano, a dúvida, a incerteza, a incompletude, enfim, tudo o que uma ciência exata e rigorosa abomina em seu produto final. (PINTO, 2009, p.18)

Além disso, Torre (2007) destaca que “o erro é um dos temas preferidos da sabedoria popular, presente em numerosos ditados e refrãos, quase sempre com sentido negativo” (TORRE, 2007, p. 9). No entanto, este autor classifica o erro como dois polos opostos, em que o positivo se dá quando o erro é tratado como estímulo criativo e o negativo, quando o erro gera um efeito destrutivo como falha irreversível em todas as áreas da atuação humana (TORRE, 2007 p. 13-14). Vejamos o esquema por ele elaborado conforme figura 1.

Figura 1: As direções do erro

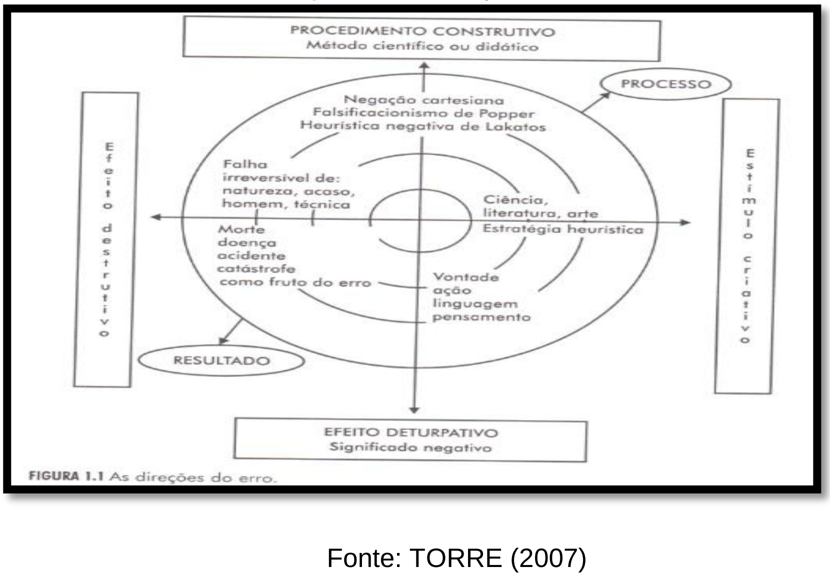


FIGURA 1.1 As direções do erro.

Fonte: TORRE (2007)

O autor também apresenta outro quadro com alguns significados para o erro na sinonímia do erro, palavras que possuem significados iguais ou semelhantes (vide Figura 2.

Figura 2 – Alguns significados do erro

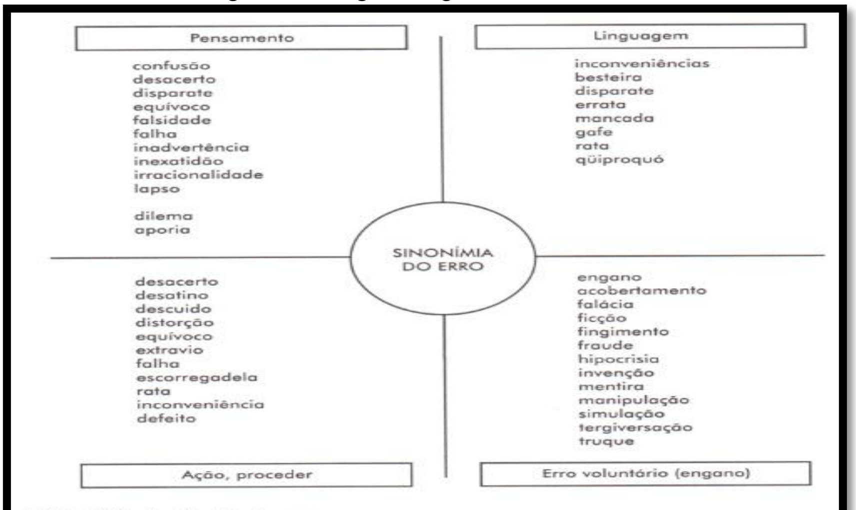


FIGURA 1.2 Os significados do erro.

Fonte: TORRE (2007)

Porém, na visão de Luckesi (2008, pag.56), há casos em que o erro pode ser usado como ação favorável ao ser humano: “tanto o sucesso/insucesso como o acerto/erro pode ser abordado como fonte de benefícios”.

Torre (2007) corrobora com Luckesi (2008) quando olha o erro pelo prisma construtivo e criativo:

> “Quantas vezes tratamos de animar alguém que teve algum efeito negativo em sua vida com expressões como: “olha pelo lado bom”, “há males que vem pra bem”, “tudo tem solução, exceto a morte”, “tente ver pelo outro lado”, ”trate de tirar algum proveito da situação”, etc. Todas estas expressões são tradução de um espírito otimista e construtivo [...]. Demos um passo a mais na consideração construtiva do erro, descobrindo seu lado criativo. (TORRE, 2007, p.18)

Portanto na (re) produção de conhecimentos, o erro ou a possibilidade de erro podem ser usados como estímulo para superar obstáculos tanto na vida cotidiana quanto no processo de ensino e aprendizagem.

Pinto (2009) consolida e reforça essa ideia, ao afirmar que:

> Se os professores refletissem sobre essas questões, considerando o erro como elemento construtivo e de ajuda – não de sanção – para o aluno apropriar-se do conhecimento, isso implicaria mudanças significativas nas práticas pedagógicas. (PINTO, 2009, p. 20)

Analisar a produção do estudante e usar o erro como fator construtivo é uma realidade da qual os professores precisam aprimorar para tirar a concepção exclusivamente negativa do erro.

Luckesi (2008) aponta que o erro só ocorre quando comparado com um padrão, com um gabarito. No ambiente escolar, tal padrão geralmente é elaborado apenas na concepção do professor e não na concepção de uma análise, a priori, das possíveis soluções corretas e erradas na resolução de um mesmo problema:

> A ideia do erro só emerge da existência de um padrão considerado correto. A solução insatisfatória de um problema só pode ser considerada errada, a partir do momento que se tem uma forma considerada correta de resolvê-lo, uma conduta é considerada errada, na medida em que se tem uma definição de como seria considerada correta, e assim por diante. (LUCKESI, 2008, p.54)

Nesse ambiente, o erro não é visto como um meio para promover reflexões de como ensinar e aprender num intuito do desenvolvimento intelectual daquele que ensina e de quem aprende. Considerar as soluções erradas como um indicador de falhas de progressos nas atividades avaliativas serve de estímulo para que os alunos considerem os erros cometidos como problemas a serem superados, sem imposições de caminhos previamente traçados.

De fato, os erros de naturezas distintas não devem ser tratados de formas idênticas, quando exigirem, para sua superação, condutas diferenciadas. Os erros na prática escolar devem ser considerados como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, que, necessariamente requererá uma análise mais apurada de sua produção, para desta forma, buscar o êxito de desempenho tanto dos aprendizes quanto dos professores, pois só sabe ensinar aquele que se dispõe a aprender.

Engler (ENGLER *apud* LIMA, 2010) aponta que desde a década de setenta surgiram novas teorias que delinearam atividades, metodologias e organizaram o currículo escolar com o objetivo de minorar os erros, contudo, afirma que:

> [...] muitos autores argumentaram e apresentaram estudos que sustentam a afirmação de que os erros não são de natureza acidental, isto é, existem fatores que influenciam a ocorrência do erro. Os erros são manifestações exteriores de um processo complexo em que interagem muitas variáveis, entre elas, por exemplo: professor, aluno, currículo, contexto sociocultural, sendo igual a um fenômeno educativo. (ENGLER a*pud* LIMA, 2010, p. 53)

Numa visão sociocultural, o autor ainda ratifica que no universo do aluno, dentro e fora da escola, há fatores que levam ao acerto como também ao erro na realização de tarefas, é o que veremos em:

1.3 Identificando erros no ensino e aprendizagem em Matemática

Frequentemente, os erros no processo de ensino aprendizagem em Matemática possuem um aspecto negativo e punitivo para os alunos. Erros simples de cálculos, erros da não compreensão e da não interpretação dos enunciados de problemas geram inseguranças e dificuldades de aprendizagem que, aliados aos problemas emocionais levam os aprendizes a não se sentirem capazes de resolver exercícios ou problemas matemáticos. Sobre isto, Luckesi (2008) observa que:

> Ocorrendo o insucesso ou o erro, aprendamos a retirar deles os melhores e mais significativos benefícios, mas não façamos deles uma trilha necessária para nossas vidas [...] insucesso e erro, em si, não são necessários para o nosso crescimento, porém, uma vez que ocorram, não devemos fazer dele fontes de culpa e de castigo, mas trampolins para o salto em direção a uma vida consciente, sadia e feliz. (LUCKESI, 2008, p.59)

No entanto, o erro pode ser utilizado como benéfico ao processo de ensino aprendizagem em Matemática como Cury (2007, p.49), afirma que:

> "Professores de Matemática em qualquer nível de ensino têm, por competência, analisar os erros dos alunos nas questões das avaliações e, a forma de se realizar essa análise, varia de professor a professor" cabe ao professor a grande responsabilidade de analisar e quantificar erros e acertos de seus alunos, então com uso de bom senso e humildade o mesmo deve avaliar seus alunos com justiça.

Torre (2007, p.15) afirma que "O erro faz parte do currículo oculto [...] nutrindo boa porção das ações, decisões e avaliações que ocorrem na educação."

No ensino e aprendizagem em Matemática, o professor deve ter uma atenção redobrada, pois o acerto é parte essencial deste processo. Entretanto, o erro é inevitável, como se verifica nas palavras de Pinto (2009, pág.18) "é inadmissível que a Matemática preserve os mesmos status de outrora, ocupando o lugar de campeã das reprovações, implícito neste status com certeza está o erro".

Desconsiderando o erro a favor do aluno, o professor muitas vezes não percebe o seu potencial. É válido ressaltar que tal fato é sempre negligenciado e, se fosse conveniente valorizado, contribuiria para uma aprendizagem significativa para o estímulo a questionamentos, inquietações, criatividade, experimentações, o que traria novas concepções para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Ensino que normalmente se reduz ao mero treinamento baseado na memorização e na repetição de conteúdos. Nesse sentido, Cury (1995) também afirma que:

> [...] alguns (professores) estão preocupados, unicamente, em detectar os erros, sem discuti-los com os alunos; uns, aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão, permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros exploram os erros com os alunos, questionando os limites de validade da resposta dada, ou, mesmo, tentam entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão. Em qualquer uma dessas formas de considerar os erros dos alunos, os professores estão agindo, em geral, conforme suas concepções e crenças sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa aprender Matemática. (CURY, 1995, p.40)

O modo de enxergar e de agir ao detectar os erros de seus alunos varia de professor para professor, isso depende de vários fatores: como o professor foi tratado, no sentido do erro quando estudante; como é sua vida dentro e até mesmo fora da escola; até o caráter influencia no tratamento da produção de seus alunos.

Cury (1995, p.49) complementa que, falando de avaliação, a maioria dos professores afirma que nas provas escritas para verificação da aprendizagem, eles buscam eliminar os erros encontrados, alertando os alunos quanto à ocorrência, para não haver futura repetição.

Ao corrigir um teste, trabalho ou prova, o professor de Matemática deve apresentar ao aluno a dimensão do seu erro, ou seja, a gravidade de tal erro, uma maneira de mostrar isso é colocando uma porcentagem de acerto ocorrida na questão a ser corrigida, ou mesmo, colocando nota. Contudo, deve-se considerar a metade de uma questão, ou mesmo uma parte dela, para que o aluno busque por intermédio do professor ou não uma maneira considerada correta de se resolver a questão, aumentando assim sua bagagem cognitiva. Muitas vezes, o aluno ao resolver uma questão começa errando por falta de atenção a um dado ou uma informação colhida equivocadamente, o que o levará um resultado não esperado pelo professor, porém, o corpo da resolução induz a um raciocínio organizado e correto.

Cury (2007) ainda defende que os professores devem considerar a produção dos alunos, incluindo seus erros, pois, desta forma, terão uma porta para a aprendizagem. Isso permite que o professor compreenda diferentes interpretações que os alunos fazem, podendo oferecer norteadores para a recondução de todo o processo de ensino e aprendizagem, tanto na abordagem dos procedimentos e conceitos associados ao estudo quanto nos seus aspectos metodológicos.

Certos erros cometidos pelos alunos às vezes não são por falhas de memória, de descuido ou falta de estudos. Nem sempre os alunos que obtém as melhores notas nas provas de Matemática são os que possuem um bom raciocínio lógico dedutivo. Geralmente o que se sobressai é o uso da memória em detrimento do raciocínio lógico dedutivo, uma vez que questões desse último tipo raramente fazem parte das avaliações em Matemática. Isso é compatível a com concepção de que só é inteligente quem tira boas notas em matemática. Na maioria dos casos, a avaliação do professor é do tipo tradicional, baseada na resolução de exercícios mecânicos em sua maioria os que envolvem cálculos, sem significado para os aprendizes e, aqueles que obtiveram um melhor desempenho são os que mais “treinaram” resolvendo exercícios similares (os calculistas).

Aponta Engler (2004) (ENGLER *apud* LIMA, 2010, p. 53) que “a análise de erros serve para ajudar o professor a organizar as estratégias de ensino para uma melhor aprendizagem, uma melhor preparação das correções dos respectivos erros”. Torre (2007) ainda reforça que, o erro atrai a atenção do professor e do aluno, sendo que o professor pode utilizá-lo didaticamente como situação de aprendizagem. Neste sentido Pinto (2009) afirma que:

> O erro, quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade de que oferece ao professor de ampliar seus saberes, e com isso, melhorar seus saberes. (PINTO, 2009, pag.24)

É muito importante que o professor valorize os erros, porque são eles que fornecem informações e dados necessários e essenciais para um diagnóstico do processo de ensino e aprendizagem. Engler citado por Lima corrobora que:

> O papel que nós, como professores, damos para o erro e a forma na qual trabalhamos, influenciam na aprendizagem e no desempenho acadêmico de nossos alunos. Se quisermos uma aprendizagem significativa, a prioridade é a compreensão e tratamento do tema em conjunto, professores e alunos. (ENGLER*,* a*pud* LIMA, 2010, p.53).

Cabe aos professores à responsabilidade de averiguar acertos e erros dos alunos valorizando os acertos e não repreendendo os erros, tanto os alunos quanto professores devem ter ciência que é possível aprender quando se erra. A erradicação do erro no processo ensino aprendizagem é inatingível, pois é por meio dos erros que os alunos podem se conscientizar de suas dificuldades e construir seu conhecimento, mas é necessário que se pesquise, questione e problematize essas dificuldades, pois:

> [...]o erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho, sem se equivocar... "Não há aprendizagem isenta de erros" O enfoque didático do erro consiste em sua consideração construtiva e, inclusive, criativa dentro dos processos de ensino e aprendizagem (TORRE, 2007, p.27).

É preciso começar a construir pontes reais entre as teorias pedagógicas e a realidade da prática escolar. Isto é, entender que o erro é um processo de construção do conhecimento e que "não há aprendizagem isenta de erros" como afirma Torre (2007, p.28), que o erro é um acidente de percurso, obviamente é parte não só da educação, mas em todas as áreas do conhecimento humano.

Em relação ao ensino de Matemática, Radatz (1980) citado por Lima (2010) assegura que:

> A análise de erros também serve como ponto de partida para a pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem matemático e como estratégia de pesquisa promissora para esclarecer algumas questões fundamentais da aprendizagem matemática. (RADATZ (1980) a*pud* LIMA, 2010,p.16)

A experiência na docência e os erros cometidos pelos alunos devem servir como ponto de partida positivo no processo de ensino aprendizagem. Em geral na prática escolar, o erro é visto como prova do fracasso ou da incapacidade do aluno, sendo passível de punição, e de crítica. É algo que precisa ser evitado, corrigido. Na ótica de Pinto (2009, pag. 165), "O mais importante é o professor adotar uma atitude reflexiva diante do erro do aluno, procurando, não apenas, no interior de um contexto de ensino, mas também compreender o aluno que erra".

Nem sempre um erro na resolução de uma questão é cometido exclusivamente pelo aluno, mas há diversos fatores internos ou externos que podem influenciar e ocasionar um erro; conhecê-los, pode ajudar no processo de ensino aprendizagem.

Um exemplo é o “erro na restauração de um esquema anterior” que representa o momento em que o estudante tenta produzir algo semelhante ao que foi explanado pelo professor e não consegue restaurar ou repetir o procedimento de modo considerado correto. Sobre essa categoria, defende Torre (2007) que:

> Quando a criança se esquece do que precisa nas operações aritméticas, comete um erro de execução e não de compreensão ou de análise. Os erros de execução aumentam nos processos complexos. (TORRE, 2007, p.87)

Nesta categoria, enquadra-se o caso em que quando um aluno do Ensino Médio se depara com a divisão do polinômio $Q(x) = x^4 - 2x + 1$, por $P(x) = x - 1$ e opta pelo dispositivo de Briot – Ruffini. No entanto, o aluno não completa o polinômio $Q(x)$, o que ocasionará com certeza um erro na obtenção do quociente. Desta forma infere-se que houve um erro na restauração de um esquema anterior, que segundo Torre (2007), trata-se erro de execução.

Cury (2007, p.48), comenta que a formação de hábitos e os exercícios de repetição, sendo expostas como a *lei do exercício* – “o uso fortifica e o desuso enfraquece as conexões mentais”.

Pinto (2009, p.142) afirma que “formas errôneas deverão ser substituídas pelas certas: a repetição se constitui um grande esforço da memória na retenção do que é correto, sem abertura para uma discussão dos motivos do erro”. Nesse processo de ensino, enfatiza-se a importância da repetição e do estilo "tentativa e erro", pois é deste modo que o aluno fixará o que foi discutido na aula.

Os erros cometidos por uma representação inadequada de regras que as produzem acontecem quando o estudante confunde uma representação, informação ou regra, omitindo ou acrescentando partes erroneamente. Torre (2007) nomeia este tipo de erro como: “O erro como incorreção por falta de conhecimento ou de clareza”.

> O erro como incorreção por falta de conhecimento ou de clareza. A origem desse tipo de erro pode provir da confusão, do equívoco ou da ignorância com relação à informação que é pedida. A confusão é o erro que se comete ao tomar uma coisa por outra. O aluno pode perfeitamente somar e subtrair, mas confundir seus sinais, conhecer como se escreve uma palavra, um fato, ou conceito, mas confundi-los com outros que se estabelece certo tipo de relação. (Torre 2007, p.65)

Como ilustração, um exemplo muito comum no Ensino Fundamental é quando um aluno do 9º ano ao calcular a raiz de uma função quadrática, aplica a fórmula de Báskara e, erroneamente esquece-se de colocar o sinal negativo no coeficiente *b*, $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que tem forte influência na determinação das raízes, daí o uso de uma representação inadequada da fórmula.

Na categoria “erros por dificuldades na obtenção de informações”, o aluno interpreta erroneamente as informações retiradas do contexto ou simplesmente não abstrai todos os dados contidos para sua resolução Cury (2007), ilustrar tal situação:

> O exercício tem o seguinte enunciado: “Uma placa quadrada de metal, de espessura desprezível e medida do lado igual a 10 cm, é aquecida e dilata-se uniformemente, de maneira que o comprimento de cada lado tem um acréscimo de 2%. Calcule o acréscimo percentual na área”. Em quase todas as turmas de cálculo 1 que tenho trabalhado, até, hoje, pelo menos um aluno indicou que o acréscimo do lado é de 0,02. A “descontextualização” (grifo do autor) do percentual, ou seja, a ideia de que 2% significa $\frac{2}{100}$, independentemente do valor sobre o qual é calculado, é um erro frequente, que também surge em outros tipos de exercícios, em qualquer nível de ensino (Cury, 2007, p. 83).

Neste caso, a autora chama de “descontextualização” as dificuldades na obtenção de informações, pois o aluno não atentou em observar com cuidado as informações contidas no enunciado.

Observando as questões abaixo, nas figuras 3 e 4, se referem à Matriz de Referência do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF), sobre a avaliação do 6º ano do Ensino Fundamental, que teve por objetivo verificar a capacidade da criança extrair informações de uma tabela. Entretanto, este tipo de questão pode ocorrer o fato de o aluno cometer erros por dificuldades na obtenção de informações, conforme Figura 3:

Figura 3 Questão 6ºAno – CAED/UFJF

D36 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos

A habilidade avaliada por meio dos itens relativos a este descritor refere-se à capacidade de o estudante analisar tabelas ou gráficos e apresentar a(s) devida(s) solução(ões) a partir das informações extraídas deles.

(M06186SI) **Três restaurantes populares disputam a clientela numa região central do Rio de Janeiro nos finais de semana.**
Observe abaixo os pratos oferecidos.

	Restaurante A	Restaurante B	Restaurante C
Sábado	Feijoada por R$ 4,50	Filé com fritas por R$ 6,80	Peito de frango grelhado com legumes por R$ 5,70
Domingo	Espaguete com almôngedas por R$ 4,90	Frango ensopado com quiabo por R$ 5,30	Lombo com tutu de feijão por R$ 6,20

Qual restaurante serve o prato mais barato?
A) O restaurante A, no domingo.
B) O restaurante B, no domingo.
C) O restaurante A, no sábado.
D) O restaurante C, no sábado.

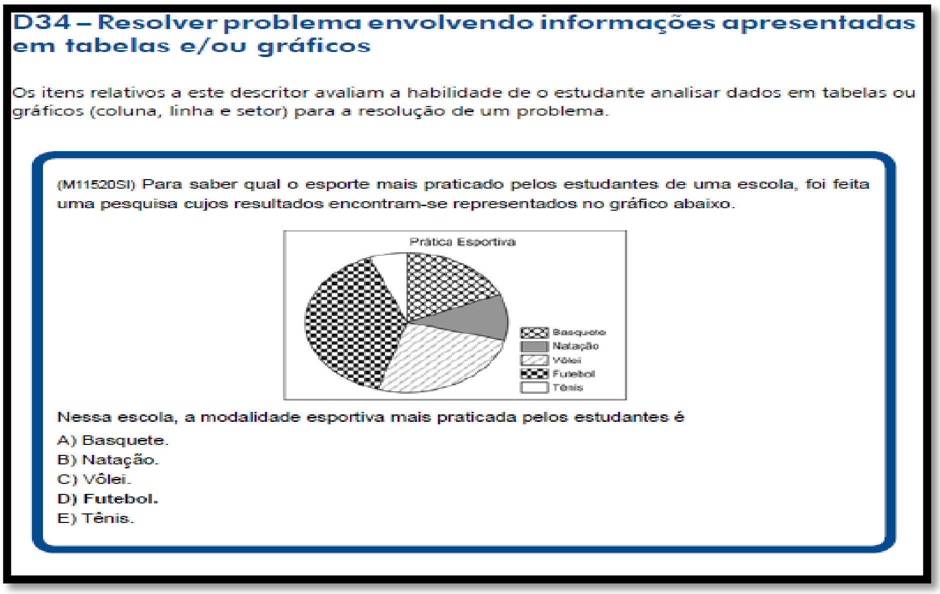
CAEd/UFJF.

Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora-avaliação - 6º ano (2008)

Relevante ressaltar que erros por dificuldades na obtenção de informações ocorrem não só em estatística ou tratamento da informação, mas em outros conteúdos de matemática**,** como também em outras disciplinas. Observemos na

Figura 4 a seguir como se dá o processo de observação da capacidade da criança extrair informações de uma tabela numa sala do 6º ano do ensino fundamental.

Figura 4 Questão 6º Ano – CAED/UFJF


D34 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos

Os itens relativos a este descritor avaliam a habilidade de o estudante analisar dados em tabelas ou gráficos (coluna, linha e setor) para a resolução de um problema.

(M11520SI) Para saber qual o esporte mais praticado pelos estudantes de uma escola, foi feita uma pesquisa cujos resultados encontram-se representados no gráfico abaixo.

Nessa escola, a modalidade esportiva mais praticada pelos estudantes é

A) Basquete.
B) Natação.
C) Vôlei.
D) Futebol.
E) Tênis.

Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora-avaliação - 6º ano (2008)

Os “erros pela aprendizagem deficiente de fatos” acontecem quando o aprendiz não absorveu por completo o que foi tentado repassar. Isto é comum, pois é sabido que qualquer ser humano tem seu próprio tempo de aprendizagem para cada disciplina ou conteúdo, conforme. Torre (2007):

> Nem todos os erros na aprendizagem escolar são explicados por interferência. Uns são frutos de falta de compreensão, outros de atenção, de execução ou de raciocínio lógico. Nos casos de erros pela à falta de desenvolvimento ou maturidade mental, é conveniente esperar que o aluno se dê conta de seus erros, já que serve de muito pouco corrigi-los quando este não consegue compreender em que consiste sua falha. “O erro deve ser associado ao desenvolvimento”. (Torre, 2007, p. 62)

Como exemplo no ensino superior, um estudante da disciplina de Cálculo I, deparando-se com a integral indefinida: $\int e^x\,dx$, responde que a sua é primitiva $\frac{e^{x+1}}{x+1} + c$. Neste caso, ele apresenta uma ineficiência de conhecimento em relação à primitiva da função exponencial $f(x) = e^x$, por tê-la confundido com a função polinomial x^n cuja primitiva é $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. Ainda dentro dessa categoria, Cury (2007, p. 61) cita o seguinte exemplo: “Alguns estudantes sabendo que $\int e^x\,dx = e^x + c$, consideram que $\int e^{3x}\,dx = e^{3x} + c$”.

Os erros evocados nos exemplos anteriores na fundamentação teórica do presente trabalho foram de ordem do ponto de vista cognitivo ou do ponto de vista emocional dos alunos. O que nos leva a uma indagação é: no ambiente escolar, os erros acontecem somente na resolução de questões resolvidas pelos alunos? A prática e a convivência neste âmbito nos permitem responder a essa questão incluindo na categoria de erros os que foram cometidos por professores de Matemática, a saber, erros conceituais ensinados em sala de aula por meio de fontes não confiáveis, em sites na internet ou em livros didáticos que produzem uma aprendizagem inadequada aos aprendizes. Por exemplo, ensinar que cubo e quadrado ou que paralelepípedo e retângulo são sinônimos, quando cubo e paralelepípedo são elementos da geometria espacial enquanto que quadrado e retângulo são elementos da geometria plana. Um outro exemplo ocorre na resolução da equação $x + b = c$, ensina-se que para se determinar o valor de x o coeficiente *b* “passa” para o segundo membro com o sinal negativo. Outro exemplo é quando se ensina que para efetuar a soma algébrica $\frac{c}{a} \pm \frac{d}{b}$ onde a e b são não nulos é necessário determinar o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores, quando na verdade, tal soma é definida como $\frac{cb \pm da}{ab}$ onde *a* e b são não nulos. O MMC é uma propriedade de conjuntos dos números inteiros e de polinômios reais em que a definição é hierarquicamente superior a qualquer propriedade relativa aos conceitos.

Um segundo tipo, seria o “erro causado por problemas emocionais”. Neste caso, o estudante sente-se inseguro ao realizar uma tarefa ou uma prova por estar com o emocional abalado, fazendo com que ele não obtenha o desempenho esperado, ou no momento em que vai fazer uma prova ou teste, fique nervoso e tenso, simplesmente pelo fato de não suportar estar sendo submetido a uma pressão. Pinto (2009, p.158) observa que “muitos erros ocorrem em decorrência da “ansiedade” dos alunos em relação à matemática” e este é o objeto de estudos da Matemática Emocional.

1.4 Panoramas de trabalhos científicos sobre análise de erros em Matemática

O erro é um desequilíbrio entre o esperado e o obtido
(Torre, 2007, p.77)

Apresentaremos alguns trabalhos sobre Análise de Erros, de modo a realçar a diversidade de abordagens e referenciais teóricos já existentes, de forma que seja possível posicionar este trabalho, bem como suas especificidades teóricas e metodológicas, dentro desse universo.

De acordo com Cury (2007, p. 42), desde 1917 nos Estados Unidos, por meio de Thorndike começa a difusão e o conhecimento de trabalhos sobre o estudo da identificação de erros. As mais importantes contribuições sobre o tema são realizadas por Buswell, Judd e Brueckner desde a década de 30, onde se priorizou a análise das dificuldades especiais, a persistência de técnicas individuais erradas e o agrupamento e classificação dos erros.

Segundo Barichello,

> Autores como Radatz (1980), Borasi (1994), Cury (2007) e Rico (1995) fazem uma análise retrospectiva de pesquisas em Educação Matemática envolvendo a Análise de Erros. Esses levantamentos datam as primeiras pesquisas sobre essa temática no início do século XX, praticamente ao mesmo tempo em que a Educação Matemática começava a surgir como área de Investigação Científica. Alguns exemplos de trabalhos desse período e que utilizam essa abordagem são: o livro “Psicologia da Aritmética” de 1917, de autoria de Thorndike (PINTO, 2000), e o artigo intitulado “A Studyof Errorsin Testsof Adding Ability”, de 1913,de autoria de Phelps (BARICHELLO, 2008, p.26)

Desde o início do século XX, professores de matemática se reúnem para repensar o ensino de matemática nas escolas, pois a Educação Matemática é um campo do conhecimento que se dedica a estudar questões relativas ao ensino/aprendizagem de matemática e ainda é campo interdisciplinar que faz uso de teorias de outros campos teóricos, como a sociologia, a psicologia, a filosofia.

Concomitante com a Educação Matemática surge também a Análise de Erros como Investigação Científica na produção de conhecimento.

Cury (2007 p.42) nos oferece os seguintes quadros de classificação de pesquisas internacionais envolvendo Análise de Erros (Fig. 5).

Figura 5 Pesquisas Internacionais envolvendo Análise de Erros

Autor(es)	País de Origem	Ano de Divulgação	Ano de Escolaridade ou Faixa Etária dos Participantes	Conteúdo Abordado
Smith	Estados Unidos	1940	10° ano	Demonstrações de Geometria
Hutcherson	Estados Unidos	1975	6° ano	Problemas de Aritmética
Kent	Inglaterra	1978	11 a 19 anos	Variado
Radatz	Alemanha	1979	-	Classificações de Erros
Clements	Austrália	1980	6° ano	Problemas de Aritmética
Bessot	França	1980	6 a 7 anos	Noção de Número Natural
Movshovitz-Hadar; Inbar e Zaslavsky	Israel	1986	11° ano	Demonstrações de Geometria

Fonte CURY (2007)

Observamos que o quadro acima, o primeiro trabalho encontrado é do ano de 1940, nos Estados Unidos e daí em diante, encontramos trabalhos em vários outros países tais como: Espanha, México Argentina, Malásia, Itália, Austrália, França e Israel e de várias disciplinas tanto do ensino no Brasil no Educação Básica bem como no Superior.

Figura 6 Pesquisas Internacionais envolvendo Análise de Erros (Continuação)

Galletti	Itália	1989	11 a 14 anos	Geometria Plana e e Propriedade Distributiva
Borasi	Estados Unidos	1989	Curso de Formação de Professores	Definição de Circunferência
Sanchez	Espanha	1990	-	Concepções Errôneas
Guillermo	México	1990	14 a 20 anos	Álgebra
Aguilar	México	1992	11 a 13 anos	Razão e Proporção
Gómez	Espanha	1994	Curso de Formação de Professores	Cálculo Mental
Esteley; Villarreal	Argentina	1995	Ensino Universitário	Funções, Limites, Continuidade
Bin Ali e Tall	Malásia	1996	Não específico	Derivadas e Integrais
Mancera	México	1998	Não específico	
Engler *et al.*	Argentina	2004	Não específico	Classificações de Erros
Pochulu	Argentina	2004	Pré-Universitário	Variado
Del Puerto; Minnard e Seminara	Argentina	2006	Pré-Universitário e início de curso superior	Álgebra e Funções
Schechter	Estados Unidos	2006	Ensino Universitário	Variado

Fonte CURY (2007)

No entanto, Pinto (2009, p. 29-30), citando Rico (1995), educador matemático espanhol, também destaca alguns trabalhos na União Soviética, com destaque para a classificação de categorias de erros: (1) a realização incorreta de uma operação; (2) a compreensão conceitual insuficiente; (3) a distração, que provoca, erros mecânicos; (4) a aplicação indevida das regras algorítmicas. Nos Estados Unidos, Thorndike (1917) foi o pioneiro de estudos de erros que ocorrem nas operações aritméticas fundamentais e na Alemanha, no estabelecimento de padrões explicativos para os equívocos individuais em diferentes idades, mostrando diferenças entre erros familiares, consistentes, semelhantes e erros devidos a situações emocionais.

Sem esquecermos de citar o suíço Jean Piaget, que em sua obra-prima "Introdução e epistemologia genética" (1950), explica o pensamento matemático, físico, biológico, psicológico e sociológico.

Em relação a pesquisas brasileiras, Cury (2007) apresenta o seguinte quadro (Fig. 7).

Figura 7 Pesquisas Nacionais envolvendo Análise de Erros

Autor(es)	Ano de Divulgação	Estado em que realizou a pesquisa	Série e Nível de Ensino	Conteúdo
Lopes	1987	SP	EF	Ambientes de "verdades provisórias"
Crepaldi; Wodewotzki	1988	SP	EM	Variado
Cury	1988	SP	ES	Demonstrações em Geometria

Fonte CURY (2007)

Segundo o quadro da Figura 7, o primeiro trabalho sobre a análise de erro no Brasil se deu em 1987 realizado em São Paulo por Lopes, no Ensino Fundamental em que criar um ambiente de “verdades provisórias” significa desmistificar a Matemática ao desenvolver no aluno certa autonomia em relação à construção de seu próprio conhecimento matemático.

Figura 8 Pesquisas Nacionais envolvendo Análise de Erros (Continuação)

Guimarães Jr.	1989	RJ	Séries iniciais do EF	Programa para diagnóstico automático de Erros em subtração
Moren; David e Machado	1992	RJ e MG	3ª a 6ª séries do EF	Sistema de Numeração e Subtração
Batista	1995	SP	2ª a 4ª séries do EF	Operações Aritméticas
Pinto	1998	SP	4ª série do EF	Problemas de Aritmética
Baldino e Cabral	1999	SP	ES	Técnicas de Integração
Bathelt	1999	RS	5ª série do EF	Idéia de Números e Operações com Frações
Gusmão	2000	BA	ES	Emoções diante do Erro
Utsumi	2000	SP	6ª a 8ª série do EF	Resolução de Problemas Algébricos
Ribeiro	2001	SP	8ª série do EF	Álgebra
Notari	2002	SP	8ª série do EF e 1ª do EM	Frações aritméticas e Algébricas
Freitas	2002	SP	1ª série do EM	Equações do 1° grau
Milani	2002	SP	ES	Conceitos de Cálculo
Souza	2003	PR	6ª série do EF	Variado
Valentino; Grando	2004	SP	ES	Álgebra Elementar
Allevato	2005	SP	ES	Funções
Silva	2005	PR	4ª série do EF	Variado
Perego	2006	PR	8ª série do EF	Variado

Fonte CURY (2007, p.47)

Notemos que as pesquisas envolvendo a Análise de Erros, até mesmo como um reflexo do que está acontecendo com a Educação Matemática como um todo, vem se consolidando e se expandindo ao longo do tempo em vários países, incluindo o Brasil.

Como exemplo, citamos o trabalho de Barichello (2008), que procura investigar as potencialidades didáticas pedagógicas de uma dinâmica de interação entre professor e aluno, baseada na escrita e orientada pela resolução de problemas, a qual ele chama de Dinâmica RCR. Essa dinâmica pode ser sintetizada pela sequência: Resolução – Comentário – Resolução (RCR) em que para cada resolução do aluno, o professor faz alguns comentários e devolve para que o aluno continue resolvendo, em seguida, se preciso, o aluno entrega sua resolução novamente ao professor, que faz outro comentário sobre a nova resolução ou correção da anterior e em seguida devolve ao aluno, repetindo esse ciclo quantas vezes forem necessárias. Neste trabalho, que a Teoria de análise de erros foi usada como ferramenta é um importante suporte para sua dinâmica RCR.

Outro exemplo é o de Lima (2010),que se preocupou em levantar, identificar, categorizar e analisar os procedimentos e erros que os alunos de um curso pós-médio de uma instituição federal de ensino, cometiam ao resolver questões sobre equações do primeiro grau, o que acarretou na confecção de um Caderno de Atividades (CA), composto por quinze fichas temáticas com atividades elaboradas a partir das categorias de erros analisados na pesquisa.

Pinto (2009), em um trabalho de natureza declaradamente piagetiana, chama a atenção para a necessidade de fazer do erro algo que proporcione ao aluno não apenas tomar consciência dele, mas também seja capaz de repensar seu próprio conhecimento matemático. O resultado do trabalho apontou que alunos percebem seus erros com diferentes níveis de profundidade e que essa percepção interfere na forma como eles se relacionam com esses erros.

CAPÍTULO 2

O PERFIL DOS PESQUISADOS

"Não há aprendizagem isenta de erros"
(TORRE, 2007)

2.1. Dados Pessoais

O presente trabalho foi realizado com 64 estudantes do 3º Período dos cursos de Zootecnia e Engenharia Agrônoma da Unimontes, Campus em Janaúba – MG, e teve a finalidade de analisar os possíveis erros que os estudantes que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral cometeram ao resolver questões de conteúdos desta disciplina. Para isso, aplicamos um questionário para se traçar o perfil destes estudantes quanto aos dados pessoais, ao nível de escolaridade, às competências e necessidades destes estudantes em relação à aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

2.2. Dados obtidos

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais do Ministério da Educação e Cultura em 2012 (Inep/MEC 2012, disponível em http://www.abres.org.br/v01/stats/), divulgou que dos 7.037.688 alunos que ingressaram nos cursos superiores no Brasil em 2012, 11% deles ingressaram nos cursos de engenharia e somente 6% destes concluíram o curso.

Estudos de Carmo et al. (2012) apontam que 60% de estudantes que ingressaram no curso de Engenharia de Alimentos da Universidade Federal do Pará vieram das escolas públicas. Também revelam que 32% das respostas dadas pelos estudantes sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem das disciplinas do Cálculo Diferencial e integral têm origem nos conteúdos matemáticos do Ensino Médio e 68% se originaram por não aprendizagem de conceitos inerentes às disciplinas.

Também encontramos no relatório do Inep/MEC 2012 que os alunos que fizeram a Educação Básica em escolas públicas, estudam no período noturno 2,5 milhões, ou seja, 30,7% do total. A opção por esse horário mostra o interesse em conseguir uma atividade com renda para complementar os ganhos de suas famílias.

Na separação por sexo, o número de mulheres é de 54%, já os homens 46%.

Na busca pelas causas e fracassos do desempenho dos estudantes nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, para consolidar o presente trabalho, também nos interessamos em saber quantos estudantes estudaram na escola pública e quais dificuldades se apresentaram na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral conforme resultados que dissertaremos a seguir.

Verificamos que a maioria dos estudantes pesquisados se encontra na faixa dos 19 aos 21 anos, totalizando 70% do total. O que demonstra que ingressaram na universidade por volta dos 18 anos por estarem, na época cursando o terceiro período dos cursos em apreço. Quanto aos demais, um, tinha apenas 18 anos e dois possuíam 26 anos, e outro 27 anos. Também detectamos que 55% moram na cidade de Janaúba, cidade onde se encontra a extensão do Campus da Unimontes. Os demais são de cidades circunvizinhas, no Norte de Minas Gerais,. Na separação dos sexos, 35 estudantes são do sexo masculino e 29 são do sexo feminino, o que significa que a área que culturalmente é conhecida pela predominância masculina, o perfil dos revela que nos cursos em apreço o número de mulheres que o escolheram não é muito distante do número de pessoas do sexo masculino.

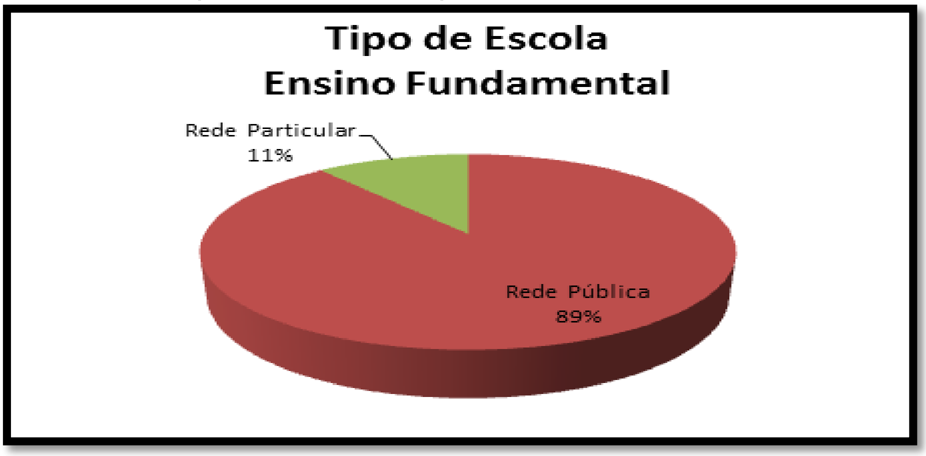
Na Tabela 1 e no Gráfico 1, podemos observar e verificar que entre os pesquisados, a maioria é procedente da rede pública de ensino, ou seja, 89% e 11% de Escolas Particulares.

Tabela 1 Quantidade de estudantes que Cursaram o Ensino Fundamental em Escolas Públicas e Privadas.

Ensino Fundamental	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
Escola Pública	57	89
Rede Particular	7	11
Total	64	100

O gráfico abaixo mostra a porcentagem do tipo de escola que os pesquisados frequentaram no Ensino Fundamental.

Gráfico 1 Tipo de Escola frequentada no Ensino Fundamental



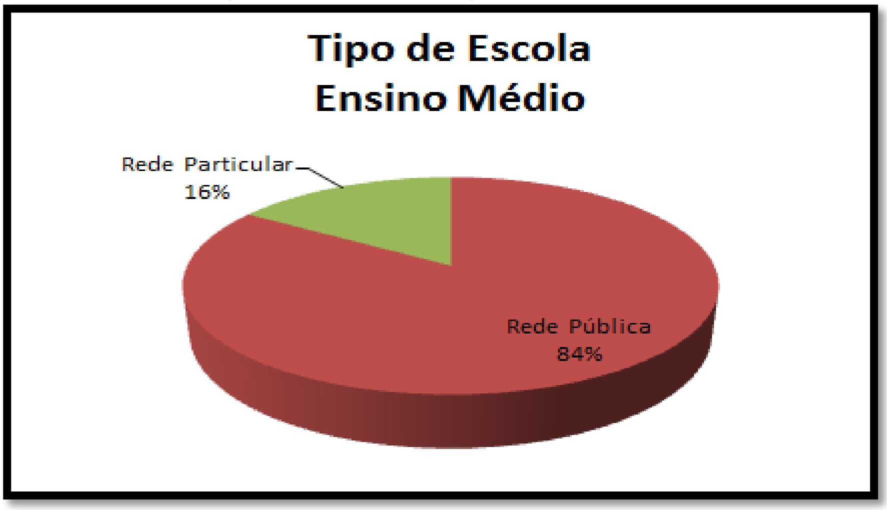
A tabela e o gráficos a seguir mostram que três dos estudantes pesquisados migraram do Ensino Fundamental público para o Ensino Médio Particular.

Tabela 2 Quantidade de alunos que cursaram o Ensino Médio em Escolas Públicas ou Privadas.

Ensino Médio	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
Escola Pública	54	84
Rede Privada	10	16
Total	64	100

O gráfico abaixo retrata as informações contidas na tabela acima, isto é, 84% dos estudantes estudaram o Ensino Médio em escolas públicas, em contrapartida, 16% em escolas particulares.

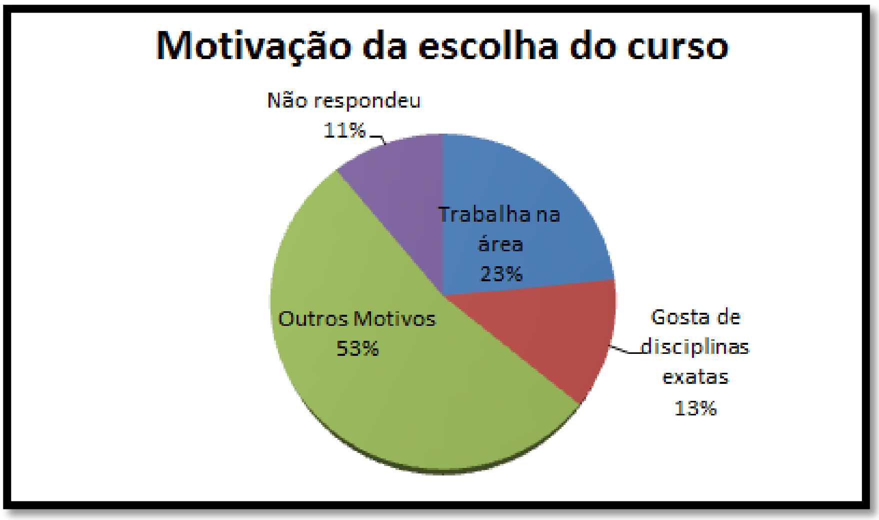
Gráfico 2 Tipo de Escola frequentada no Ensino Médio



2.3. Dados referentes às disciplinas de Cálculo

Na coleta do perfil dos estudantes pesquisados, solicitamos aos estudantes que explicassem o motivo da escolha do curso, como esclarecimento de que se tratava de um curso de engenharia na área rural que continha disciplinas da área de exatas, assim, 8 deles (12%) alegaram estar cursando engenharia por gostar deste tipo de disciplina. Em contrapartida 15 estudantes (23%), fazem engenharia por estar trabalhando na área.

Gráfico 3 Motivação da escolha do curso -1



A resposta sobre alunos que trabalham na área surgiu porque vários estudantes justificaram a escolha do curso, por trabalharem na " roça".

A maioria dos pesquisados, 53%, responderam a opção "outros motivos. Ao esclarecerem o que seria "outros motivos", eles responderam dessa forma. 65% dos 34 estudantes gostam do convívio rural, 23% não responderam quais eram estes motivos e 12% responderam que gostam de estudar, conforme o Gráfico 4.

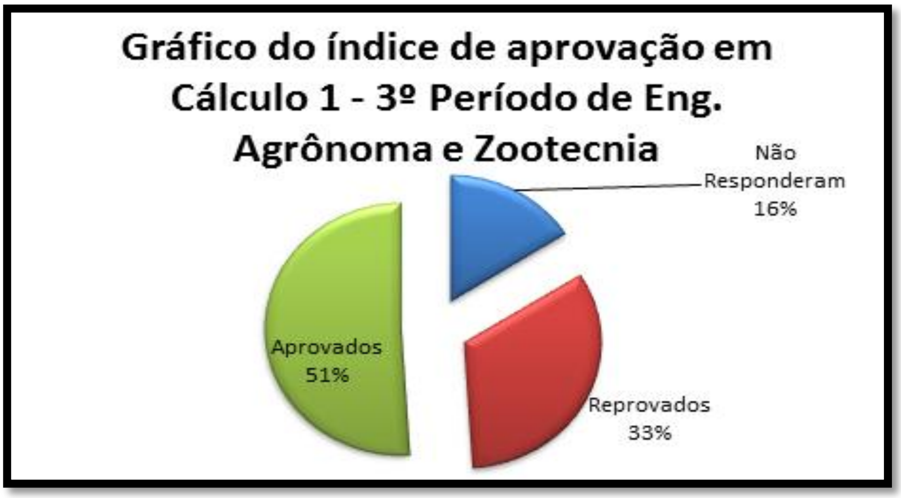
Gráfico 4 Motivação da escolha do curso - 2

No questionário Perfil do Estudante, houve o interesse em saber “Quais disciplinas da área de Cálculo os estudantes estavam cursando no momento?” Cinquenta e quatro dos 64 pesquisados responderam que estavam estudando o Cálculo 2, contendo uma revisão sobre Funções, Limite, Derivadas e Integral o que representa 85% dos pesquisados, enquanto que 10 alunos,(15%) não responderam a essa pergunta.

A pergunta seguinte foi, se o pesquisado estava cursando Cálculo1 pela segunda vez, ou seja, quem foi reprovado em Cálculo 1 no semestre anterior, já que Cálculo 1 fora ministrado no segundo semestre.

No gráfico a seguir é possível visualizar o que eles responderam:

Gráfico 5 Índice de Aprovação Cálculo 1



Observa-se que 12 alunos, isto é, 16% dos pesquisados não responderam a essa questão, 24 estudantes (33%), estavam cursando Cálculo 1 novamente, ou seja, foram reprovados e finalmente, 38 foram aprovados, ou seja, apenas 51% dos pesquisados.

Algumas faculdades particulares oferecem uma disciplina precedente ao Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de melhorar o nível de conhecimentos da Educação Básica dos estudantes, a fim de obter um melhor desempenho em Cálculo 1.

A ementa da disciplina de Introdução ao Cálculo 1 contém os seguintes conteúdos da Educação Básica: Conjuntos. Conjuntos numéricos. Funções. Funções afins, Quadráticas, Quadrática e suas aplicações na Física, Modulares, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas. Trigonometria. Noções de Física

Importante ressaltar com base na ementa de Cálculo 1, tanto para o curso de Engenharia Agrônoma quanto no de Zootecnia, elaboramos uma listagem dos principais conteúdos de Cálculo1. O questionário continha a seguinte questão: "Marque os conteúdos que mais têm ou teve dificuldades em aprender no curso de Cálculo 1". O estudante poderia optar por mais de uma alternativa, caso tivessem dificuldades em mais de um conteúdo. Vide tabela 3.

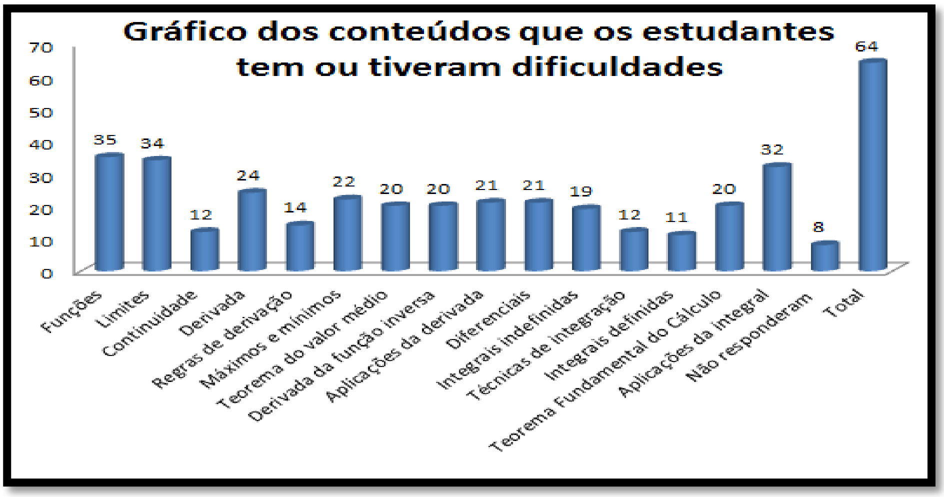
Tabela 3 Frequência absoluta e relativa dos conteúdos que os pesquisados têm ou tiveram dificuldades em aprender no curso de Cálculo 1

Conteúdos com maiores dificuldades de aprenderem	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
Funções	35	55
Limites	34	54
Continuidade	12	19
Derivada	24	38
Regras de derivação	14	22
Máximos e mínimos	22	35
Teorema do valor médio	20	32
Derivada da função inversa	20	32
Aplicações da derivada	18	29
Diferenciais	21	33
Integrais indefinidas	19	30
Técnicas de integração	12	19
Integrais definidas	11	18
Teorema Fundamental do Cálculo	20	32
Aplicações da integral	32	50
Não responderam	8	13
Total	64	-

Observemos que Função foi o conteúdo apontado pela maioria dos estudantes os quais tiveram maior dificuldade de aprender, num percentual de 55% e que o menor percentual, 18% foi o conteúdo de Integral Definida.

O gráfico a seguir ilustra o que constatamos na tabela anterior. Os conteúdos de Funções, Limites e Aplicações da Integral foram os mais citados pelos estudantes.

Gráfico 6 Conteúdos que os estudantes mais têm ou tiveram dificuldades em aprender no curso de Cálculo 1



Observemos que os três conteúdos que eles mais tiveram dificuldades em aprender foram Funções, Limites e Aplicações de Integral

Apesar de que os estudantes terem a oportunidade de marcar mais de uma opção, a frequência relativa foi calculada com referência aos 64 estudantes.

A seguir, a Tabela 4 contem os conteúdos de Matemática da Educação Básica que os pesquisados acharam que os impediriam um desempenho melhor na disciplina de Cálculo. Esta foi uma questão aberta, para que o estudante se sentisse à vontade para responder qual conteúdo apresentavam maiores dificuldades de aprendizagem.

Tabela 4 Conteúdos da Educação Básica que impediram um melhor desempenho na disciplina de Cálculo 1.

Conteúdos da Educação Básica que impediram de ter um melhor desempenho na disciplina de Cálculo.	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
Trigonometria	6	10
Função	34	54
Polinômios	2	4
Expressões Numéricas	4	7
Contagem	4	7
Fração	4	7
Geometria Espacial	2	4
Estatística	4	7
Conjuntos Numéricos	2	4
Não lembra	6	10
Não respondeu	26	41
Nenhuma	12	19
Total	64	-

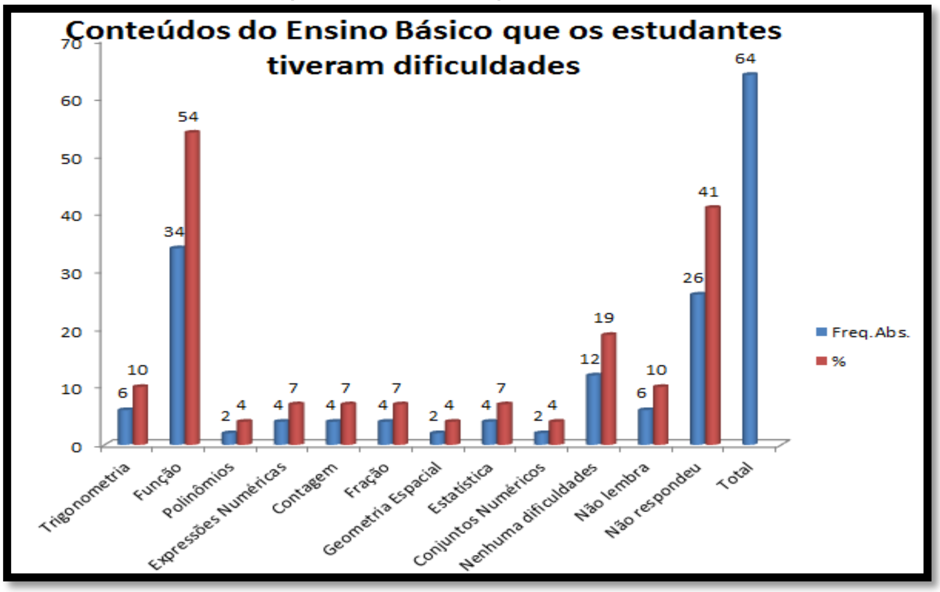
Ao responderem o questionário, alguns estudantes descreveram os conteúdos de Funções Exponencial, Logarítmica, Polinomial, Modular e Função Por Partes.

No entanto na tabela anterior este tipo de resposta foi enquadrada apenas na categoria Função.

Trinta e quatro estudantes, isto é, 54% afirmaram ter dificuldades em um ou mais tipos de Funções; 10% responderam que não se lembram quais conteúdos tiveram mais dificuldades, 26% não responderam a essa pergunta e 19% responderam que não têm nenhum conteúdo da Educação Básica que os impediram de ter um melhor desempenho na disciplina de Cálculo.

O que concorda com a pesquisa de Carmo et al. de 2012 em relação aos estudantes de Engenharia de Alimentos da Universidade Federal do Pará.

Gráfico 7 Conteúdos da Educação Básica que impediram um melhor desempenho na disciplina de Cálculo 1.



O gráfico revela que os conteúdos citados acima, foram os que os estudantes consideraram como os mais difíceis. Além disso, vários estudantes citaram mais de um conteúdo e Polinômios, Geometria Espacial e Conjuntos Numéricos estão entre os conteúdos que eles afirmaram não terem dificuldades. Este fato não é fidedigno com os resultados obtidos na análise de erros cometidos na resolução das questões com conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral como será visto a seguir.

CAPÍTULO 3

SOBRE AS QUESTÕES DO TESTE APLICADO

> "O erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho, sem se equivocar... "Não há aprendizagem isenta de erros". O enfoque didático do erro consiste em sua consideração construtiva e, inclusive, criativa dentro dos processos de ensino e aprendizagem.
> (TORRE, 2007.)

3.1 Análises das questões escolhidas

Para analisar os erros que os estudantes cometeram na resolução de questões do Cálculo Diferencial e Integral, elaboramos um teste com questões sobre limite, derivada e integral. Neste contexto, ainda elaboramos um questionário, cujo modelo foi baseada em Lima (2014), no qual afirma: "Questionário corresponde a uma técnica de coleta de dados utilizada na pesquisa, tendo uma observação direta da realidade", (LIMA, 2014, p. 80).

Neste sentido optamos por aplicar um questionário com perguntas do tipo semiabertas, que possibilita uma maior fidedignidade sobre o que pensam e sabem com relação ao tema abordado. Questões semiabertas propiciam uma maior clareza, contribuindo pois se aproximam mais da realidade nas respostas às questões propostas. Além disso, essa opção possui algumas vantagens como Lima (2014, p. 82) enfatiza:

> A pergunta semiaberta minimiza os efeitos indesejados das questões abertas e das fechadas [...], dando oportunidade ao respondente elaborar uma alternativa de resposta capaz de traduzir com maior fidedignidade aquilo que sabe/pensa. Esta arquitetura de questão reúne três vantagens: a) evita induzir o respondente a respostas que não corresponde a realidade; b) pode revelar aspectos novos para o pesquisador; c) evita divagação da resposta registrada, uma vêz que o respondente dispõe das alternativas já elencadas e estas podem orientar a elaboração sintética da ideia que deseja expressar. (LIMA, 2014, p.81-82).

As questões propostas à população alvo deste presente trabalho continham as principais definições e teoremas estudados em Cálculo Diferencial e Integral, de modo que qualquer discente de cursos na área de exatas precisa dominar para uma aprendizagem significativa destas disciplinas.

Cury (2007) ratifica que

> Elencar questões cujos conteúdos estivessem de alguma forma relacionados com as dificuldades encontradas, em geral, no ensino de tópicos de Cálculo, como esboço de gráficos de funções, cálculo de limites, derivadas e integrais; dificuldades estas que não dependem de conteúdos específicos do Cálculo Diferencial e Integral, mas que têm origens em noções de Matemática Básica. (Cury 2007. p.52)

Nesta perspectiva, a pesquisadora aponta que alguns estudantes têm maiores dificuldades na Matemática Básica do que nos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

A autora ainda reforça que

> [...] especialmente no Cálculo, acredito ser a compreensão dos conceitos o objetivo mais importante. No entanto, sem a técnica, o aluno não tem ferramentas para trabalhar com os conceitos, e o desenvolvimento para lidar com regras (para cálculo de limites, derivadas ou integrais, por exemplo) parece estar sendo prejudicada pela falta de habilidades no trabalho com propriedades operatórias básicas.

Ressaltamos que as dificuldades encontradas no Educação Básica afetam no desempenho de Cálculo. Tais resultados também estão evidenciados no presente trabalho e no trabalho de Carmo *et al* (2012).

Com fundamentos nos pressupostos teóricos, a análise da resposta dos estudantes às questões do Cálculo Diferencial e Integral no presente trabalho não se restringe a esta área, mas, sobretudo, evidencia os erros relativos aos conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio.

3.1.1 Primeira questão

A primeira questão não é muito usual em Matemática, pois envolve raciocínio lógico dedutivo para determinar quais afirmações são falsas ou verdadeiras e as respostas deveriam ser justificadas.

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações? Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de f (x) = *cos x* existem quando $x \to \frac{\pi}{2}$.

b) O $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ **existe.**

c) O $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ **não existe porque é uma indeterminação.**

d) O $\lim_{x \to 4} \frac{-2 + \sqrt{x}}{x - 4}$ **não existe porque é uma indeterminação.**

A resolução desta questão envolve os conceitos de limites, conteúdo do Cálculo Diferencial, estudados no Cálculo 1, bem como o comportamento de uma função trigonométrica, produtos notáveis, simplificação e racionalização de uma expressão, conteúdos da Educação Básica.

a) **Resposta**: A afirmação é verdadeira.

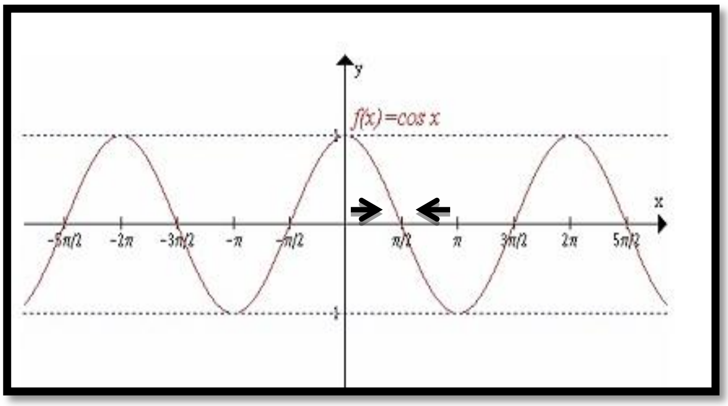
Justificativa 1:

É necessário determinar os limites laterais $f\,(x) = cos\,x$ à direita e à esquerda de $\frac{\pi}{2}$ e como $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} cosx = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} cosx = 0$, então os limites laterais existem quando $x \to \frac{\pi}{2}$.

Justificativa 2:

Vide o esboço do gráfico:

Figura 9 Função cosseno



b) **Resposta**: A resposta é verdadeira.

Justificativa:

Desenvolvendo o produto notável

$x^2 - a^2 = \frac{(x \ - a \ )(x + a)}{x - a}$ tem-se que $\lim_{x \to a} \frac{x^2 + a^2}{x - a}$ é equivalente ao $\lim_{x \to a} (x + a)$.

Aplicando-se o limite tem-se que: $\lim_{x \to a} \frac{x^2 + a^2}{x - a} = a + a = 2a$

c) **Resposta**: A afirmação é verdadeira.

Justificativa 1:

Simplificando a expressão, obtemos que

$$\lim_{x \to 0^{+}} \sqrt{\frac{2x}{x^6}} = \lim_{x \to 0^{+}} \sqrt{\frac{2}{x^5}} = +\infty$$

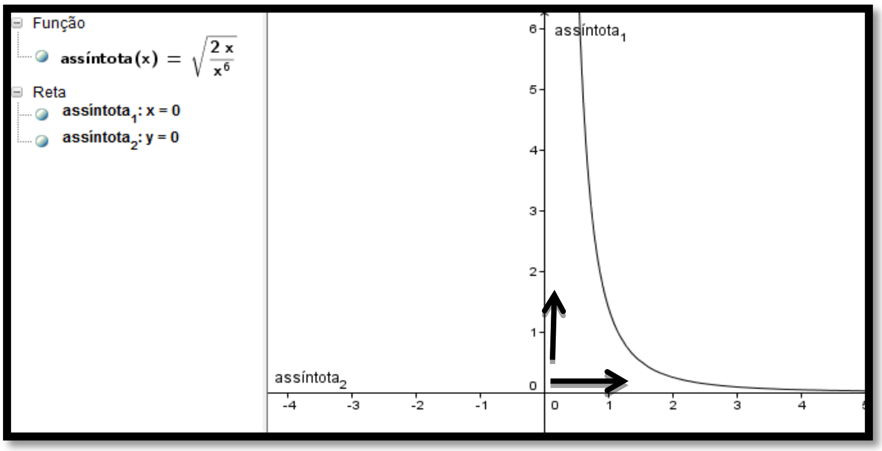
.

Aplicando-se os limites laterais, quando x tende a zero pela esquerda, o limite em apreço tende para $+\infty$, e quando x tende a zero pela a direita, o limite tende para $-\infty$, ou seja, o $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ não existe porque é uma indeterminação.

Justificativa 2:

Aplicando-se os limites laterais á direita e à esquerda de zero, esboçando-se o do gráfico de *f* tem-se que os eixos *x* e *y* são respectivamente, assíntotas horizontal e vertical, conforme o gráfico:

Figura 10 Gráfico da função $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$



d) **Resposta**: A afirmação é falsa.

Justificativa:

A expressão $\frac{-2+\sqrt{x}}{x-4} = \left(\frac{-2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right)$.

Como $-2+\sqrt{x} = \sqrt{x}-2$, simplificado tem-se que $\lim_{x\to 4} \frac{-2+\sqrt{x}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$.

Portanto a resposta é 1/4, pois a indeterminação foi removida.

3.1.2 Segunda Questão

2) Considere a função $f[0,1] \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \;\; 0 < x < \frac{1}{4} \\ 1 \quad\;\; se \; \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Esta função é contínua em todo o seu domínio? Justifique!

Nesta questão nos interessamos em identificar quais conhecimentos de funções por partes, domínio de funções, gráfico da função constante, da função quadrática, intervalo e o conceito de continuidade de funções, foram apreendidos na educação básica e em Cálculo 1. O esboço do gráfico desta questão é um suporte na resolução, pois as representações gráficas proporcionam uma melhor visualização de acontecimentos e fenômenos.

Resposta: A firmação é falsa.

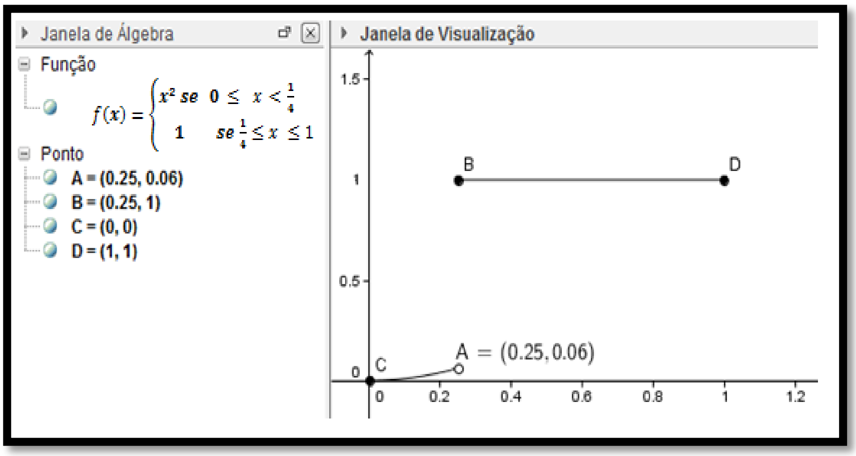
Justificativa 1:

Usando a noção de intervalo real e de limite: a função f não é contínua em todo seu domínio. De fato, o domínio da função f é $D(f) = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right] = [0,1]$ e seus limites laterais à direita e à esquerda de $\frac{1}{4}$ são distintos, pois $\lim_{x \to \frac{1}{4}^-} f(x) =$ $116 = 0{,}0625 \neq \lim x \to 14 + f\boldsymbol{x} = 1$, assim a função não é contínua em $x = 14$. Portanto é descontínua em todo o seu domínio.

Justificativa 2:

Esboçando o gráfico da função que é uma função por partes, tem-se que os limites laterais de f à direita e à esquerda de $\frac{1}{4}$ são diferentes :

Figura 11 Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \;\; 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1 \quad\;\; se \; \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$



3.1.3 Terceira questão

Esta questão é sobre a noção de derivada, estudada em Cálculo 1. O estudante era livre para usar a definição de derivada ou as regras de derivação bem como deveria saber operar expressões algébricas e numéricas que foram estudadas na matemática básica.

3) Determine, se existir, a derivada da função $g(x) = \dfrac{x^2-5}{2x+3}$; no ponto $x = -1$.

Solução 1:

Usando a regra de derivação do quociente obtém-se que

$g'(x) = \dfrac{2x^2+6x+10}{(2x+3)^2}$ e aplicando no ponto, $x = -1$, resulta em $g'(-1) = 6$

Solução 2:

Usando a definição de derivada no ponto obtém-se que

$$g'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+8x+7}{(2x+3).(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+7).(x+1)}{(2x+3).(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+7)}{(2x+3)} = 6$$

3.1.4 Quarta questão

O que se espera nesta questão é que o estudante saiba utilizar o método de integração por substituição e na justificativa, usar que a derivação é a operação inversa da integração, assuntos abordados em Cálculo1. Além disso, a resolução da questão exige habilidades na manipulação de conhecimentos da educação básica como operações com números racionais e funções trigonométricas.

4) **Use o Método da Substituição para calcular $\int x cos 3x^2 dx$ e depois derive o resultado para verificar a sua resposta.**

Solução:

Usando o Método de Integração por Substituição, fazendo a mudança de parâmetros, $u(x) = 3x^2$, assim $du(x) = 6xdx$. Substituindo na integral original, resulta que $\int x cos 3x^2 \ dx = 1/6 \int cosu du$. Resulta que $\int x cos 3x^2 \ dx = 1/6 sen\, 3x^2 + \mathrm{C}$, onde C é uma constante. Fazendo $\mathrm{H}(x) = f\big(g(x)\big) + C = 1/6 sen 3x^2 + C$ e usando a Regra da Cadeia para derivar $\mathrm{H}(x)$ onde

$g(x) = 3x^2$ e $f(x) = 1/6senx$. Segue que $\mathrm{H}'(x) = f\left(g'(x)\right). g'(x) = \frac{1}{6}cos3x^2. 6x = xcos3x^2$.

3.1.5 Quinta Questão

Essa questão teve o intuito de verificar a aprendizagem do conceito de área sob uma curva que está relacionada ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que é estudado em Cálculo 1. Também, sobre o comportamento de uma função no plano cartesiano, intervalo na reta real, e conceitos aritméticos que são estudados na Educação Básica.

5) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine a área limitada pelos eixos x e y e a curva $\boldsymbol{h(x) = 5x - x^2}$ no intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{3}]$.

Solução 1:

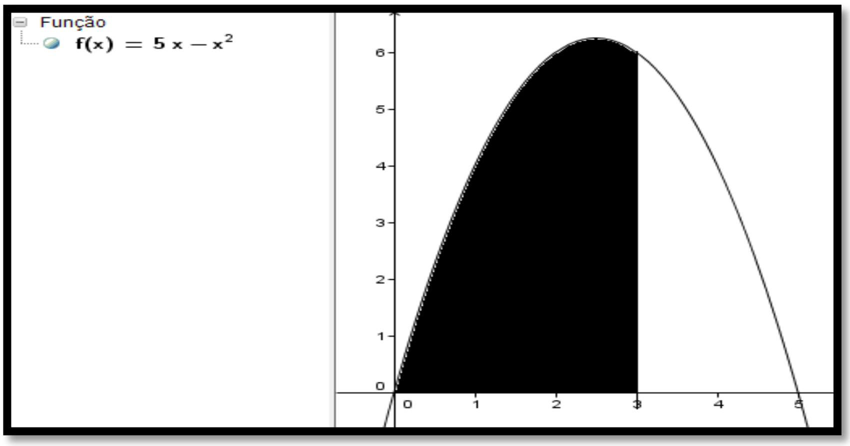
Aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem-se que

$\int_0^3 5x - x^2 dx = H(3) - H(0) = H(3) - H(0) = \frac{27}{2}$ u. a., onde $H(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $H'(x) = h(x) = 5x - x^2$, e u. a.= unidade de área.

Solução 2:

Fazer o esboço da figura.

Figura 12 Área limitada pelos eixos x e y e a curva $h(x) = 5x - x^2$ no intervalo $[0, 3]$.



CAPÍTULO 4

DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DO TESTE APLICADO

"A análise do "erro" nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta com um produto que se encerra em si mesmo". (COSTA, 1988).

4.1 EEB - Erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica

As categorias construídas para análise dos erros dos estudantes pesquisados teve como principal pressuposto teórico em Cury (2007) que resultou na elaboração de duas categorias: os erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica e os erros ocorridos pela não apreensão de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Na análise, contabilizamos, inicialmente, o número de erros efetuados nas resoluções das cinco questões da pesquisa de campo. Nesse sentido, a visão geral dos acertos e erros evidenciados nas resoluções nos dois níveis de ensino, foi um subsídio para uma categorização dicotômica, com o objetivo de fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos.

No tratamento dos resultados, as categorias estão apresentadas por meio de quadros e gráficos, com a indicação de frequências e porcentagens, acompanhadas por um "texto síntese".

Para manter a identidade dos 64 estudantes pesquisados, os mesmos serão identificados como estudante 1, estudante 2, etc.

Tabela 5 Acertos, erros e questões não respondidas

Questão	Acertos		Erros		Questões em branco	
	Quantidade	%	Quantidade	%	Quantidade	%
1	6	10	21	33	37	58
2	3	5	9	14	52	81
3	4	7	20	31	40	64
4	0	0	8	13	56	87
5	4	7	18	29	42	65

Pelos resultados, constata-se que a primeira questão apresentou o maior percentual de acertos, 10%, ou seja, 6 estudantes, isto é, dos 64 estudantes pesquisados, 27 tentaram resolvê-la e 21 erraram. Um dos motivos, pode ser explicado pela falta de hábito de resolver exercícios em Matemática no formato da identificação de afirmações falsas ou verdadeiras.

Destacamos que ao contrário das questões habituais que solicitam apenas o cálculo de limites de funções, os estudantes se depararam na Questão 1 com a identificação de afirmações que eram falsas ou verdadeiras cuja determinação dos limites não era muito complexa. Conforme vimos que para resolver a questão são necessários os conhecimentos matemáticos do ensino fundamental sobre produtos notáveis e de racionalização.

Na resolução da segunda questão sobre continuidade, tem-se que três dos 64 estudantes acertaram a questão, o que representa 0,5% dos pesquisados, o segundo menor percentual de acertos, ou seja, 99,5% dos estudantes não responderam ou erraram esta questão. Acredita-se que o motivo pode ter sido pelo fato da questão envolver uma função com duas leis de formação.

O que corrobora com o que se encontra no Capítulo 2,do presente trabalho em que a maioria dos estudantes têm dificuldades com tipo de questão.

Quanto à terceira questão, 7% dos pesquisados acertaram, o que representa quatro estudantes do total de 64, 41 estudantes não responderam, dos 23 que responderam 19 erraram. Essa questão envolve a regra do quociente de derivada.

É importante ressaltar que dos 19 estudantes que erraram esta questão a maioria conseguiu utilizar a regra do quociente com sucesso, ocorrendo a maior parte dos erros em operações elementares na substituição do ponto $x_0 = -1$, no lugar de x, no quociente da fração algébrica.

Na quarta questão apenas oito, dos 64 estudantes tentaram responder, porém os oito erraram, obtive-se 100% de erro, isso pode ter sido pelo fato dos estudantes não se lembrarem do método da substituição para determinação da integral.

Quanto à quinta e última questão, 22 alunos tentaram resolvê-la, porém 18 erraram, o que representa 29% dos 64 pesquisados. A questão era relativa à compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Cada questão foi elaborada no intuito de verificar as habilidades e conhecimentos apreendidos pelos estudantes pesquisados dos conteúdos matemáticos da Educação Básica ou em Cálculo I. Como em cada uma das duas categorias houve a identificação de erros cometidos na mesma questão envolvendo mais de um conteúdo matemático da Educação Básica ou do ensino de Cálculo, foram criadas, sob a ótica de Cury (2007), 10 subcategorias de erros aqui elencadas: sete relativas aos erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica (EEB) e três se referem aos erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (ECDI), que para facilitar a compreensão do leitor, estão identificadas pelas siglas com as letras iniciais das categorias dos erros, a saber:

4.1 EEB - Erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica

4.1.1 Erros quanto à Soma Algébrica - ESA;
4.1.2 Erros quanto à Operações com Frações - EOF;
4.1.3 Erros quanto à Conceitos de Função - ECF;
4.1.4 Erros quanto à Potenciação - EP;
4.1.5 Erros quanto à Conceitos de Trigonometria - ET;
4.1.6 Erros quanto à Produtos Notáveis - EPN;
4.1.7 Erros quanto à Ordem das Operações a serem Efetuadas -EOOE.

4.2 ECDI - Erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral

4.2.1 Erros quanto à Definições e Teoremas referentes a Limites - EL;
4.2.2 Erros quanto à regras de derivação - ED;
4.2.3 Erros devido à falta de domínio de conceitos de Integral - EI.

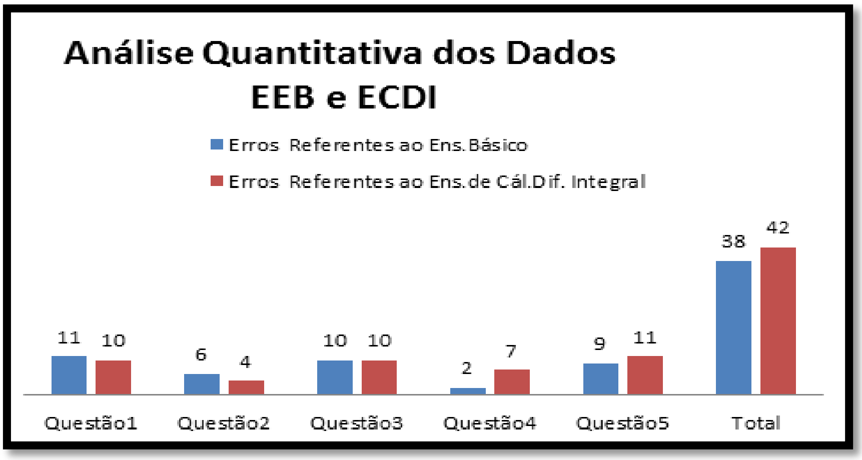
A tabela abaixo apresenta os resultados das duas categorias.

Tabela 6 Análise quantitativa das categorias de erros

Categoria de Erros	Questão 1	%	Questão 2	%	Questão 3	%	Questão 4	%	Questão 5	%	Total
EEB	11	29	6	16	10	27	2	1	9	24	38
ECDI	10	24	4	9	10	24	7	17	11	26	42
Acertaram	6	35	3	18	4	24	0	0	4	24	17
Não Resp.	37	-	51	-	40	-	55	-	40		223

A percentagem representada na tabela acima se refere ao total de erros por categoria, por exemplo, 11 estudantes cometeram erros da categoria EEB na questão 1, o que representa 29% dos 38 erros catalogados.

Gráfico 8 Categoria de Erros - 1

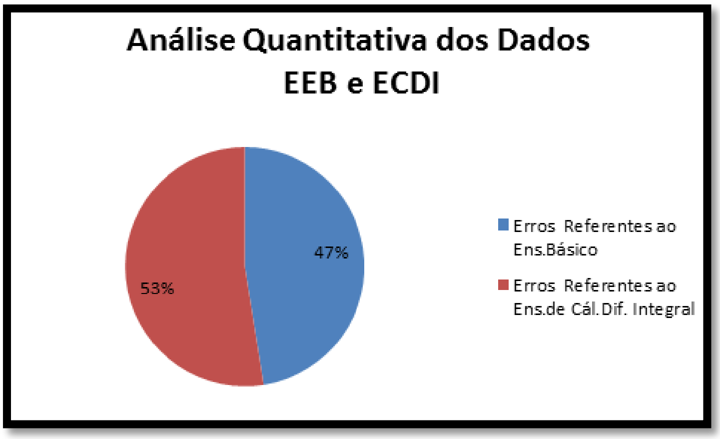


O Gráfico 8 relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes, ou seja, a tabela e o gráfico anteriores evidenciam que a primeira questão teve 11 erros, a segunda questão teve seis erros, a terceira, dez erros, a quarta, dois erros e a última questão 9 erros, totalizando 38 erros, referentes ao Educação Básica.

Com relação aos erros pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, tem-se dez erros na primeira questão, quatro na segunda questão, dez na terceira questão, sete erros na quarta questão e 11 na quinta questão, totalizando 42 erros.

O gráfico 9 compara a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes aos erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica - EEB e erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral - ECDI.

Gráfico 9 Categoria de Erros - 2



Observando o gráfico de setores, tem-se uma visão clara quanto à porcentagem geral dos erros referentes aos grupos EEB e ECDI. Vale ressaltar que embora o questionário contenha somente questões sobre o Cálculo Diferencial e Integral, 47% dos erros das questões resolvidas pelos estudantes se relaciona aos conceitos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Ressalta-se que a questão 1 se refere a Limite, a questão 2 é sobre Continuidade, a questão 3 é sobre Derivada, a questão 4 sobre Integral e a questão 5 é relativa ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Tabela 7 Visão geral da análise quantitativa das subcategorias de erros

Categoria Geral dos Erros	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Total
1. ESA	2	0	2	0	0	4
2. EOF	1	0	0	0	3	4
3.ECF	3	5	0	0	3	11
4. EP	1	0	3	0	2	6
5. ET	3	0	0	2	0	5
6.EPN	0	0	3	0	0	3
7. EOOE	1	1	3	0	0	5
8. EL	10	4	0	0	0	14
9. ED	0	0	10	2	0	12
10. EI	0	0	0	5	11	16
Acertaram	6	3	4	0	4	17
Não Responderam	37	51	40	55	40	223

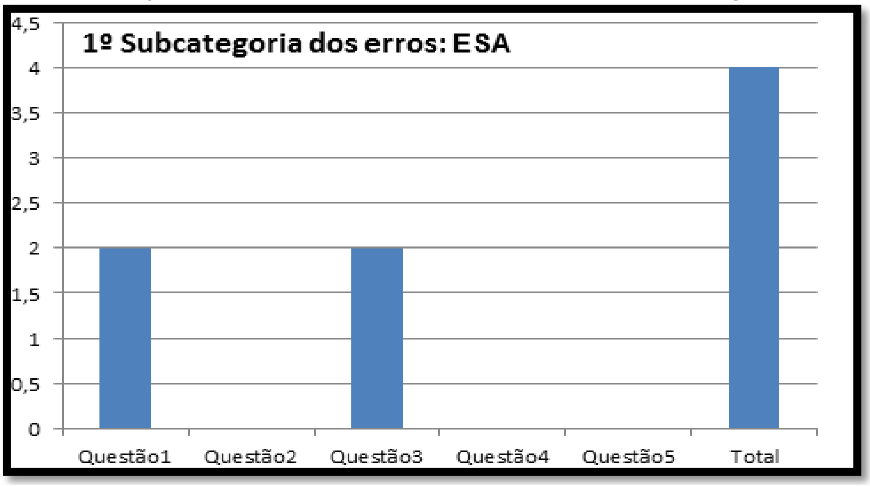
Na tabela acima, apresenta-se um levantamento detalhado e comparativo de cada uma das dez subcategorias apresentadas em cada questão.

4.1.1 Erros quanto à soma algébrica (ESA)

“A ciência progride a golpes de Erros”
(Popper,1991)

Em relação a esta categoria, observa-se na tabela 7, que dos 64 estudantes pesquisados, quatro enquadram-se nesta subcategoria, em que foram detectados dois erros deste tipo na questão 1 e dois erros na questão 3 de acordo com o gráfico 10 a seguir.

Gráfico 10 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 1ª subcategoria.

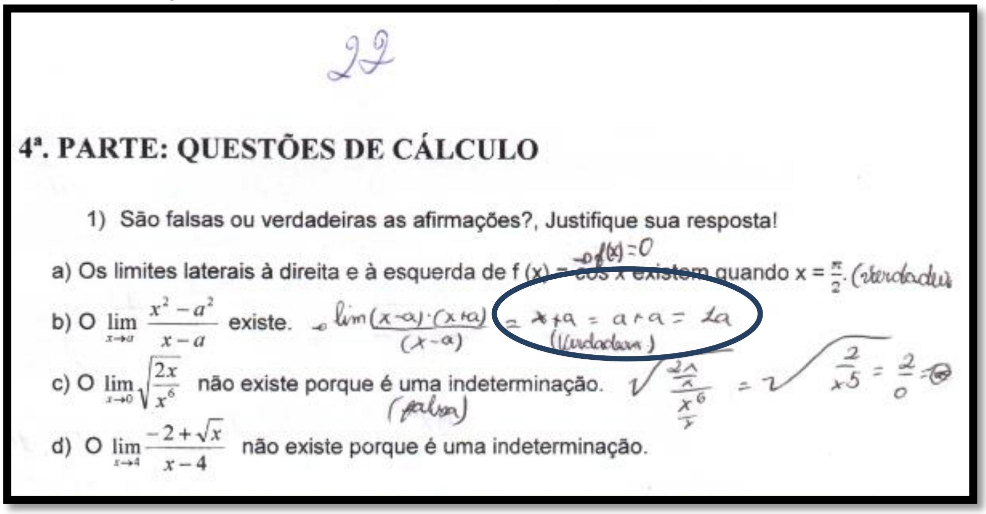


Um tipo de erro encontrado e que se encaixa nesta subcategoria é o que se mostra como exemplo na figura 13 abaixo, na qual o estudante 22 realiza, de forma errônea, a soma $a + a = 1a$. Este tipo de erro acontece com frequência no ensino de matemática e também em outras disciplinas. Torre (2007) citando Ferrán(1990) considera este erro do tipo Mistake.

> Erro como Equívoco (mistake), pelo contrário, não se refere tanto ao plano lógico ou a falta de conhecimento quanto ao processo de execução[...] entendemos por equívocos as incorreções provocadas por razões não atribuíveis a falta de conhecimento, mas ao cansaço, negligencia ou falta de atenção, etc.(Ferrán 1990 apud Torre 2007, p.66)

Pode-se notar que o estudante 22, provavelmente cometeu um "mistake", quando igualou a função ao seu limite.

Figura 13 Solução da Questão 1, apresentada pelo estudante "22"


22

4ª. PARTE: QUESTÕES DE CÁLCULO

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações?, Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de f (x) = ~~cos x existem~~ quando $x = \frac{\pi}{2}$. $f(x) = 0$ (verdadeira)

b) O $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ existe. $\lim \frac{(x-a)\cdot(x+a)}{(x-a)} = x + a = a + a = 1a$ (verdadeira)

c) O $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ não existe porque é uma indeterminação. (falsa)

d) O $\lim_{x \to 4} \frac{-2+\sqrt{x}}{x-4}$ não existe porque é uma indeterminação.

4.1.2 Erros quanto às operações com frações (EOF)

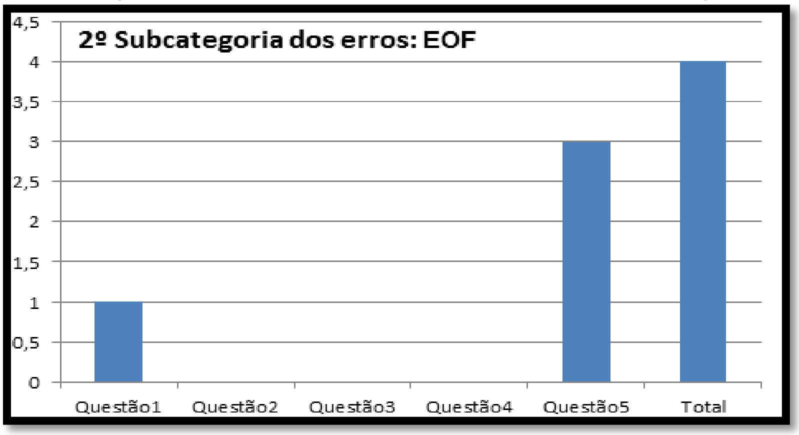
Após levantamento dos erros apresentados na resolução das questões utilizadas na referida pesquisa, dentro desta subcategoria foram detectados os seguintes erros: efetuar a soma de frações com denominadores sem realizar o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum e efetuar operações de quocientes incorretamente, conforme Cury (2007):

> A dificuldade com as operações com as operações no conjunto dos racionais é um problema que se reproduz em outros conteúdos pois, se o estudante não sabem somar frações numéricas, também não vai saber somar frações algébricas, e as dúvidas e erros vão ser frequentes. (CURY 2007, p. 57).

Segundo a autora dúvidas com relação a frações persistem, no sentido que há alunos que chegam ao ensino superior sem compreender este objeto matemático, após ter estudado muitos anos na Educação Básica.

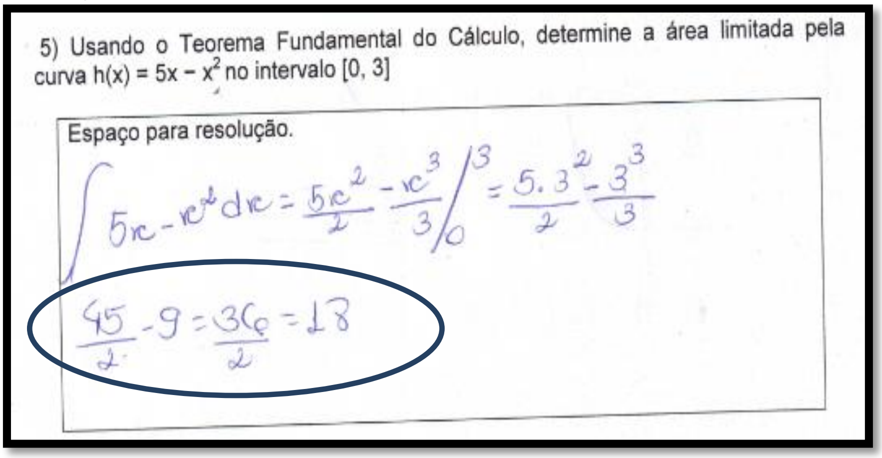
Numa análise quanto a esta subcategoria, observa-se na Tabela 10, que dos 64 estudantes pesquisados, quatro enquadram-se nesta categoria, de modo que três erros ocorreram na questão 5 e um na questão 3. Vide o gráfico 11.

Gráfico 11 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 2ª subcategoria.



Observando a figura 14 a seguir do estudante 35, vê-se que a soma de frações destacada foi efetuada erroneamente. O aluno não realizou o cálculo de tornar os denominadores iguais através do MMC ou por outro método, na pergunta seguinte forma $\frac{45-18}{2} = \frac{27}{2}$ **.**Quando respondeu no Perfil do Estudante "Em sua opinião qual matéria da Educação Básica você teve maior dificuldades?" O mesmo respondeu que tinha muitas dificuldades em manipular Frações.

Figura 14 Solução da questão 3, apresentada pelo estudante “35”


5) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine a área limitada pela curva h(x) = 5x − x^2 no intervalo [0, 3]

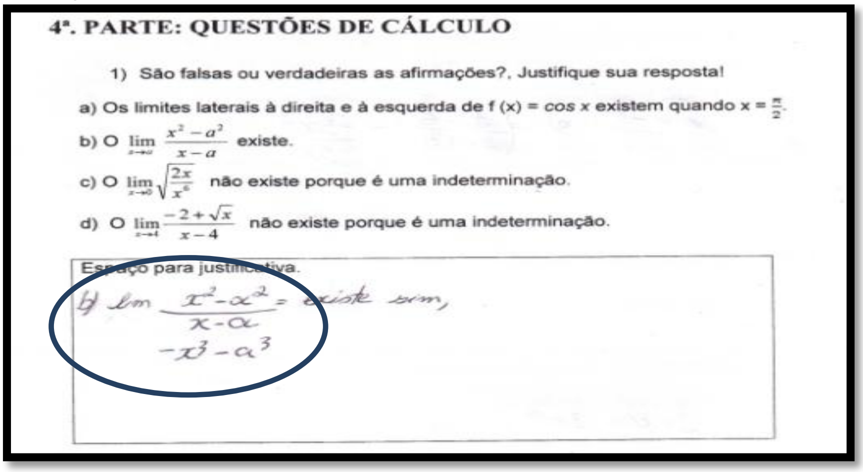
Espaço para resolução.

$\int 5x - x^2 dx = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{5.3^2}{2} - \frac{3^3}{3}$

$\frac{45}{2} - 9 = \frac{36}{2} = 18$

Outro erro dessa categoria, é ilustrada na figura 15 quando o estudante 36, na questão 1, em vez de fatorar e simplificar o quociente: $\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x + a$, e em seguida, aplicar o limite ele multiplicou termo a termo os elementos do quociente resultando na expressão algébrica $x^3 - a^3$.

Figura 15 Solução da questão 1, apresentada pelo estudante “36”


4ª. PARTE: QUESTÕES DE CÁLCULO

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações?, Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de f (x) = *cos x* existem quando x = $\frac{\pi}{2}$.

b) O $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ existe.

c) O $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ não existe porque é uma indeterminação.

d) O $\lim_{x \to 4} \frac{-2 + \sqrt{x}}{x - 4}$ não existe porque é uma indeterminação.

Espaço para justificativa.

b) $\lim \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ = existe sim,

$-x^3 - a^3$

4.1.3 Erros quanto ao domínio do conceito de função (ECF)

Encontramos em Ramos (2013, p. 1), que o conceito de função é uma das categorias mais importantes da Matemática e desde o século XVII vem fundamentando outros conceitos matemáticos, a exemplo dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Também que quando procuramos estabelecer regularidades de algum fenômeno o instrumento que utilizamos é o de função, pois é um modelo matemático que está presente em várias situações do cotidiano sendo um campo próprio para o estudo das leis. Por este motivo é inegável a importância do conceito de função, e grande é a sua aplicabilidade em variadas áreas, dentre outras, as áreas da Física, Química, Ciências Contábeis, Economia, Ciência da Computação.

Na categoria de erros referente na Educação Básica, Conceitos de Função obteve o maior número de erros ocorridos, além do fato dos estudantes pesquisados, se pronunciarem no questionário ”Perfil dos Estudantes Pesquisados” que tinham grande dificuldades em compreender funções.

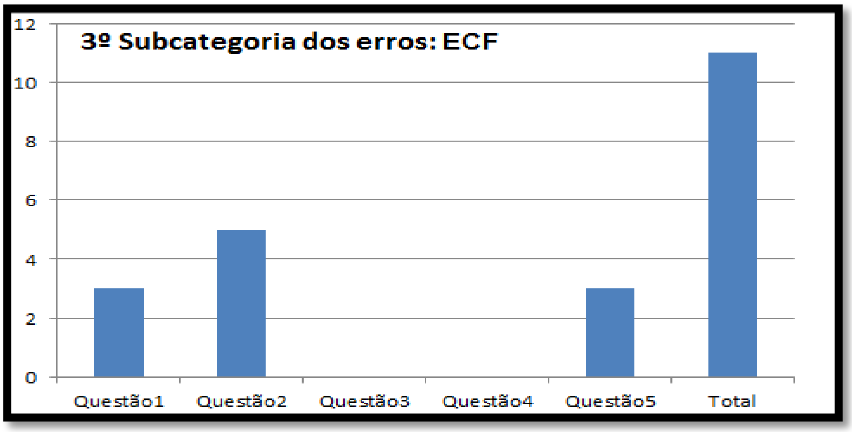
Na visão de Cury 2007,

> Conhecer o conteúdo “funções” não é saber recitar a definição tantas vezes repetida em livros de matemática [...]. É certo que se isso não for atendido, ocorrem problemas quando se usa uma função para modelar uma situação real. (Cury 2007, p.75)

A noção de função se refere à regularidade de fenômenos e de eventos e, portanto é importante analisar como as variáveis se comportam quando a função é definida por uma lei, pois, através de funções problemas podem ser modelados por meio de expressões algébricas.

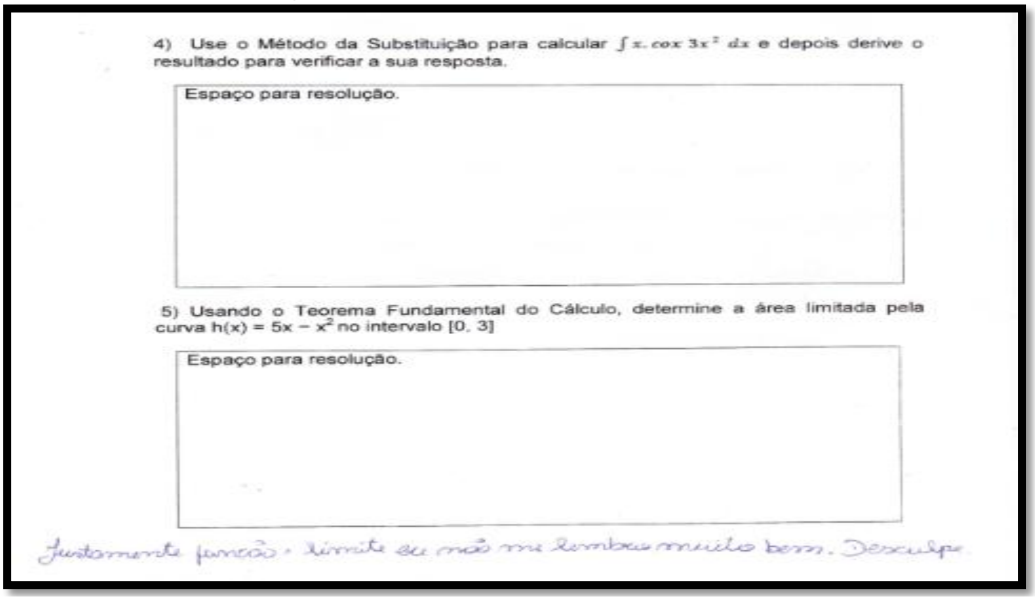
Veja o gráfico 12 abaixo em que três estudantes erraram a questão 1 devido à não aprendizagem desta noção. Cinco erraram a questão 2 e três erraram a quinta questão.

Gráfico 12 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 3ª subcategoria.



Alguns não resolveram certas questões por não se lembrarem da definição de função, conforme justificativa do estudante 36 das questões 4 e 5, vide figura 16 a seguir.

Figura 16 relato apresentada pelo estudante “36”



4) Use o Método da Substituição para calcular $\int x.\cos 3x^2\,dx$ e depois derive o resultado para verificar a sua resposta.

Espaço para resolução.

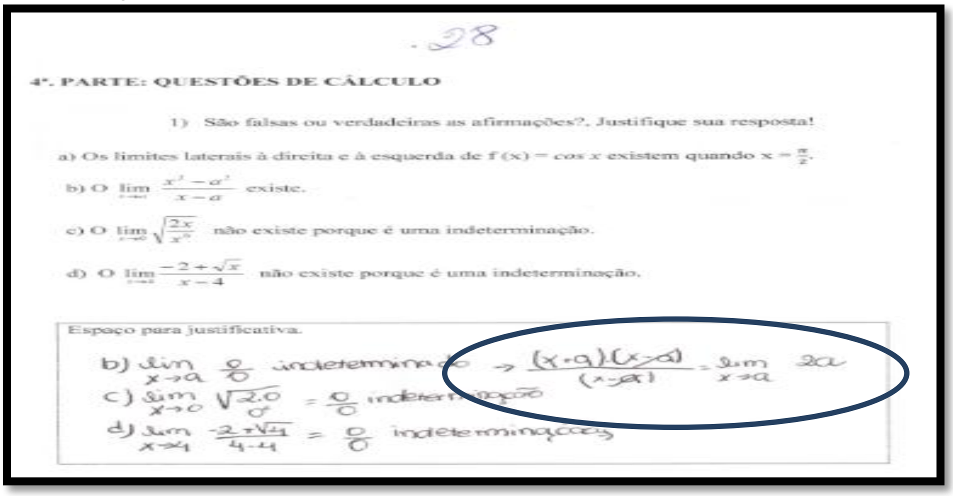
5) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine a área limitada pela curva $h(x) = 5x - x^2$ no intervalo [0, 3]

Espaço para resolução.

Justamente função e limite eu não me lembro muito bem. Desculpe

Observando a solução apresentada pelo estudante “28” da questão 1, na Figura 17, percebe-se que este estudante confunde as noções de função e limite, quando igualou $f(x) = x + a$, com o limite igual a $2a$, sendo que a primeira expressão $\frac{(x+a)(x-a)}{(x-a)}$ é uma função enquanto que a segunda ,no segundo membro, é determinação do limite da função no ponto a do domínio.

Figura 17 Solução da questão 1, apresentada pelo estudante “28”



28

4ª. PARTE: QUESTÕES DE CÁLCULO

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações?. Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de $f(x) = \cos x$ existem quando $x = \frac{\pi}{2}$.

b) O $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ existe.

c) O $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^2}}$ não existe porque é uma indeterminação.

d) O $\lim_{x \to 4} \frac{-2 + \sqrt{x}}{x - 4}$ não existe porque é uma indeterminação.

Espaço para justificativa.

b) $\lim_{x \to a} \frac{0}{0}$ indeterminado $\rightarrow \frac{(x+a)(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} 2a$

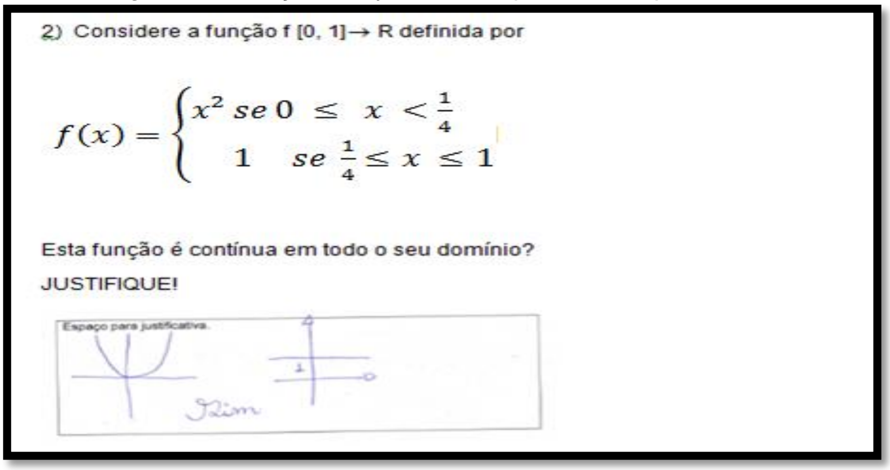
c) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2.0}{0^2}} = \frac{0}{0}$ indeterminação

d) $\lim_{x \to 4} \frac{-2+\sqrt{4}}{4-4} = \frac{0}{0}$ indeterminações

Dando continuidade, exibiremos um outro exemplo de erro com relação à função, do estudante 4, na resolução da questão 2 que envolve uma função definida por partes. Primeiramente ele traça um esboço de duas funções cada uma com partes dos intervalos do domínio, o que indica a falta de conhecimento de funções por partes. Além disso, não responde a questão, por não ter investigado a continuidade da função.

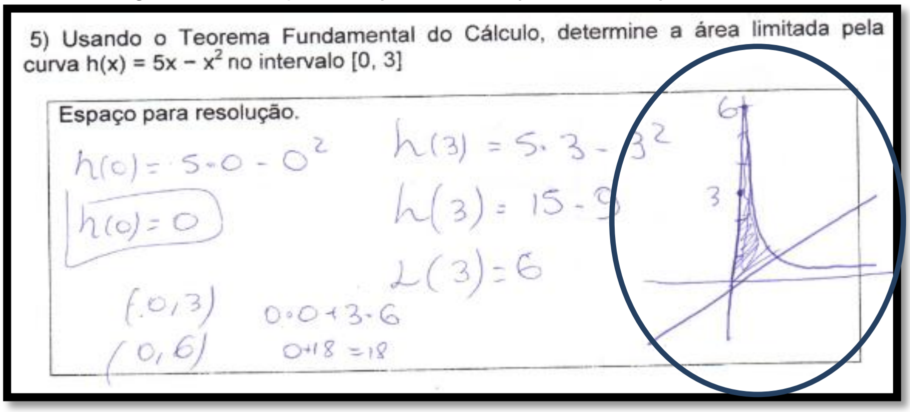
O que está de acordo com Cury (2007), quando afirma que: “Na aplicação de representação de uma função por mais de uma lei como exemplo [...] os alunos costumam ter dificuldades em representar cada “trecho” separadamente. (p.73)”.

Figura 18 Solução da questão 2, apresentada pelo estudante “4”



Outro exemplo de erro sobre função, se encontra na figura 19, na resolução do estudante 44, na questão 5, no qual constrói o gráfico de uma função que aparenta ser de uma exponencial e uma reta num mesmo sistema de eixos coordenados, além do fato de apresentar outro erro da subcategoria EI onde o mesmo substituiu os pontos mesmo antes de integrar a função h. Torre (2007) caracteriza este tipo de erro como: Erro por Monotrilho. “O Erro por Monotrilho consiste em passar diretamente de uma ideia para a seguinte, ignorando elementos ou diferenças importantes”. (TORRE, 2007, p.52)

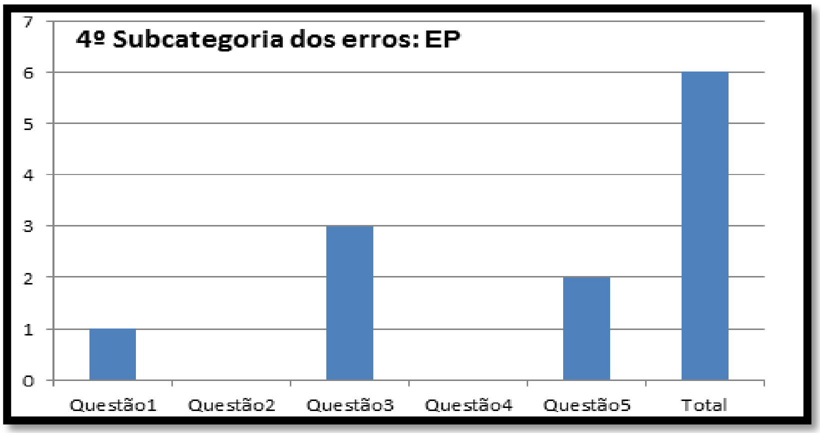
Figura 19 Solução da questão 5, apresentada pelo estudante “44”



4.1.4 Erros quanto às noções de potenciação (EP)

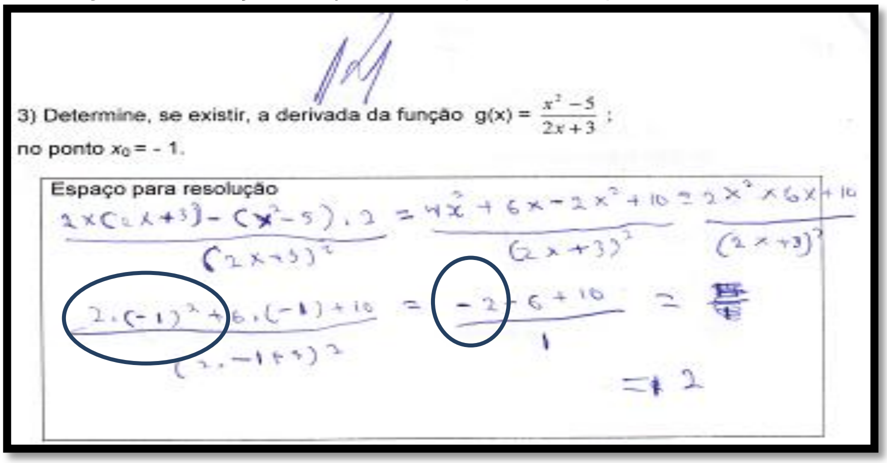
Observamos nesta subcategoria EP que num total de seis erros houve um erro na Questão 1, três na questão 3 e dois erros na questão 4.

Gráfico 13 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 4ª subcategoria.



Como ilustração, observe em destaque como exemplo na figura abaixo,.

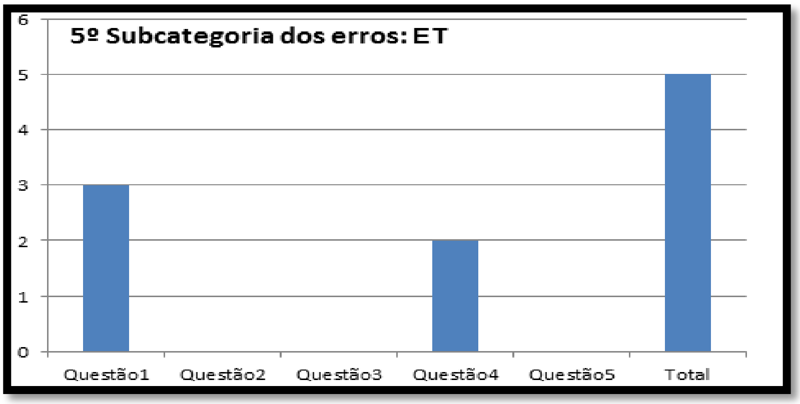
Figura 20 Solução da questão 3 apresentada pelo estudante “14”



4.1.5 Erros quanto à conceitos de trigonometria (ET)

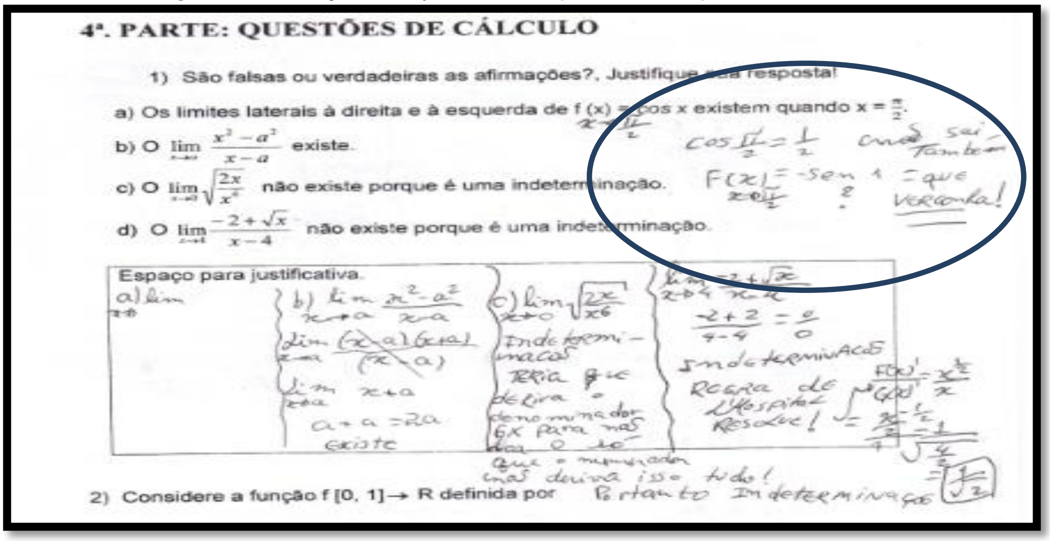
Vermos que nesta subcategoria houve um total de cinco erros, sendo três erros na Questão 1 e dois na Questão 2, acredita-se que os erros cometidos nestas questões pode ser pelo fato destas questões exigirem certos conhecimentos de trigonometria com relação às outras questões.

Gráfico 14 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 5ª subcategoria.



Um outro caso interessante a destacar, é o do estudante 47 cujos erros são relativos aos conhecimentos do Cálculo Diferencial e da Educação Básica, quais sejam: confundir as noções de limites e derivadas no item a da Questão 1, embora quando lhe foi solicitado apontar quais conteúdos que ele tinha mais dificuldades de aprender em Cálculo. (No questionário sobre o perfil dos estudantes pesquisados, ele respondeu “Cálculo é fácil, basta estudar a base” sendo que na resolução do item a) da Questão 1 que exige conhecimentos da trigonometria, o mesmo afirma que $cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$. Veja a figura 21:

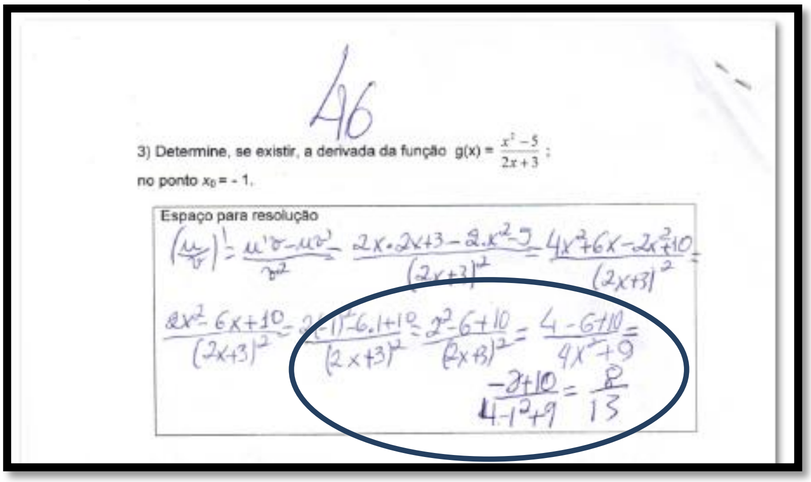
Figura 21 Solução da questão 1, apresentada pelo estudante “47”



4.1.6 Erros quanto aos produtos notáveis (EPN)

Nesta subcategoria, os estudantes 7 e 46 cometeram erros identicos (questão 3), pois não relizaram o produto adequadamente. Essa dificuldade existe em várias situações da educação Básica e como é o caso deste estudante com consequências no ensino superior.Vide figura 22 em que o estudante confunde o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos com a soma dos quadros de cada um deles:

Figura 22 Solução da questão 3, apresentada pelo estudante “46”



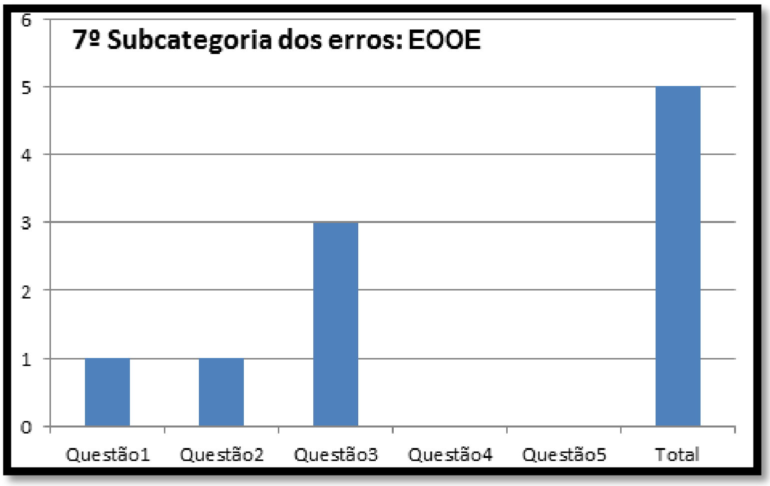
Sobre isto Cury (2007) aponta que:

> Tendo como base resultados de investigações sobre erros de estudantes de cálculo, envolve a dificuldade dos alunos em aplicar a regra da função quociente, não pela regra em si, mas pelos erros relacionados a conteúdos de Ensino Fundamental. Por exemplo, é frequente que os estudantes, quando solicitados a derivar a função dada por $f(x) = \frac{2x - x^2}{x-3}$,expressam a derivada como $f\,'(x) = \frac{2 - 2x \,.\, x - 3 - 2x - x^2 .\, 1}{(x-3)^2}$, esquecendo-se de usar parênteses para indicar o produto de binômios. Dessa forma ao reescrever a expressão para apresentar a resposta, indicam o produto $2x \,.\, x$, quando deveriam ter o produto $(2 - 2x).(x - 3)$. O que pode ser planejado para explorar esse erro de escrita matemática (a falta de parênteses) e levar os alunos a refletir sobre ele? (CURY, 2007, pag.89)

4.1.7 Erros quanto à ordem das operações a serem efetuadas (EOOE)

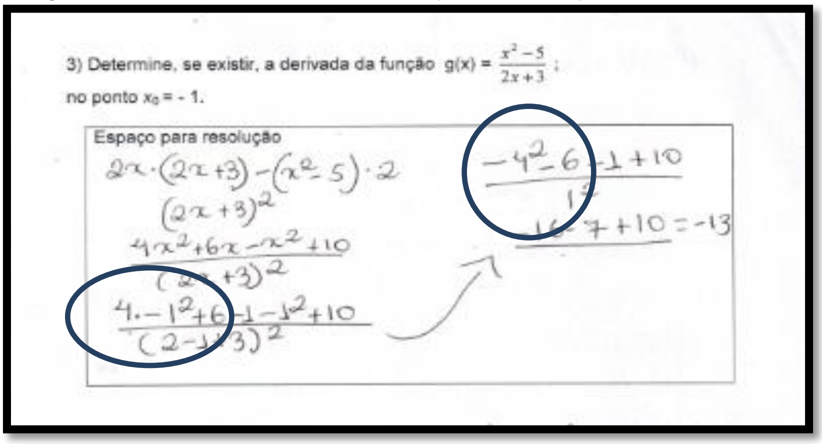
Um tipo de erro que se pode encontrar tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior é o da subcategoria EOOE. Em nosso trabalho, cinco estudantes que tentaram resolveram as questões, não se atentaram para a hierarquia de resolução de expressões numéricas que é efetuar, nesta ordem, as operações de radiciação e/ou potenciação, multiplicação e/ou divisão, soma e/ou subtração. Três estudantes erraram na questão 3, um estudante na questão 1 e um na questão 2.

Gráfico 15 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 7ª subcategoria.



Um dos casos foi o do estudante 18 que na questão 3, pois o mesmo esqueceu de colocar os parênteses ao substituir o valor de – 1 na expressão x^2 e em seguida ele multiplica o 4 por -1^2 resultando $-4^2 = -16$. Vide figura 23. Como apontou Cury (2007) este seria um exemplo para ser usado em sala de aula para rever este tipo de postura na resolução de problemas sem a devida validação dos resultados obtidos.

Figura 23 Solução da Questão 3, apresentada pelo estudante “18”



4.2 ECDI - Erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral

4.2.1 Erros quanto às definições e teoremas referentes à limites (EL)

Historicamente o Método da Exaustão comumente creditado a Eudoxo (370 a.C) é considerado como precursor do Cálculo. Éle um método que consiste em encontrar a área de uma figura inscrevendo-se nela uma sequencia de polígonos inscritos ou circunscritos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Se a sequencia for corretamente construída, a diferença entre o n-ésimo polígono e a figura que os contém,tornar-se-á arbitrariamente pequena à medida que n se torna muito grande. Quando essa diferença se torna arbitrariamente pequena, os valores possíveis para a área da figura são sistematicamente "exauridos" pela limitação inferior ou superior imposta pelos polígonos inscritos ou circunscritos. Os passos de Eudoxo foram seguidos por Arquimedes (287-212 a.C). Segundo Boyer (1993, p.57), “Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo [...], que de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espirito ao cálculo atual”. (BOYER, 1993)

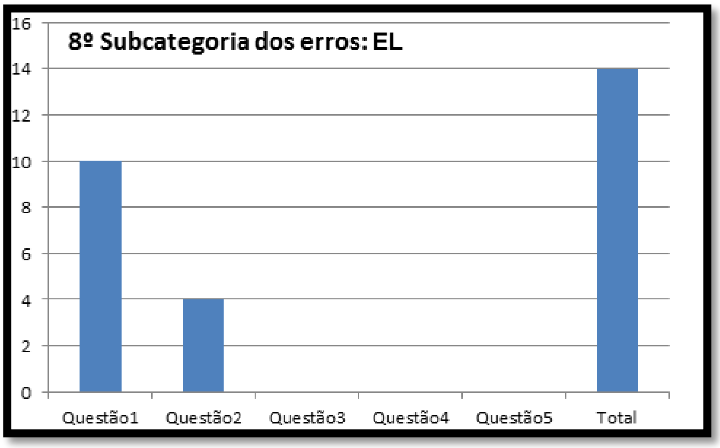
Coube a Isaac Newton (1642-1727) e a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) a formalização e organização das ideias do Cálculo Diferencial e Integral construídas através dos séculos. Ambos, de forma independente, realizaram estudos nessa área e portanto, ambos são considerados os criadores do Cálculo Diferencial e Integral. Boyer (1993, p.17), também afirma que nenhuma invenção nova e específica foi necessária, pois as técnicas estavam à mão. O que faltava era um senso de universalidade das regras. Quem primeiro percebeu isso foi Newton, em 1665-66, e depois independentemente Leibniz, em 1673-76. Assim, ver-se que essa significativa ferramenta foi criada ao longo dos séculos devido a necessidade de desenvolvimento da humana. (BOYER, 1993)

Nesse sentido Silva (2010) ainda aponta que:

> Podemos dizer que as questões abertas ou modelos preliminares do cálculo surgiram da necessidade de resolver problemas práticos gerados no contexto da sociedade e da cultura, bem como nascidos da curiosidade dos filósofos e cientistas que não se conformaram em estarem imersos na natureza e não conseguirem compreendê-la. Desse modo, decifrar os enigmas da natureza, os fenômenos do céu e da terra, resolver problemas de natureza prática, se constituíram em desafios que os cientistas e filósofos não se furtaram e solucionar. (SILVA, 2010, p.46).

Segundo Silva (2010), a criação da matemática dos povos antigos se deu na práticas, pois os poucos registros existentes contribuem para essa concepção e a criação sistemática do Cálculo Diferencial e Integral se deu no século XVII, criamos a categoria de erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral-ECDI. Dentro dessa, incluímos a subcategoria Erros de Limite-EL, de modo que 10 dos pesquisados que resolveram a Questão 1 e, dois que resolveram a Questão 4, se enquadram nessa sub categoria. Conforme o gráfico 16.

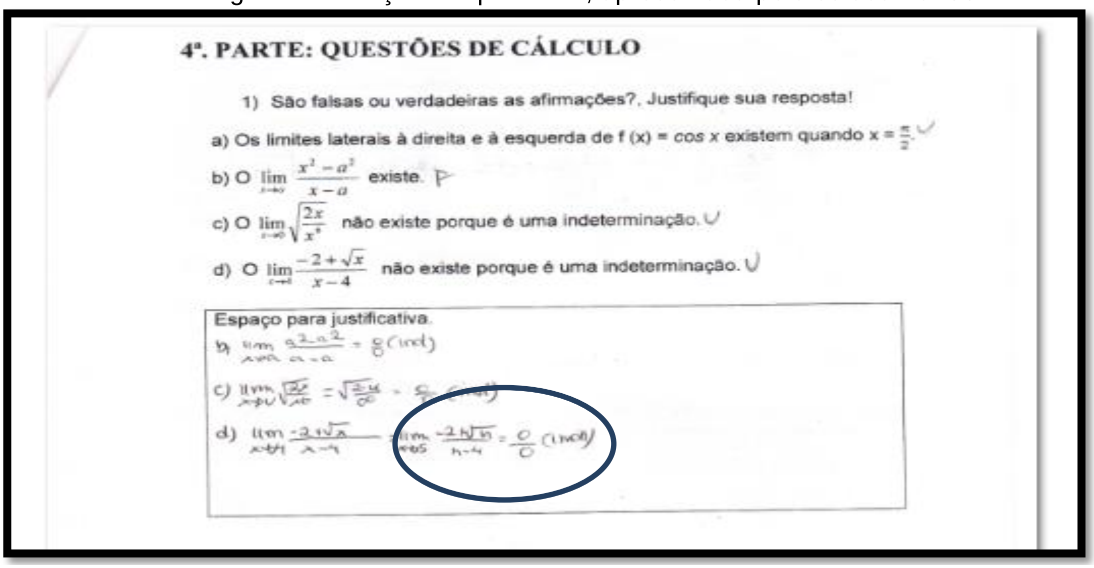
Gráfico 16 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 8ª subcategoria.



Ressaltamos que com base nas respostas dos questionários que na Questão 1, onde o estudante deveria decidir e justificar se as afirmações matemáticas eram falsas (F) ou verdadeiras (V), uma grande quantidade dos pesquisados ao responderem V ou F, responderam sim ou não, destacando falta de atenção ou de hábito para resolver este tipo de questão.

A próxima figura contem a resolução do estudante 56 da Questão 1, em que o mesmo apresenta falta de domínio de conceitos e definições de Limite, pois no item a) o estudante afirma que a questão é verdadeiro e sem justificá-la; nos itens b) e d) ele substitui, o valor pelo qual x está tendendo e justifica que o limite não existe antes de remover a indeterminação e no item c) ele responde que a afirmação é verdadeira. Embora a resposta esteja correta, porém, raciocínio está incorreto. A indeterminação em questão trata-se de $\frac{1}{0}$ e não de $\frac{0}{0}$, como o estudante justificou sua resolução da questão.

Figura 24 Solução da questão 1, apresentada pelo estudante “56”



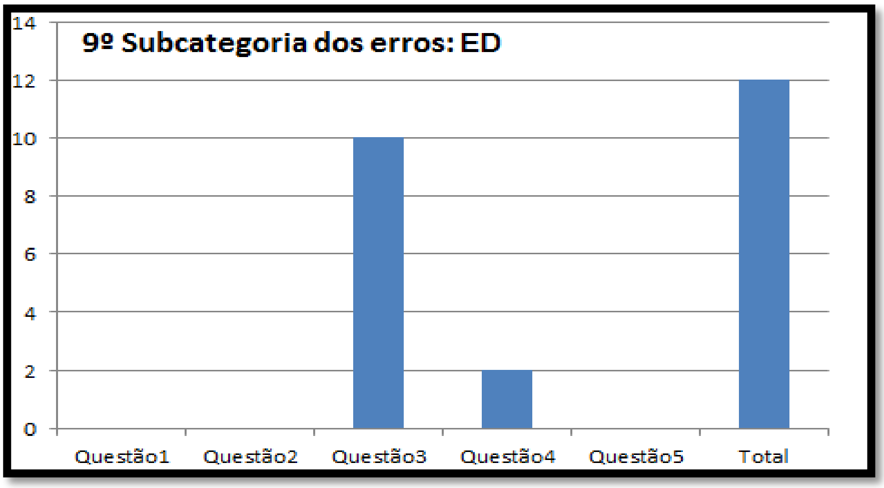
4.2.2 Erros quanto à regras de derivação (ED)

Observando a História da Matemática em relação ao surgimento do Cálculo nota-se que Stewart (2006, p. 411) citando Boyer (1987), afirma que:

> Algumas vezes lemos que os inventores do cálculo foram sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Mas sabemos que as ideias básicas por trás da integração foram investigadas há 2.500 anos pelos antigos gregos, Tais como Eudóxio e Arquimedes, e que os métodos para encontrar as tangentes foram inventadas por Pierre Fermat (1601 – 1665) e Isaac Barrow (1630 – 1677), entre outros. Barrow, professor de Newton em Cambridge, foi o primeiro a entender a relação inversa existente entre a diferenciação e a integração. O que Newton e Leibniz fizeram foi usar essa relação na forma do Teorema Fundamental do Cálculo, a fim de desenvolver o cálculo dentro de uma disciplina matemática sistemática. É esse sentido que é atribuída a Newton e a Leibniz a invenção do cálculo. (BOYER (1987) *apud* STEWART(2006),p.411).

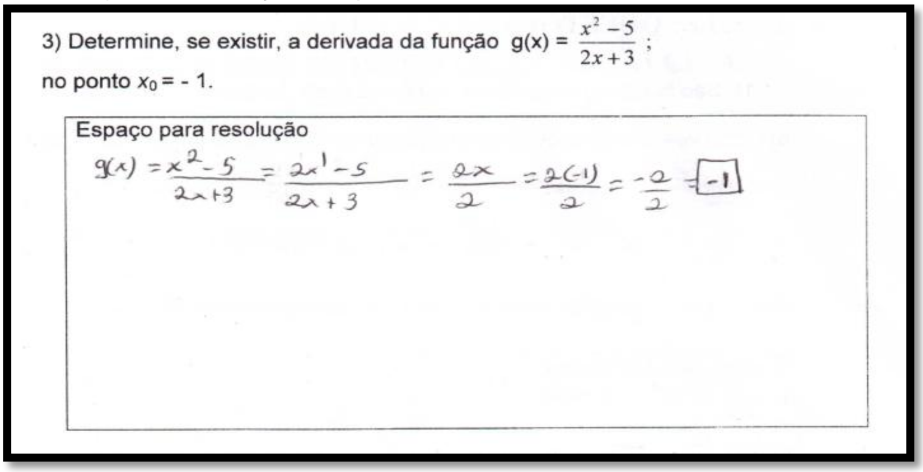
Nesta subcategoria, 10 dos pesquisados erraram a resolução da questão 3 e dois na resolução da questão 4.Veja o gráfico 17.

Gráfico 17 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 9ª subcategoria.



Vários dos estudantes pesquisados cometeram o erro de aplicar o ponto x_0 = - 1, antes de derivar. Por exemplo, observe como os estudantes 57 e 34 resolveram a questão 3, conforme figuras 25 e 26.

Figura 25: Solução da questão 3 apresentada pelo estudante “57”

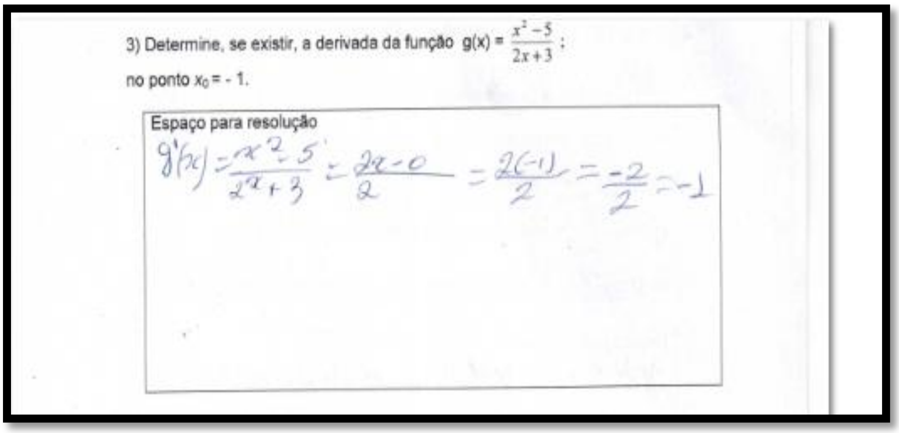


3) Determine, se existir, a derivada da função g(x) = $\frac{x^2-5}{2x+3}$;
no ponto x_0 = - 1.

Espaço para resolução

$g(x) = \frac{x^2-5}{2x+3} = \frac{2x^1-5}{2x+3} = \frac{2x}{2} = \frac{2(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

Figura 26: Solução da questão 3, apresentada pelo estudante “34”, cometendo o mesmo tipo do erro do estudante “57”



3) Determine, se existir, a derivada da função g(x) = $\frac{x^2-5}{2x+3}$;
no ponto x_0 = - 1.

Espaço para resolução

$g'(x) = \frac{x^2-5}{2x+3} = \frac{2x-0}{2} = \frac{2(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

”

4.2.3 Erros devido à falta de domínio de conceitos de integral (EI)

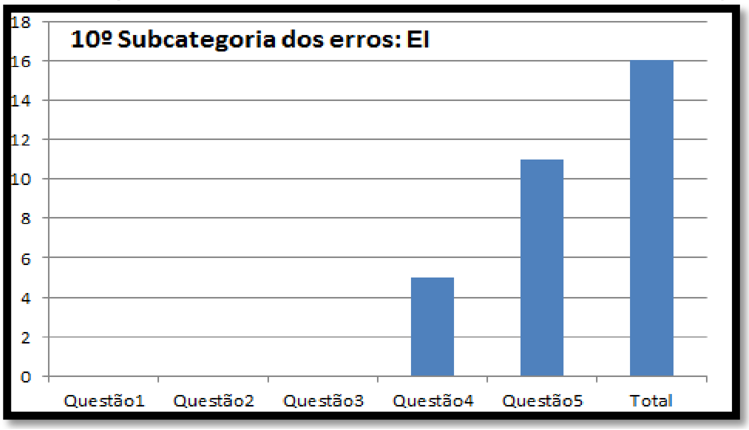
Com relação a essa última subcategoria referente a ECDI, é relevante destacar o que disse Boyer (1993):

> Se Eudóxio ressurgisse no século XX, certamente teria dificuldades em entender esses descendentes do método de exaustão; mas ele se sentiria completamente a vontade com respeito pelo menos a um aspecto da matemática de hoje. O empenho pela precisão de pensamento do qual surgiu o antigo Cálculo Integral encontra hoje um correspondente na insistência comparável quanto ao rigor em análise. Eudóxio compartilharia o sentimento de orgulho sugerido pelo uso constante da expressão “O Cálculo”, que distingue essa matéria dos cálculos comuns, muitas vezes erroneamente considerados pelos leigos como sendo a preocupação dos matemáticos. (BOYER, 1993, p.28)

Este autor se refere à organização, ao formalismo, ao sequenciamento e a precisão das ideias que o Cálculo Diferencial e Integral apresenta atualmente.

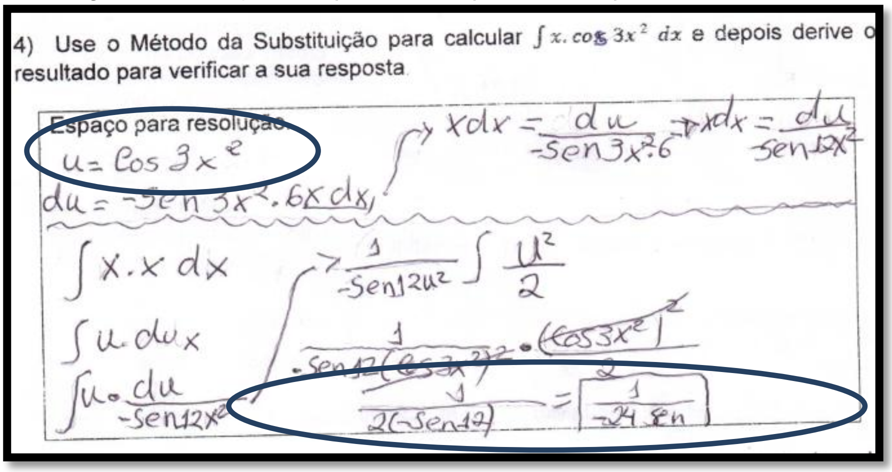
No Gráfico 18 em relação a resolução, pode-se observar que os erros de 16 dos pesquisados se enquadram nessa subcategoria, na questão 4 e 5, sendo cinco em relação à questão 4 e 12 a questão 5.

Gráfico 18 Relaciona cada uma das questões com a quantidade de erros cometidos pelos estudantes referentes à 10ª subcategoria.



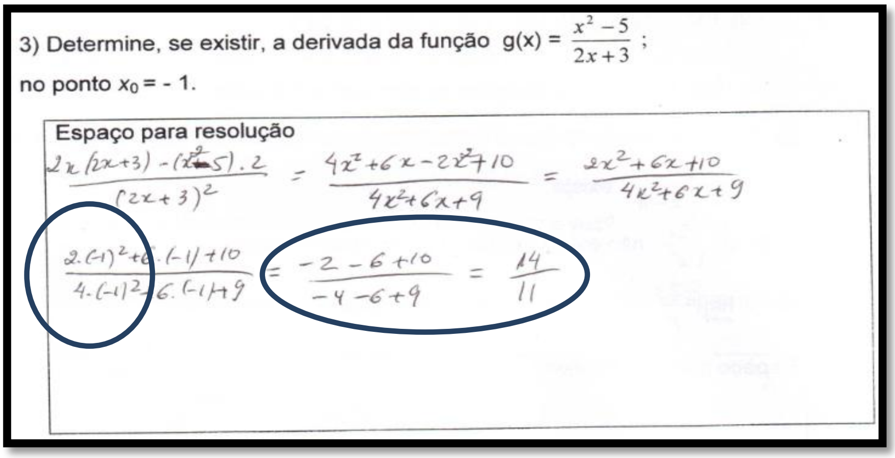
O próximo exemplo se trata a resolução do estudante 32 na questão 4, onde foram detectados dois tipos de erros: a primeira subcategoria EI (conceitos de integral) em que o estudante se lembra do método de integração por substituição, entretanto escolhe a função $u = cos3x^2$ ao contrário de $u = 3x^2$, que é o adequado para a resolução. O outro caso ocorreu em relação a categoria EEB (erros do ensino básico), enquadrando-se na subcategoria ET (erros de trigonometria), quando efetuou o produto erroneamente $2(-sen12) = -24sen$, no qual multiplicou $2.(-12)$, sendo o correto $-2sen\,12$. Veja Figura 27.

Figura 27 Solução da questão 4, apresentada pelo estudante "32"



O próximo caso (Figura 28) se refere aos erros de resolução que se encontram em mais de uma subcategoria. Citamos o caso do Estudante 11, cuja resposta se enquadra na primeira e na quarta categorias (ESA – erro de soma algébrica e EP- erro de potenciação). Em sua resposta à questão 3 sobre derivadas, observa-se que o mesmo efetuou a soma algébrica da fração de modo errôneo, a saber, no numerador ele efetuou $-2 \ -6 + 10 = 14$, ou seja, usou de forma errada a regra da soma algébrica de números relativos com sinais diferentes. O mesmo ocorre com o denominador $-4- 6 + 9 = 11$. Além disso, detectou-se o erro de potenciação, $(-1)^2 = -1$, conteúdos estes que são ensinados no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Figura 28 Solução da Questão 3, apresentada pelo estudante “11”


3) Determine, se existir, a derivada da função g(x) = $\frac{x^2-5}{2x+3}$;

no ponto x_0 = - 1.

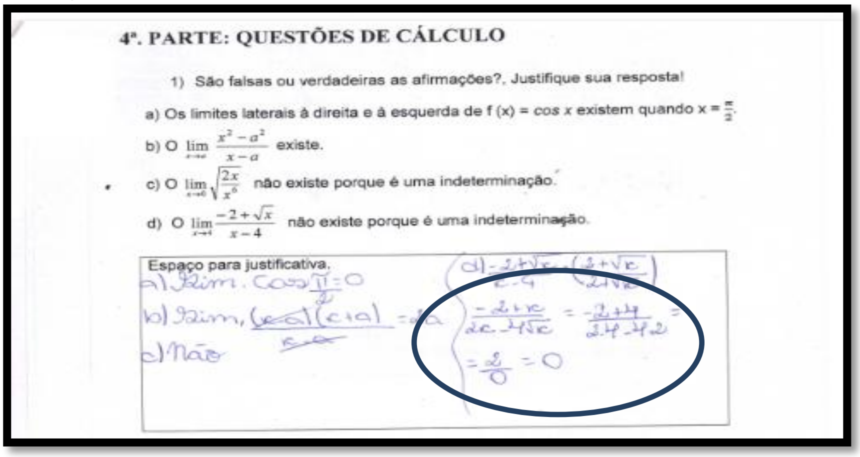
Espaço para resolução

$\frac{2x(2x+3)-(x^2-5).2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+6x-2x^2+10}{4x^2+6x+9} = \frac{2x^2+6x+10}{4x^2+6x+9}$

$\frac{2.(-1)^2+6.(-1)+10}{4.(-1)^2+6.(-1)+9} = \frac{-2-6+10}{-4-6+9} = \frac{14}{11}$

Outro caso é o erro do estudante 35 cuja resolução da Questão 1, item d) se enquadra nas categorias EEB (erros do ensino básico) e ECDI (erros de cálculo diferencial e integral). O erro na categoria EEB se refere à realização de divisão por zero, a saber, $\frac{2}{0} = 0$, contrariando a definição de divisão euclidiana ou do Algoritmo de Euclides que afirma que não existe divisão por zero. No entanto, nessa mesma resposta detectou-se outro erro na categoria ECDI em que o estudante iguala a noção de função à determinação da imagem em um ponto, conforme Figura 29. Importante ressaltar que a expressão do primeiro membro é uma função que está igualada à determinação do limite quando x tende para 4, o que indica uma não compreensão da noção de limite como uma aproximação da imagem de um ponto com a noção de função, ou seja, confusão entre objetos matemáticos numéricos e algébricos.

Figura 29 Solução da Questão 4, apresentada pelo estudante “35”


4ª. PARTE: QUESTÕES DE CÁLCULO

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações?. Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de f (x) = *cos x* existem quando x = $\frac{\pi}{2}$.

b) O $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$ existe.

c) O $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ não existe porque é uma indeterminação.

d) O $\lim\limits_{x \to 4} \frac{-2+\sqrt{x}}{x-4}$ não existe porque é uma indeterminação.

Espaço para justificativa.

a) lim. cos $\frac{\pi}{2}$ = 0

c) Não

d) $\frac{-2+\sqrt{x}}{x-4} \cdot \frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}$

$= \frac{-2+4}{2.4-4.2} = \frac{2}{0} = 0$

Nossa análise dos resultados evidenciam as dificuldades que os estudantes apresentaram em relação aos conteúdos matemáticos da Educação Básica e do Ensino Superior, na resolução de exercícios do Cálculo Diferencial e Integral. A esse respeito,

Cury (2007) se pronuncia assim:

> [...] é primordial repensar o ensino de Cálculo para alunos ingressantes em cursos superiores, empregando metodologias e recursos variados e, especialmente destinando períodos para atendimento individual, seja com monitores, seja com bolsistas de Iniciação Científica, ou até mesmo com alunos de mestrado, que podem realizar seus estágios curriculares com atividades voltadas para alunos das disciplinas matemáticas iniciais dos cursos de graduação. (CURY, 2007, p.61.)

A causa da grande dificuldade que os estudantes enfrentam na aprendizagem destas disciplinas pode ser amenizada com a criação de cursos com conteúdos matemáticos da Educação Básica, na aplicação de atividades, de metodologias, de novas estratégias e de recursos diversos, num intuito de tornar a aprendizagem destas disciplinas significativa, para atender as necessidades cognitivas dos aprendizes.

De acordo com Cury (2004), muitos professores de matemática se deparam com a situação de alunos reclamando sobre a correção de certa questão de uma prova, ao alegar que tinham errado “somente o sinal” numa expressão numérica, como se este fator não fosse preponderante na leitura do resultado. Porém, conforme a autora, o professor precisa analisar juntamente com os alunos sobre aquele erro na validação da resposta, e, por conseguinte tal erro é um indicador de dificuldades de acomodação de conhecimentos anteriores que não foram sedimentados pelos alunos naquele momento.

Para a autora:

> Um erro que parece pequeno e sem importância aos olhos dos alunos, como é o erro de sinal, pode trazer inúmeras dificuldades embutidas, em operações elementares ou na aplicação de fórmulas especificas. Entender qual é o problema, discuti-lo com os alunos, partir das respostas para construir novas perguntas, tudo isso pode esclarecer problemas não resolvidos que se arrastam, às vezes, desde as séries iniciais. (CURY, 2004, p. 111).

De uma forma geral, é salutar aprender com erros em qualquer área de atuação humana, o que torna esse tema um relevante objeto de estudos na Educação Matemática. As atitudes em relação à disciplina não são diretamente observadas, mas sim inferidas, a partir de uma conduta. Normalmente os erros são considerados como fracasso na disciplina e não uma fonte reguladora do conhecimento como enfatizam Lima *apud* Borasi.

> [...] uma aprendizagem mais profunda pode ser alcançada pelos alunos quanto aos conteúdos matemáticos, caso os estudos se de em a partir dos próprios erros ou daqueles que foram cometidos por outros. E, se desta forma acontecer, as discussões em sala de aula sobre erros podem gerar aprendizagens muito ricas e significativas. (BORASI, 1985 *apud* LIMA 2010, p. 57)

Assim, além de ser uma metodologia de pesquisa, a análise das respostas passa a ser entendida como uma metodologia de ensino, pois de acordo com Borasi (1985), citado por Lima (2010, p.58), “partindo dos erros que foram detectados pode-se levar os alunos a fazerem questionamentos de suas respostas para, desta forma, construírem o próprio conhecimento”. Mas para que o aluno fique a vontade para discussão e consequentemente tomar proveito de seu próprio erro o professor deve manter um ambiente escolar favorável e adequado para tal discussão.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1988), na aprendizagem escolar o erro é inevitável, e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para se buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativa, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Intuitivamente, o aluno está utilizando uma técnica milenar, denominada de “regra da falsa posição” usada pelos egípcios e hindus por volta de 1850 a 1650 a. C.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho diagnosticou os erros cometidos na resolução de questões com conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral de 64 estudantes de Zootecnia e Engenharia Agrônoma da Universidade Estadual de Montes Claros que haviam cursado a disciplina Cálculo 1. Também teve o intuito de verificar quais conteúdos matemáticos apresentaram maiores dificuldades a nível da Educação Básica. Estes objetivos foram alcançados com ampla listagem de erros, que foram categorizados segundo Cury (1995, 2004, 2007) e com análise do material produzido, diagnosticamos que uma boa parte desses erros se referiram à não apreensão de conteúdos da Educação Básica, com destaque para a definição de funções.

Uma leitura matemática e uma leitura histórica do conceito de função nos permitem entender que a depender da escolha didática de alguns livros o conceito de função é capaz de gerar noções opostas e complementares com a própria lei.

Este é um fator que pode proporcionar dificuldades de aprendizagem desses conteúdos; problemas estes decorrentes, muitas vezes, porque professores e alunos se deixam influenciar pelo conteúdo do livro didático, mesmo quando contraria seus conhecimentos e convicções. Assim estudar o desenvolvimento do processo evolutivo do conceito de função em muito contribuirá na compreensão do conceito e permitirá uma conexão entre a história diferenciada deste conceito e a sua abordagem em livros-textos. Isto em muito ajudará na percepção com mais sagacidade dos erros, das concepções presentes na estruturação e produção de alguns desses livros. Além disso, a linguagem formalista axiomática e centrada na figura do professor deve ser abandonada. O professor de matemática como mediador e facilitador da aprendizagem, deve propor atividades significativas com o uso da história da matemática como recurso metodológico a fim de proporcionar a autonomia do seu aluno na busca da construção do seu próprio conhecimento matemático.

Enquanto professor de Cálculo, o autor deste trabalho foi testemunha ocular das frustrações e as angústias que muitos estudantes sentiam ao cursarem a disciplina Cálculo 1. Contudo, também foi observado uma melhora na oportunidade em que foi oferecida uma disciplina de pré-cálculo, cuja ementa contemplava os conteúdos matemáticos da Educação Básica, que são pré-requisitos para o Cálculo Diferencial e Integral 1, mas que também servia como alicerce para outras disciplinas, a exemplo de Cálculo 2, 3, Álgebra Linear, Cálculo Numérico, dentre outras disciplinas componentes da grade curricular dos cursos de engenharia da Área de Exatas.

Ao encontro dos objetivos expostos na introdução do presente trabalho, desenvolvemos no primeiro capítulo uma abordagem de algumas concepções de pesquisadores sobre a análise de erros no âmbito pessoal, escolar, com atenção para o erro no ensino aprendizagem em Matemática pois tal método deve se constituir num aliado para as discussões sobre as dificuldades apresentadas no ensino e aprendizagem na prática escolar não somente em Matemática mas em todas as áreas de conhecimento e em todos os níveis de ensino. Na concepção de Torre (2007), o professor pode usar o erro como um componente desse processo em suas aulas. Na busca de uma justificativa, o autor reforça que “o erro não é um fim, não pode sê-lo: é **uma estratégia**" (grifo do autor) TORRE, (2007, p. 10). Em consonância com Pinto (2009), quando diz que "o fato de o erro apresentar-se como uma oportunidade didática de o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros" (PINTO, 2009, p.11.). Um exemplo desse pensamento pode ser ilustrado numa situação de ensino de gramática: o professor de português do ensino fundamental ao abordar sobre g*ramática*, que trata sobre a regulagem da linguagem e o estabelecimento de padrões de escrita e de fala de uma língua, pode propor aos seus alunos para realizarem uma análise de textos de recortes de jornais, de revistas ou até mesmos de textos disponíveis na internet para detectar os erros gramaticais cometidos pelos autores dos textos. A discussão em sala desses erros além de proporcionar na prática a verificação *in loco* do conhecimento ensinado é também um regulador alternativo de avaliação diferenciada que normalmente é realizada por meio da prova escrita.

A análise de erros usada de forma coerente pelos professores contribui para o bom desenvolvimento no processo ensino e aprendizagem escolar como enfatiza Engler (2004), sendo citado por Lima (2010):

> O papel que nós, como professores, damos para o erro e a forma na qual trabalhamos, influenciam na aprendizagem e no desempenho de nossos alunos. Se quisermos uma aprendizagem significativa, a prioridade é a compreensão e tratamento do tema em conjunto, professores e alunos. (ENGLER 2004, apud LIMA 2010, p.23).

Nessa direção, uma aprendizagem significativa não ocorre se não existe uma estreita relação entre professor e alunos, pois o professor é o mediador entre o conhecimento e seus aprendizes. Por exemplo, quando um aluno verifica sua nota ou conceito em uma atividade avaliativa, certamente observará o seu desempenho e o professor deve estar aberto para discussão pós-avaliação. Esta é uma grande oportunidade para que seus alunos revejam conhecimentos, seja (re) aprendê-los, seja para consolidar conceitos inerentes à atividade.

Na identificação de erros no ensino e aprendizagem em Matemática Engler (2004) citado por Lima (2008, p.61) apresenta uma categoria contendo quatro tipos de erros que ocorrem na prática escolar: erros induzidos por linguagem ou por notação, erros na restauração de um esquema anterior, erros produzidos por uma representação inadequada de regras que as produzem, erros por dificuldades na obtenção de informações.

Um exemplo de categoria seria "erros induzidos por linguagem ou por notação" é o caso de uma questão de uma prova de Matemática aplicada no oitavo ano de uma escola da Educação Básica Fundamental, tendo como enunciando: "Determine o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de $\frac{a+b}{a-b}$ e $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ onde a e b são não nulos e $a \neq$ b". A resposta esperada pelo mestre é $a^2 - b^2$.

Porém, ressalta-se que o enunciado da questão está inadequado, pois a noção de MMC é estudada nas disciplinas de Estruturas Algébricas nos cursos de graduação em Matemática, que na verdade trata-se de uma propriedade do anel dos números inteiros e do anel dos polinômios. Assim se alguns (ou poucos corajosos) alunos respondessem “O enunciado da questão está errado” ou “Não é possível resolver a questão, pois o MMC é uma propriedade de números inteiros e de polinômios, e as frações da questão não são elementos desses dois conjuntos, pois são frações algébricas”. Seriam considerados alunos “*non gratos*”, pois ousaram corrigir a prova do mestre que a única autoridade detentora do poder do conhecimento matemático. No entanto, a resposta esperada $a^2 - b^2$ seria considerada correta pelo mestre, pois o mesmo não apreendeu em suas aulas de álgebra, que as expressões $\frac{a+b}{a-b}$ e $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ não são polinômios e sim frações algébricas, que por definição são expressões algébricas cujos denominadores são polinômios. Também, que o conceito de MMC pode ser utilizado, por exemplo, para se determinar frações equivalentes, para se efetuar a soma algébrica de frações, para se determinar o múltiplo comum de números inteiros ou de polinômios. Neste caso, o enunciado correto da questão seria: “Determine o MMC *dos denominadores das frações algébricas* $\frac{a+b}{a-b}$ e $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ com a e b não nulos e $a \neq b$”. Mas como foi o mestre quem elaborou a prova..., o comportamento dos alunos é passivo, pois a concepção em vigor e *faça tudo que o mestre mandar pois o mestre nunca erra*.

No Capítulo 2 diagnosticamos que 84% dos estudantes estudaram o Ensino Médio em escolas públicas e 16% em escolas particulares. Também que, oito alegaram o motivo de cursar engenharia por gostar de disciplinas na área de exatas, isto é 12%; e em contrapartida 23%, ou seja, 15 estudantes optaram pela engenharia por estarem trabalhando na área (zona rural), o que supõe que aparentemente os mesmos não tiveram dificuldades de aprendizagem em matemática no nível básico.

Porém, esta hipótese não se sustenta, pois 33% deles estavam cursando Cálculo 1 pela segunda vez, por terem sido reprovados na primeira vez que cursaram a disciplina.

Muito além de uma narrativa ancorada na aprendizagem em Matemática, os aspectos evocados na análise das resoluções de questões com conteúdos do cálculo diferencia e integral, no Capítulo 3 destacamos erros que os estudantes que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na resolução de cinco questões com conteúdos ensinados nestas disciplinas, a saber questão 1 se refere a Limite, a questão 2 é sobre Continuidade, a questão 3 é sobre Derivada, a questão 4 sobre Integral e a questão 5 é relativa ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Num entrelaçamento entre História da Matemática com os resultados do desempenho dos estudantes na resolução das questões a construção das análises estão apresentadas no último capítulo. Com respaldo em Cury (2007) foram construídas duas categorias de erros, a saber, EEB - Erros cometidos pela não apreensão de conceitos matemáticos da Educação Básica e ECDI - Erros ocorridos pela não apreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Na primeira categoria EEB foram computados 38% de erros e a segunda categoria, ECDI obteve 42% de erros.

No que se refere à categoria EEB, os erros mais representativos nas questões do cálculo diferencial e integral ocorreram quando a resolução dependia dos conhecimentos de funções e de soma algébrica de números relativos.

A análise de erros tem um futuro promissor e interessante no âmbito da educação matemática. Essa é a nossa opinião que também é compartilhada por Cury (2007), quando se pronuncia assim:

> Questiono a falta de discussões sobre erros em cursos de formação de professores. [...] As pesquisas sobre erro na aprendizagem Matemática devem fazer parte da formação de futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciados estarão refletindo sobre o processo nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade. (CURY, 2007, p. 95).

De tudo que aqui foi exposto, é conhecido por todos que existem variados trabalhos na educação com propostas para sanar as dificuldades apresentadas no ensino e aprendizagem em matemática em todos os níveis de ensino. A maioria das pesquisas analisa tais dificuldades no âmbito do nível do ensino fundamental e médio. O diferencial deste trabalho é que o mesmo percorreu o caminho inverso: a verificação *in loco* de problemas de aprendizagem de conhecimentos matemáticos supostamente apreendidos no Educação Básica através da aplicação destes nas disciplinas de cursos no nível superior. Os resultados obtidos revelaram que mesmo tendo escolhido fazer curso na área de exatas, o desempenho dos estudantes na resolução de questões do cálculo diferencial e integral deixou a desejar, o que indica que o mau desempenho nessas disciplinas não é devido aos conteúdos intrínsecos, mas sim pela não acomodação de conhecimentos da Educação Básica.

No entanto vale ressaltar que, o uso da análise de erros é um caminho muito rico não apenas no ramo da educação, mas em toda atuação humana e de forma alguma deve ser negligenciado na prática escolar em todos os níveis de ensino.

No intuito de amenizar o problema fica como sugestão a necessidade do oferecimento de uma disciplina precedente ao Cálculo Diferencial e Integral, com conteúdos da Educação Básica a fim de minorar o mau desempenho nestas e outras disciplinas da área de exatas.

Esperamos ter atingido os objetivos propostos que culminaram na realização desse trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard, BIVENS, Irl, DAVIS. Cálculo, V1. 8ed.Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARICHELLO, Leonardo*:* Análise de Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial em Ambiente de Interação Escolar*,* Dissertação (mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas Rio Claro: Universidade Estadual Paulista. Rio Claro-SN: 2008

BOYER, Carl Benjamim; Trad; Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*,* São Paulo: 1992.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental*.* Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1988. – Programa Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1988.

CARMO, Juliana R. do; PANTOJA, Lauana N. da G.; SILVA, Dayala A. da; LOPES, Jocy M. *Identificação dos fatores que causam o baixo desempenho em cálculo i no curso de engenharia de alimentos da universidade federal do Pará,* 2012. Disponível em: http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2012/artigos/104419.pdf. Acesso em: 24 abr. 2015.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva Histórica e perspectivas atuais da analise de erros em Educação Matemática*. Revista Zetetiké***.** Ano 3. no. 4/1995. Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação.

CURY, H. N. “Professora, eu só errei um sinal!”: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p.111 – 138.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas. Belo Horizonte, MG, Editora Autêntica,2007.

ENGLER, Adriana *et. al*. Los ErroresenelAprendizaje de Matemática. *Revista Premisa de laSociedad Argentina de Educación Matemática***,** v. 6, n. 23, p.23-32, nov. 2004.

EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. Tradução: Higino H. Domingues – Campinas, SP; Editora da Unicamp, 2004.

FINNEY, Ross L. Cálculo de George B.Thomas, v. 1. 10 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

FIORENTINO, Dário. Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos,3ed. Coleção Formação de professores.2006 Tradução de: A nintroduction to thehistory of mathematics.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; v. 1; 10 ed.- Rio de Janeiro. Associação instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

LIMA, Duílio Tavares de. *Erros no processo de resolução de equações do 1º grau*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

LIMA, Manolita Corrêa. *A Engenharia da Produção Acadêmica.* 2ª Ed. São Paulo. Saraiva, 2014.

LEITHOLD, Lovis. O cálculo com geometria analítica, V1.3 ed. São Paulo: HarbraLtda, 2002.

LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação da Aprendizagem. 19 ed - São Paulo: Cortez, 2008.

MOREIRA, Marco Antonio. Metodologias de Pesquisa de Ensino, 1ed. São Paulo: Editora Livraria da Física 2011.

OLIVEIRA, Alexandre Melo de. Análise de erros em textos escritos por aprendizes teutofônicos de português como língua estrangeira. Dissertação (Mestrado em Letras e Linguística: Linguística) – Faculdade de Letras, Programa de Pós Graduação em Letras e Linguística, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2011.

PERFIL DE ESTUDANTES QUE INGRESSARAM NOS CURSOS DE ENGENHARIA NO BRASIL. Disponível em: http://www.abres.org.br/v01/stats/. Acesso em; 24 abr. 2015.

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO. Padrão Puc Minas de Normalização: Normas da ABNT para apresentação de trabalhos científicos, teses, dissertações e monografias, Pontífica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte 2010.

PINTO, Renata Anastácio. Erros e dificuldades no ensino de álgebra: O tratamento dado por professores da 7ª série em aula. 1997. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas.

PINTO, Neuza Bertoni. O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da Matemática Elementar. Campinas, SP: Papirus, ed. 2, 2009. (Série Prática Pedagógica).

RAMOS, Maria Aparecida R,. *O Conceito de Função: de Leibniz a Riemann*. In: X SEMINARIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMATICA, Campinas: Anais do X SEMINARIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMATICA, 2013.

SALOMON, Décio Vieira. Como fazer uma Monografia, v1 10 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

SILVA, Maria Deusa F., .*Problemas e Modelos que Contribuíram com o Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos Gregos a Newton.* Tese de Doutorado, Natal:UFRN, 2010.

SIMMONS, George F. Cálculo em Geometria Analítica, v. 1. 1 ed. São Paulo: Makron Books Ltda, 1987.

STEWART, James. Cálculo, v.1. 5ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2006.

SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com Geometria Analítica, v.1. 2 ed. São Paulo: Makron Books Ltda, 1994.

TORRE, Saturnino de La. Aprender com os erros: o erro como uma estratégia de mudança. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2007.

APÊNDICE

1. QUESTIONÁRIO DO ALUNO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS- DCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL - PROFMAT

MESTRANDO: Fabricio Figueredo Monção

OBJETIVO:

Investigar os possíveis erros de conteúdos de Matemática que impedem o bom desenvolvimento dos estudantes dos cursos das áreas de exatas na disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

1ª. PARTE: DADOS PESSOAIS

Aluno:____
Data de nascimento:______/______/______

Naturalidade:____Estado:______

Em qual escola cursou:

- O Ensino Fundamental:______________________________________
- O Ensino Médio:____

2ª. PARTE: INSTITUIÇÃO EM QUE ESTUDA

Atual Curso de Graduação:____

Instituição:____

Explique o motivo da escolha do curso:

( )Trabalho – Qual?

( ) Por que gosto de Matemática

( ) Por que gosto de Física

( ) Para rever conteúdos de Matemática

( ) Outros____

____

3ª. PARTE: SOBRE AS DISCIPLINAS DE CÁLCULO

1. Quais disciplinas da área de Cálculo estão cursando atualmente?
2. Quais e quantas foram cursadas mais de uma vez?
3. Aponte os conteúdos que mais tem (teve) dificuldades de aprender?

( ) Funções

( ) Limites.

( ) Continuidade

( ) Derivada

( ) Regras de derivação

( ) Máximos e mínimos

( ) Teorema do valor médio

( ) Derivada da função inversa

( ) Aplicações da derivada

( ) Diferenciais

( ) Integrais indefinidas

( ) Técnicas de integração

( ) Integrais definidas

( ) Teorema Fundamental do Cálculo

( ) Aplicações da integral

4. Indique quais conteúdos de Matemática da Educação Básica que impediram o bom desempenho nas disciplinas de Cálculo?

✓ Conteúdos do Ensino Fundamental:---

✓ Conteúdos do Ensino Médio:---

4ª. PARTE: QUESTÕES DE CÁLCULO

1) São falsas ou verdadeiras as afirmações?, Justifique sua resposta!

a) Os limites laterais à direita e à esquerda de f (x) = *cos x* existem quando x = $\frac{\pi}{2}$.

b) O $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ existe.

c) O $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x}{x^6}}$ não existe porque é uma indeterminação.

d)O $\lim_{x \to 4} \frac{-2 + \sqrt{x}}{x - 4}$ não existe porque é uma indeterminação.

Espaço para justificativa.

2) Considere a função $f\ [0,1] \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \ se\ 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 \quad se\ \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$ Esta função é contínua em todo o seu domínio? Justifique!

Espaço para justificativa.

3) Determine, se existir, a derivada da função g(x) = $\dfrac{x^2 - 5}{2x + 3}$;

no ponto x_0 = - 1.

Espaço para resolução

4) Use o Método da Substituição para calcular $\int x\cos 3x^2\, dx$ e depois derive o resultado para verificar a sua resposta.

Espaço para resolução.

5) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine a área limitada pelos eixos x e y e a curva h(x) = $5x - x^2$ no intervalo [0, 3]

Espaço para resolução..