Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Uma Introdução às Equações Funcionais †

por

Alex Pereira Bezerra

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2014
João Pessoa - PB

†.

Uma Introdução às Equações Funcionais

por

Alex Pereira Bezerra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof.Dr. Napoléon Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE

Abril/2014

Agradecimentos

Agradeço, primeiro a Deus - que não tem me faltado.

Ao meu orientador, Napoleón Caro, pelas horas dedicadas ao meu ensinamento...Pelas conversas, em sua sala,ou pelo facebook (sempre é claro, conversamos sobre matemática), via email e que mesmo estando longe, sempre me esclareciam, incentivando-me assim a dar continuidade aos meus estudos, tornando-se para mim uma referência como professor, matemático e ser humano. Agradeço, também, pela confiança desprendida, acreditando sempre no meu trabalho e conhecimento. Pela enorme contribuição, sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

A minha esposa Gisélia de Santana Muniz, um agradecimento mais que especial, pois é assim o amor que sentimos um pelo outro. Foi com a sua luta e esforço que consegui chegar neste momento, pois sem você sei que tudo que conquistei e pretendo conquistar não seria possível, ao teu lado os sonhos se tornam reais e o impossível se torna possível. Minha melhor amiga ,meu amor, como foi dito em tua dissertação e assim tudo começou $a = \sqrt{\dfrac{ax + ate}{mo}}$.

Aos colegas de Mestrado, pricipalmente a galera da viagem Recife- João Pessoa, Demilson, Careca e Antônio.

Um agradecimento todo especial aos meus Pais, José Pedro(In memoriam) e Gercina Pereira, que souberam me educar, e apesar de todas as dificuldades, me deram o principial que foi seu amor incondicional

Ao corpo docente do Profmat pelos ensinamentos

Aos meus irmãos Almir e Andréa por todos os momentos vividos juntos.

Aos professores Miguel Fidencio , Roberto Bedregal pela disposição e atenção na avaliação do trabalho.

Ao amigo e Mestre Laércio Francisco, que me mostrou que a matemática tem vários desafios e ainda assim podia ser muito divertida, sempre me estimulando com belos problemas, cujas soluções após me explicar com maestria me dizia a velha frase, esta vai para o livro. Devo o que sei em matemática hoje dia a você meu amigo.

Ao amigo José Ginaldo, que sempre meu deu apoio, e moradia, desde o primeiro dia em João Pessoa, seja estudando junto, ou rindo de nossas besteiras, você é uma amizade que cultivarei sempre comigo.

Ao amigo Moisés Toledo que mesmo no Peru, foi fundamental para a conclusão deste trabalho, agradeço seu empenho madrugada a dentro me ensinando a resolver minhas lutas com o Látex.

Dedicatória

Aos meus pais, José Pedro(in memoriam) e Gercina Pereira, sem os quais este trabalho não seria possível.
Para minha esposa, Gisélia Muniz, a quem serei eternamente grato pelo incentivo e apoio.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre equações funcionais, considerando sua relevância para o ensino da Matemática, tendo como objetivo final apresentar uma proposta que contribua para a melhoria do ensino deste tópico. É apresentado um resumo sobre a história das equações funcionais. Em seguida, o capítulo 1 é constituído pelo estudo das equações Funcionais de Cauchy, o capítulo 2 trata das equações de Jensen, Pexider e d' Alembert. No capitulo 3 mostramos algumas aplicações das equações funcionais

Abstract

This paper presents a study on functional equations, considering its relevance to the teaching of mathematics, with the ultimate goal of presenting a proposal to contribute to the improvement of teaching this topic. A summary of the history of functional equations is presented. Then, Chapter 1 consists of the study of the Cauchy Functional Equations, Chapter 2 deals with equations Jensen, Pexider, d 'Alembert. In chapter 3 we show some applications of functional equations

Sumário

Introdução

Os matemáticos vem trabalhando com equações funcionais bem antes da formalização das mesmas. Exemplos de equações funcionais iniciais podem ser rastreados no trabalho do matemático **Nicole Oresme** do século XIV. Nicole Oresme forneceu uma definição indireta de funções lineares por meio de uma equação funcional. Do património normando, Oresme nasceu em 1323 e morreu em 1382. Em 1352, Oresme escreveu um grande tratado sobre a uniformidade e deformidade de intensidades,intitulada **Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum**. Neste importante trabalho, Oresme estabelecida a definição de um relação funcional entre duas variáveis, e a idéia (bem à frente de René Descartes) que se pode expressar esta relação geometricamente pelo que hoje chamaríamos um gráfico. Ao longo dos próximos cem anos, as equações funcionais foram usadas, mas nenhuma teoria geral de tais equações surgiram.

Dentre esses matemáticos foi Gregório de Saint-Vicent (1584-1667), cujo trabalho sobre a hipérbole fez uso implícito da equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, e foi pioneiro na teoria do Logarítmo. Este Resultado de Saint-Vicent apareceu em 1647 no seu grande tratado intitulado Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni. Se o título deste trabalho parece longo, o próprio tratado, em cerca de 1250 páginas, era muito bem mais longo.

Embora a definição de linearidade de Nicole Oresme pode ser interpretado como um dos primeiros exemplos de uma equação funcional. Ele não representa um ponto de partida para a teoria das equações funcionais. O tema de equações funtional é mais propriamente datado a partir do trabalho de Augustin Louis Cauchy, nascido em 1789, em Paris, na França. Um matemático brilhante, Cauchy trabalhou em várias áreas da matemática. No entanto, ele é conhecido principalmente por seu trabalho sobre cálculo, e é reconhecido como um dos fundadores da moderna teoria da análise matemática.

A equação funcional, que é particularmente associada com Cauchy é

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

para todo x e y reais, e agora é chamado de equação de Cauchy. O que se quer determinar são todas as funções reais f que satisfazem ($\star$). Podemos imediatamente notar que a equação de Cauchy é satisfeita por qualquer função da forma

$$f(x) = ax$$

a constante é real. No entanto, a nossa capacidade de encontrar uma solução simples para esta equação é apenas uma pequena parte da história. Devemos também perguntar se a família de funções da forma $f(x) = ax$ é o conjunto de todas as soluções para a equação ($\star$). Parece razoável que tais funções lineares sejam as únicas soluções para ($\star$). No entanto, isto acaba por ser verdade somente se alguma restrição leve é imposta a função f. Por exemplo, funções da forma $f(x) = ax$ são as únicas soluções para ($\star$) entre a classe de funções que são delimitadas em algum intervalo da forma (-c, c), em que c> 0. Alternativamente, pode-se mostrar que $f(x) = ax$ formar a única classe de soluções entre as funções reais contínuas. Historicamente, Jean d'Alembert precede Augustin Louis Cauchy. No entanto, no contexto de equações funcionais, parece mais natural considerar suas contribuições após Cauchy.

Jean d'Alembert era um homem de muitos nomes. O filho ilegítimo de um oficial do exército, Louis-Camus Destouches, e uma escritora, Claudine Guérin de Tencin, ele nasceu em Paris em 1717, enquanto seu pai estava no exterior. Após seu nascimento, sua mãe o abandonou na igreja de Saint-Jean-Lerond. Seguindo a tradição, foi nomeado Jean Le Rond, e colocado em um orfanato. Após o retorno de seu pai, foi retirado do orfanato. Embora Destouches continuou a apoiar seu filho financeiramente, ele optou por não reconhecer publicamente o filho. Em 1738, Jean Le Rond entrou faculdade de direito, onde tem registros em nome Daremberg. Mais tarde, ele mudou esse nome para a equação

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*)$$

Onde $0 \leq y \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. A equação ($*$) é agora conhecida como **equação de d'Alembert**.

Capítulo 1

Equações Funcionais de Cauchy

1.1 Equação Aditiva de Cauchy

Uma equação funcional dá forma

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

é chamada **Equação Aditiva de Cauchy**.

Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é **aditiva** se satisfaz a Equação Funcional Aditiva de Cauchy, isto é,

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

O estudo das funções aditiva remonta Adrien Marie Legendre (1791) e Johann Carl Friedrich Gauss (1889), que fizeram as primeiras tentativas para determinar a solução da equação (1.1). Porém, o estudo sistemático da equação (1.1) foi realizado pelo matemático francês Augustin Louis Cauchy em seu livro Cours d'Analyse em 1821.

Definição 1.1 *Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **racionalmente homogênea** se,*

$$\phi(rx) = r\phi(x) \tag{1.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $r \in \mathbb{Q}$

Proposição 1.1 *Se $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação aditiva de Cauchy, então ϕ é racionalmente homogênea. Além disso, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\phi(r) = cr$ para todo $r \in \mathbb{Q}$*

Prova. Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação (1.1), fazendo $x = y = 0$ em (1.1) temos que $\phi(0) = \phi(0) + \phi(0)$ e daí

$$\phi(0) = 0 \qquad (1.3)$$

Substituindo $y = -x$ em (1.1) e usando (1.3), temos que ϕ é uma função ímpar, isto é,

$$\phi(-x) = -\phi(x) \qquad (1.4)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, até agora, mostramos que a solução da equação aditiva de Cauchy se anula na origem e é uma função ímpar. Vamos provar agora que a solução ϕ é racionalmente homogênea. Para isto, seja $x \in \mathbb{R}$. Então,

$$\phi(2x) = \phi(x + x) = \phi(x) + \phi(x) = 2\phi(x).$$

Portanto,

$$\phi(3x) = \phi(2x + x) = \phi(2x) + \phi(x) = 2\phi(x) + \phi(x) = 3\phi(x).$$

E em geral usando indução, podemos provar que

$$\phi(nx) = n.\phi(x) \qquad (1.5)$$

para todo inteiro positivo n. De fato, para $n = 2$ é verdadeira por definição. Agora assuma que vale pra algum n_0,

$$\phi(x_1 + x_2 + ... + x_{n_0}) = \phi(x_1) + \phi(x_2) + ... + \phi(x_{n_0})$$

verifiquemos se vale para $n_0 + 1$:

$$\begin{aligned}
\phi(x_1 + x_2 + ... + x_{n_0} + x_{n_0+1}) &= \phi((x_1 + x_2 + ... + x_{n_0}) + x_{n_0+1}) \\
&= \phi(x_1 + x_2 + ... + x_{n_0}) + \phi(x_{n_0+1}) \\
&= \phi(x_1) + \phi(x_2) + ... + \phi(x_{n_0}) + \phi(x_{n_0+1})
\end{aligned}$$

fazendo $x_i = x, \forall i$, obtemos $\phi(nx) = n.\phi(x)$.

Por outro lado, se n é um inteiro negativo, então $-n$ é positivo e por (1.4) e (1.5), temos

$$\phi(nx) = \phi(-(-n)x) = -\phi(-nx) = -(-n)\phi(x) = n\phi(x)$$

Então, nós provamos que $\phi(nx) = n\phi(x)$ para todo inteiro n e para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, seja r um número racional arbitrário, então:

$$r = \frac{k}{l}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ e $l \in \mathbb{N}^*$. $kx = l(rx)$. Usando o provado acima, obtemos

$$k\phi(x) = \phi(kx) = \phi(l(rx)) = l\phi(rx);$$

isto é,

$$\phi(rx) = \frac{k}{l}\phi(x) = r\phi(x).$$

Portanto, ϕ é racionalmente homogênea. Por outro lado, fazendo $x = 1$ na equação acima é definindo $c = \phi(1)$, temos que

$$\phi(r) = cr$$

para todo número $r \in \mathbb{Q}$. ∎

Teorema 1.1 (Cauchy) *Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função aditiva. Se ϕ é contínua, então ϕ é linear, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Prova. Seja ϕ uma solução contínua da equação (1.1). Para todo número real x, existe uma sequência r_n de números racionais tal que $\lim r_n = x$. Pela proposição (1.1) existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $\phi(r) = cr$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Portanto,

$$\phi(r_n) = cr_n, \qquad\qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, usando a continuidade de ϕ, temos

$$\phi(x) = \phi(\lim_{n\to\infty} r_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(r_n) = \lim_{n\to\infty} cr_n = cx$$

∎

A condição de continuidade foi enfraquecida por Jean Gaston Darboux em 1875, como mostra a seguinte

Proposição 1.2 *Seja ϕ uma solução da equação (1.1). Se ϕ é contínua em um ponto,então ela é contínua em todos os pontos.*

Prova. Suponhamos que ϕ é contínua em t, para algum $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que ϕ é contínua em $\mathbb{R}$. Para isto seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer. Então

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\phi(x+h) &= \lim_{h\to 0}\phi(t+h+x-t)\\ &= \lim_{h\to 0}\phi(t+h)+\phi(x-t)\end{aligned}$$

ϕ é contínua em t, $\lim_{h\to 0}\phi(t+h)=\phi(t)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\phi(x+h) &= \phi(t)+\phi(x-t)\\ &= \phi(x)\end{aligned}$$

Isso prova que ϕ é contínua em x consequentemente ϕ é contínua em $\mathbb{R}$. ■

No capítulo 5 do livro Cours d'Analyse, Augustin Louis Cauchy (1821) estudou outras três equações, a saber,

$$f(x+y)=f(x).f(y) \qquad (1.6)$$
$$f(xy)=f(x)+f(y) \qquad (1.7)$$
$$f(xy)=f(x).f(y) \qquad (1.8)$$

1.2 Equação Exponencial de Cauchy

A equação funcional exponencial de Cauchy é

$$f(x+y)=f(x).f(y) \qquad , x,y\in\mathbb{R}$$

Teorema 1.2 *A solução geral da equação exponencial de Cauchy, tem uma das seguntes formas*

$$\phi(x)=e^{A(x)}, \qquad \textit{onde}$$

$A:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *é uma função aditiva, ou* $\phi(x)=0$.

Prova. É fácil ver que $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ é uma solução de (1.6). Afirmamos que $\phi(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suponha que não. Então, existe y_0 tal que $\phi(y_0)=0$. De (1.6), temos

$$\phi(y)=\phi((y-y_0)+y_0)=\phi(y-y_0).\phi(y_0)=0,$$

o que é uma contradição.

Tome $x=\dfrac{t}{2}$ em (1.6), temos que

$$\phi(t) = \phi(\frac{t}{2})^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $\phi(x)$ é estritamente positiva. Agora tomando logaritmo natural em ambos os membros de (1.6), obtemos

$$Ln\phi(x+y) = Ln\phi(x) + Ln\phi(y).$$

Definindo $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $A(x) = Ln\phi(x)$, temos

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Assim temos a solução $\phi(x) = e^{A(x)}$ ■

Definição 1.2 *Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma **função exponencia** real se satisfaz $f(x+y) = f(x).f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

Seja n um inteiro positivo. Suponhamos que a equação funcional

$$f(x+y+nxy) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1.9)$$

vale para todos os reais $x > -\dfrac{1}{n}$ e $y > -\dfrac{1}{n}$. Quando $n \longrightarrow 0$, a equação funcional (1.9) se reduz a equação exponencial de Cauchy. Esta equação foi estudada por Thielman(1949).

Teorema 1.3 *Toda solução ϕ da equação funcional (1.9) é dá forma*

$$\phi(x) = 0 \text{ ou } \phi(x) = e^{A(ln(1+nx))},$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

Prova. Vamos escrever a equação funcional (1.9) na seguinte forma

$$\phi\left(\frac{(1+nx).(1+ny)-1}{n}\right) = \phi(x) \cdot \phi(y) \qquad (1.10)$$

Defina $1 + nx = e^u$ e $1 + ny = e^v$ tal que $u = ln(1+nx)$ e $v = ln(1+ny)$. Agora rescrevendo (1.10), obtemos

$$\phi\left(\frac{e^{u+v}-1}{n}\right) = \phi\left(\frac{e^u-1}{n}\right) \cdot \phi\left(\frac{e^v-1}{n}\right) \qquad (1.11)$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Defina

$$\psi(u) = \phi\left(\frac{e^u-1}{n}\right) \qquad (1.12)$$

em (1.11), temos

$$\psi(u+v) = \psi(u)\cdot\psi(v) \qquad (1.13)$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Assim pelo teorema (1.2), temos

$$\psi(x) = e^{A(x)} \text{ ou } \psi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1.14)$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva. Portanto, de (1.12) e (1.14), obtemos

$$\phi(x) = 0 \text{ ou } \phi(x) = e^{A(ln(1+nx))},$$

onde onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva. ■

1.3 Equação Logarítmica de Cauchy

A equação

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \odot$$

é chamada de Equação Funcional Logarítmica de Cauchy

Teorema 1.4 *Se a equação funcional logarítmica de Cauchy vale para todo $x, y \in \mathbb{R}^*$, então a solução geral é dada por*

$$\phi(x) = A(ln|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \textit{(1.15)}$$

onde A é uma função aditiva.

Prova. Substituindo $x = y = t$ em $\odot$, temos

$$\phi(t^2) = 2\phi(t).$$

Do mesmo modo, fazendo $x = -t$ e $y = -t$ em $\odot$, temos

$$\phi(t^2) = 2\phi(-t)\ .$$

Assim vemos que

$$\phi(t) = \phi(-t),\ \forall t \in \mathbb{R}^* \qquad (1.16)$$

Agora, suponhamos que a equação funcional $\odot$ vale para todo $x > 0$ e $y > 0$. Seja,

$$x = e^s \text{ e } y = e^t \qquad (1.17)$$

de modo que

$$s = lnx \text{ e } t = lny \qquad (1.18)$$

Note que $s, t \in \mathbb{R}$ visto que $x, y \in \mathbb{R}^*$ onde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$. Substituindo (1.18) em $\odot$, temos

$$\phi(e^{s+t}) = \phi(e^s) + \phi(e^t)$$

Definindo

$$A(s) = \phi(e^s) \qquad (1.19)$$

e usando a última equação, temos

$$A(s+t) = A(s) + A(t)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Por isso, a partir de $\odot$, temos

$$\phi(x) = A(lnx) \qquad (1.20)$$

para todo x real positivo.

Como $\phi(t) = \phi(-t)$, temos que a solução geral de (1.7) é

$$\phi(x) = A(ln|x|) \qquad (1.21)$$

para todo x real não-nulo. ■

Corolário 1.3.1 *A solução geral da equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$ é dada por*

$$\phi(x) = A(lnx) \qquad \textit{(1.22)}$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

Corolário 1.3.2 *A solução geral da equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$\phi(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \textit{(1.23)}$$

Prova. Substituindo $y = 0$ na equação funcional acima temos $\phi(0) = \phi(x) + \phi(0)$ onde $\phi(x) = 0$ ■

Definição 1.3 *Uma função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma **função logarítmica** se satisfaz $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$.*

1.4 Equação Multiplicativa de Cauchy

Trataremos agora da última equação funcional de Cauchy, a equação funcional multiplicativa, isto é.

$$f(xy) = f(x).f(y) \qquad (*)$$

Esta equação é a mais complicada das três equações consideradas neste capítulo. Para o próximo teorema vamos precisar da definição da função signal denotada por $sgn(x)$ e definida como

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.5 *A solução geral da equação funcional multiplicativa, é dada por*

$$\phi(x) = 0, \qquad (1.24)$$
$$\phi(x) = 1, \qquad (1.25)$$
$$\phi(x) = e^{A(Ln|x|)}|sgn(x)|, \qquad (1.26)$$
$$\phi(x) = e^{A(Ln|x|)}sgn(x). \qquad (1.27)$$

Onde, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função aditiva.*

Prova. Fazendo $x = y = 0$ em (*), temos $\phi(0) \cdot [1 - \phi(0)] = 0$ e portanto,

$$\phi(0) = 0 \text{ ou } \phi(0) = 1 \qquad (1.28)$$

Dá mesma forma, substituindo $x = y = 1$ em (*), temos $\phi(1) \cdot [1 - \phi(1)] = 0$ e portanto,

$$\phi(1) = 0 \text{ e } \phi(1) = 1 \qquad (1.29)$$

Tome x como um número real positivo, isto é $x > 0$. Então, (*) implica

$$\phi(x) = \phi(\sqrt{x})^2 \geq 0 \qquad (1.30)$$

Suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ tal que $\phi(x_0) = 0$. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número real arbitrário. Então, de (*) temos

$$\phi(x) = \phi\left(x_0.\frac{x}{x_0}\right) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e obtemos a solução de (1.24) $\blacksquare$

Suponhamos que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Se $\phi(0) = 1$, então fazendo $y = 0$ em (*), temos

$$\phi(0) = \phi(x) \cdot \phi(0)$$

Assim,

$$\phi(x) = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, temos a solução (1.25)

Consideremos o caso $\phi(0) = 0$. Neste caso podemos afirmar que ϕ é não nula em $\mathbb{R}^*$. Suponha que não. Então existe y_0 em $\mathbb{R}^*$ tal que $\phi(y_0) = 0$. Fazendo $y = y_0$ em (*), temos

$$\phi(xy_0) = \phi(x) \cdot \phi(y_0) = 0.$$

Logo, $\phi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ que é uma contradição.

Usando o fato que ϕ é não nula em $\mathbb{R}^*$ e (1.31), temos

$$\phi(x) > 0 \text{ para } x > 0 \qquad (1.31)$$

Sejam

$$x = e^s \text{ e } y = e^t \qquad (1.32)$$

temos que

$$s = Lnx \text{ e } t = Lny \qquad (1.33)$$

Note que $s, t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}_+$. Substituindo (1.33) em (*), temos

$$\phi(e^{s+t}) = \phi(e^s).\phi(e^t)$$

Como $\phi(t) > 0$ para todo $t > 0$, tomando o logarítmo natural em ambos os membros da última equação, temos que:

$$A(s+t) = A(s) + A(t),$$

Onde,

$$A(s) = ln\phi(e^s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \qquad (1.34)$$

Então, A é uma função aditiva. De (1.33) e (1.34), temos:

$$\phi(x) = e^{A(Ln|x|)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad\qquad (1.35)$$

De (1.28) temos que $\phi(1) = 0$ ou $\phi(1) = 1$. Se $\phi(1) = 0$, fazendo $y = 1$ em (*), temos

$$\phi(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

Contradizendo à hipótese que ϕ não é identicamente nula em $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, $\phi(1) = 1$. Agora fazendo $x = y = -1$ em (1.8), temos $\phi(1) = [\phi](-1)^2$ e assim,

$$\phi(-1) = 1 \text{ ou } \phi(-1) = -1 \qquad\qquad (1.36)$$

Se $\phi(-1) = 1$, então, fazendo $y = -1$ em (*), temos

$$\phi(-x) = \phi(x) \cdot \phi(-1) = \phi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Então, de (1.33) segue que:

$$\phi(x) = e^{A(Lnx|)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, $\phi(0) = 0$, temos:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{A(Ln|x|)}, & \text{se} \quad \text{x} \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{se} \quad \text{x=0} \end{cases}$$

Se $\phi(-1) = -1$, fazendo $y = -1$ em (*),

$$\phi(-x) = \phi(x) \cdot \phi(-1) = -\phi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, de (1.34), obtemos

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ALln|x|)}, & \text{se} \quad \text{x>0} \\ -e^{A(Ln|x|)}, & \text{se} \quad \text{x} < 0 \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Juntamente com o fato que $\phi(0) = 0$, temos

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{A(Ln|x|)}, & \text{se} \quad \text{x>0} \\ 0, & \text{se} \quad \text{x=0} \\ -e^{A(Ln|x|)}, & \text{se} \quad \text{x<0} \end{cases}$$

que é a solução (1.27). ∎

Corolário 1.4.1 *A solução geral contínua da equação funcional $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ (*), para todo $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$\phi(x) = 0, \qquad (1.37)$$
$$\phi(x) = 1, \qquad (1.38)$$
$$\phi(x) = |x|^\alpha \qquad (1.39)$$

e

$$f(x) = |x|^\alpha \cdot sgn(x) \qquad (1.40)$$

onde α é uma constante real positiva.

Prova. Pelo teorema (1.5) ou $\phi = 0$, ou $\phi = 1$, ou ϕ tem a forma (1.26) ou (1.27), onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva. Como ϕ é contínua e,

$$A(t) = Ln\phi(e^t)$$

A é também contínua sobre $\mathbb{R}$. Portanto,

$$A(t) = \alpha \cdot t,$$

Onde, $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. A partir de (1.26) e (1.27), temos

$$f(x) = |x|^\alpha$$

e

$$f(x) = |x|^\alpha \cdot sgn(x),$$

respectivamente. Resta mostrar que $\alpha > 0$. Se $\alpha = 0$, então, (1.39) produz $\phi(x) = 1$ para $x \neq 0$, e pela continuidade de f devemos ter $\phi(0) = 1$. Assim, temos que $\phi = 1$, já listado em (1.38) com $\alpha = 0$, temos

$$\phi(x) = 1 \text{ para } x > 0$$

e

$$\phi(x) = -1 \text{ para } x < 0$$

e assim ϕ não pode ser contínua. Dá mesma forma se $\alpha < 0$, então, ϕ seguida de (1.38) e (1.39) satisfaz

$$\lim_{x \to 0^+} \phi(x) = \infty$$

e assim, não pode ser contínua em 0.

■

Definição 1.4 *Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função multiplicativa se satisfaz $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

Capítulo 2

Equações de Jensen, Pexider e d'Alembert

2.1 Função convexa

Funções Convexas foram primeiramente introduzidas por Johan Ludwig Jensen em 1905, apesar de que funções convexas já haviam sido tratadas por Jacques Hadamard (1893) e Otto Hölder (1889). Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **convexa** se satisfaz a desigualdade

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

2.2 Equação Funcional de Jensen

A equação funcional

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)), \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{JE}$$

é chamada de **Equação Funcional de Jensen**.

Definição 2.1 *Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **Jensen** se satisfaz*

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

isto é, se é solução da equação funcional de Jensen.

Observação 1 *Lembremos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita afim se ela é dá forma*

$$f(x) = ax + b,$$

onde a, b são constantes.

Teorema 2.1 *A função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação funcional de Jensen se e somente se*

$$\phi(x) = A(x) + a, \qquad (2.2)$$

para alguma função aditiva $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e algum $a \in \mathbb{R}$.

Prova. Suponhamos que $\phi(x) = A(x) + a$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva. Então

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) &= A\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + a \\ &= A\left(\frac{x}{2}\right) + A\left(\frac{y}{2}\right) + a \\ &= \left(\frac{A(x) + a}{2}\right) + \left(\frac{A(y) + a}{2}\right) \\ &= \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2} \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação de Jensen, então $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}$, $(*)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = 0$ temos que

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\phi(x)}{2} + \frac{a}{2}, \qquad \text{onde } a = \phi(0) \qquad (**),$$

substituindo (**) em (*) temos que

$$\frac{\phi(x+y) + a}{2} = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2},$$

que equivale a

$$\phi(x+y) + a = \phi(x) + \phi(y) \qquad (2.3)$$

Definamos $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $A(x) = \phi(x) - a$. De (2.3) temos que:

$$\begin{aligned} (x+y) &= \phi(x+y) - a \\ &= \phi(x) + \phi(y) - 2a \\ &= (\phi(x) - a) + (\phi(y) - a) \\ &= A(x) + A(y) \end{aligned}$$

Portanto, A é aditiva e $\phi(x) = A(x) + a$

■

Definição 2.2 *Sejam m e n dois inteiros positivos um número racional dá forma*

$$\frac{m}{2^n}$$

é chamado um número racional diádico.

Teorema 2.2 *A solução contínua ϕ da equação de Jensen no intervalo $[a, b]$ é uma função afim, isto é,*

$$f(x) = \beta + \alpha \cdot x \qquad \textit{onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Prova. Definamos uma nova função $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(y) = \phi((b-a)y + a) \qquad \forall y \in [0,1] \qquad (2.4)$$

Seja $\psi : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ tal que $\psi(y) = a + (b - a)y$, então, $F = \phi \circ \psi$. Portanto, F está bem definida. Afirmamos que F satisfaz (JE). De fato,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \phi\left((b-a)\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right) + a\right) \\ &= \phi\left(\frac{[(b-a)\cdot x + a] + [(b-a)\cdot y + a]}{2}\right) \\ &= \frac{\phi((b-a)x + a) + \phi((b-a)y + a)}{2} \\ &= \frac{F(x) + F(y)}{2}, \quad i.e, \end{aligned}$$

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{F(x) + F(y)}{2}, \qquad x, y \in [0,1] \qquad (\star).$$

Então F satisfaz a equação funcional de Jensen em $[0,1]$. Fazendo $x=0$ e $y=1$ em $(\star)$, temos

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{F(0)+F(1)}{2}=\frac{c+d}{2}=c+\frac{1}{2}.(d-c)$$

onde $c=F(0)$ e $d=F(1)$. Dá mesma forma, fazendo $x=0$ e $y=\frac{1}{2}$ em $(\star)$, temos

$$F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{F(0)+F(\frac{1}{2})}{2}=\frac{c+c+\frac{1}{2}(d-c)}{2}=c+\frac{1}{4}(d-c)$$

Agora fazendo $x=\frac{1}{2}$ e $y=1$ em $(\star)$, temos

$$F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)+F(1)}{2}=c+\frac{3}{4}(d-c)$$

Em seguida provemos que se x é um número real dá forma $\frac{m}{2^k}$ onde m e k inteiros positivos satisfazendo $0\leqslant m\leqslant 2^k$, então

$$F(x)=c+x(d-c)$$

Por indução sobre k. Já mostramos que a afirmação é verdadeira para $k=1,2$. Assuma que (2.8)é válida para $n=k$ e consideremos dois casos:

$$\text{caso 1: } x=\frac{2m}{2^{n+1}}$$

$$\text{caso2: } x=\frac{2m+1}{2^{n+1}}$$

No caso 1, temos

$$F\left(\frac{2m}{2^{n+1}}\right)=F\left(\frac{m}{2^n}\right)=c+\frac{m}{2^n}(d-c)=c+\frac{2m}{2^{n+1}}(d-c),$$

e no caso 2,

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) &= F\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m+1}{2^n}\right)\right)\\
&= \frac{F\left(\frac{m}{2^n}\right)+F\left(\frac{m+1}{2^n}\right)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(c+\frac{m}{2^n}(d-c)+c+\frac{m+1}{2^n}(d-c)\right)\\
&= c+\frac{2m+1}{2^{n+1}}(d-c)
\end{aligned}$$

Assim (2.8) é satisfeita para todos racionais diádicos x em $[0,1]$. Uma vez que F é contínua e o subconjunto de todos os racionais diádicos em $[0,1]$ é denso em $[0,1]$, temos

$$F(x) = c + x.(d - c)$$

para todo $x \in [0,1]$. Como $F = \phi \circ \psi$, então $\phi = F \circ \psi^{-1}$. Portanto, $\phi(x) = \beta + \alpha.x$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2.3 Equação Funcional de d'Alembert

A equação funcional

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \qquad x, y \in \mathbb{R} \quad (DE)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ é conhecida como **Equação Funcional de d'Alembert**.

2.3.1 Soluções Contínuas da Equação de d' Alembert

Teorema 2.3 *Seja, $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, que satisfaz a equação de d'Alembert. Então, ϕ tem uma das seguintes formas:*

$$\begin{array}{rcr} \phi(x) = 0, & & (2.5) \\ \phi(x) = 1, & & (2.6) \\ \phi(x) = \cosh(\alpha \cdot x), & \alpha \in \mathbb{R} & (2.7) \\ \phi(x) = \cos(\beta \cdot x), & \beta \in \mathbb{R} & (2.8) \end{array}$$

Como ϕ é solução, $\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x) \cdot \phi(y) \qquad (\otimes)$.

Prova. Fazendo $x = y = 0$ em $(\otimes)$ obtemos

$$2\phi(0) = 2[\phi(0)]^2.$$

Assim,

$$\phi(0) = 0 \text{ ou } \phi(0) = 1$$

Se $\phi(0) = 0$, então tomando $y = 0$ em $(\otimes)$, temos:

$$2\phi(x) = 2\phi(x) \cdot \phi(0).$$

Daí,

$$2\phi(x) = 0$$

segue que

$$\phi(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Temos a solução (2.5). Assumindo agora que ϕ é não nula. Vamos mostrar que ϕ é uma função par. Faça $x = 0$ em ($\otimes$). Então,

$$\phi(y) + \phi(-y) = 2\phi(0) \cdot \phi(y)$$

como ϕ é não nula, $\phi(0) \neq 0$ e $\phi(0) = 1$. Dá equação acima

$$\phi(y) + \phi(-y) = 2\phi(y)$$

isto é,

$$\phi(-y) = \phi(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Então, ϕ é uma função par. Como ϕ é contínua em $\mathbb{R}$, ϕ também é integrável em qualquer intervalo finito. Assim, para $t > 0$, temos

$$\int_{-t}^{t} \phi(x+y)dy + \int_{-t}^{t} \phi(x-y)dy = 2\phi(x) \int_{-t}^{t} \phi(y)dy \tag{2.9}$$

Agora

$$\int_{-t}^{t} \phi(x+y)dy = \int_{x-t}^{x+t} \phi(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} \phi(y)dy$$

Analogamente,

$$\int_{-t}^{t} \phi(x-y)dy = \int_{x+t}^{x-t} \phi(w)(-dw) = \int_{x-t}^{x+t} \phi(w)dw = \int_{x-t}^{x+t} \phi(y)dy$$

Portanto (2.9),torna-se

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy + \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = 2f(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy$$

ou seja

$$\int_{x-t}^{x+t} \phi(y)dy = \phi(x) \int_{-t}^{t} \phi(y)dy \tag{2.10}$$

Como ϕ é não nula, $\phi(0) = 1$. Além disso, uma vez que ϕ é contínua, existe $t > 0$ tal que

$$\int_{-t}^{t} \phi(y)dy > 0.$$

Note que o lado esquerdo de (2.10) é diferenciável com respeito a x pelo Teorema Fundamental do Calculo (veja Anton, pag. 396-2001). Daí, o lado direito também é diferenciável com respeito a x. Então, tomando a derivada com respeito a x em (2.10), temos:

$$\frac{d}{dx} \int_{x-t}^{x+t} \phi(y)dy = \frac{d}{dx}[\phi(x) \int_{-t}^{t} \phi(y)dy]$$

Assim temos:

$$\phi(x+t) - \phi(x-t) = \phi'(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy \qquad (2.11)$$

Isto prova que ϕ é duas vezes diferenciável e assim

$$\phi'(x+t) - \phi'(x-t) = \phi''(x) \int_{-t}^{t} \phi(y)dy$$

Então ϕ é 3 vezes diferenciável. Procedendo passo a passo, vemos que toda solução contínua de (DE) é infinitamente diferenciável.

Tomando $x = 0$ em (2.11), temos

$$\phi(t) - \phi(-t) = \phi'(0) \cdot \int_{-t}^{t} \phi(y)dy \qquad (2.12)$$

Como ϕ é par, temos $\phi(t) = \phi(-t)$ e (2.12) torna-se

$$\phi'(0) \cdot \int_{-t}^{t} \phi(y)dy = 0 \qquad (2.13)$$

porém, $\int_{-t}^{t} \phi(y)dy > 0$, (2.13) resulta em:

$$\phi'(0) = 0 \qquad (2.14)$$

Como $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ diferenciamos $(\otimes)$ com respeito a y duas vezes para obter

$$\begin{aligned} \phi'(x+y) - \phi'(x+y) &= 2\phi(x)\phi'(y) \\ \phi''(x+y) + \phi''(x-y) &= 2\phi(x) \cdot \phi''(y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = 0$, temos

$$2\phi''(x) = 2\phi(x).\phi''(0)$$

Seja $k = \phi''(0)$. Então,

$$\phi''(x) = k\phi(x)$$

que corresponde ao seguinte Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= ky \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver este (PVI) iremos considerar três casos: $k = 0, k > 0$ e $k < 0$

Caso 1. Suponha $k = 0$. Então o (PVI) se reduz a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

daí,

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

Como $y(0) = 1$, $c_2 = 1$. Novamente como $y'(0) = 0$, temos $c_1 = 0$. Portanto,

$$y(x) = 1$$

Caso 2. Suponha $k > 0$. Tomando $y = e^{mx}$ em

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky \qquad \text{(DE')}$$

obtemos $m^2 = k$ e daí $m = \pm\sqrt{k}$. Então,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha \cdot x} + c_2 e^{-\alpha \cdot x}, \text{ onde } \alpha = \sqrt{k}.$$

Agora

$$1 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 \Longrightarrow 1 = c_1 + c_2$$

e

$$0 = y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 \Longrightarrow c_1 = c_2 (\text{desde que } \alpha \neq 0)$$

então, $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$. Portanto, a solução de (DE') é dada por

$$y(x) = \frac{e^{\alpha \cdot x} + e^{-\alpha \cdot x}}{2} = \cosh(\alpha \cdot x)$$

então neste caso $f(x) = \cosh(\alpha \cdot x)$ que é (2.7).

Caso 3. Suponha $k < 0$. Tomando $y = e^{mx}$ em $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ky$ obtemos

$$m^2 y = ky$$

então $m = \pm i\beta$, onde $\beta = \sqrt{-k}$, $i = \sqrt{-1}$. A solução de (DE') é dada por

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}$$

Assim, $1 = y(0) = c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 1 - c_1$. Por outro lado,

$$0 = y'(0) = i\beta c_1 - i\beta(1 - c_1) = 2i\beta c_1 - i\beta = i\beta(2c_1 - 1) = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$y(x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = \cos(\beta x)$$

Portanto a solução é dada por $f(x) = \cos(\beta x)$ que é (2.8). ∎

2.3.2 Solução Geral da Equação de D'Alembert

Uma solução $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita **exponencial** se E satisfaz a equação

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Pode ser demonstrado que (por exemplo, veja: Elon Lages, A matemática do ensimo Médio,vol.1)

$$E(x) = e^{\lambda \cdot x}, \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função exponencial não nula, então denotamos por

$$E^*(y) = E(y)^{-1} \tag{2.15}$$

Proposição 2.1 *Se $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função exponencial e $E(0)$ é zero, então, $E(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Prova. Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função exponencial. Assim,

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y) \tag{2.16}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = 0$ em (2.16), obtemos

$$E(x) = E(x) \cdot E(0) \text{ para } x \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

Como $E(0) = 0$, (2.17) implica

$$E(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

Assim, $E(x)$ é identicamente nula. ■

Proposição 2.2 *Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencial. Se $E(x) \neq 0$, então $E(0) = 1$.*

Prova. Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencial. Assuma que $E(x)$ é não nula. Faça $x = y = 0$ em (2.16), temos

$$E(0) \cdot [1 - E(0)] = 0.$$

Portanto,

$$E(0) = 0 \text{ ou } E(0) = 1$$

vemos que $E(0) = 1$. Suponhamos que não, assim $E(0) = 0$, pela proposição (2.1), $E(x) = 0$, é uma contradição. Assim, $E(0) = 1$. ■

Proposição 2.3 *Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função exponencial. Se, $E(x_0) = 0$ para algum $x_0 \neq 0$, então $E(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$*

Prova. Seja $x \neq x_0 \in \mathbb{R}$. Então, como $E(x_0) = 0$, temos:

$$E(x) = E((x - x_0) + x_0) = E(x - x_0) \cdot E(x_0) = 0.$$

Assim, $E(x) \equiv 0$. ■

Proposição 2.4 *Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função exponencial. Se $E(x)$ é não nulo, então,*

$$E^*(-x) = E(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova. Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ a exponencial. Agora faça $y = -x$ em (2.16), temos

$$E(0) = E(x) \cdot E(-x) \qquad (2.17)$$

Como $E(x) \neq 0$ pela proposição (2.2), $E(0) = 1$ isto, implica que

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)}$$

ou seja,

$$E(-x) = E(x)^{-1} \qquad (2.19)$$

ou

$$E^*(-x) = E(x) \qquad (2.20)$$

■

Proposição 2.5 *Seja $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ como uma função exponencial. Suponha $E(x) \neq 0$. Então,*

$$E^*(x + y) = E^*(x).E^*(y) \qquad (2.18)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$

Prova. Como $E(x) \neq 0$, $E(x)$ é não nula sobre $\mathbb{R}$ pela proposição (3). Agora considere

$$\begin{aligned} E^*(x+y) &= \frac{1}{E(x+y)} \\ &= \frac{1}{E(x)E(y)} \\ &= E(x)^{-1} \cdot E(y)^{-1} \\ &= E^*(x) \cdot E^*(y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

■

Proposição 2.6 *Toda solução não nula $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ da equação de d'Alembert é uma função par.*

Prova. Substituindo y por $-y$ na equação (DE), temos

$$\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x) \cdot \phi(-y) \qquad (2.19)$$

subtraindo (2.19) de (DE), obtemos

$$\phi(y) = \phi(-y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Assim, ϕ é uma função par. ■

Teorema 2.4 *Toda solução não trivial $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ da equação funcional*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \qquad \text{(DE)}$$

é dá forma

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \qquad (2.20)$$

onde, $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função função exponencial.

Prova. Seja ϕ solução não trivial de (DE), isto é, $\phi \neq 0$. Fazendo $x = y = 0$ em (DE), obtemos $\phi(0) \cdot [1 - \phi(0)] = 0$. Assim, $\phi(0) = 0$ ou $\phi(0) = 1$. Como $\phi(x) \neq 0$ então:

$$\phi(0) = 1 \qquad (2.21)$$

Tomando $y = x$ em (DE), temos:

$$\phi(2x) + \phi(0) = 2\phi(x)^2 \Longrightarrow \phi(2x) = 2\phi(x)^2 - 1. \tag{2.22}$$

Trocando agora x por $x + y$ e y por $x - y$ em (DE), temos:

$$\phi(x + y + x - y) + \phi(x + y - x + y) = 2\phi(x + y) \cdot \phi(x - y).$$

Assim,

$$\phi(2x) + \phi(2y) = 2\phi(x + y) \cdot \phi(x - y) \tag{2.23}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Calculando

$$\begin{aligned}
[\phi(x + y) - \phi(x - y)]^2 &= [\phi(x + y) + \phi(x - y)]^2 - 4\phi(x + y) \cdot \phi(x - y)\\
&= [2\phi(x) \cdot \phi(y)]^2 - 4\phi(x + y) \cdot \phi(x - y)\\
&= 4\phi(x)^2 \cdot \phi(y)^2 - 2[\phi(2x) + \phi(2y)]\\
&= 4\phi(x)^2\phi(y)^2 - 2[2\phi(x)^2 - 1 + 2\phi(y)^2 - 1]\\
&= 4\phi(x)^2 \cdot \phi(y)^2 - 4\phi(x)^2 - 4\phi(y)^2 + 4\\
&= 4[\phi(x)^2 - 1] \cdot [\phi(y)^2 - 1].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(x + y) - \phi(x - y) = \pm 2\sqrt{[\phi(x)^2 - 1] \cdot [\phi(y)^2 - 1]}$$

adicionando a (DE), temos:

$$\phi(x + y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \pm \sqrt{[\phi(x)^2 - 1] \cdot [\phi(y)^2 - 1]}.$$

Assim,

$$[\phi(x + y) - \phi(x) \cdot \phi(y)]^2 = [\phi(x)^2 - 1] \cdot [\phi(y)^2 - 1] \tag{2.24}$$

Consideremos dois casos:

Caso 1. Suponha $\phi(x) \in \{-1, 1\}$. Daí por (2.24), temos

$$\phi(x + y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \tag{2.25}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Como $\phi(x)$ é 1 ou -1, temos:

$$\phi^*(x) = \phi(x)$$

e daí,

$$\phi(x) = \frac{\phi(x) + \phi^*(x)}{2}$$

é uma solução de (DE). Note que

$$\phi(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

com $E(x) \in \{-1, 1\}$.

Caso 2. Suponha $\phi(x) \in \{-1, 1\}$ para algum x. Assim,

$$\phi(x_0)^2 \neq 1$$

para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\alpha = \phi(x_0)$. Como $\alpha^2 - 1 \neq 0$, faça

$$\beta^2 = \alpha^2 - 1 \qquad (2.26)$$

Definindo

$$\begin{aligned} E(x) &= \phi(x) + \frac{1}{\beta} \cdot [\phi(x + x_0) - \phi(x) \cdot \phi(x_0)] \\ &= \frac{1}{\beta}[\phi(x + x_0) + (\beta - \alpha) \cdot \phi(x)] \qquad (2.27) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, E é bem definido. Para ver isso, tome $x_1 = x_2$ e considere

$$\begin{aligned} E(x_1) &= \frac{1}{\beta}[f(x_1 + x_0) + (\beta - \alpha) \cdot f(x_1)] \\ &= \frac{1}{\beta}[f(x_1 + x_0) + (\beta - \alpha) \cdot f(x_2)] \\ &= E(x_2) \end{aligned}$$

Portanto, E é bem definida. Em seguida, calculando

$$\begin{aligned} [E(x) - \phi(x)]^2 &= \frac{1}{\beta^2}.[\phi(x + x_0) - \phi(x) \cdot \phi(x_0)]^2 \\ &= \frac{1}{\beta^2}[\phi(x)^2 - 1] \cdot [\phi(x_0^2 - 1)] \qquad (por(2.24)) \\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2}[\phi(x)^2 - 1] \\ &= \phi(x)^2 - 1, \qquad (2.28) \end{aligned}$$

Assim, de (2.28) temos:

$$E(x)^2 - 2E(x)\phi(x) + \phi(x)^2 = \phi(x)^2 - 1$$

que equivale a

$$E(x)^2 - 2E(x)\phi(x) + 1 = 0$$

Se, $E(x) = 0$ temos $1 = 0$ absurdo.

Portanto, $E(x) \neq 0$, e então,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{E(x)^2 + 1}{2E(x)} \\ &= \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \end{aligned}$$

verifiquemos que $E(x)$ satisfaz

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

para mostrar isso, precisamos dos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 2[\phi(x_0 + x)\phi(y) + \phi(x_0 + y)\phi(x)] &= \phi(x_0 + x + y) + \phi(x_0 + x - y) + f(x_0 + y + x) + f(x_0 + y - x) \\ &= 2\phi(x_0 + x + y) + \phi(x_0 + x - y) + \phi(x_0 + y - x) \\ &= 2\phi(x_0 + x + y) + \phi(x_0 + (x - y)) + f(x_0 - (x - y)) \\ &= 2\phi(x_0 + x + y) + 2\phi(x_0)\phi(x - y) \\ &= 2[\phi(x_0 + x + y) + \phi(x_0)\{2\phi(x)\phi(y) - \phi(x + y)\}] \\ &= 2[\phi(x_0 + x + y) + \alpha\{2\phi(x)\phi(y) - \phi(x + y)\}] \qquad (2.29) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2\phi(x_0 + x)\phi(x_0 + y) &= \phi(x_0 + x + x_0 + y) + \phi(x_0 + x - x_0 - y) \\ &= \phi(x_0 + (x_0 + x + y)) + \phi(x - y) \\ &= [2\phi(x_0) \cdot \phi(x_0 + x + y) - \phi(x_0 + x + y - x_0)] + [2\phi(x)f(y) - \phi(x + y)] \\ &= [2\phi(x_0) \cdot \phi(x_0 + x + y) - \phi(x + y)] + [2\phi(x)\phi(y) - \phi(x + y)] \\ &= 2[\phi(x) \cdot \phi(y) + \alpha\phi(x_0 + x + y) - \phi(x + y)] \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Agora combinando os resultados anteriores e calculando $E(x) \cdot E(y)$, temos que $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$. Então, $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função exponencial. Isto completa a parte "somente se"

A parte "se"pode ser verificada de maneira direta. Considere

$$\begin{aligned}
\phi(x+y)+\phi(x-y) &= \frac{E(x+y)+E^*(x+y)}{2}+\frac{E(x-y)+E^*(x-y)}{2}\\
&= \frac{E(x)E(y)+E^x(x)E^*(y)+E(x)E(-y)+E^*(x)E^*(-y)}{2}\\
&= \frac{E(x)E(y)+E^x(x)E^*(y)+E(x)E^*(y)+E^*(x)E^*(y)}{2}\\
&= \frac{E(x)[E(y)+E^*(y)]+E^*(x)[E^*(y)+E(y)]}{2}\\
&= \frac{[E(x)+E^*(x)](y)+E^*(y)]}{2}\\
&= 2\phi(x)\phi(y)
\end{aligned}$$

■

2.3.3 Caracterização da Função Co-seno através de uma Equação Funcional

Teorema 2.5 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. A função contínua $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação funcional*

$$\phi(x-y+\alpha)-\phi(x+y+\alpha)=2\phi(x)\phi(y) \qquad (2.31)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se e somente se é dada por

$$\phi(x)=0\forall x\in\mathbb{R} \qquad (2.32)$$

ou

$$\phi(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right) \qquad (2.33)$$

Prova. É fácil verificar que $\phi = 0$ é uma solução de (2.31). Agora assuma que ϕ é não nula.

Trocando y com $-y$ em (2.31), obtemos

$$\phi(x+y+\alpha)-\phi(x-y+\alpha)=2\phi(x)\phi(-y) \tag{2.34}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Assim ϕ é uma função ímpar, isto é,

$$\phi(-y)=-\phi(y) \tag{2.35}$$

para $y \in \mathbb{R}$. Trocando x por y e (2.31), temos:

$$\phi(y-x+\alpha)-\phi(x+y+\alpha)=2\phi(y)\phi(x). \tag{2.36}$$

De (2.31) e (2.36), temos que

$$\begin{aligned}\phi(x-y+\alpha) &= \phi(y-x+\alpha)\\ &= \phi(-(x-y)+\alpha)\\ &= -\phi(x-y-\alpha)\end{aligned} \tag{2.37}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y=0$ em (2.37),

$$\phi(x+\alpha)=-\phi(x-\alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.38}$$

Assim,

$$\phi(x+2\alpha)=-\phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

e

$$\phi(x+3\alpha)=-\phi(x+\alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

Então, ϕ é periódica de período 4α, isto é,

$$\phi(x+4\alpha)=\phi(x) \tag{2.41}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade assuma que $\alpha > 0$. Em seguida podemos substituir x por $x+\alpha$ e y por $y+\alpha$ em (2.31), obtendo

$$\phi(x-y+\alpha)-\phi(x+y+3\alpha)=2\phi(x+\alpha)\phi(y+\alpha) \tag{2.42}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Usando (2.40) em (2.42), temos

$$\phi(x-y+\alpha)+\phi(x+y+\alpha)=2\phi(x+\alpha)\phi(y+\alpha) \tag{2.43}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Assim,

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y) \tag{2.44}$$

onde $g(x) = \phi(x + \alpha)$.

Como ϕ é contínua, g também o é. Assim, g é dada por $g(x) = 0$, $g(x) = 1$, $g(x) = cosh(ax)$ ou $g(x) = cos(ax)$, onde, a é uma constante. Se $g(x) = 0$, então, $f(x) = 0$, mas este não é o caso, uma vez que ϕ é não nula. Se $g(x) = 1$, então $\phi(x) = 1$. No entanto, substituindo em (2.31), vemos que $\phi(x) = 1$ não é solução.

Como ϕ é periódica de período 4α, g também é. Assim, $g(x) = cosh(ax)$ não é solução de (2.31).

Se $g(x) = cos(ax)$, então $\phi(x) = cos(a(x - \alpha))$. Como $f(x + 4\alpha) = \phi(x)$, isso implica que $cos(a(x + 3\alpha)) = cos(a(x - \alpha))$, isto é, $cos(ax + 4a\alpha) = cos(ax)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $4a\alpha = 2\pi$. Então:

$$\phi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right).$$

■

2.4 Equação Funcional de Pexider

Em 1903, Jam Vilém Pexider considerou as seguintes equações:

$$\text{f(x+y)= g(x)+ h(y)} \qquad (2.1)$$
$$\text{f(x+y)= g(x)}\cdot h(y) \qquad (2.2)$$
$$\text{f(xy)= g(x)+h(y)} \qquad (2.3)$$
$$\text{f(xy)= g(x)}\cdot h(y) \qquad (2.4)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 2.6 *A solução geral $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da equação funcional*

$$f(x + y) = g(x) + h(y), \text{ para } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2.1)$$

é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + \alpha + \beta \\ g(x) &= A(x) + \beta \\ h(y) &= A(y) + \alpha \end{aligned}$$

onde, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Prova. Fazendo $y = 0$ em (2.1) temos

$$g(x) = f(x) - \alpha, \qquad (2.5)$$

onde $h(0) = \alpha$. Dá mesma forma se $x = 0$ em (2.1), temos

$$h(y) = f(y) - \beta, \qquad (2.6)$$

onde, $\beta = g(0)$. Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.1), temos

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \alpha - \beta. \qquad (2.7)$$

Defina $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(x) = f(x) - \alpha - \beta \text{ para } x \in \mathbb{R} \ (2.8)$$

temos,

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Assim, A é uma função aditiva sobre $\mathbb{R}$ e de (2.8), temos

$$f(x) = A(x) + \alpha + \beta \qquad (2.9)$$

Usando (2.9) e (2.5), temos

$$g(x) = A(x) + \beta$$

e de (2.9) e (2.6),temos

$$h(y) = A(y) + \alpha$$

■

Aqui un texto recto

Teorema 2.7 *A solução geral $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da equação funcional*

$$f(x+y) = g(x).h(y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R} \qquad (2.2)$$

é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= abE(x) \\ g(x) &= aE(x) \\ h(y) &= bE(y) \end{aligned}$$

em conjunto com as soluções triviais

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \\ h(y) &= u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ g(x) &= v \\ h(y) &= 0 \end{aligned}$$

onde, E é a exponencial, e a e b são constantes não nulas.

Prova.
É fácil checar que f, g, h como em (2.10). (2.11) e (2.12) são soluções de(2.2).
Tomando $y = 0$ em (2.2), temos

$$f(x) = g(x)h(0) \qquad (2.13)$$

Consideremos dois casos:

Caso 1. Suponha $h(0) = 0$. Dá equação (2.13), temos $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando isto em (2.2), temos $g(x)h(y) = 0$, então, temos as soluções (2.11) e (2.12) com $h(0) = 0$.

Caso 2. Suponha $h(0) \neq 0$. Tomando $b = h(0)$, temos de (2.13)

$$g(x) = \frac{f(x)}{b} \qquad (2.14)$$

Dá mesma forma, se $x = 0$ em (2.2), temos

$$f(y) = g(0) \cdot h(y) \qquad (2.15)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Se $g(0) = 0$, então $f(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e então $g(x) \cdot h(y) = 0$. Assim, temos as soluções (2.11) e (2.12) com $g(0) = 0$. Suponha $g(0) \neq 0$. Então,

$$h(y) = \frac{f(y)}{a} \qquad (2.16)$$

onde, $a = g(0)$. Tomando (2.14) e (2.16) e substituindo em (2.2), temos:

$$f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{ab} \qquad (2.17)$$

Defina $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$E(x) = \frac{f(x)}{ab} \qquad (2.18)$$

de (2.18), temos: $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$. Assim, E é a função exponencial. Portanto,

$$f(x) = abE(x) \tag{2.19}$$

de (2.19) e (2.14) temos

$$g(x) = a \cdot E(x)$$

Dá mesma forma, de (2.19) e (2.16),vem que

$$h(y) = b \cdot E(y)$$

∎

Ahora un texto sin entorno

Capítulo 3

Aplicações das Equações Funcionais

3.1 Área do retângulo

Em 1791, Adrien-Marie Legendre obteve a fórmula para a área do retângulo usando a equação funcional aditiva de Cauchy.

Considere um retângulo cujo comprimento da base é b e o comprimento da altura é a.

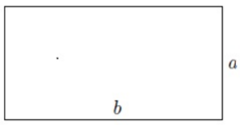

Figura 3.1:

É evidente que a área deste retângulo dependerá da altura e da base. Assim, a área A, do retângulo é uma função de a e b. Isto é:

$$A = f(a, b)$$

Dividiremos este retângulo em dois retângulos menores, traçando uma linha paralela à base, de modo que $a = a_1 + a_2$ (veja figura 3.2).

Então, a área original A é a soma das duas áreas A_1 e A_2.

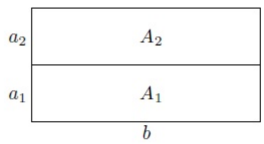

Figura 3.2:

$$A = A_1 + A_2$$

isto é,

$$f(a, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b).$$

Como $a = a_1 + a_2$, temos que:

$$f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b) \qquad (2.1)$$

Note que (2.1) é válida para todos $a_1, a_2, b \in [0, \infty)$. Dá mesma forma, dividindo o retângulo em dois subretângulos por uma linha paralela a altura, temos:

$$f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2) \qquad (2.2)$$

para todos $b_1, b_2, a \in [0, \infty)$. Como a área é positiva, temos $f(a, b) \geq 0$, em (2.1), temos que para um b fixo

$$f(a, b) = ka \qquad (2.3)$$

onde k é uma constante que depende de b e $k \geq 0$. Então,

$$f(a, b) = k(b) \cdot a \qquad (2.4)$$

usando (2.4) em (2.2), temos:

$$k(b_1 + b_2)a = k(b_1)a + k(b_2)a\ ;$$

isto é,

$$k(b_1 + b_2) = k(b_1) + k(b_2)$$

para todo $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$. Assim,

$$k(b) = \alpha \cdot b, \qquad (2.5)$$

onde, α é uma constante real arbitrária.

De (2.3)e (2.5), temos

$$f(a, b) = \alpha \cdot a \cdot b$$

o fato de $f(a, b) \geq 0$ força α a ser uma constante positiva.

3.2 Desintegração radioativa

Seja m_0(em gramas) a massa inicial do elemento radioativo e $m(t)$ a quantidade de massa presente no tempo t. Denote por $f(t)$ a relação entre a massa presente em um tempo t e a massa inicial m_0, tal que:

$$m(t) = m_0 f(t)$$

A quantidade de substância radioativa no momento $t + h$ pode ser expresso de duas formas diferentes, como (veja figura seguinte)

$$m(t + h) = m_0 f(t + h)$$

e

$$m(t + h) = m_0 f(t) f(h)$$

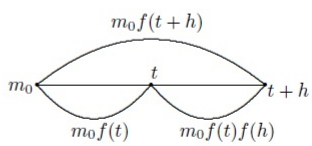

Figura 3.3:

Assim,

$$m_0 f(t+h) = m_0 f(t) f(h)$$

para todo $t, h \in \mathbb{R}_+$. Então:

$$f(t+h) = f(t) \cdot f(h).$$

Do ponto de vista desta aplicação f pode ser assumida como contínua. A solução contínua da equação funcional acima é dada por

$$f(t) = e^{\alpha \cdot t},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$m(t) = m_0 f(t) = m_0 e^{\alpha \cdot t}$$

Como a massa $m(t)$ decresce com o tempo, a constante α deve ser negativa, fazendo

$$\alpha = -\lambda$$

para $\lambda > 0$, temos:

$$f(t) = m_0 e^{-\lambda \cdot t}$$

A constante λ é chamada de constante de decaimento.

3.3 Definição de Logaritmo

Em um curso de cálculo elementar, o logarítmo é definido através de uma integral. Anton (veja, H. Anton(1992),p.469) define logarítmo natural como

$$lnx = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(2.6)

para $x \in (0, \infty)$. Vamos mostrar que:

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

é realmente Lnx e não temos de aceitá-la como uma definição. É mais uma consequência das propriedades das integrais.

Defina $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, x > 0$$

Assim, no caso $x, y \in (1, \infty)$ temos:

$$\begin{aligned} \phi(x) + \phi(y) &= \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_1^y \frac{1}{t}dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{z}dz \qquad , z = tx \\ &= \int_1^{xy} \frac{1}{w}dw \\ &= \phi(xy) \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y) \qquad (2.7)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo ϕ é diferenciável e, portanto, contínua. Daí, a equação (2.7) dá

$$\phi(x) = c \cdot Lnx,$$

onde, c é uma constante.

Usando a soma de Riemann podemos provar que

$$\phi(e) = \int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$$

Assim, temos $c = 1$ e

$$\phi(x) = Lnx$$

Provamos que

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = Lnx$$

3.4 Juros Simples

Nesta seção iremos obter a fórmula de juros simples usando a equação funcional aditiva de Cauchy. Denotemos $f(x,t)$ como o valor futuro de um capital x que foi investido por um período t. Então, para o juro simples, a função $f(x,t)$ satisfaz

$$f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t)$$

e

$$f(x,t+s) = f(x,t) + f(x,s)$$

para todo $x, y, t, s \in \mathbb{R}_+$. Assim,

$$f(x,t) = kxt$$

onde k é um constante positiva dependendo da unidade.

3.5 Juros Compostos

No caso do Juro Composto, a função $f(x,y)$ satisfaz a equação

$$f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t) \qquad (2.8)$$

e

$$f(x,t+s) = f(f(x,t),s) \qquad (2.9)$$

para todo $x, y, t, s \in \mathbb{R}_+$.

A primeira equação diz que o valor futuro do capital $x+y$, depois de ter sido investido por um período t é igual à soma dos valores futuros do capital x depois de terem sido aplicados por um período t, e o capital y, depois de ter sido investido por um período t. A segunda equação diz que o valor futuro do capital investido por um período $t+s$ é igual ao valor do capital $f(x,t)$ investido por um período s. É natural supor que $f(x,t)$ é contínua em cada variável. Então, a solução da equação (2.8) é dada por:

$$f(x,t) = c(t) \cdot x, \qquad (2.10)$$

onde $c : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Usando (2.8) e (2.9), temos:

$$c(t+s)x = c(t) \cdot c(s)x. \qquad (2.11)$$

Assim, temos:

$$c(t+s) = c(t) \cdot c(s) \qquad (2.12)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}_+$. A solução contínua de (2.12) é dada por $c(t) = e^{\lambda \cdot t}$, onde λ é uma constante arbitrária. Fazendo $\lambda = Ln(1+r)$ temos:

$$f(x,t) = x(1+r)^t$$

onde, $r \geq 0$

3.6 Soma de Potência de Inteiros

Seja,

$$f_k(n) = 1^k + 2^k + ... + n^k \qquad (2.13)$$

, $f_k(n)$ denota a soma da k-ésima potência dos n primeiros números naturais. Encontrar fórmulas para $f_k(n)$ tem interessado matemáticos por mais de 300 anos desde o tempo de James Bernoulli (1665- 1705). Vários métodos foram utilizados para encontrar a soma $f_k(n)$. Estes levam a várias relações de recorrência, que fornecem alguns métodos para determinar a soma das potências. Usando equações funcionais, damos fórmulas para $f_k(n)$ para k=1,2,3 e para um k arbitrário, sugerimos uma relação funcional para encontrar uma fórmula. Note-se que $f_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função, onde k=0,1,2,...

3.6.1 Soma dos Primeiros n números Naturais

A função f_1 satisfaz

$$\begin{aligned} f_1(m+n) &= 1+2+3+...+m+(m+1)+...+(m+n) \\ &= f_1(m)+(m+1)+...+(m+n) \\ &= f_1(m)+f_1(n)+mn \qquad (2.14) \end{aligned}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Defina $g_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{1}{2}x^2, \text{ para } x \in \mathbb{N} \qquad (2.15)$$

Em seguid (2.14) reduz-se a

$$g_1(m+n) = g_1(m) + g_2(n), \text{ para } m, n \in \mathbb{N} \qquad (2.16)$$

A solução de equação (2.16) sobre $\mathbb{N}$ é dada por

$$g_1(n) = cn, \qquad (2.17)$$

onde c é constante. De (2.17) e (2.15), temos

$$f_1(n) = cn + \frac{1}{2}n^2 \qquad (2.18)$$

como $f_1(1) = 1$, temos

$$1 = c + \frac{1}{2} \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$f_1(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Então,

$$f_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.6.2 Soma dos Quadrados dos n Primeiros Números Naturais

A função f_2 satisfaz

$$\begin{aligned} f_2(m+n) &= 1^2 + 2^2 + .. + m^2 + (m+1)^2 + ... + (m+n)^2 \\ &= f_2(m) + [1^2 + ... + n^2] + 2m[1 + 2 + ... + n] + m^2 n \\ &= f_2(m) + f_2(n) + 2mf_1(n) + m^2 n \\ &= f_2(m) + f_2(n) + mn^2 + m^2 n + mn \qquad (2.19) \end{aligned}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Defina $g_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_2(n) = f_2(n) - \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{3}, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Temos que (2.19) se reduz a

$$g_2(m+n) = g_2(m) + g_2(n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Então,

$$g_2(n) = c.n$$

e assim,

$$f_2(n) = cn + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \qquad (2.20)$$

Usando a condição $f_2 = 1$, temos:

$$1 = c + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Longrightarrow c = \frac{1}{6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_2(n) &= \frac{n}{6} + \frac{n^2}{6} + \frac{n^3}{3} \\ &= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3.6.3 Soma das K-ésimas Potências dos n Primeiros Números Naturais

Para k arbitrário, temos usando o Teorema Binomial, a seguinte equação funcional

$$\begin{aligned}
f_k(n+m) &= 1^k + 2^k + ... + n^k + (n+1)^k + ... + (n+m)^k \\
&= f_k(n) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i + ... + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i m^{k-i} \\
&= f_k(n) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{} n^i [1^{k-i} + ... + m^{k-i}] \\
&= f_k(n) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i f_{k-i}(m) \\
&= f_k(n) + f_k(m) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i f_{k-i}(m), \qquad m, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Assim , temos:

$$f_k(m+n) - f_k(m) - f_k(n) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i f_{k-i}(m) \qquad \text{para } m, n \in \mathbb{N} \tag{2.21}$$

Fazendo $n = 1$ em (2.21), temos:

$$f_k(m+1) - f_k(m) - f_k(1) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} f_{k-i}(m),$$

isto é,

$$(m+1)^k - 1 = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} f_{k-i}(m) \qquad m \in \mathbb{N},$$

para $k = 2$, temos:

$$m^2 + 2m = 2f_1(m) + f_0(m) = 2f_1(m) + m$$

ou

$$f_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}$$

Para $k = 3$, temos:

$$\begin{aligned} m^3 + 3m^2 + 3m &= 3f_2(m) + 3f_1(m) + f_0(m) \\ &= 3f_2(m) + \frac{3m(m+1)}{2} + m \\ 3f_2(m) &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{2} \\ f_2(m) &= \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \end{aligned}$$

No caso geral.

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i f_{k-i}(m) = \sum_{i==1}^{k} \binom{k}{i} m^i f_{k-i}(n) \qquad \text{para } m, n \in \mathbb{N}$$

substituindo m=1 e usando o fato que $f_k(1) = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i f_{k-i}(n) = (1+n)^k - 1.$$

A partir disso, obtemos

$$kf_{k-1}(n) = (1+n)^n - 1 - \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} f_{k-i}(n) \qquad \text{para } m, n \in \mathbb{N}$$

ou

$$f_{k-1}(n) = \frac{(1+n)^n - 1 - \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} f_{k-i}(n)}{k} \qquad \text{para } m, n \in \mathbb{N}$$

Um dos temas mais desafiadores para um olímpico são os problemas sobre equações funcionais. Porém, quase não existem livros escritos para iniciantes, o que contribui para dificultar mais ainda a implantação de um treinamento para a OBM numa escola que deseja se aventurar no encantador universo das Olimpíadas de Matemática. Nosso objetivo é mostrar algumas técnicas de resolução, que podem ajudar a esclarecer alguma dúvidas e assim fazer com que o aluno crie seu próprio arsenal de técnicas para a resolução de problemas sobre equações funcionais.

3.7 Problemas Olímpicos

Exemplo: (**Austrália**)Para todo inteiro positivo n, temos:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$$

Determine o valor da soma

$$f(1)+f(3)+...+f(999997)+f(999999).$$

$\diamond$ **Solução**: Lembremos que $a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$ (*), basta fazermos agora $a=\sqrt[3]{n+1}$ e $b=\sqrt[3]{n-1}$, e a função dada pode ser reescrita como

$$f(n) = \frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{a-b}{a^3-b^3} = \frac{a-b}{2}$$

Escrevendo f desta forma fica bastante claro porque usaremos (*), em seguida voltemos a variável n, dá seguinte forma

$$2.f(n) = a-b = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$$

Daí, segue que:

$$\begin{array}{rcl}
2f(1) & = & \sqrt[3]{2} \\
2f(3) & = & \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2} \\
2f(5) & = & \sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4} \\
 & . & \\
 & . & \\
 & . & \\
2f(999997) & = & \sqrt[3]{999998}-\sqrt[3]{999996}
\end{array}$$

Adicionando, membro a membro, as equações acima temos:

$$f(1) + f(3) + ... + f(999997) + f(999999) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1000000} = 50$$

Exemplo: Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\left((x-y)^2\right) = \left(f(x)\right)^2 - 2xf(y) + y^2 \quad (\star)$
$\diamond$

Solução: Fazendo x=y=0 em $(\star)$ teremos:

$$f(0)[f(0) - 1] = 0$$

Há então dois casos:
Caso 1:
f(0)=0. Escolhendo y=x em $(\star)$, teremos:

$$(f(x) - x)^2 = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = f(0) = 0$$

Daí temos $f(x) = x$, onde x é um número real qualquer.
Caso 2:
$f(0) = 1$. Novamente escolhendo y=x em $(\star)$, teremos

$$(f(x) - x)^2 = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = f(0) = 1$$

dái temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ ou $f(x) = x-1$. Assim, $f(x) = x+\epsilon_x$, onde $\epsilon_x \in \{-1, 1\}$. Temos então de $(\star)$,

$$(x-y)^2 + \epsilon_{(x-y)^2} = (x-\epsilon)^2 - 2x(y+\epsilon_y) + y^2$$

donde

$$\epsilon_{(x-y)^2} = 2x(\epsilon_x - \epsilon_y) + \epsilon_x^2$$

Como $f(0) = 1$, $\epsilon_0 = 1$.

Se existe $z \in \mathbb{R}$ com $\epsilon_z \neq 1$, existe $y \in \mathbb{R}$ com $\epsilon_y \neq \epsilon_1$. Fazendo x=1 na igualdade acima ,temos

$$\epsilon_{(1-y)^2} = 2(\epsilon_1 - \epsilon_y) + \epsilon_x^2$$

donde,

$$2(\epsilon_1 - \epsilon_y) = \epsilon_{(1-y)^2} - \epsilon_x^2$$

,absurdo, pois $|2(\epsilon_1 - \epsilon_y)| = 4$ e $|\epsilon_{(1-y)^2} - \epsilon_x^2| \in (0, 2)$. Assim , devemos ter $\epsilon_x = 1$, donde $f(x) = x + 1$. Então, as soluções são $f(x) = x$ ou $f(x) = x + 1$

Teorema 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \phi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*
Prova. *Ver [6]* ■

Exemplo: (Estônia) Encontre todas as funções monótonas $f; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a equação

$$f(x + f(y)) = y + f(x + 1),$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ ⋄
Solução:
Fazendo x =0 na equação dada temos

$$f(f(y)) = y + f(1), \qquad (\otimes)$$

o que nos mostra a bijetividade da função f, portanto existe um número real k tal que $f(k) = 0$. Voltando á equação funcional dada e fazendo y=k, temos

$$f(x + 1) - f(x) = -k.$$

Fazendo $z = x + 1$ e $h = f(y) - 1$, temos

$$f(z + h) = f(x + f(y)) = y + f(x + 1) = f(z) + \phi(h),$$

onde $\phi(h) = f(h + 1) - f(1)$,
Pelo teorema anterior f é do tipo $f(x) = -kx+b$, e temos que $b = k^2$ (pois $f(k) = 0$).
Agora vamos fazer y = 0, em $(\otimes)$:

$$f(f(0)) = f(1)$$

Sendo $k \neq 0$ (senão f seria identicamente nula, o que não é possível) temos

$$f(k^2) = f(1) \Longleftrightarrow k = \pm 1.$$

Logo $f(x) = \pm x + 1$

Exemplo: Encontre uma função par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma função ímpar, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $2^x = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ⋄
Solução:
Substituindo x por -x na equação dada, temos:$2^{-x} = f(-x) - g(x)$. Resolvendo o sistema de equações obtido, temos

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \cosh(xLn2),$$
$$g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \sinh(xLn2)$$

Apêndice A

Base de Hamel

Teria sido apropriado mencionar Georg Hamel e sua conexão com a teoria das equações funcionais em nosso levantamento histórico. No entanto, o trabalho de Hamel é técnico, e melhor estudado após uma análise aprofundada das contribuições de Cauchy .Foi escolhido colocar o trabalho de Hamel neste apêndice porque a sua contribuição para o assunto depende de um axioma altamente especulativo em matemática, ou seja, o axioma da escolha, que não é aceito por todos os matemáticos. Georg Hamel nasceu em 1877, em Düren, Alemanha, e morreu em 1954, em Landshut, na Alemanha. Em 1897, Hamel foi para a Universidade de Berlim, onde era ser ensinado por Hermann Schwarz e Max Plank, para citar dois, posteriormente, ele foi para a Universidade de Göttingen, onde estudou com Felix Klein e David Hilbert. Ele foi premiado com um doutorado sob a supervisão de Hilbert em 1901. O tema de sua dissertação foi o quarto problema de Hilbert. Em 1905, ele foi para Brno. Foi durante o período deste trabalho em Brno que seu artigo de 1905 sobre bases Hamel foi escrito. Neste apêndice, vamos considerar brevemente a base Hamel para os números reais e sua conexão com a teoria das equações funcionais. Vimos que as únicas soluções contínuas para a equação f (x + y) = f (x) + f (y) são funções da forma f (x) = ax para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Foi Georg Hamel [1905] que conseguiu mostrar que existem muitas soluções para esta equação funcional que não são contínuos, desde que se aceita o Axioma da Escolha. O Resultado de Hamel pode ser expresso da seguinte maneira.

Proposição A.1 *Existe um conjunto $\mathbb{U}$ não-enumerável de números reais tal que cada número real x tem uma representação única*

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$$

onde n é um inteiro positivo, $q_1, ..., q_n$ são números racionas, e $u_1, ..., u_n$ são elementos distintos do conjunto $\mathbf{U}$.

A representação de cada número real x, em termos desta base é única. Isto pode ser visto como o ponto crucial da proposição. Mais precisamente, suponha que podemos escrever x de duas formas, ou seja,

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i, \qquad x = \sum_{i=1}^{m} r_j v_j$$

onde $q_1, ..., q_n, r_1, ..., r_m$ são números racionais e $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m \in \mathbb{U}$. A ordem dos termos é arbitrária. Por isso, vamos assumir que

$$u_1 < u_2 < ... < u_n, ..., v_1 < v_2 < ... < v_m.$$

Em seguida, a unicidade da representação em (A.1) implica que n = m, e $q_i = r_i$, e que $u_i = v_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$

Para os efeitos do trabalho que se segue, é mais fácil de escrever a representação de cada x como

$$x = \sum_{u \in U} q_u u,$$

onde a soma é sobre todos os elementos de U, mas apenas um número finito de coeficientes q_u são diferentes de zero

O conjunto U é chamado uma base de Hamel para $\mathbb{R}$. A Proposição de Hamel afirma que conjunto dos números reais, considerado como um espaço vetorial com o campo escalar dos números racionais, tem uma base não-enumerável. Para ver como esse resultado pode ser útil em determinar as soluções adicionais para a equação de Cauchy, vamos considerar uma função arbitrária.

$$\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definamos uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguir. Para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos escrever de maneira única

$$x = \sum_{u \in U} q_u,$$

pela representão de Hamel. Definamos

$$f(x) = \sum_{u \in U} q_u.\alpha(u)$$

Em seguida temos:

Proposição A.2 *A equação funcional f satisfaz*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo real x e y.

Prova. Seja

$$x = \sum_{u \in U} q_u u$$

e

$$y = \sum_{u \in U} r_u u$$

temos duas representações únicas de x e y, como uma combinação linear dos elementos da base de Hamel. Então,

$$x + y = \sum_{u \in U} (q_u + r_u) u$$

é a única representação de x+y. Então,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{u \in U} (q_u + r_u) \alpha(u) \\ &= \sum_{u \in U} q_u \alpha(u) + \sum_{u \in U} r_u \alpha(u) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Note-se que a segunda equação se mantém porque todas as somas são finitas, e, assim, podemos reorganizar termos à vontade ■

Como todas as funções f(x) desta forma satisfarão a equação de Cauchy, é natural verificar se as nossas soluções "fracas"(p. ex., contínua, monótona ou soluções limitadas localmente) são desta forma. Eles são, porque para qualquer $a \in \mathbb{R}$, podemos escolher a função $\alpha(u) = au$. Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{u \in U} q_u \alpha(u) \\ &= \sum_{u \in U} q_u (\alpha . u) \\ &= a \left(\sum_{u \in U} q_u u \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Temos outras soluções? Não é difícil ver que nós temos que ter outras soluções. Há claramente outras maneiras de definir a função $\alpha(u)$. Por isso, precisamos apenas mostrar que cada definição distinta de $\alpha(u)$ leva a uma escolha distinta de f(x). Suponha que temos duas funções $\alpha_1(u)$ e $\alpha_2(u)$ que ambos determinem a mesma função f(x). Então, para qualquer $x = \sum_{u \in U} q_u u$, devemos ter

$$\sum_{u \in U} q_u \alpha_1(u) = \sum_{u \in U} q_u \alpha_2(u)$$

Em particular, vamos definir $x = u_0$ para algum $u_0 \in U$. Dá unicidade da representação da base de Hamel, temos que $q_n = 1$ e $u = u_0$ ou $u \neq u_0$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_0) &= \sum_{u \in U} q_u \alpha_1(u) \\ &= f(u_0) \\ &= \sum_{u \in U} q_u \alpha_2(u) \\ &= \alpha_2(u_0) \end{aligned}$$

Assim, tal como há muitas outras funções $\alpha(u)$, há muitas outras soluções para equações funcionais de Cauchy. Na tentativa de visualizar tal função, vemos que a situação é muito pior. Ela exige o axioma da escolha, uma existência axioma notoriamente não-construtivo, para demonstrar a existência dessas funções. Isso significa que temos pouca esperança de ser capaz de construir um algoritmo que deixaria um computador calcular tal função.

Referências Bibliográficas

[1] Sahoo, P., Kannappan, P., *Introduction to Functional Equations*, (2011).

[2] Andreescu, T., Boreico, T., *Functional Equations*, (2007).

[3] Small, C. G., *Functional Equations and How to Solve Them.* Problems Books in Mathematics, (2007).

[4] Efthimiou, C., *Introduction to Functional Equations- Theory and Problem-Solving for mathematical competitions and beyond*, (2010).

[5] Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, (2006).

[6] Lima, E. L., *A matemática do Ensimo Médio , vol.1, Cap.8*,(2010)

[7] Anton, H., *Cálculo-Um novo Horizonte-Vol.1*-8^{a} *edição*, (2007).

[8] Gomes, C. S. G.,*Revista Eureka-Equações Funcionais para os mais Jovens,n^{o} 37*