UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA-PROFMAT

ALEXANDER AFFONSO

O TRIÂNGULO DE PASCAL E O BINÔMIO DE NEWTON

NITERÓI/2014

ALEXANDER AFFONSO

O TRIÂNGULO DE PASCAL E O BINÔMIO DE NEWTON

Trabalho de conclusão de curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Cecília de Souza Fernandez.

Niterói/RJ
2014

O TRIÂNGULO DE PASCAL E O BINÔMIO DE NEWTON

Trabalho de conclusão de curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em 02 de junho 2014.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Maria Luz Fassarela
UFF

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva
UERJ

Profa. Dra. Cecília de Souza Fernandez-Orientadora
UFF

Niterói/RJ
2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente a minha esposa Luciana Affonso pelo amor, companherismo e paciência comigo nesta jornada. Aos meus filhos João Pedro, Daniel e Filipe que são motivos de alegria e proporcionam sempre paz ao meu coração. Aos meus pais Carlos e Ilma, ao meu amigo Fábio, aluno do mestrado que compartilhou comigo momentos difíceis e alegres neste curso, ao meu amigo Claudio por estar sempre presente dando-me força e disponível para me auxiliar nas pesquisas. Ao meu amigo Silvio pela boa prosa que sempre nos estimula a refletir e questionar. A todos os colegas e professores do PROFMAT/UFF. Em especial, a minha orientadora, Profa. Dra. Cecília de Souza Fernandez pelo carinho, disponibilidade, dedicação e cuidado para comigo nesta caminhada.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta".
(GAUSS, 1777-1855)

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de ensino do Triângulo de Pascal e do Teorema do Binômio de Newton através de uma abordagem histórica. Investigamos o surgimento do Triângulo Aritmético nas sociedades antigas até a época de Pascal e explicamos porque o Triângulo Aritmético é geralmente conhecido como Triângulo de Pascal. Também analisamos propriedades do Triângulo de Pascal e apresentamos as demonstrações de algumas dessas propriedades, como a relação de Stifel, o teorema das linhas e o teorema das colunas. Terminamos enunciando o Teorema do Binômio de Newton e apresentando uma demonstração para este resultado.

Palavras-chave: Teorema do Binômio de Newton, Triângulo de Pascal, Ensino.

ABSTRACT

The present work suggests a teaching proposal for the Pascal's Triangle and the Newton's Binomial Theorem through a historical approach. We investigate the appearance of the Arithmetical Triangle in ancient societies until the time of Pascal and we explain why the Arithmetical Triangle became known as Pascal's Triangle. We also analyze properties of the Pascal's Triangle and we present the proofs of some of them, as the Stifel's relation, the theorem of rows and the theorem of columns. We finish our work presenting the statement of Newton's Binomial Theorem and a proof for this result.

Keywords: Newton's Binomial Theorem, Pascal's Triangle, Teaching.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em Matemática, o ensino de determinados assuntos é uma tarefa árdua e desgastante para o professor. Pois, há conteúdos matemáticos que, pela sua própria essência abstrata, encontram uma resistência natural por parte dos alunos. Como consequência, os alunos ficam desestimulados e dispersos. Um assunto que apresenta esta dificuldade é o tema do Binômio de Newton. Neste trabalho sugerimos uma proposta que, acreditamos, irá facilitar o aprendizado deste tema. Para atingir esse objetivo recorremos a História da Matemática. A História da Matemática nos mostra que a Matemática faz parte do desenvolvimento do homem e está em constante transformação.

Neste trabalho vamos apresentar a trajetória da construção, até os nossos dias, do famoso Triângulo de Pascal e sua relação com o Binômio de Newton. Em seguida, explicamos as notações utilizadas para que haja uma clara compreensão do conteúdo deste trabalho. Explicamos o que é o Triângulo de Pascal e apresentamos algumas das propriedades descritas por Pascal em seu *"Tratado do Triângulo Arimético".* Em seguida, abordamos a história do Teorema do Binômio de Newton e o relacionamos ao Triângulo de Pascal. Também damos uma demonstração deste resultado e apresentamos o seu termo geral.

Este trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte, apresentada no capítulo 2, é uma proposta para motivar o ensino em sala de aula sobre o tema Binômio de Newton. A segunda parte, apresentada nos capítulos restantes, acreditamos que servirá para o professor se aprofundar no assunto, oferecendo material bibliográfico que usualmente não é encontrado nos livros didáticos.

O primeiro contato dos alunos com o Binômio de Newton ocorre no Ensino fundamental II, com o ensino dos chamados produtos notáveis: $(x+a)^2$ e $(x+a)^3$. Esses produtos são casos particulares do Binômio de Newton, nos quais pode ser dada uma interpretação geométrica, como veremos logo a seguir. Porém, o que podemos dizer de $(x+a)^4$? Ou, mais geralmente, de $(x+a)^n$ onde $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$?

Considere $(x+a)^2$. Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos escrever

$$(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = 1\text{x}^2 + 2\text{ax} + 1\text{a}^2.$$

Podemos dar uma interpretação geométrica para o resultado acima calculando áreas de quadrados e retângulos, como mostrado na figura abaixo:

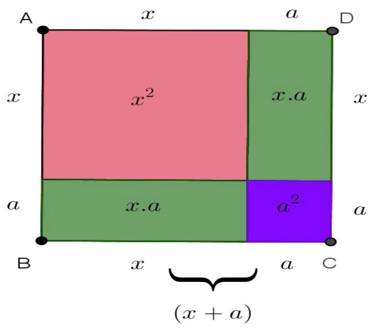


Figura 1

De fato, a área do quadrado ABCD é dada pela soma das áreas dos quadrados e dos retângulos que compõem esse quadrado. Ou seja, $(x+a)^2 = x^2 + x \cdot a + x \cdot a + a^2 = 1x^2 + 2a \cdot x + 1a^2$. O mesmo processo pode ser feito com $(x+a)^3$. Mas, agora, trabalharemos com volume e as figuras serão cubos e paralelepípedos (ver figura 2). Temos, $(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2 \cdot a + 3x \cdot a^2 + 1a^3$.

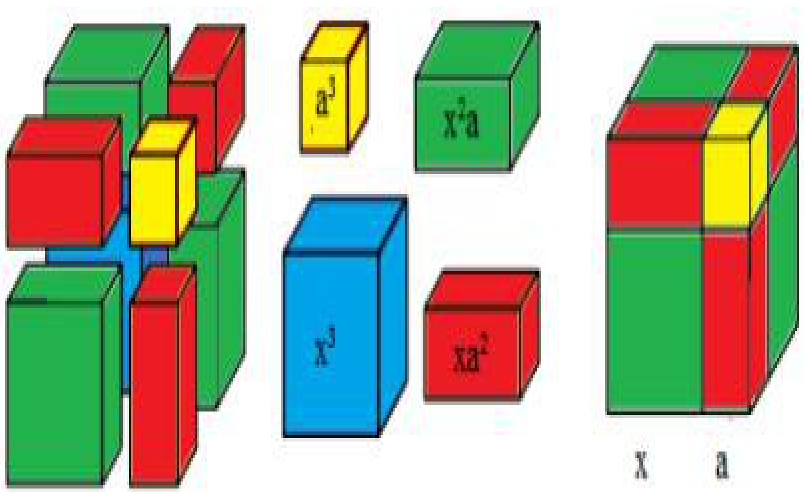


Figura 2

E que tal, nesse momento, apresentarmos parte do Triângulo de Pascal e perguntarmos aos alunos do Ensino Fundamental, estimulando a curiosidade deles, quais são as relações que eles perceberam?

Podemos observar, junto com os alunos, que:

Produtos de (x+a)	Coeficientes
$(x+a)^0 = 1$	1
$(x+a)^1 = 1\text{x} + 1\text{a}$	1 1
$(x+a)^2 = 1\text{x}^2 + 2\text{ax} + 1\text{a}^2$	1 2 1
$(x+a)^3 = 1\text{x}^3 + 3\text{ax}^2 + 3\text{xa}^2 + 1\text{a}^3$	1 3 3 1

E podemos deixar como um "problema em aberto" para eles, se existe um modo de expressar os coeficientes de produtos quaisquer do fator (x+a).

Acreditamos que devemos estimular o questionamento de nossos alunos e fazê-los pensar em como obter generalizações de certos resultados matemáticos. Este tipo de raciocínio, por parte dos alunos, certamente os auxiliará não só no estudo de conteúdos matemáticos, mas também os auxiliará em muitas situações cotidianas, onde "ver além do horizonte" poderá torná-los cidadãos mais preparados social e politicamente e, principalmente, pessoas mais felizes.

Terminamos observando que é apenas no segundo ano do Ensino Médio que o aluno estudará o Teorema do Binômio de Newton. Este resultado é apresentado, em geral, sem uma abordagem histórica e sem alguma conexão com os já conhecidos produtos notáveis. A apresentação fria e seca da fórmula

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p \quad (n \in \mathbb{N})$$

é demais assustadora para a grande maioria de nossos jovens estudantes. Nos capítulos a seguir, vamos apresentar um pouco da História do Triângulo Aritmético e observar que sua relação com o Teorema do Binômio de Newton pode tornar as aulas sobre este resultado mais atraentes.

2.O TRIÂNGULO ARITMÉTICO: ABORDAGEM HISTÓRICA

2.1 O TRIÂNGULO ARITMÉTICO ANTES DE PASCAL

O conhecimento sobre a história do Triângulo Aritmético é um pré-requisito para o professor que deseja apresentar em suas aulas o tema Binômio de Newton. Isto porque há uma relação intrínseca entre a construção do Triângulo Aritmético e os coeficientes binomiais no desenvolvimento do Binômio de Newton. A observação, em sala de aula, pelo professor a respeito dessa relação seduz, cativa e desperta a curiosidade do aluno, promovendo, assim, um ambiente motivado e propício para potencializar a relação ensino-aprendizagem. Soma-se a isso o fato do próprio Triângulo Aritmético apresentar algumas propriedades, por si mesmas, muito interessantes. Tais propriedades serão vistas detalhadamente mais adiante.

O Triângulo Aritmético ficou conhecido por vários nomes no decorrer da História. Por exemplo, na China o chamavam de Yang Hui, na Itália de triângulo de Tartaglia, em outras regiões de Tartaglia-Pascal e de triângulo combinatório. Mas, a denominação mais famosa pela qual o Triângulo Aritmético ficou conhecido foi dada pelos franceses. Eles o chamavam de Triângulo de Pascal. Homenagem justa ao homem que dedicou muito tempo e esforço para conhecer e demonstrar as propriedades desse triângulo. Em nossos livros didáticos, ou pelo menos em sua maioria, o Triângulo Aritmético é chamado de Triângulo de Pascal. Acreditamos que, como professores, não podemos nos furtar a dialogar com os nossos alunos sobre a história do que ensinamos em sala de aula. De fato, seguindo as orientações que encontramos nos Parâmetros Currículares Nacionais (PCN's) optamos em iniciar o nosso trabalho recorrendo a História da Matemática para auxiliar no ensino de Matemática em sala de aula.

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhe permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdade eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporção de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor comprenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos (PCN's Ensino Fundamental- Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias - MEC, 1998, p.37).

A citação abaixo reforça a nossa proposta:

> A partir da aquisição de conhecimento histórico e filosófico dos conhecimentos matemáticos, o professor tem a possibilidade de diversificar suas técnicas pedagógicas e tornar-se mais criativo na elaboração de suas aulas, as quais podem provocar o interesse dos alunos para o estudo da Matemática (Miorim, 1998, pg. 69).

O conhecimento da História da Matemática, juntamente com outros recursos pedagógicos, possibilita ao aluno compreender a dificuldade que os povos antigos possuíam para resolver seus problemas. O aluno percebe que a Matemática é uma criação humana que demandou dedicação e esforço de homens e mulheres no decorrer do tempo. O aluno, estudando a evolução histórica da produção matemática, passa a ter uma compreensão do surgimento dos conceitos matemáticos e a dificuldade para construí-los.

> Para o estudante, é muito instrutivo aprender não somente o resultado final, a última formulação, mas também a história de seu desenvolvimento. Com isto, não apenas toma conhecimento do processo do desenvolvimento intelectual, mas também constata que as dificuldades que pode encontrar para assimilar novas idéias não se devem necessariamente à falta de condições de sua parte, e sim ao alto grau de sofisticação necessário para captar as idéias em questão. Ao perceber as desventuras de seus predecessores, sentir-se-á menos desanimado pelas suas (Silva, 2008, pg.69).

Esperamos que fique claro, tanto para professores como para alunos, que a construção do conhecimento matemático está diretamente associado as condições sociais, políticas, econômicas e históricas de determinada época. Nesse sentido, a Matemática é dinâmica e está diretamente relacionada as necessidades de cada sociedade. Tomemos o Triângulo Aritmético como exemplo. Diversas sociedades em tempos distintos, como veremos abaixo, o estudaram e usaram as suas propriedades para atenderem as suas próprias demandas.

Há dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético, este já era objeto de estudo na Índia. Os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, destacava-se o estudo de combinatória. A importância desse tema justificava-se devido a sua concepção atomística do mundo físico. Para os indianos, os átomos possuíam qualidades como gosto, cor, textura e cheiro. A combinatória indiana buscava entender a combinação dessas qualidades. E, em um segundo momento, passaram aplicar as técnicas combinatórias a todas as coisas. Nesse contexto, surgem os primeiros livros com técnicas combinatórias, mas é só com o sábio Pingala (200 a.C.) , quase 2000 anos antes de Pascal, em sua obra *"Chandra Sutra"* que aparece, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético. Segundo Silveira (2001), Pingala, ao estudar as métricas musicais[1] na

1.Uma métrica musical consiste na divisão de uma linha musical em compassos marcados por tempos fortes e fracos, representado na notação musical ocidental por um símbolo chamado fórmula de compasso.

versificação, observou que a expansão das métricas, sucessivamente, de uma, duas, três, ou várias sílabas podia ser disposta na forma de um triângulo. A técnica usada por Pingala para construir o triângulo é descrita por ele abaixo:

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba, a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante (Silveira, 2001).

Segue-se abaixo o Triângulo Aritmético descrito por Pingala e encontrado em uma reedição de *"Chandra Sutra"* de 1931.

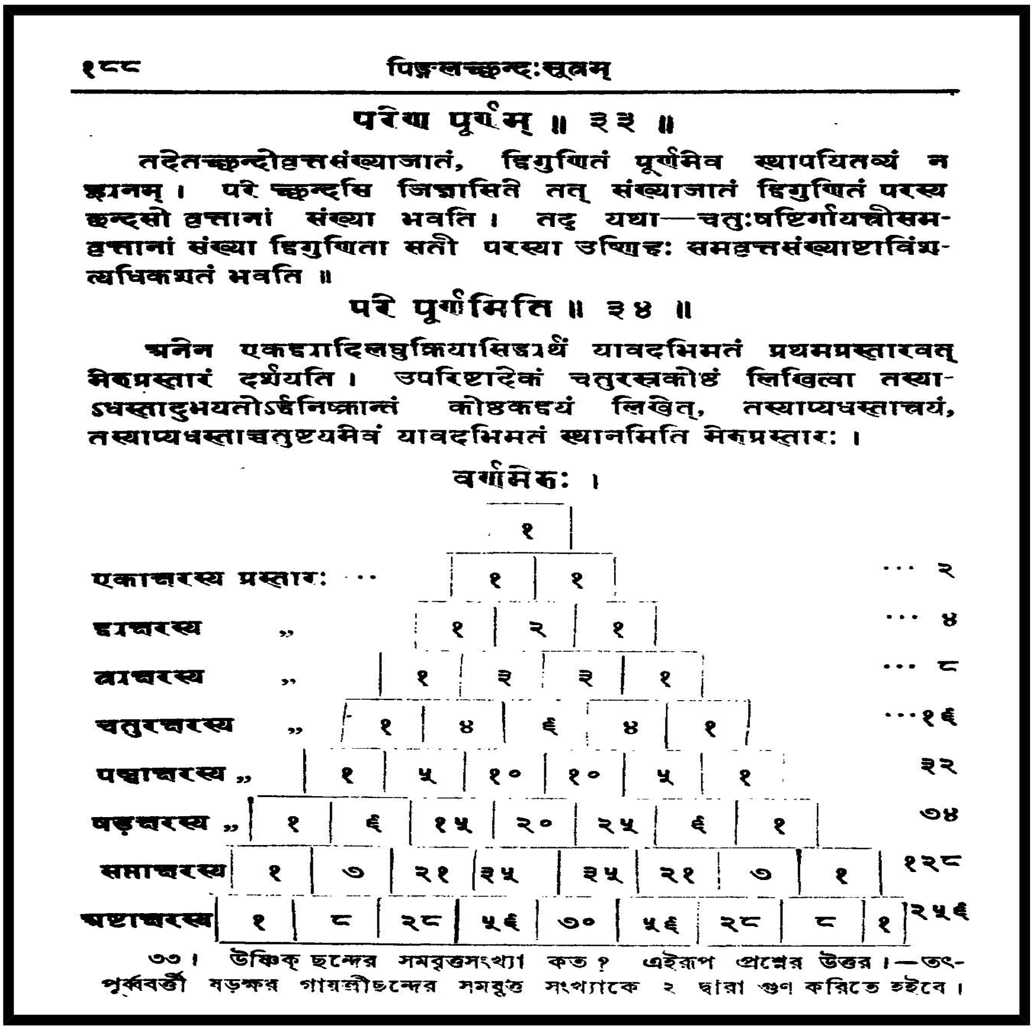


Figura. 3: Triângulo Aritmético de Pingala

Imagem retirada : https//archive.org/details/ChhandraSutra-Pinga

Deslocando-se o lado esquerdo do Triângulo Aritmético acima para a direita, formamos um triângulo retângulo. Sendo essa uma possível forma de representar o Triângulo Aritmético acima e somado ao fato de ser a maneira como é usualmente apresentada em boa parte de nossos livros didáticos, nós a adotaremos neste trabalho por questões didáticas.

1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Os antigos chineses utilizavam a distribuição binomial para calcular raízes quadradas, cúbicas, quartas e etc... Mas, para achar essas raízes não se precisava utilizar o Triângulo Aritmético. Este aparece nos escritos chineses do "*Manual de matemática*" de Jia Xian (1010-1070), em 1050. Porém, o matemático chinês mais famoso por estudar o Triângulo Aritmético foi Yang Hui (1238-1298). Ele escreveu dois livros nos quais buscava compreender as propriedades do Triângulo Aritmético, chegando inclusive a ilustrar o belíssimo triângulo abaixo, que foi usado pelo matemático Zhu Shijie (1260-1330) em 1330 no seu livro "*Precioso espelho dos quatros elementos*".

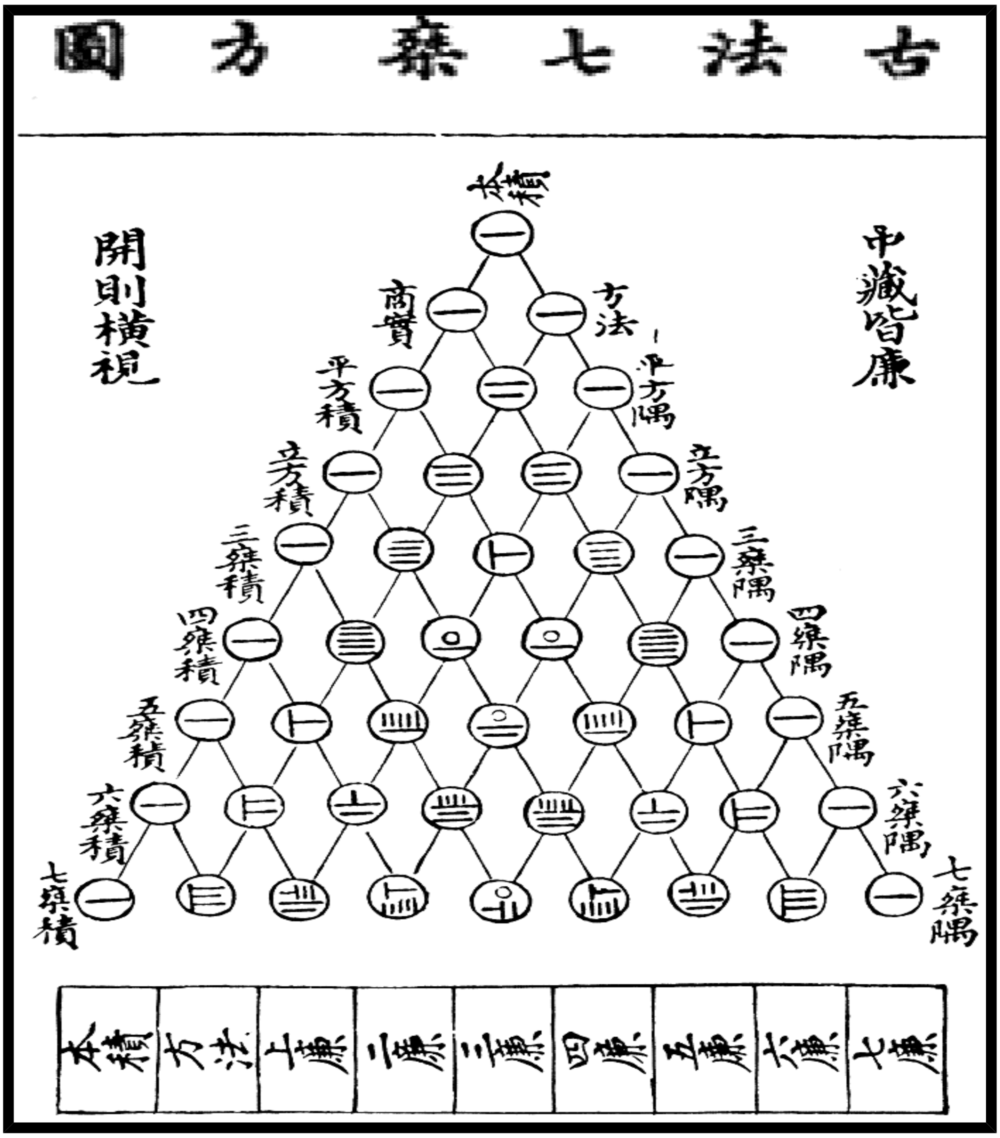


Figura 4: Triângulo Aritmético de Yang Hui

Imagem retirada:http://en.wikipedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif

Já no mundo islâmico, o Triângulo Aritmético chega através de compilações de livros indianos. O mais famoso matemático islâmico a estudar o Triângulo Aritmético foi al Samaw'al (1130-1180), que escreveu o tratado "*A deslumbrante Álgebra*", onde corrigiu e aperfeiçou o trabalho de seus antecessores sobre o Triângulo Aritmético e o Binômio de Newton. Nesta obra, al Samaw'al atribui o Triângulo Aritmético a Al-Karaji (953-1029), que em 1007 em suas obras sobre álgebra *"O al Fakhri"* e *"O al Badi"* utilizou o Triângulo Aritmético para conseguir o desenvolvimento de potências quádrica, cúbica e quártica de binômios. Ele também demonstrou por indução matemática a validade do Binômio de Newton e desenvolveu o Triângulo Aritmético até a décima segunda linha conforme segue abaixo:

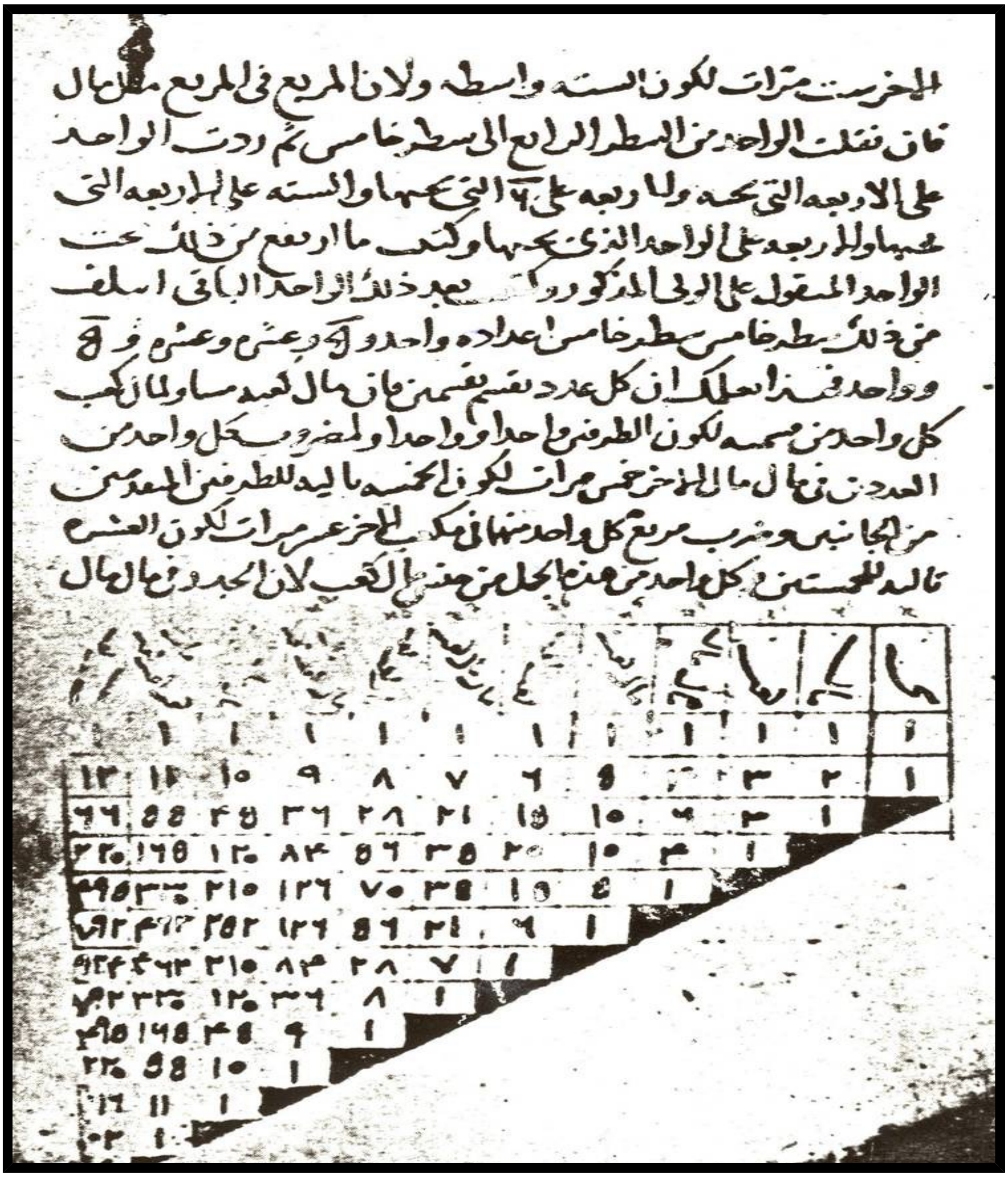


Figura 5: Triângulo Aritmético de al Samaw'al

Imagem retirada : http://culturemath.ens.fr/print.php?nid=2649&print=yes#10

Na Europa, o matemático alemão Apianus (1495-1551) publicou em 1527 o livro intitulado *"Kauffmanns Rechnung"* , que se tratava de uma obra de aritmética comercial. Nesta obra, o Triângulo Aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas. Segundo BOYER (1996, pg. 205), é a primeira impressão do Triângulo Aritmético na Europa.

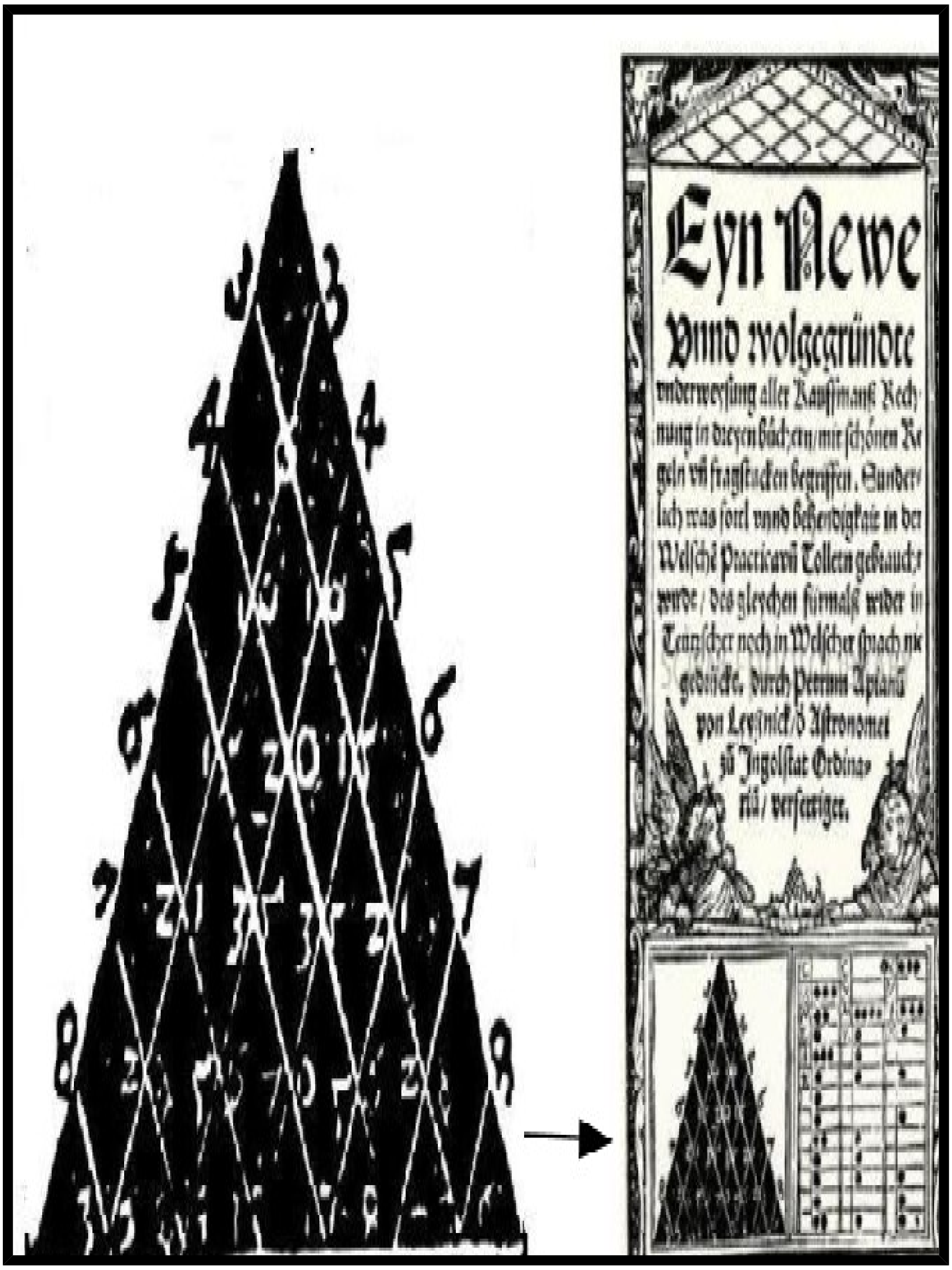
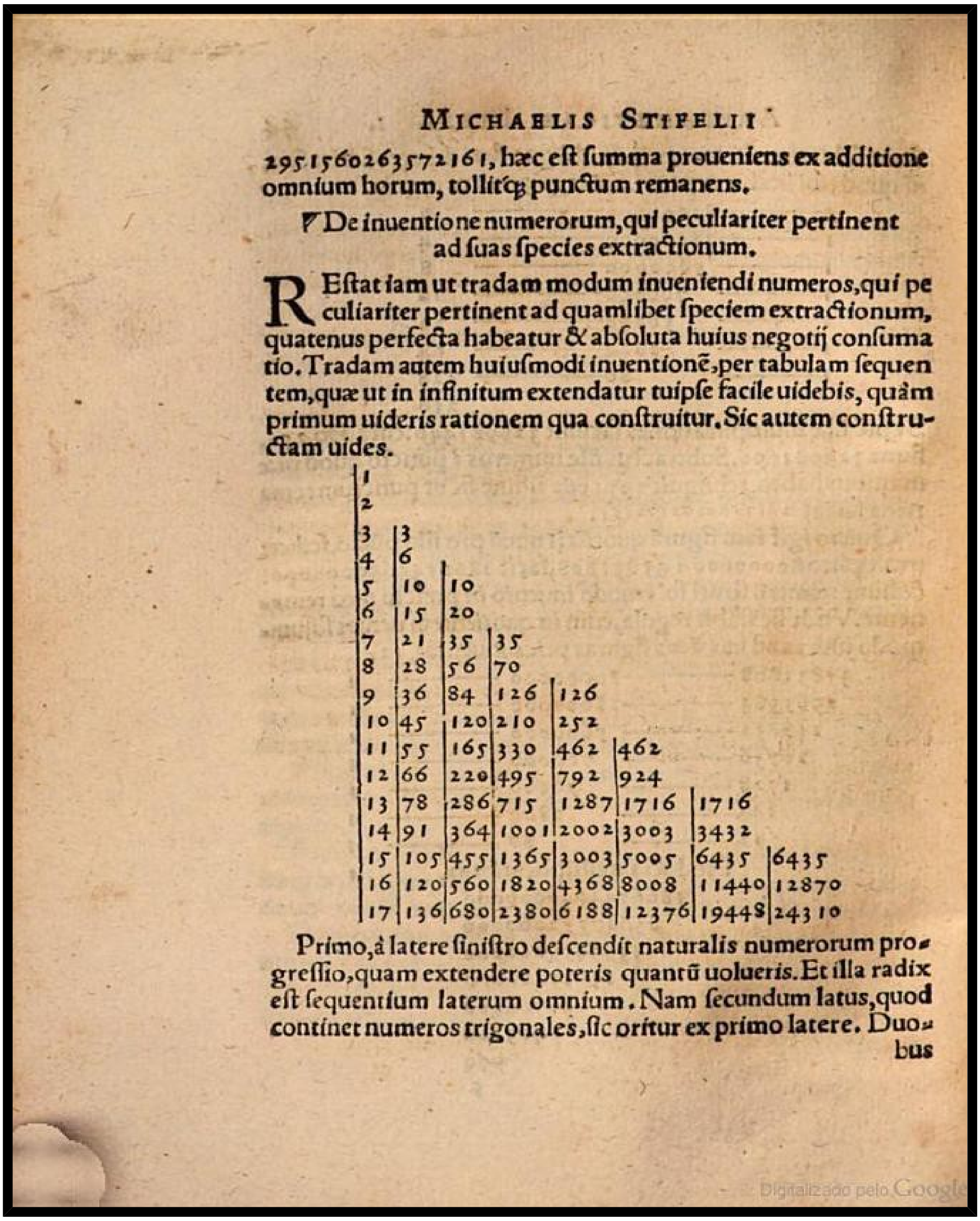


Figura 6: Triângulo Aritmética de Apianus

Imagem retirada:https://download.digitale-sammlungen.de/pdf/1392744022bsb11110160.pdf

Mas, a divulgação do Triângulo Aritmético na Europa ocorre com o matemático Michel Stifel (1487-1567), que estudou algumas das propriedades do triângulo e as discutiu em sua obra *"Arithmetica Integra"*, de 1544.



MICHAELIS STIFELII

2951560263572161, hæc eſt ſumma prouenìens ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

¶ De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

REſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſumatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionē, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quàm primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

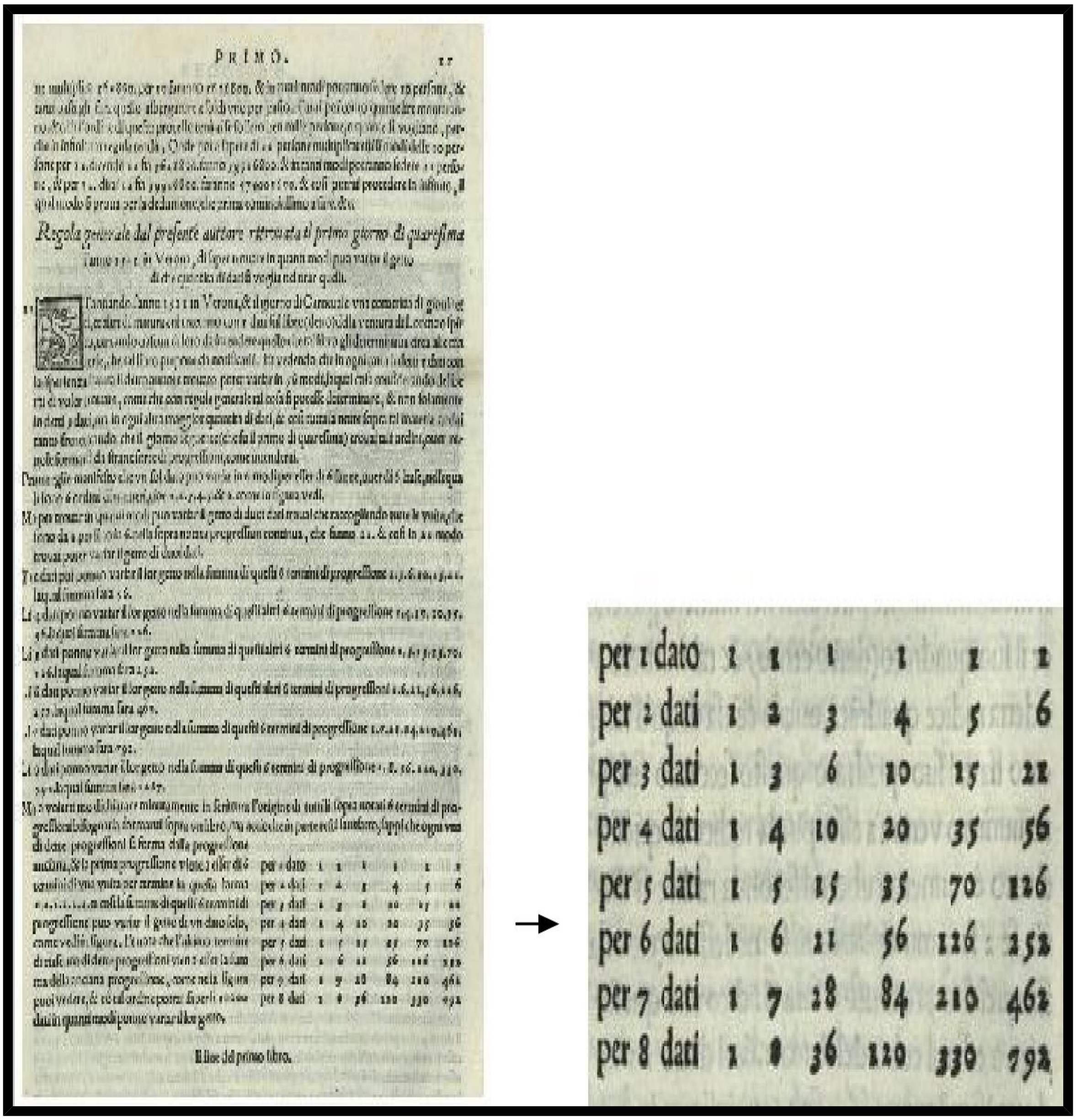
1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantū uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

Figura 7:Triângulo Aritmético de Stifel

Imagem retirada: http://www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/pageview/3042371

Na Itália, o matemático mais influente a dedicar-se a compreender e divulgar o Triângulo foi Niccólo Fontana Tartaglia (1499-1559), que apresentou suas descobertas em sua obra *"General Trattato di numeri et misure"*, de 1556. Tartaglia reivindicou para si a invenção do Triângulo Aritmético. Como consequência, alguns países europeus conhecem o Triângulo Aritmético como "Triângulo de Tartaglia".



per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Figura 8: Triângulo Aritmético de Tartaglia

Imagem retirada: http://bvpb.mcu.es/es/consulta/resultados_busqueda.cmd?posicion=6&forma=ficha&id=2245

Na França, o matemático mais famoso a investigar o Triângulo Aritmético foi Blaise Pascal (1623-1662). Pascal dedicou-se intensa e profundamente a conhecer o Triângulo Aritmético e suas propriedades. Sua dedicação resultou na obra *"Traité di Triangle Arithmétique",* publicada postumamente em 1665. Pascal notorizou-se não apenas pelo estudo do Triângulo Aritmético, mas por diversas contribuições na própria matemática como estudos sobre cónicas, o ciclóide e seu pioneirismo nos estudos de probabilidade. Na Física, contribuiu na mecânica dos fluidos. São relevantes também suas contribuições em Filosofia e Teologia.

Figura 9: Capa do livro Traité di triangle Arithmétique

Imagem retirada: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/f1.image.r=Pascal,%20Blaise.langPT

Figura 10: Blaise Pascal

Imagem retirada: https://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

2.2 BLAISE PASCAL E O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Em *"Traité di Triangle Arithmétique",* Pascal investigou profundamente várias propriedades do Triângulo Aritmético:

> "Chamo Triângulo Aritmético uma figura que se constrói da seguinte maneira. De um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e Gζ, uma perpendicular a outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se quiser, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta." (Pulskamp, 2009, pg. 1, nossa tradução).

Segue abaixo o Triângulo Aritmético construído por Pascal:

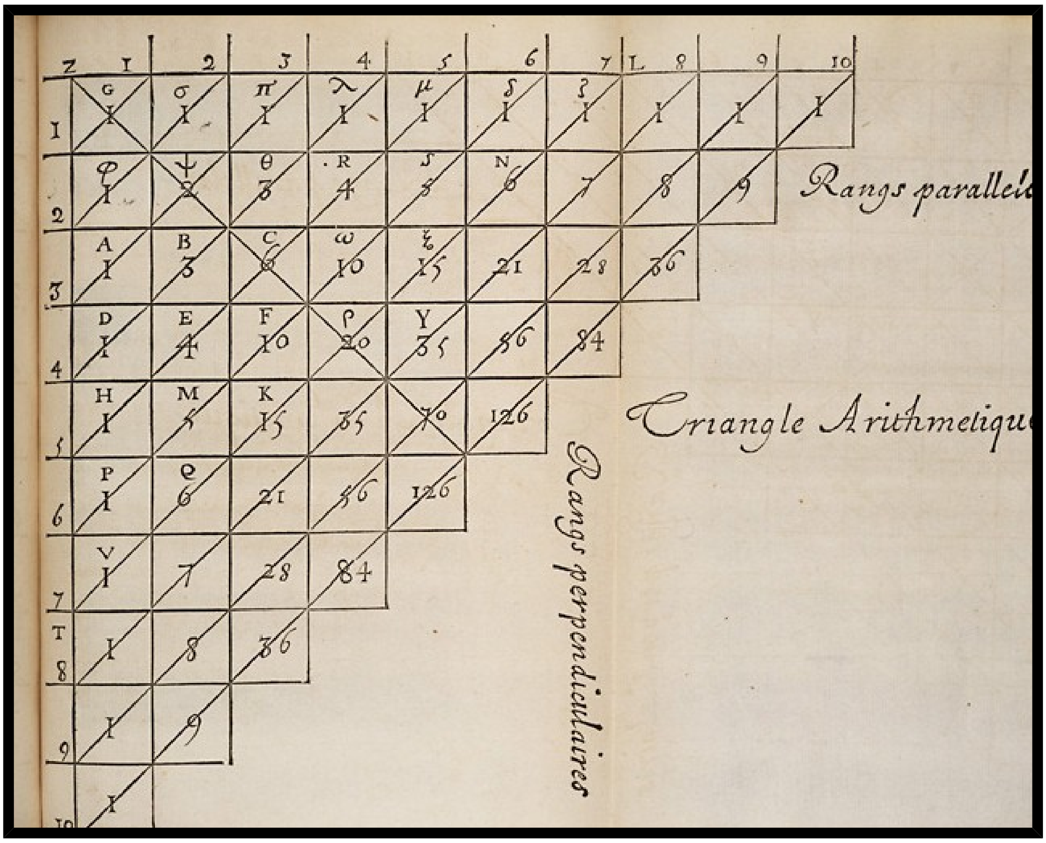


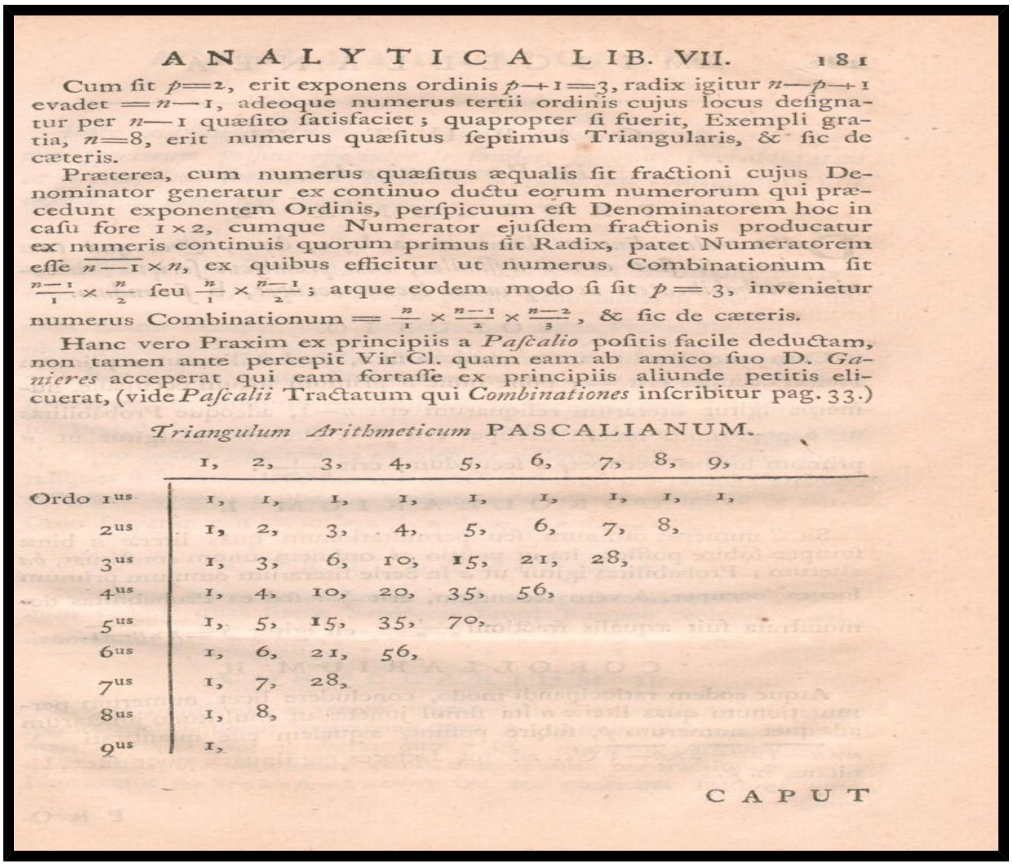
Figura 11: Triângulo Aritmético de Pascal

Imagem retirada: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/f1.image.r=Pascal,%20Blaise.langPT

A construção do triângulo é feita colocando cada número em uma célula que obedece a uma regra geral, necessitando-se apenas a escolha do primeiro número ou número gerador que no caso do Triângulo Aritmético é o número 1.

> O número de cada célula é igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular , mais a célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F é obtido pela soma da célula C mais a célula E, e assim sucessivamente (Pulskamp, 2009, pg. 3, nossa tradução).

Após essa observação, Pascal enuncia e demonstra consequências ou propriedades do Triângulo Aritmético. Em seguida, Pascal trabalha as aplicações dessas propriedades do Triângulo Aritmético nos seguintes títulos: "Às ordens numéricas", "As combinações", "Para determinar as partes que cada jogador deve receber quando dois jogadores fazem várias partidas" e "Para achar as potências de binômios e de apótomos (diferença entre duas razões incomensuráveis)". A consagração da denominação "Triângulo de Pascal" ocorre em 1730 quando Abrahan de Moivre (1667-1754) em sua importante e influente obra *"Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis (1730)"* usou a denominação *"Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM"* para referir-se ao Triângulo Aritmético. A partir dessa obra, o Triângulo Aritmético fica conhecido como "Triângulo de Pascal", denominação que utilizaremos como sinônimo de Triângulo Aritmético devido ao uso tradicional em nossos livros didáticos.


ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1}\times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

Figura 12: Declaração de De Moivre "T*riangulum Arithmeticum PASCALIANUM"*

Imagem retirada: http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1256109

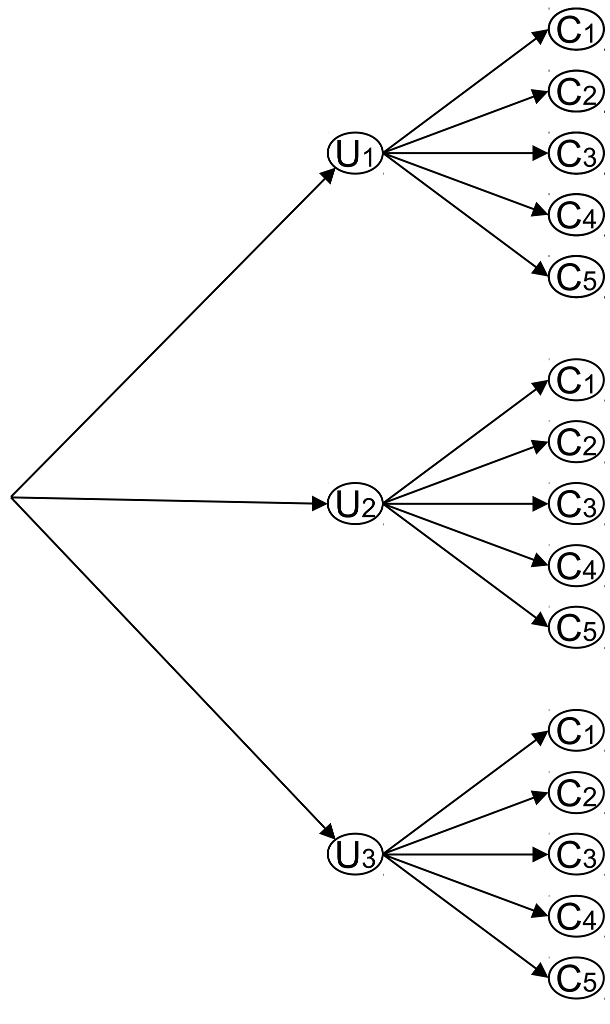
3. O CONCEITO DE NÚMERO FATORIAL E O CONCEITO DE COEFICIENTE BINOMIAL

No que se segue, denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais (incluindo o zero) e por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números inteiros positivos $(\mathbb{N}-\{0\})$.

Consideremos o seguinte problema:

"Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 3 universidades. Se cada uma delas tiver 5 cursos distintos, quantos possibilidades de curso há para este aluno?"

Podemos visualizar a situação apresentada no problema acima através do diagrama a seguir.



O diagrama acima é conhecido como *diagrama sequencial* ou *diagrama de árvore*. Vemos que temos

$$3 \text{ x } 5 = 15$$

cursos que podem ser escolhidos pelo aluno.

O problema anterior foi resolvido com um raciocínio que se baseia no Princípio Fundamental da Contagem, que pode ser apresentado da seguinte forma:

Seja $k \in \mathbb{N}^*$ e seja $1 \leqslant j \leqslant k$. Se a j-ésima tarefa pode ocorrer de n_j maneiras, então as k tarefas juntas podem ocorrer num total de $n_1 . n_2 . \ldots . n_k$ maneiras.

No problema apresentado, temos k=2. As 2 tarefas são *escolher a universidade* e *escolher o curso.*

3.1 FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Consideremos o seguinte problema:

"Desejamos organizar em uma estante 5 livros diferentes. De quantos modos podemos organizar esses livros?"

Teremos para a primeira posição, 5 maneiras. Preenchida a primeira posição teremos para segunda , 4 maneiras. Para a terceira posição, teremos 3 maneira. Para a quarta posição, teremos 2 maneiras. Para a quinta posição, apenas uma 1 maneira. Assim, temos 5 tarefas (k=5). Se n_j denota o número de maneiras em que a j-ésima tarefa pode ocorrer, então $n_j = 6 - j$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120\, maneiras .$$

São 120 maneiras de arrumar esses livros na estante. O produto $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ pode ser escrito de uma forma compacta e elegante, De fato, a noção de fatorial é uma forma compacta e elegante de se apresentar tais produtos.

Define-se *o fatorial de um número natural* $n \in \mathbb{N}$, denotado por $n!$, como

$$0! = 1! = 1 \quad \text{e} \quad (n+1)! = (n+1).n!, \ se\ n \geqslant 1.$$

A definição dada é uma definição por recorrência. Segue dela que, para todo $n \geqslant 2$

$$n! = n.(n-1)\ldots 2.1.$$

Assim, temos que $1! = 1$ por definição e $2! = 2.1$, $3! = 3.2.1$ e, em geral, $n!$ é o produto de todos os números positivos menores ou iguais a n. A notação fatorial foi criada e utilizada pela primeira vez por Christian Kramp (1760-1826) em seu livro "*Élements d'arithmétique universelle*" de 1808.

> “Eu uso a notação $n!$ para designar o produto de números decrescentes a partir de n a unidade, ou seja, $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$. O uso constante de análise combinatória, na maioria das minhas provas, fez esta notação necessária”(O'Connor, 2012, nossa tradução).

Observamos que, por convenção, definimos $0! = 1$. De fato, veremos adiante que o número inteiro positivo dado pelo símbolo

$$\binom{n}{k},$$

que se lê "combinação de n elementos tomados k a k", é $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$. Este número também é denotado por $C_{n,k}$. Note que fazendo k = n, teremos $0!$ no denominador da fração acima.

A seguir, vamos entender melhor os números dados pelo símbolo

$$\binom{n}{k},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ com $k \leqslant n$.

3.2 COEFICIENTE BINOMIAL

Consideremos o seguinte problema:

"Seja A um conjunto com 4 letras. Determine quantos subconjuntos de A com 2 letras podemos formar".

Ora, digamos que $A=\{a,b,c,d\}$. Podemos formar os seguintes subconjuntos de A com 2 letras: $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$. Assim, podemos formar 6 subconjuntos de A com 2 letras. Observe que

$$6=\frac{4!}{2!.(4-2)!}\ .$$

O problema acima pode ser enunciado de forma geral da seguinte maneira: "Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n\}$ um conjunto com n elementos. Determine o número de subconjuntos de A com k elementos, onde $k \in \mathbb{N}$ e $k \leqslant n$ ".

O número de subconjuntos de A com k elementos é denotado pelo símbolo

$$\binom{n}{k}$$

e é chamado de *combinação de n elementos tomados k a k*. Veremos no próximo resultado, cuja demonstração será feita por indução sobre n, que não é difícil determinar o número $\binom{n}{k}$.

Proposição 1. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$ *. Então,*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\ .$$

Demonstração.

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Se n=1, os únicos valores possíveis para k são k=0 e k=1. Obviamente, um conjunto com um elemento tem um único subconjunto com 0 elementos (o vazio) e um único subconjunto com 1 elemento (ele próprio), donde

$$\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1\,.$$

Como $\dfrac{1!}{0!.(1-0)!}=1$ e $\dfrac{1!}{1!.(1-1)!}=1$, o resultado é válido se n=1.

Suponhamos, agora, como hipótese de indução, que o resultado é válido para conjuntos com $n-1 \quad (n\geqslant 2)$ elementos. Seja k um inteiro tal que $0\leq k\leq n-1$ e seja A um conjunto com n elementos. Vamos denotar por r o número de subconjuntos de A que têm k elementos e que não contêm, entre eles, o elemento a_n , e denotar por s o número de subconjuntos de A que têm k elementos e que contêm o elemento a_n. Então, claramente, temos que

$$\binom{n}{k}=r+s\,.$$

Note que r nada mais é do que o número de subconjuntos de $A'=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_{n-1}\}$ que tem k elementos. Logo,

$$r=\binom{n-1}{k}\,.$$

Como os subconjuntos de k elementos de A que contêm a_n são formados pela união de $\{a_n\}$ com subconjuntos de A' que têm k-1 elementos, temos $s=\binom{n-1}{k-1}$. Segue-se, então, que

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\,.$$

Podemos calcular os números do segundo membro da igualdade anterior pela nossa hipótese de indução. Temos, assim, que

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{k!.(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-k)!}.$$

Como $k! = (k-1)!.k$ e $(n-k)! = (n-k-1)!.(n-k)$, podemos escrever as frações acima com denominador comum:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!.(n-k)}{k!.(n-k)!} + \frac{(n-1)!.k}{k!.(n-k)!} = \frac{(n-1)!.(n-k+k)}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!},$$

o que demonstra a fórmula para $0 \leq k \leq n-1$. Para k=n, tem-se $\binom{n}{n} = 1$ e $\frac{n!}{n!.(n-n)!} = 1$. ■

Terminamos observando que os números inteiros positivos da forma $\binom{n}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}$ com $k \leqslant n$, são também chamados *coeficientes binomiais*. De fato, veremos que estes são os coeficientes de x^k no polinômio mônico de grau n, na variavel x, obtido pelo desenvolvimento de

$$(x+1)^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$.

A notação

$$\binom{n}{k}$$

foi introduzida pelo matemático alemão Andreas Von Ettingshausen em 1826, embora estes números, como já vimos, já eram conhecidos séculos anteriores. O número n é usualmente chamado de numerador e o número k de denominador do coeficiente binomial.

4. O TRIÂNGULO DE PASCAL : ALGUMAS PROPRIEDADES

O Triângulo de Pascal é um arranjo numérico disposto em linhas e em colunas, cujo resultado é uma tabela que se prolonga indefinidamente para baixo em forma de triângulo. Para facilitar o nosso entendimento, construiremos o Triângulo dos Coeficientes Binomiais, onde irá aparecer os coeficientes binomiais indicados e o chamado Triângulo dos Valores, onde aparecerá os valores dos coeficientes binomiais. A construção do Triângulo dos Coeficientes Binomiais é feita calculando os valores dos coeficientes binomiais e pondo esse resultado nas posições correspondentes no Triângulo dos Valores. O Triângulo dos Valores nada mais é do que o Triângulo de Pascal.

Triângulo dos Valores

L=ordens das linhas

C=ordens das colunas

L\C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
⋮														

Triângulo dos Coeficientes Binomiais

L\C	0	1	2	3	4	5	6	7		p-1	p	p+1
0	$\binom{0}{0}$											
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$										
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$									
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$								
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$							
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$						
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$					
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$				
$\vdots$									...			
n-1										$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	$\binom{n-1}{p+1}$
n										$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$
n+1										$\binom{n+1}{p-1}$	$\binom{n+1}{p}$	$\binom{n+1}{p+1}$

Após a construção e a apresentação dos Triângulos dos Valores e dos Coeficientes Binomiais, devemos enfatizar para os nossos alunos algumas propriedades observadas desses triângulos. Vamos a seguir apresentar algumas delas. As propriedades 1) a 4) seguem diretamente da construção do Triângulo dos Coeficientes Binomiais.

Propriedade 1) No Triângulo dos Coeficientes Binomiais, a interseção da linha n com a coluna p é dada por $\binom{n}{p}$.

$$\begin{array}{c} \text{coluna p} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\textit{linha } n \rightarrow \binom{n}{p}.$$

Observamos que a linha de ordem n é finita e tem (n+1) termos, a saber:

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3},\ldots,\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}.$$

E a coluna de ordem p é infinita, pois sempre podemos crescer o triângulo infinitamente para baixo:

$$\binom{0}{p},\binom{1}{p},\binom{2}{p},\ldots,\binom{n}{p}.$$

Propriedade 2) Os coeficientes binomiais de uma mesma linha têm numeradores (ordem da linha) iguais.

Propriedade 3) Os coeficientes binomiais de uma mesma coluna têm denominadores (ordem da coluna) iguais.

Propriedade 4) Os coeficientes binomiais da primeira coluna possuem todos denominadores (ordem da coluna) iguais a zero.

Propriedade 5) Os coeficientes binomiais da primeira coluna valem 1.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos,

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\frac{n!}{1!\cdot n!}=1.$$

Propriedade 6) No Triângulo dos Valores, o segundo elemento e o penúltimo elemento de cada linha são iguais a própria ordem da linha. Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n.$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos,

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{1!\cdot(n-1)!}=n.$$

Basta agora provar que $\binom{n}{n-1}=n$. Ora,

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot[n-(n-1)]!}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{1!\cdot(n-1)!}=n\ . \blacksquare$$

Propriedade 7) Em uma mesma linha, coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Estes são chamados de *binomiais complementares*. Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ com $p \leqslant n,$ os números $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são chamados *complementares*.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $p \in \mathbb{N}$ com $p \leqslant n$. Então,

$$\binom{n}{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot[n-(n-p)]!}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}=\frac{n!}{(p)!\cdot(n-p)!}=\binom{n}{p}.$$

Propriedade 8) Cada coeficiente binomial em uma linha (n+1) é igual a soma de dois coeficientes binomiais adjacentes da linha n. Esta propriedade é conhecida como "Relação de Stifel" ou "Regra de Pascal".

L\C	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Esquema Geral

$$\begin{array}{ccccc} & \text{coluna } p & & \text{coluna } (p+1) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ linha\ n \rightarrow & \binom{n}{p} & + & \binom{n}{p+1} \\ & & & \text{II} \\ linha\ (n+1) \rightarrow & & & \binom{n+1}{p+1} \end{array}$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ com $p \leqslant n$. Então,

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!\cdot(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)!}+\frac{n!}{(p+1)\cdot p!\cdot(n-p-1)!} =$$

$$= \frac{n!\cdot(p+1)+n!\cdot(n-p)}{(n-p)!\cdot(p+1)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-p)!\cdot(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\cdot(n-p)!}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Propriedade 9) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ com $p \leqslant n$, temos $\binom{n}{p} \cdot \frac{n-p}{p+1} = \binom{n}{p+1}$. Esta relação é chamada *Relação de Fermat.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ com $p \leqslant n$. Então,

$$\binom{n}{p} \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = \frac{n!.(n-p)}{(p+1).\,p!.(n-p).(n-p-1)!} = \binom{n}{p+1}.$$

Propriedade 10) Ao somarmos todos os coeficientes binomiais de uma mesma linha teremos uma potência de 2. Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

A propriedade acima é conhecida como *Teorema das linhas.* A demonstração desse teorema será dada utilizando-se o Princípio da Indução Matemática.

Demonstração. A igualdade é válida para n=0, pois

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

Suponhamos agora o resultado válido para n=k, ou seja, suponhamos válida a igualdade

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Vamos mostrar que o resultado é válido para n=k+1. Ou seja, vamos mostrar que

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Ora, pela hipótese de indução temos

$$\binom{k}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k}{k}= \left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+$$

$$+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]=2^k+2^k=2^{k+1}. \quad (1)$$

Pela Relação de Stifel (propriedade 8), segue que

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{1},$$
$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{2},\ldots,$$
$$\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k}.$$

Substituindo em (1), obtemos

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\ldots+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}=2^{k+1}. \quad (2)$$

Como

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0} \text{ e } \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1},$$

podemos escrever (2) da seguinte forma:

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=2^{k+1}.$$

Pelo Princípio de Indução Matemática, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Propriedade 11) Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$, temos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

Essa propriedade é conhecida como *Teorema das colunas*.

Note que essa soma deve começar sempre pelo primeiro elemento da coluna do Triângulo dos Coeficientes Binomiais e terá o número de parcelas que nos interessar.

Esquema Geral

L\C	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$. A demonstração será dada utilizando-se o Princípio da Indução Matemática sobre p. Ora, a igualdade é válida para p=0, pois

$$\binom{n}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+0+1}{n+1}=\binom{n+1}{n+1},$$

$$\text{já que } \binom{n}{n}=1 \quad \text{e} \quad \binom{n+1}{n+1}=1.$$

Suponhamos agora o resultado válido para p=k, ou seja, suponhamos válida a igualdade

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

Vamos mostrar que o resultado é válido para p=k+1. Ou seja, vamos mostrar que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}.$$

Ora,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=$$

$$=\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}\right]+\binom{n+k+1}{n}=$$

$$=\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n},$$

pela hipótese de indução.

Como, pela relação de Stifel, $\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}$, o resultado segue. ■

5 O TEOREMA DO BINÔMIO DE NEWTON

5.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Isac Newton (1642-1727), por volta de 1665 na troca de correspondências com Gottfried Leibniz (1646-1716) e Henry Oldenburg (1615-1677), mostrou como desenvolver $(x+a)^n$ para n fracionário. Tal façanha foi publicada pelo matemático John Wallis (1616-1703), que deu os devidos créditos a Newton, em sua obra "*Álgebra*" de 1685. O curioso é que, segundo Boyer (1996, pg. 271), "Newton não passou diretamente do Triângulo de Pascal para o teorema binomial, mas indiretamente de um problema de quadratura para o teorema binomial". E aqui devemos fazer uma ressalva sobre o que entendemos hoje por "Teorema Binomial" ou "Teorema do Binômio de Newton". Esse último nome, que encontramos em todos os livros didáticos de matemática, parece ter sido uma homenagem a Newton por ter demonstrado o desenvolvimento do binômio para expoente fracionário. Ou seja, para um caso mais geral do que para os números naturais. Para

Polcino Miles, "A relação entre o Teorema do Binômio (que, na verdade, não é de Newton) e o Triângulo de Pascal é muito anterior a ambos" e

> Newton não demonstrou nem nunca trabalhou com o que hoje chamamos Teorema do Binômio ou Binômio de Newton. Isso já era conhecido para ele, inclusive as fórmulas de cálculo que dão origem ao Triângulo de Pascal. O que ele fez foi estabelecer um resultado análogo para expoentes fracionários, é isso que está relacionado com o cálculo. Nesse caso, o desenvolvimento do binômio leva à series infinitas; portanto, sem relação com o triângulo de Pascal .

Segundo o professor Nobre (2004, pg.533) ,

> Muitos autores de livros didáticos apresentam o "Binômio de Newton" e igenuamente utilizam-se das relações de Stifel e do Triângulo de Pascal para o desenvolvimento de mesmo. Se Stifel e Pascal haviam chegado a resultados para o desenvolvimento do binômio, então porque este Binômio carrega o nome de Newton que viveu muitos anos depois?

Somos levados a concluir que o Binômio de Newton, com o qual trabalhamos na sala de aula, não pertence a Newton e era conhecido muito antes de Pascal e Stifel. Por outro lado, Al Karaji, como exposto anteriormente, já utilizava essa ferramenta matemática sem que ela, no entanto, fosse chamada de "Binômio de Newton".

5.2 DEMONSTRANDO O BINÔMIO DE NEWTON

O resultado conhecido como Teorema do Binômio de Newton pode ser enunciado da seguinte forma:

Para todo $x, a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, vale a fórmula

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{p} x^{n-p} a^p + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n ,$$

ou seja,

$$(x+a)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}a^p.$$

Usaremos o Princípio da Indução Matemática para demonstrar o Binômio de Newton. Claramente a fórmula é válida para n=1. Suponhamos a fórmula válida para n=k e mostraremos que ela é válida para n=k+1.

Ora,

$$(x+a)^{k+1}=(x+a)^k.(x+a)^1=\left[\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}.a^p\right].(x+a),$$

pela hipótese de indução . Pela distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$, temos

$$\left[\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}.a^p\right].(x+a)=\text{x}\left[\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}a^p\right]+\text{a}\left[\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}a^p\right]=$$

$$=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p+1}a^p+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k-p}a^{p+1}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{k+1-p}a^p+\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{(k+1)-(p+1)}a^{p+1}=$$

$$=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{(k+1)-p}.a^p+\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k}{p-1}x^{(k+1)-p}.a^p=$$

$$=\binom{k}{0}x^{(k+1)-0}a^0+\sum_{p=1}^{k}\left[\binom{k}{p}+\binom{k}{p-1}\right]x^{(k+1)-p}.a^p+\binom{k}{k}x^{(k+1)-(k+1)}a^{k+1}=$$

$$=\binom{k+1}{0}x^{(k+1)-0}a^0+\sum_{p=1}^{k}\binom{k+1}{p}x^{(k+1)-p}.a^p+\binom{k+1}{k+1}x^{(k+1)-(k+1)}.a^{k+1}=$$

$$=\sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}x^{(k+1)-p}a^p,$$ provando o desejado. ■

Para desenvolver a n-ésima potência de (x-a), $(x-a)^n$, devemos escrever

$$(x-a)^n=[x+(-a)]^n$$

e aplicar o Binômio de Newton. Assim,

$$(x-a)^n=\binom{n}{0}x^n(-a)^0+\binom{n}{1}x^{n-1}(-a)^1+\ldots+\binom{n}{p}x^{n-p}(-a)^p+\binom{n}{n-1}x^1(-a)^n-1+\binom{n}{n}x^0(-a)^n.$$

Mas, $(-a)^p=(-1)^p.a^p$. Portanto, em cada parcela, teremos o sinal (-) se p for ímpar. Logo,

$$(x-a)^n=\binom{n}{0}x^n(a)^0-\binom{n}{1}x^{n-1}(a)^1+\binom{n}{2}x^{n-2}(a)^2+\ldots+(-1)^p\binom{n}{p}x^{n-p}(a)^p+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^0(a)^n.$$

A demonstração dada neste trabalho usa basicamente a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$. Assim, se os alunos do Ensino Médio conhecem o Princípio da Indução Matemática, a prova acima é bastante simples e pode ser apresentada em sala de aula. De qualquer modo, como já mencionamos anteriormente, acreditamos que o professor deva relacionar o Binômio de Newton com o Triângulo de Pascal e fazer a abordagem histórica do Triângulo de Pascal. A abordagem histórica do Triângulo de Pascal já foi feita no Capítulo 2. No próximo capítulo, vamos relacionar o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.

6. RELAÇÃO ENTRE O TRIÂNGULO DE PASCAL E O BINÔMIO DE NEWTON

Vimos acima que o desenvolvimento de $(x+a)^n$, onde $x,a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecido como Binômio de Newton. Agora vamos compreender sua relação com o Triângulo de Pascal . Primeiramente, façamos o desenvolvimento de $(x+a)^n$, para n=1,2,3,4, 5 e 6.

$$(x+a)^0=\binom{0}{0}x^0a^0$$

$$(x+a)^1=\binom{1}{0}x^1a^0+\binom{1}{1}x^0a^1$$

$$(x+a)^2=\binom{2}{0}x^2a^0+\binom{2}{1}x^1a^1+\binom{2}{2}x^0a^2$$

$$(x+a)^3=\binom{3}{0}x^3a^0+\binom{3}{1}x^2a^1+\binom{3}{2}x^1a^2+\binom{3}{3}x^0a^3$$

$$(x+a)^4=\binom{4}{0}x^4a^0+\binom{4}{1}x^3a^1+\binom{4}{2}x^2a^2+\binom{4}{3}x^1a^3+\binom{4}{4}x^0a^4$$

$$(x+a)^5=\binom{5}{0}x^5a^0+\binom{5}{1}x^4a^1+\binom{5}{2}x^3a^2+\binom{5}{3}x^2a^3+\binom{5}{4}x^1a^4+\binom{5}{5}x^0a^5$$

$$(x+a)^6=\binom{6}{0}x^6a^0+\binom{6}{1}x^5a^1+\binom{6}{2}x^4a^2+\binom{6}{3}x^3a^3+\binom{6}{4}x^2a^4+\binom{6}{5}x^1a^5+\binom{6}{6}x^0a^6$$

Pela Proposição 1 do Capítulo 3, podemos calcular os coeficientes binomiais acima e obtermos.

$(x+a)^0=1$ → 1

$(x+a)^1=1\text{x}+1\text{a}$ → 1 1

$(x+a)^2=1\text{x}^2+2\text{ax}+1\text{a}^2$ → 1 2 1

$(x+a)^3=1\text{x}^3+3\text{ax}^2+3\text{xa}^2+1\text{a}^3$ → 1 3 3 1

$(x+a)^4=1\text{x}^4+4\text{x}^3a+6\text{x}^2a^2+4\text{xa}^3+1\text{a}^4$ → 1 4 6 4 1

$(x+a)^5=1\text{x}^5+5\text{x}^4a+10\text{x}^3a^2+10\text{x}^2a^3+5\text{xa}^4+1\text{a}^5$ → 1 5 10 10 5 1

$(x+a)^6=1\text{x}^6+6\text{x}^5a+15\text{x}^4a^2+20\text{x}^3a^3+15\text{x}^2a^4+6\text{xa}^5+1\text{a}^6$ → 1 6 15 20 15 6 1 .

No desenvolvimento de $(x+a)^n$, chamaremos o primeiro termo de T_1 e assim sucessivamente conforme abaixo:

$$T_1, T_2, \ldots, T_{p+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}.$$

Desenvolvendo o binômio chamamos de *termo geral* o termo de ordem (p+1).

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0} x^n a^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} x^{n-1} a^1}_{T_2} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p} x^{n-p} a^p}_{T_{p+1}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n} x^0 a^n}_{T_{n+1}}$$

Podemos, então, escrever o termo geral de $(x+a)^n$, da seguinte forma:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p .$$

Finalizamos este capítulo observando que já existem generalizações do antigo Triângulo de Pascal. Por exemplo, a Pirâmide de Pascal é uma generalização em três dimensões do Triângulo de Pascal, onde o que seria cada linha no triângulo é uma camada da pirâmide. Ao invés de um número ser a soma dos dois que ficam logo acima, como no modelo em duas dimensões, cada elemento é a soma dos três valores que ficam mais próximos dele na camada anterior. Estes números da Pirâmide de Pascal estão associados a expansão do trinômio

$$(a+b+c)^n ,$$

onde a,b,c são números reais e n é um número inteiro positivo. Essa expansão é dada por

$$(a+b+c)^n = \sum_{i,j,k}^{n} \binom{n}{i,j,k} a^i b^j c^k ,$$

onde $\binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!j!k!}$ e é chamado de *coeficiente trinomial.*

Para os leitores interessados em se aprofundar no assunto indicamos [5].

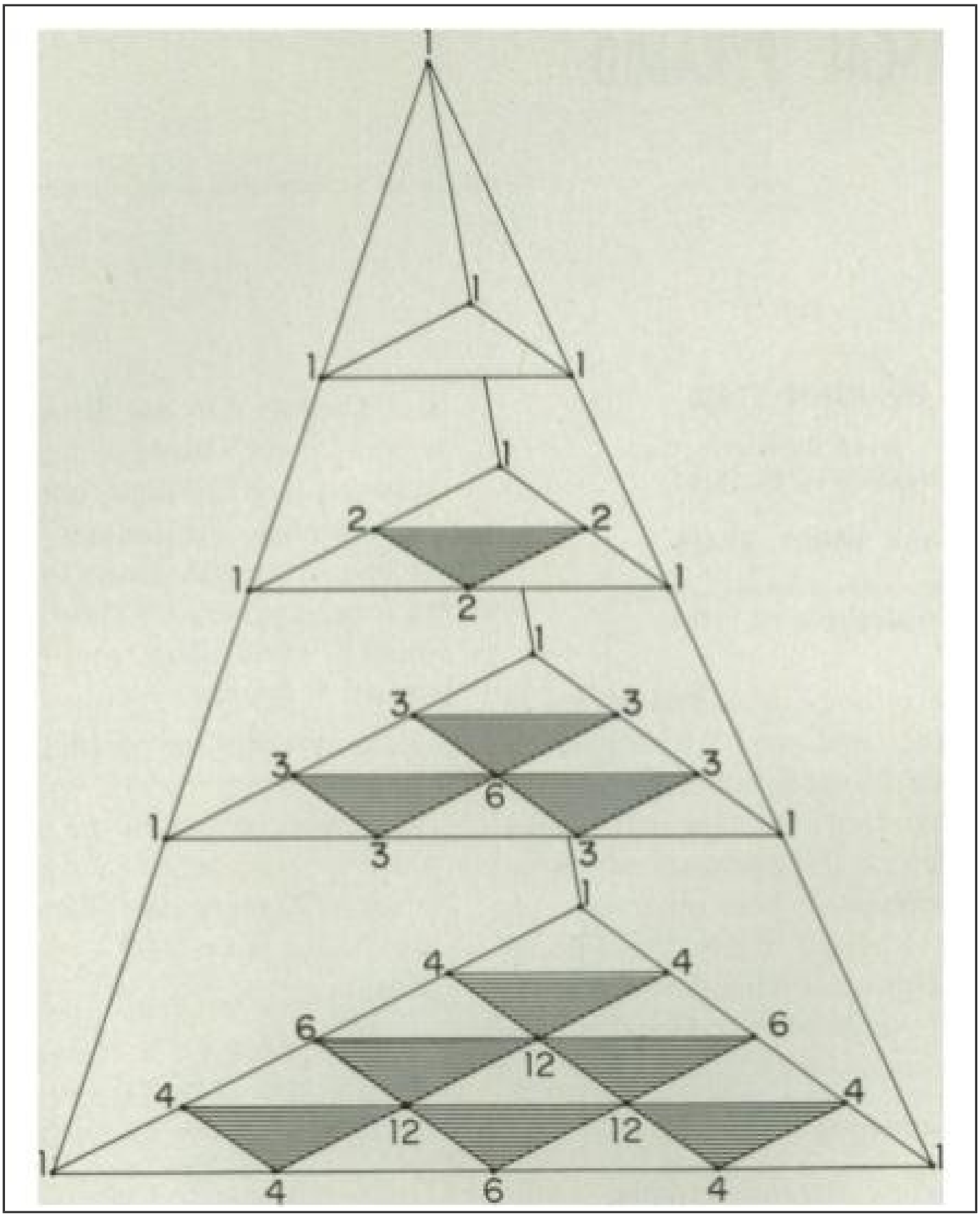


Figura 13: Pirâmide de Pascal

Imagem retirada:http:/www.jstor.org/discover/10.2307/27961325?uid=3737664&uid=48sid=21104046665527

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa proposta de trabalho busca oferecer uma alternativa de abordagem do Teorema do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, recorrendo a História da Matemática como elemento motivador na construção do conhecimento. Acreditamos que a História da Matemática contextualiza, humaniza e facilita a formalização de conceitos. É uma ferramenta valiosa para o professor porque permite que o professor tenha uma visão mais ampla de sua disciplina. Em relação ao aluno, acreditamos que este tipo de abordagem promove a formação de um indivíduo crítico, criativo e capaz de resolver problemas.

Investigamos o Triângulo de Pascal em várias sociedades antigas, acompanhando a sua evolução, explicamos o conceito de fatorial e o conceito de coeficiente binomial, investigamos e demonstramos algumas propriedades do Triângulo de Pascal, estudamos um pouco da história do Binômio de Newton, apresentamos um demonstração do Teorema do Binômio de Newton, apresentamos o termo geral deste teorema e relacionamos o Triângulo de Pascal ao Binômio de Newton. Em suma, conduzimos este trabalho recorrendo a História da Matemática, mas sem descuidar de usarmos uma linguagem rigorosa e precisa. A nossa metodologia de trabalho consistiu em levantamento bibliográfico somado a uma postura reflexiva e crítica do nosso trabalho em sala de aula.

Esperamos que este trabalho possa servir de instrumento para facilitar a apresentação do tema "Binômio de Newton" no Ensino Médio, já que este conteúdo matemático é considerado, tanto por professores como por alunos, um assunto difícil de ser trabalhado em sala de aula. Também esperamos que este trabalho sirva de material bibliográfico para o professor se aprofundar no assunto, uma vez que a maioria das demonstrações apresentadas aqui utilizam o Princípio de Indução Matemática.

8 BIBLIOGRAFIA

[1] AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2ª ed. São Paulo: Ed. Blucher, 1996.

[3] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2008.

[4] FIGUEIREDO, Luiz Manoel; DA SILVA, Mario Oliveira; DA CUNHA, Maria Ortegoza. *Matemática Discreta*. v1. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2005.

[5] HALL, M. Jr. , *Combinatorial theory*. New York, Wiley, 1986.

[6] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da Matemática Elementar 5,* 7ª ed. São Paulo: Ed. Atual, 2004.

[7] HEFEZ, Abramo. Elementos de Aritmética. 2ª ed. Coleção Textos Universitários, RJ:SBM, 2011.

[8] MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à História da Educação Matemática*, Ed. Atual, SP, 1998.

[9] MORGADO, Augusto César; DE CARVALHO, João B. Pitombeira; CARVALHO, Paulo C. Pinto; FERNANDES, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade*, 9º ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] O' CONNOR, J.J. ; ROBERTSON, E.F. *Christian Kramp*, Scholl of Mathematics and Statiscs, University of St. Andrews, Scotland, 2012. Disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.ukqMathematicians/Kramp.html. Acessado em 20/03/2014.

[11] PARÂMETROS CURRÍCULARES NACIONAIS, Ensino médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, MEC, 2007.

[12] POLCINO MILES, Cesar. *Binômio de Newton e Triângulo de Pascal* [mensagem pessoal].

USP, Mensagem enviada por < polcinomiles@gmail.com > em 24/03/2014.

[13] PULSKAMP, R. *Translation into English the Treatise on the Arithmeti Triangle*, Xavier University, Ohio, 2009. Disponível em: http://cerebro.xu.edu/math /Sources/Pascal/Sources /arith_triangle.pdf. Acessado em 10/02/2014.

[14] NOBRE, Sérgio. *Leitura Crítica da História: Reflexões sobre a História da matemática*, Revista Ciência e Educação, v. 10, n.3, p.531-543, UNESP, 2004.

[15] SILVA, Ana Lúcia Vaz da. *Instrumentalização do Ensino da Aritmética e da Álgebra*.V1.Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006.

____. *Matemática na Educação 2,* v.1, RJ, Fundação CECIERJ, 2008.

[16] SILVEIRA, J. F. P da. *O Triângulo de Pascal é de Pascal?* Em <http: //www.mat.ufrgs.br/~portosilqhisto2b. html> acesso em : 20 de dezembro de 2013.

9 APÊNDICE: UM POUCO SOBRE O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

O matemático Giuseppe Peano (1858-1932), no início do século XX, estabeleceu os axiomas que definiram com precisão o conjunto dos números naturais. Um de seus axiomas afirma o seguinte: seja X um subconjunto de $\mathbb{N}^*$ Se $1 \in X$ e se, além disso, X contém todos os sucessores dos seus elementos, então $X = \mathbb{N}^*$.

Este axioma é conhecido como A*xioma de Indução* e serve como base do método de demonstração por indução, chamado de Princípio de Indução Matemática, o qual é de grande utilidade para estabelecer provas rigorosas em matemática.

Em nosso trabalho, as demonstrações foram realizadas, em sua maior parte, pelo Princípio da Indução Matemática . Este princípio é decorrente do Axioma de Indução e pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja P(n) uma sentença aberta em n sobre $\mathbb{N}^*$. Suponha que:

i) P(1) é verdadeira; e

ii)Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que P(n) é verdadeira, segue que P(n+1) é verdadeira.

Então, P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ilustremos o uso do Princípio de Indução Matemática para provar que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ é válida a seguinte igualdade:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

1º passo) Verificar a validade para n=1.

Note que

$$1=n^2=(1)^2=1,$$

mostrando que a igualdade é válida para n=1.

2º passo) Hipótese de Indução: suponhamos a igualdade válida, para n=k, ou seja suponhamos que

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Devemos mostrar agora a validade da igualdade para n=k+1. Ou seja,

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2.$$

De fato, pela hipótese de indução

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=k^2+[2(k+1)-1].$$

Como $k^2+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$, segue que $1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$.

Pelo Princípio de Indução Matemática, a igualdade é válida para todo número n em $\mathbb{N}^*$.

Para o leitor interessado em ler mais sobre o assunto indicamos $[7]$.