MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTIOCA – PROFMAT
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATOGROSSO DO SUL – UEMS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPP
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

O ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE MATERIAL CONCRETO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Fernando Luiz Gonçalves

Dourados-MS
2014

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTIOCA – PROFMAT

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATOGROSSO DO SUL – UEMS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPP

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

O ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE MATERIAL CONCRETO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Fernando Luiz Gonçalves

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação Local do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves

Dourados-MS

2014

G626e Gonçalves, Fernando Luiz
O ensino das razões trigonométricas por meio de material concreto: uma proposta pedagógica/Fernando Luiz Gonçalves. Dourados, MS: UEMS, 2014.
35p. ; 30cm.

Dissertação (mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, 2014.
Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves.

1.Razões trigonométricas 2. Material concreto 3.Ensino da matemática I.Título.

CDD 20.ed. 516.24

·UEMS·
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

PROFMAT- MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 12 do mês de março do ano de dois mil e quatorze, realizou-se a apresentação do trabalho de conclusão de curso sob o título: **"O ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE MATERIAL CONCRETO"** de autoria do acadêmico **FERNANDO LUIZ GONÇALVES**, aluno do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional oferecido pelo polo da UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

A comissão julgadora esteve constituída pelos professores: Aguinaldo Lenine Alves, orientador/presidente, Odival Faccenda, primeiro examinador e Luiz Gonzaga Manzine, segundo examinador. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a comissão julgadora considerou o candidato

(X) aprovado.

( ) aprovado com correções.

( ) reprovado.

E, para constar, foi lavrada a presente Ata, que vai ser assinada pelos membros da Comissão Julgadora.

Dourados, 12 de março de 2014.

Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves/ Orientador/Presidente

Prof. Dr. Odival Faccenda/ Primeiro Examinador

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Manzine/ Segundo Examinador

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois, que me deu força, me encorajou e me protegeu durante essa jornada, à minha namorada Lisandra pelo companheirismo, paciência, dedicação, e compreensão e a minha família e amigos pelo incentivo nos momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

- À minha família e amigos pelo incentivo e pela força que me deram durante esse curso.

- Ao Prof. Dr. Aguinaldo Lenine, pela orientação e incentivo recebidos durante este período.

- Aos Professores da banca: Prof. Dr Aguinaldo Lenine Alves, Prof. Dr. Odival Faccenda, Prof. Dr. Luiz Gonzaga Manzine pela colaboração na avaliação deste trabalho.

- Ao Prof. Dr. Vando Narciso e sua equipe de professores e técnicos administrativos, que não mediram esforços para trazer este mestrado para nossa cidade.

- A todos os professores do programa PROFMAT pela dedicação à nossa turma e pelos ensinamentos que nos transmitiram ao longo desse curso.

- Aos colegas de curso pela amizade e pelo companheirismo durante esse período.

- A UEMS e SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) por tornarem possível este sonho.

- A CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma discussão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos do ensino médio para aprender alguns conteúdos da maneira que são abordados e também a dificuldade do professor em ensinar esses conteúdos, enfatizando a importância do uso de material concreto para o ensino da matemática, na educação básica, em particular, o uso da circunferência trigonométrica no ensino da trigonometria no ensino médio.

Este trabalho explora o estudo das razões trigonométricas por meio da circunferência trigonométrica e também aborda as etapas para a construção do material concreto, bem como, a forma de se trabalhar com esse material em sala de aula, com exemplos de exercícios e de atividades para explorar os conteúdos. Será apresentado ainda um breve relato histórico sobre o surgimento da trigonometria e dos nomes das razões trigonométricas.

PALAVRAS-CHAVES: Trigonometria, Material concreto, Circunferência trigonométrica.

ABSTRACT

This paper presents a discussion of the difficulties encountered by students of average to learn some content the way they are addressed education and also the difficulty of the teacher in teaching these contents, emphasizing the importance of using concrete materials for teaching mathematics in education Ladies, in particular, the use of trigonometric circle in teaching trigonometry in high school.

This paper studied the trigonometric ratios by trigonometric circumference is explores and also discusses the steps for building the concrete material, as well as how to work with this material in the classroom with examples of exercises and activities to explore the contents. A brief historical account of the emergence of trigonometry and the names of trigonometric ratios will also be presented.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A baixa qualidade do ensino brasileiro nas escolas de educação básica e consequentemente, a insuficiência do aprendizado, constitui-se como pretexto para discussões em todos os ambientes em que se desenvolve a educação. Diversas são as dificuldades encontradas por professores e alunos no processo de ensino aprendizagem da matemática. Muitas vezes, devido à maneira que alguns conteúdos matemáticos são transmitidos, vários alunos confrontam-se com grandes barreiras, resultando num alto índice de reprovação.

Milhares de professores de matemática possuem a ambição de aprimorar seu trabalho de ensino no que diz respeito à metodologia utilizada, dentre estes, a trigonometria, um conteúdo considerado por diversos alunos como uma das partes mais difíceis da matemática no ensino médio. Para estes alunos, na maioria das vezes, a trigonometria é vista como um conteúdo abstrato, sem aplicação e sem significado. Esta mentalidade gera um grande horror, o que faz acreditarem que a mesma é algo muito difícil ou até impossível de se aprender. Essa dificuldade acarreta uma desmotivação muito grande que muitas vezes os levam a desistência.

Para tentar sanar estes problemas, a tecnologia tem sido uma grande aliada dos professores, pois, além de possibilitar inovações em suas aulas, melhora muito suas metodologias. Mas, o que fazer quando estas tecnologias não suprem as necessidades dos alunos?

Uma das alternativas é a utilização de materiais concretos que possibilitem dar significados a tais conteúdos. A médica e educadora italiana Maria Montessori acreditava não haver aprendizagem sem ação: *“Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração”* (AZEVEDO, p. 27).

Seguindo este conceito, o principal objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa diferente no ensino de trigonometria para alunos que se encontram a partir do sexto ano do ensino fundamental. Para isto, pretende se desenvolver um material concreto manipulativo, de fácil utilização e que satisfaça suas curiosidades no aprendizado da trigonometria.

1.1 A utilização de materiais concretos no ensino de matemática

A medida do possível, a utilização de material concreto no ensino de matemática pode conceber alternativas ao professor, já que aprimora sua metodologia e inova suas aulas contextualizando o conteúdo lecionado. De acordo com os PCNs (BRASIL, 1997, p. 19), um dos princípios norteadores para um bom desempenho no ensino de matemática nas séries iniciais é a utilização dos recursos didáticos.

> *"Os [...] Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão".*

Segundo *D'Ambrósio, (1990)*, a falta de interesse e dedicação por parte dos alunos ao aprendizado da matemática é hoje uma das grandes dificuldades encontradas pelos professores.

> *"Uma das coisas mais notáveis com relação à atualização e ao aprimoramento de métodos é que não há uma receita. Tudo o que se passa na sala de aula vai depender dos alunos e do professor, de seus conhecimentos matemáticos e principalmente do interesse do aluno".*

Para tentar amenizar tal desinteresse, é importante inovar, e, nesta inovação pode entrar a utilização de materiais concretos, já que os mesmos representam ferramentas importantes que na maioria das vezes trazem bons resultados. Segundo Piaget, (1967) *"o conhecimento se dá através de um processo de interação"*, com isto, no ensino da matemática este intercambio pode ser idealizado através da utilização de alguns materiais concretos (manipulativos ou visuais), que desperte a curiosidade dos alunos. Esta ação possibilitará ao professor uma melhor interação com a turma, o que acarretará um aprendizado agradável e natural.

Para *Piaget* (1967), o fracasso escolar no ensino da matemática pode ser atribuído à abordagem e não ao conteúdo, já que a passagem do concreto para o abstrato é geralmente feita rápido demais. Assim, torna-se fácil entender os baixos índices no aprendizado. Levando em consideração a deficiência estrutural das escolas, e também a falta de tempo hábil para que os professores trabalhem todos os conteúdos de forma eficiente, muitos são simplesmente omitidos, o que geram aos alunos grandes deficiências. Objetivando contribuir na redução de tal dificuldade, este trabalho propõe-se a desenvolver um material concreto que possibilite ao aluno das séries iniciais um bom desempenho no aprendizado das razões trigonométricas.

1.2. Por que estudar Trigonometria?

Quando o professor aborda algum assunto dentro da trigonometria, grande parte dos alunos sofre diante de um enorme obstáculo: a falta de aplicação. Isso acontece devido à falta de base dos mesmos, contudo, antes que a desmotivação geral tome conta, o professor deve buscar ferramentas que facilitem o entendimento de tal conteúdo. Isto é importante inclusive para alunos que no futuro seguirão carreiras em áreas como: física, topografia, engenharia, computação, e outras.

Desde a antiguidade, o homem necessitou aferir distâncias que aparentemente parecia inacessíveis. Porém, com a utilização da trigonometria esta dificuldade foi eliminada já que tudo que se deseja saber sobre distâncias pode ser calculado com seu auxílio. Embora a utilização dos triângulos faça parte da base no aprendizado da trigonometria, a mesma não se limita especificamente ao seu estudo. Como citado anteriormente, sua aplicação pode se estender a outros campos da atividade humana, como por exemplo, a navegação, a mecânica, a acústica, a música, a Engenharia, e outras.

Observe a seguir, algumas situações práticas em diferentes áreas, que seriam dificultadas sem a utilização da trigonometria:

- ✓ A medida da distância entre navegações e terra firme;
- ✓ A medida da distância entre a terra e a lua;
- ✓ A construção civil. (pontes; prédios, rua, etc)
- ✓ A confecção de mapas, já que neste caso precisam-se saber medidas como alturas de montanhas e comprimentos de rios.

2. UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

Como ocorreu em todas as áreas da matemática, o nascimento da trigonometria sobreveio de forma gradativa e contou com a colaboração de vários estudiosos, dentre estes, astrônomos, navegadores, filósofos e agrimensores. Mesmo não sabendo ao certo o ano ou a época do inicio dos estudos e descobertas da trigonometria, pode-se afirmar que babilônios e egípcios desempenharam grande papel no aprimoramento da mesma, já que, no Papiro Rhind, documento egípcio, datado de aproximadamente 1000 a.C., foram encontrados problemas relacionados à cotangente, e, na tábua cuneiforme Plimpton 322, tábua babilônia com texto escrito entre 1900 e 1600 a.C., localizou-se problemas envolvendo secantes.

Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia (190 a.C – 125 a.C) apresentou um trabalho com cerca de 12 volumes que tratava somente da trigonometria, este feito lhe rendeu o título de pai da trigonometria. Naquele mesmo período Ptolomeu apresentou uma tábua de cordas contendo o cálculo do seno[1] dos ângulos de 0º a 90º, ângulos que seriam utilizados nos estudos astronômicos em que ele estava engajado. Com isso, Hiparco e Ptolomeu se tornaram nomes ilustres dos estudos antigo da trigonometria, e, a eles é também atribuída a divisão do círculo em 360º. Advindos do estudo da astronomia surgiram os conceitos de seno e cosseno[2] já a tangente supostamente surgiu da necessidade de se calcular alturas e/ou distâncias.

---

[1] Seno: É uma função trigonométrica. Dado um triângulo retângulo e um ângulo α, seno do Ângulo α é a razão entre o cateto oposto ao Ângulo α e a hipotenusa do triângulo.

[2] Cosseno: É uma função trigonométrica. Dado um triângulo retângulo e um ângulo α, cosseno do Ângulo α é a razão entre o cateto adjacente ao Ângulo α e a hipotenusa do triângulo.

2.1 O surgimento dos nomes das funções trigonométricas.

Segundo LIMA, Elon Lages (1991), seno é a tradução portuguesa do latin *Sinus* que é tradução latina da palavra árabe *jiba* que significa a corda de um arco. Já o termo tangente explica-se pelo fato de tg(x) = t/r onde t é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do Ângulo x) e o prolongamento do outro lado. O termo secante vem do latin *secare (cortar),* já que a secante de um ângulo x é definida por sec x = s/r onde s é a hipotenusa do triangulo retangulo cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t e como o segmento de reta s corta o circulo, a denominação secante se justifica. E por consequência cosseno, cossecante e cotangente de uma arco são respectivamente seno, secante e tangente do arco complementar.

3. O ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA.

O ensino da trigonometria na educação básica tem seu inicio na última série do ensino fundamental (9° Ano). Nessa série são introduzidas as primeiras idéias de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Nesse momento o aluno aprende que seno de um Ângulo é a razão entre o cateto oposto a esse Ângulo e a hipotenusa do triângulo, assim como cosseno de um Ângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa e ainda, a tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo.

Quando no ensino médio, os alunos começam a se aprofundar no estudo da trigonometria, esse estudo do triângulo retângulo é repetido com maior ênfase no final do primeiro ano e no inicio do segundo ano dá-se início ao estuda das razões trigonométricas, dos arcos suplementares e replementares, dos arcos côngruos, dos arcos múltiplos,, enfim, de toda circunferência trigonométrica. É nesse momento que se faz necessário um bom estudo das razões trigonométricas que é a partir desses estudos que o aluno acumulará conhecimento que servirão de base para seus estudos posteriores.

Quando se estuda as razões trigonométricas, para o aluno são muitas as dificuldades por se tratar de tantos nomes estranhos e tantas fórmulas antes desconhecidas. Quando o professor durante uma aula descarrega sobre o aluno as relações entre as razões trigonométricas, para ele são apenas várias fórmulas para decorar, daí surgem os questionamentos: Mas pra que isso? Da onde saiu esse nome cossecante? Certamente os alunos mais esforçados irão decorar as fórmula e utilizá-las no dia da avaliação escrita e dois dias depois esquecê-las novamente. O ideal está longe disso, o aluno precisa ser capaz de entender cada razão trigonométrica e saber construir as relações entre elas. Da mesma forma acontece com os valores dessas razões. Quando o professor passa para o aluno uma tabela de valores de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, ele utiliza esses valores sem fazer nenhuma associação com as razões trigonométricas e uma semana depois da prova não saberá mais nenhum deles. Com base na vivência e na experiência em sala de aula, tem-se que o ideal é que os alunos entendam a construção da circunferência trigonométrica e aprendam a usá-la de modo que, quando necessário possam esboçá-la e utilizá-la de forma a facilitar a resolução de seus problemas.

O ensino das razões trigonométricas por meio da circunferência trigonométrica deixa o trabalho do professor menos árduo, para o aluno se torna mais claro o fato de arcos complementares terem o valor do seno igual ao valor do cosseno, o fato da tangente de 90° não existir ou de a secante de 90° não existir. Coisas dessa natureza o aluno não consegue entender apenas com a tabela de arcos notáveis, o que pode acontecer é ele decorar alguns dados para fazer uma avaliação escrita, mas em pouco tempo, passada essa avaliação essas informações se perderão por não ter sido algo entendido, aprendido e sim decorado, a idéia da circunferência trigonométrica é de trazer entendimento para os alunos e de forma a ser útil por toda sua vida escolar.

Quando se quer mostrar aos alunos que dados dois ângulos suplementares (α + β = 180) tem-se sen α = sen β e que cos α = - cos β há uma grande dificuldade em fazer com que eles memorizem essa regra. Ensinar isto por meio da circunferência trigonométrica faz com que os alunos memorizem a imagem da circunferência e sempre que necessário poderão fazer um esboço dessa circunferência num papel ou mesmo mentalmente para não se confundir com as relações. Da mesma forma podemos proceder para arcos do terceiro e quarto quadrantes.

3.1 Definições

3.1.1 Plano Cartesiano ou R^2

Criado por René Descartes, o plano cartesiano consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas. O plano cartesiano foi desenvolvido por Descartes no intuito de localizar pontos num determinado espaço. As disposições dos eixos no plano formam quatro quadrantes, mostrados na figura 1 a seguir:

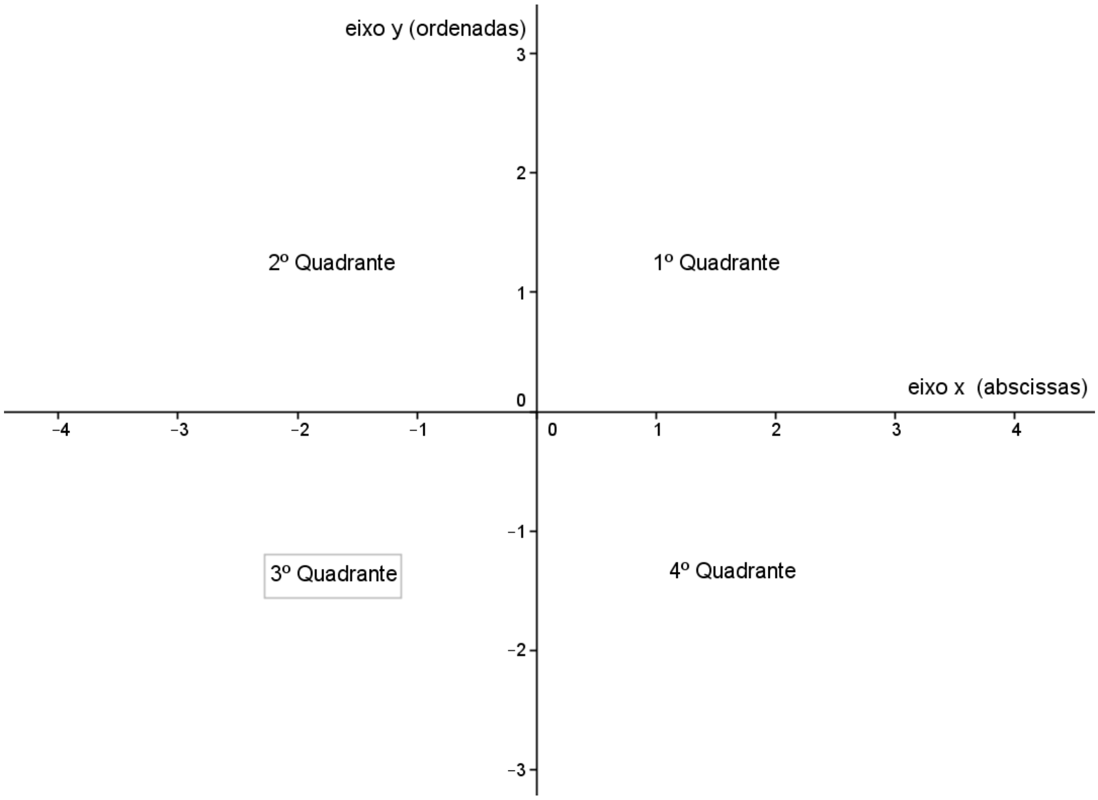

Figura 1: Plano cartesiano

A circunferência trigonométrica é uma circunferência de raio unitário construída sobre o plano cartesiano, como mostra a figura 2 a seguir.

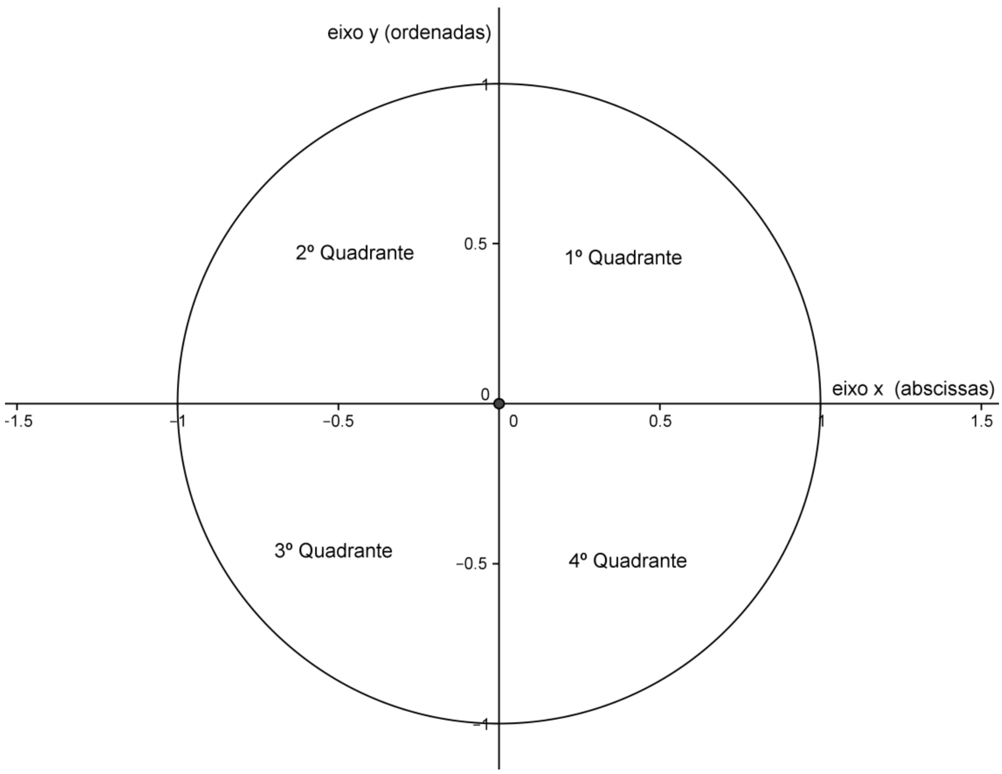

Figura 2: Circunferência Trigonométrica

3.1.2 Seno de um Ângulo (sen).

Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos de medida igual a α, define-se sen α como sendo a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa deste triângulo. Como na circunferência trigonométrica a medida da hipotenusa do triângulo é sempre o raio e este é unitário então sen α é igual à medida do cateto oposto ao ângulo α.

Com mostra a figura 3, traçando na circunferência o segmento My' perpendicular ao eixo OY se obtém o segmento Oy' de mesma medida que o segmento Mx' que é a medida do sen α.

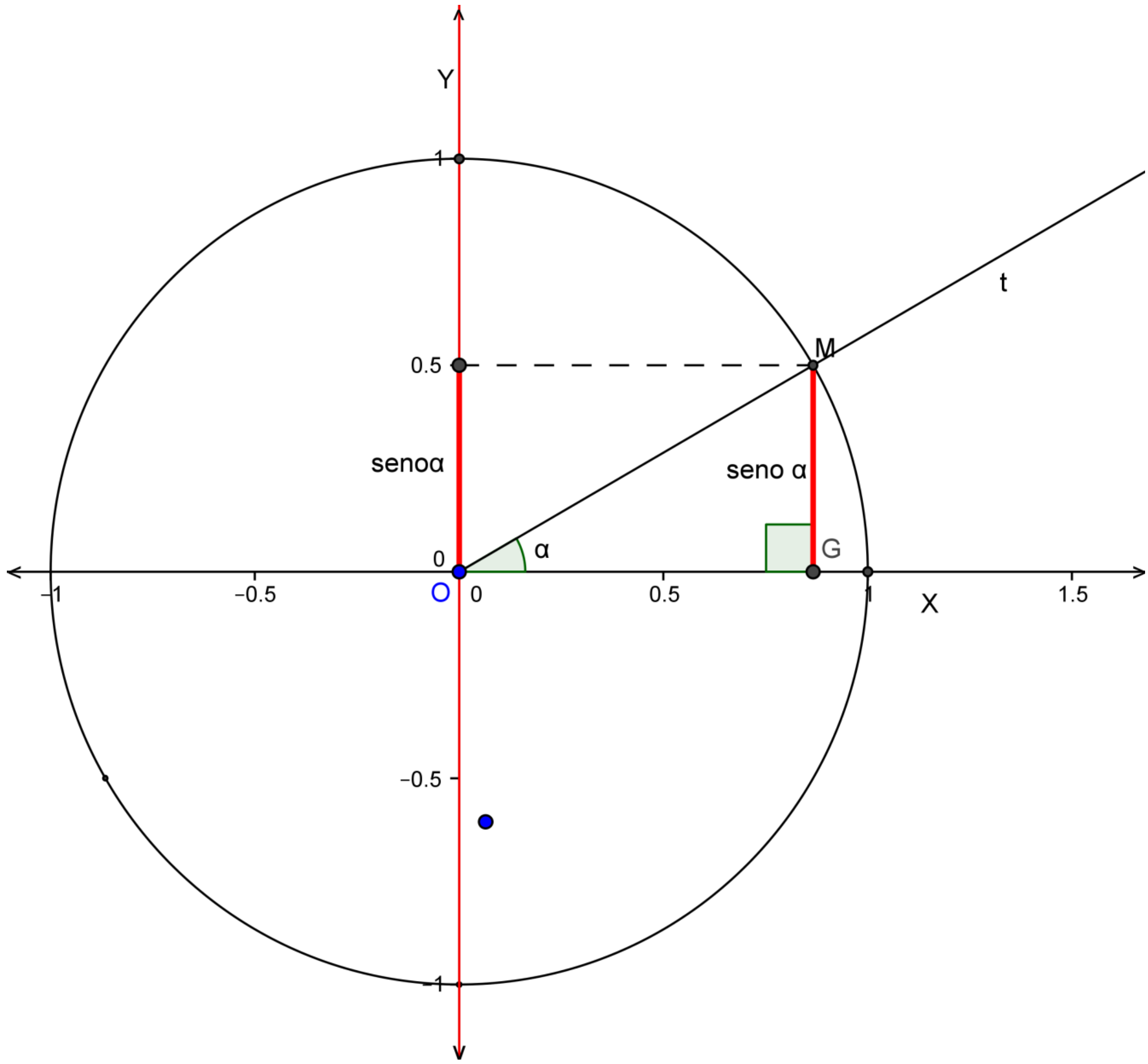

Figura 3: Seno de um ângulo

3.1.3 Cosseno de um Ângulo (cos).

Como mostra a figura 4, dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos de medida igual a α, define-se *cos α* como sendo a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa deste triângulo. Como na circunferência trigonométrica a medida da hipotenusa do triângulo é sempre o raio, e este é unitário, então cos α é igual à medida do cateto adjacente ao ângulo α.

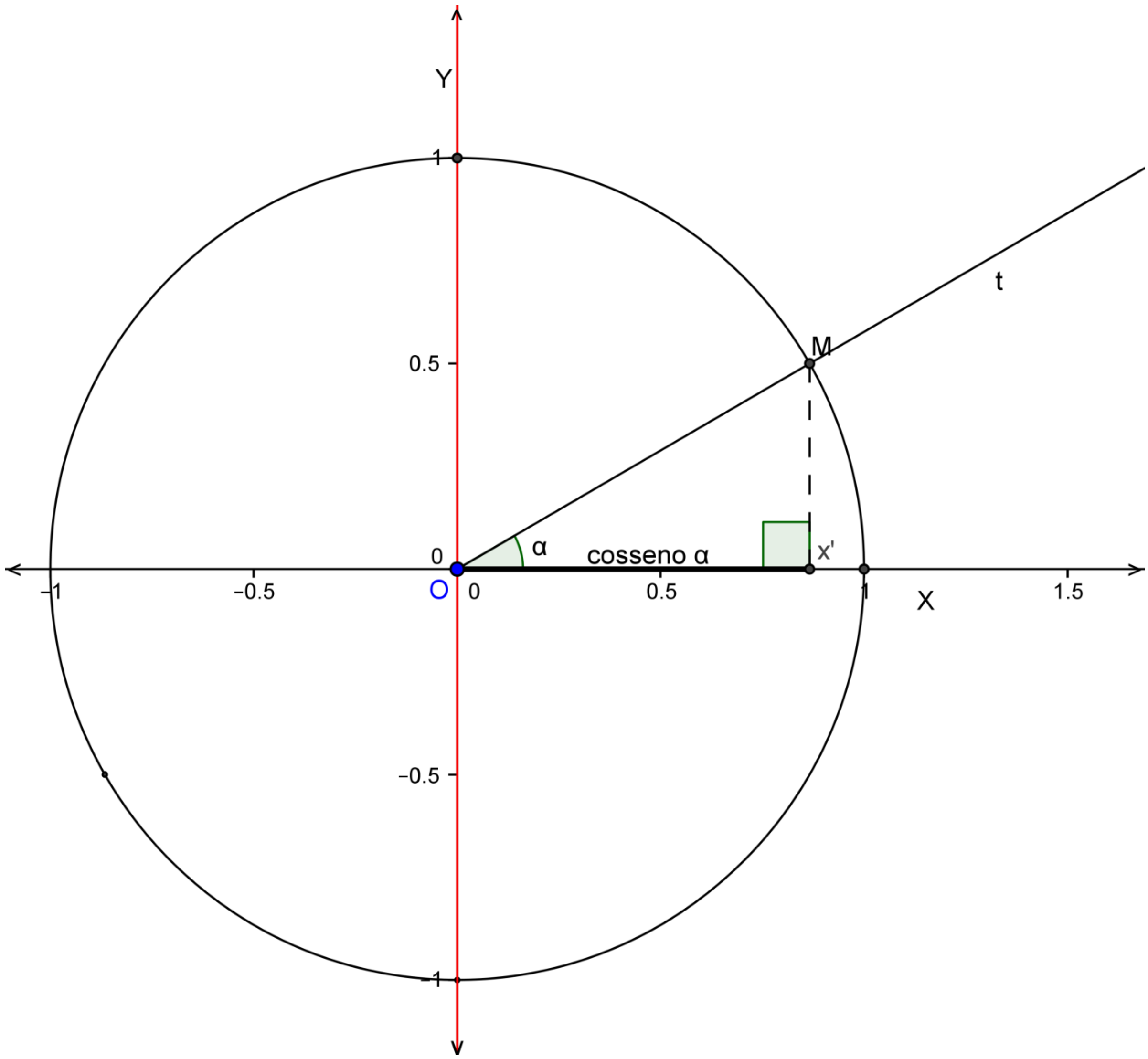

Figura 4: Cosseno de um Ângulo

3.1.4 Tangente de um ângulo (tang).

Como mostra a figura 5, seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto (1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta r que passa pelo ponto M (arco dado) e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1, y'). A ordenada deste ponto T é definida como a tangente do ângulo α.

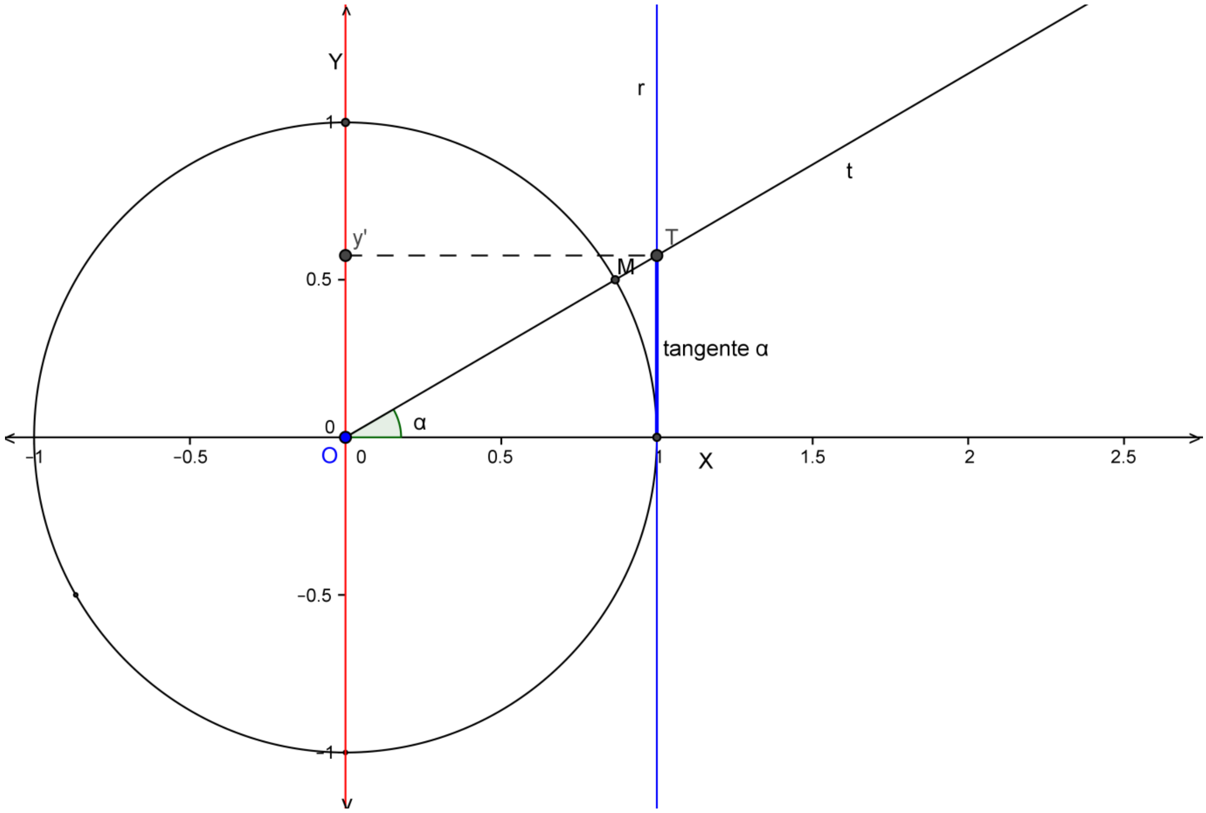

Figura 5: Tangente de um ângulo

3.1.5 Cotangente de um ângulo (Cotang)

Conforme apresenta a figura 6, seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto (0,1). Tal reta é perpendicular ao eixo OY. A reta r que passa pelo ponto M (arco dado) e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(x’, 1), a abscissa deste ponto é definida como a cotangente do ângulo α.

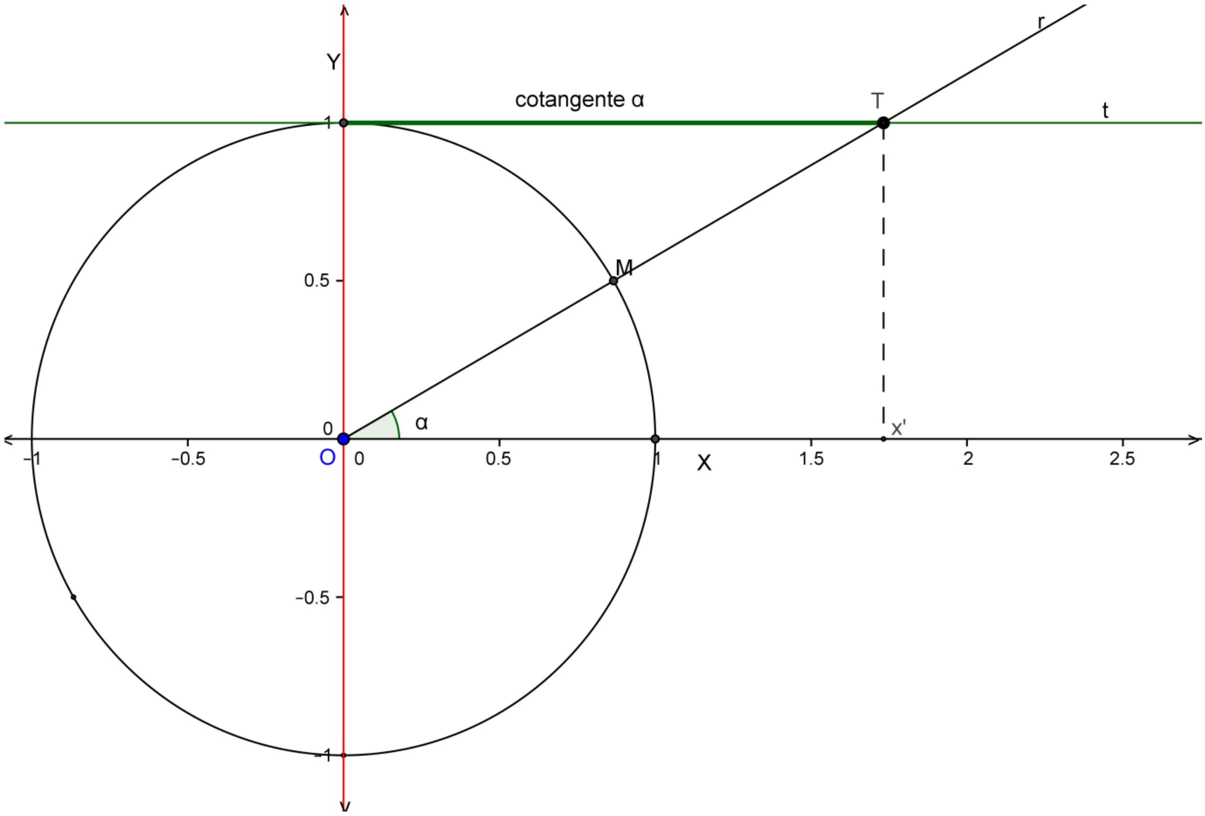

Figura 6: Cotangente de um ângulo

As figuras de 1 a 6 foram criadas no software GEOGEBRA, contudo, somente as definições, as figuras e o material didático do aluno não são suficientes para um bom entendimento do conteúdo. Assim sendo, o presente trabalho tem como objetivo principal a elaboração de um material concreto, capaz de facilitar a visualização das razões trigonométricas pelos estudantes. Para isto, tanto autor como orientador pensaram em como desenvolvê-lo.

A seguir descrevem-se as etapas para confecção e para utilização deste material concreto que poderá ser utilizado em sala de aula.

3.2 Confecção do material

Este material, confeccionado pelo autor do trabalho foi idealizado em conjunto com seu orientador. A primeira ideia era representar os arcos notáveis mais utilizados pelos alunos do ensino médio, contudo, durante o desenvolvimento, discussões foram surgindo sobre a melhor forma de se explorar o material. Surgiu a ideia de representar na circunferência apenas os números com até duas casas decimais no intervalo fechado de 0 a 1 sobre os eixos, para explorar a comparação das frações com os números decimais tais como, mostrar ao aluno que o valor decimal que ele encontra na circunferência trigonométrica é a mesma fração representada na tabela de valores para seno, cosseno, tangente e cotangente.

Muitas vezes para alguns alunos o número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ não tem significado. Outra ideia foi a de não representar somente os arcos de 30º, 45º e 60º, mas sim, além desses arcos e seus múltiplos também todos os múltiplos de 10º.

3.2.1 Materiais utilizados

- Um quadrado de MDF[3] de 75 cm de lado.
- Um quadrado vidro transparente de 75 cm de lado e 3 mm de espessura.
- Duas réguas transparentes.
- Circunferência trigonométrica confeccionada a mão ou impressa.
- Transferidor de medida de ângulo.

As figuras 7, 8 e 9 apresentam a metodologia utilizada na construção do material pretendido. A circunferência foi construída no programa GEOGEBRA com as medidas dos ângulos, algumas marcações e impressa em uma impressora de plotagem no tamanho adequado para uso em sala de aula.

A circunferência foi colocada sobre o MDF e fixada com o vidro, que foi parafusado sobre o MDF. No centro foi fixada uma régua que será o raio da circunferência e na ponta desta foi fixada outra régua que representa as projeções. Na interseção das duas réguas fixou-se um transferidor para obter as projeções sobre os eixos. O vidro foi colocado para facilitar o trabalho do professor na hora da explicação. Assim será possível fazer anotação, correções e adaptações com marcador no próprio material.

---

[3] MDF é a sigla de Medium Density Fiberboard, que significa placa de fibra de média densidade, e é um termo em inglês. MDF é um painel de fibras de madeira ideal para a indústria de móveis, decoração, construção, indústria gráfica, automotiva, caixas de som, publicidade, stands, maquetes, etc.

.

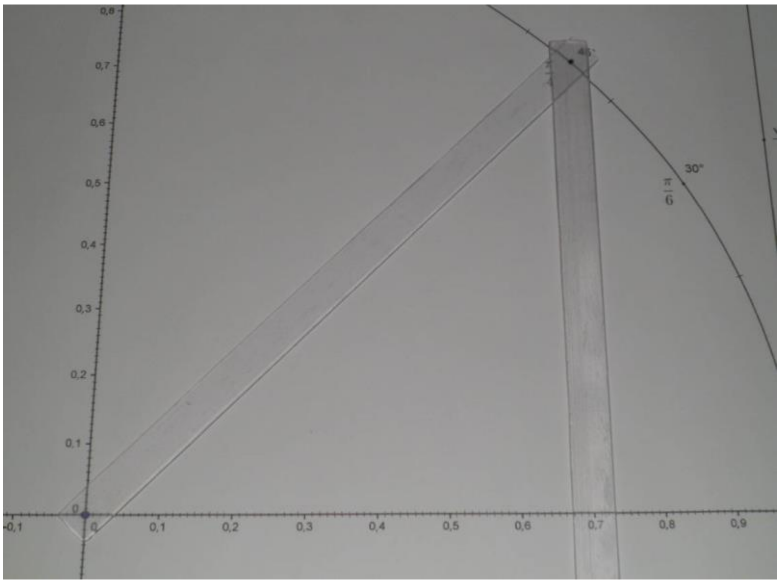

Figura 7: Réguas transparentes.

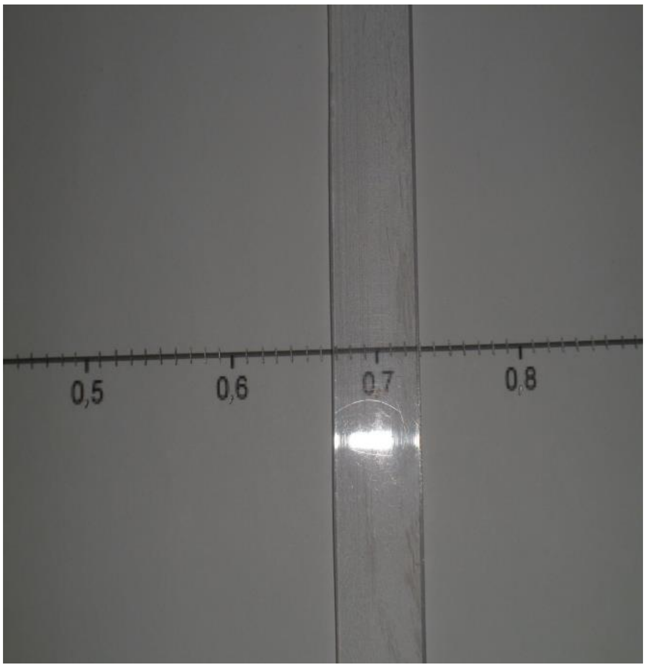

Figura 8: Escala; décimos e centésimos.

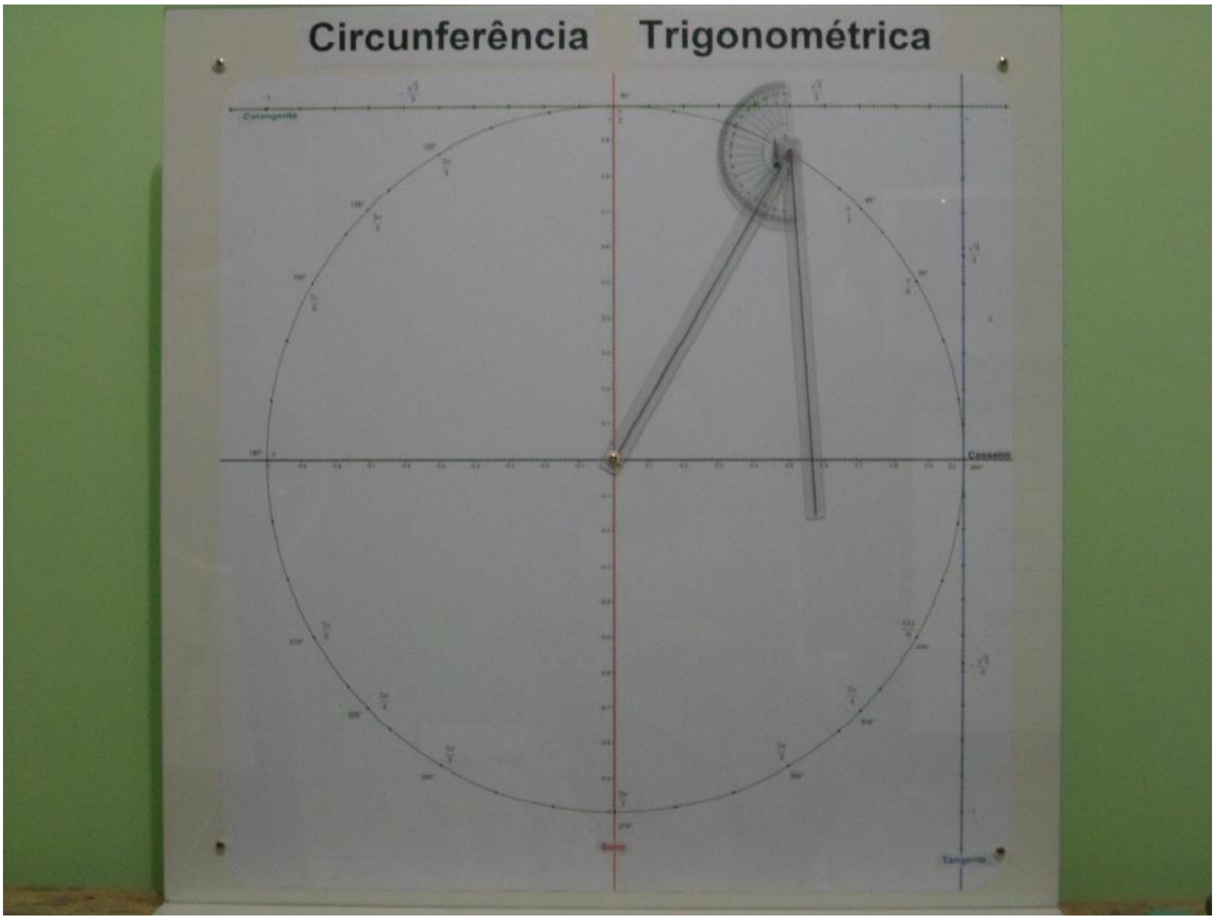

Figura 9: Circunferência Trigonométrica.

3.3 Trabalhando com a circunferência trigonométrica.

Para que o aluno possa realizar os exercícios propostos faz-se necessário relembrar alguns conceitos importantes como:

- A medição de ângulos com o transferidor.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo.
- A transformação de graus para radiano e vice-versa
- O que são ângulos complementares, suplementares e replementares.

Para verificar o valor de uma função trigonométrica de um determinado ângulo α segue as etapas seguintes.

Observação 1: Conforme mostra a figura 10, a régua 1 será definida como a régua que representa o raio da circunferência e a régua 2 será utilizada para obter o valor de cada função sobre os eixos.

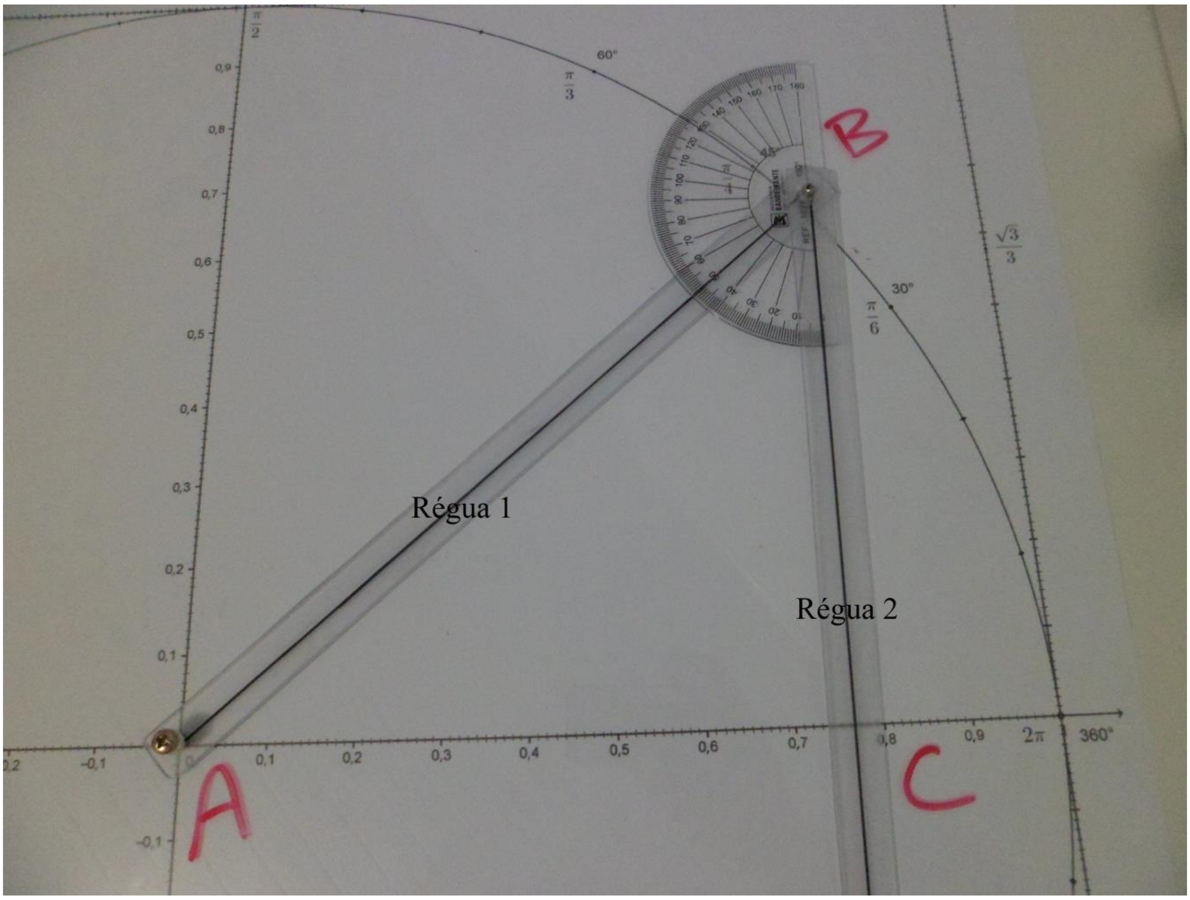

Figura 10: Réguas 1 e 2 utilizadas no manuseio do material concreto.

Na sequência serão apresentados alguns exemplos de como se calcular os valores do seno, cosseno, tangente e cotangente de alguns Ângulos escolhido aleatoriamente.

3.3.1 Seno de um Ângulo

Veja na figura 11 como determinar o seno de 50º.

1º - Posicione a extremidade da régua 1 sobre o ponto correspondente ao Ângulo de 50° na circunferência.

2º - Posicione a extremidade da régua 2 sobre o eixo do seno (ordenadas) de forma a formar com a régua 1 um ângulo de 50° já que o ângulo BÂC interno ao triângulo ABC mede 40°.

3º - Verifique no eixo das ordenadas o valor do sen 50° (Ponto C).

Observação 2: sen 50° = 0,76

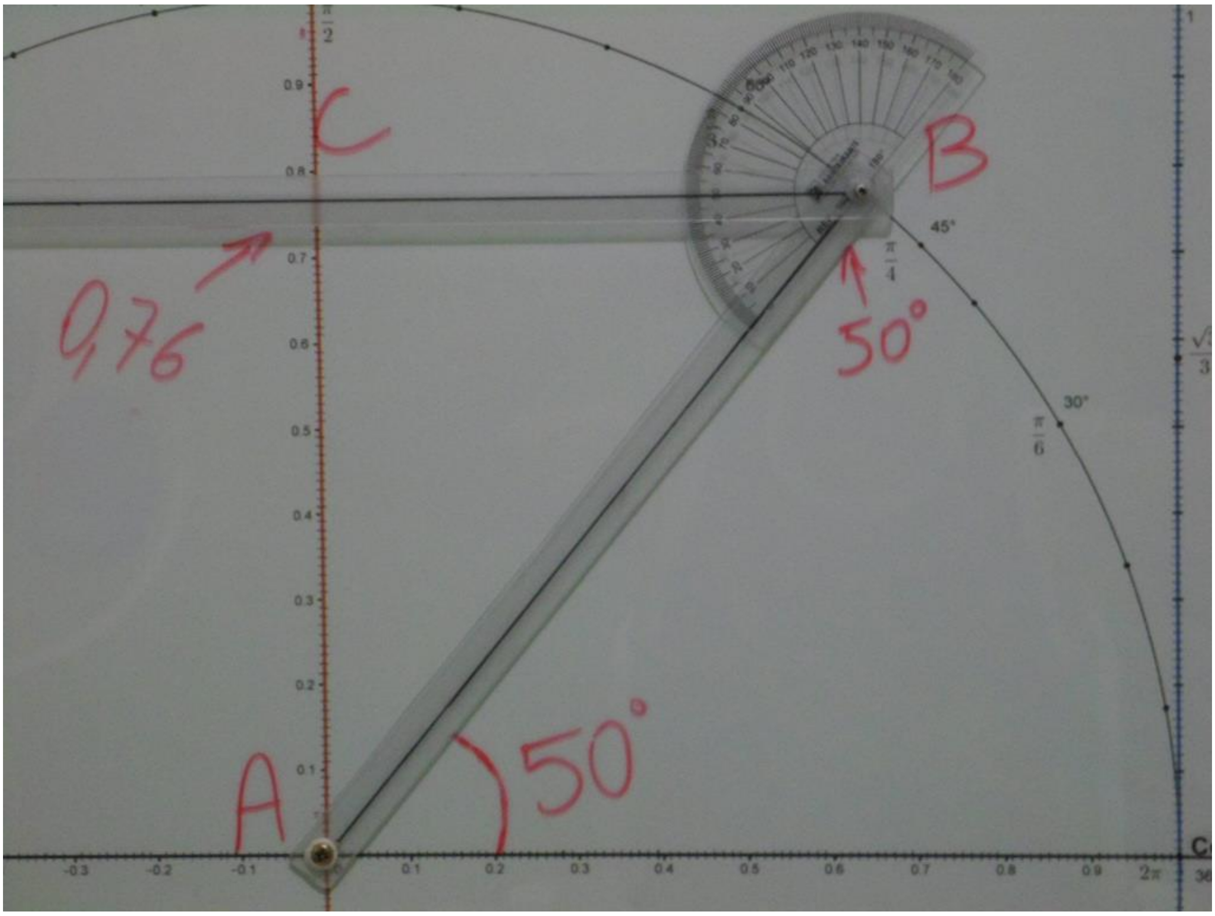

Figura 11: Método de como se calcular o seno de 50º

De forma análoga pode se calcular o valor do seno de qualquer arco da circunferência.

3.3.2 Cosseno de um Ângulo

Veja na figura 12 como determinar o cosseno de 40º.

1º - Posicione a extremidade da régua 1 sobre o ponto correspondente ao Ângulo de 40° na circunferência. (Ponto B)

2º - Posicione a extremidade da régua 2 sobre o eixo do cosseno (abscissa) de forma a formar com a régua 1 um ângulo de 50° graus que é o complemento de 40° para formas assim o ângulo de 90° no ponto C que é o terceiro Ângulo do triangulo ABC.

3º - Verifique no eixo das abscissas o valor do cos 40°. (Ponto C).

Observação 3: cos 40° = 0,76

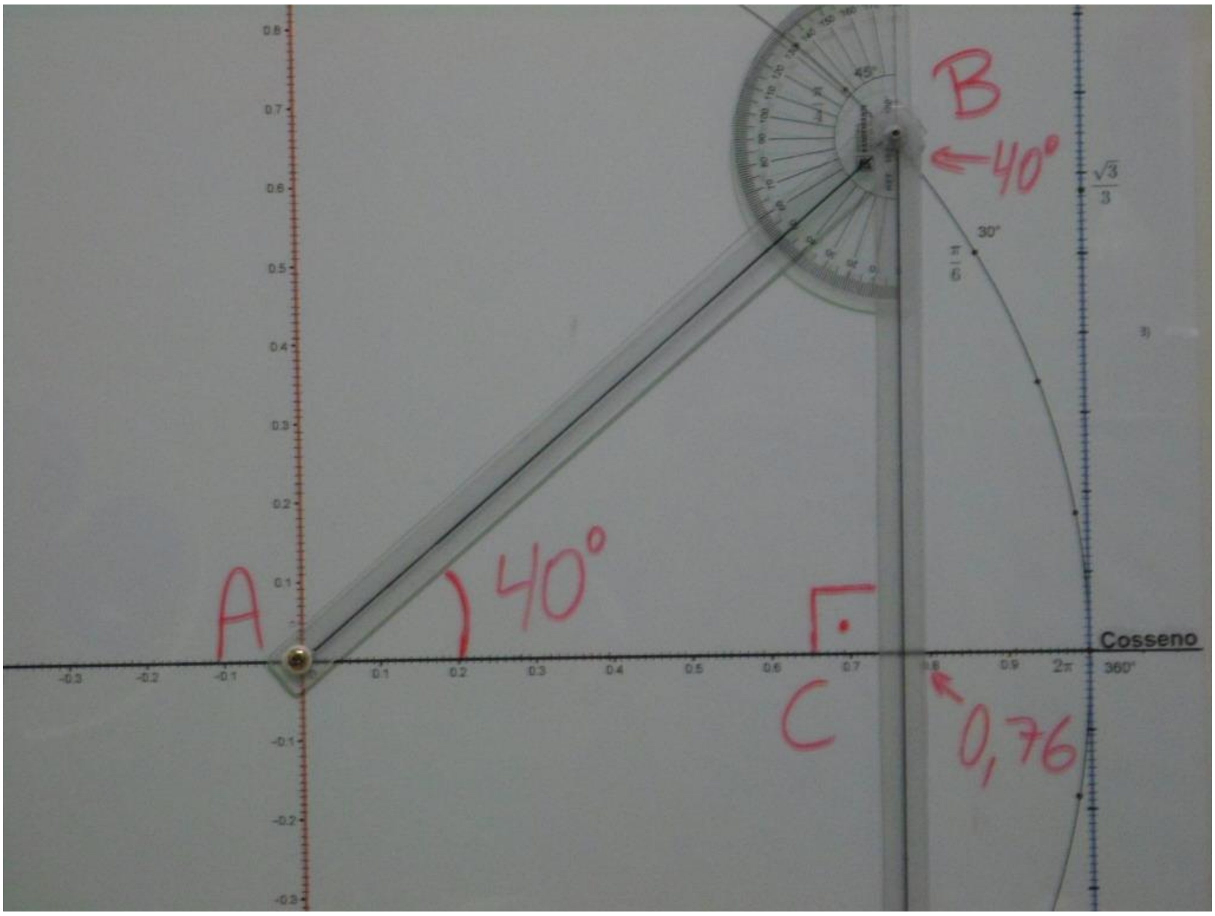

Figura 12: Método de como se calcular o cosseno de 40º

De forma análoga pode se calcular o valor do cosseno de qualquer arco da circunferência.

3.3.3 Tangente de um Ângulo

Veja na figura 13 como determinar a tangente de 45º.

1º - Posicione a extremidade da régua 1 sobre o ponto correspondente ao Ângulo de 45° na circunferência.
2º - Posicione a régua 2 de forma a formar com a régua 1 um ângulo raso, ou seja, as duas réguas ficarão alinhadas.
3º - Verifique o valor que a régua intercepta na reta tangente, esse é o valor da tang 45°.

Observação 4: tang 45° = 1

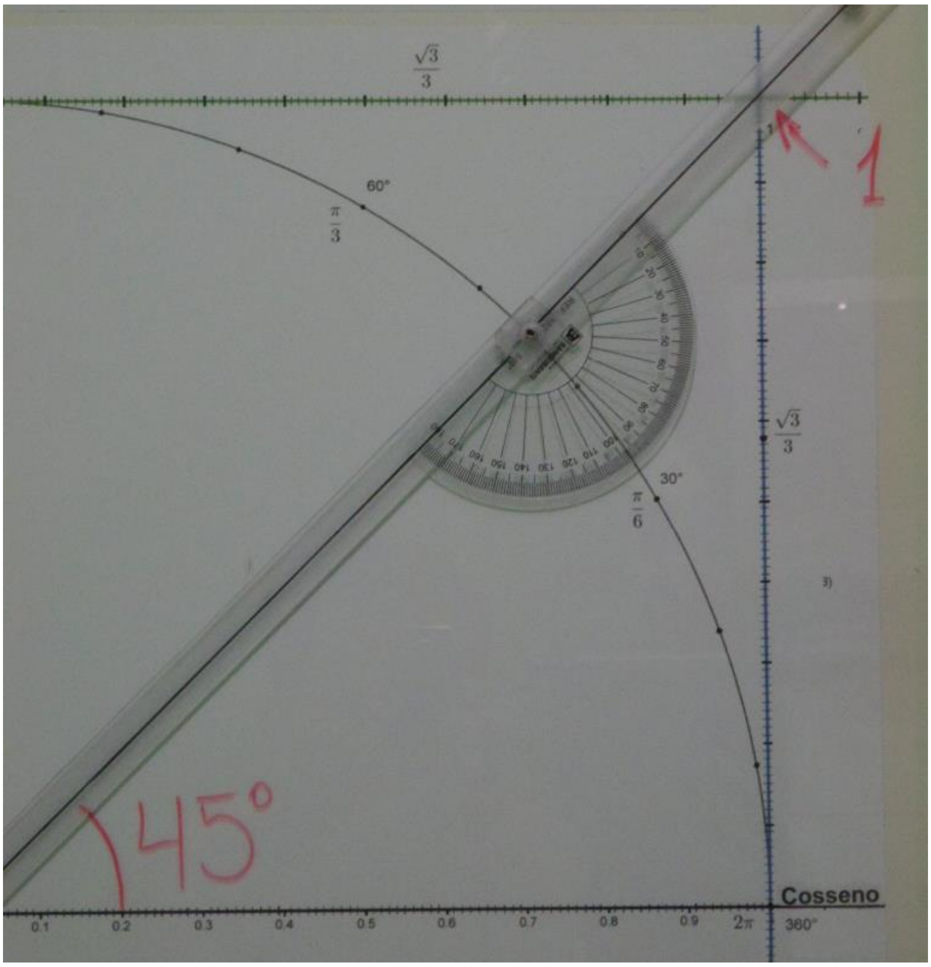

Figura 13: Método de como se calcular a tangent de 45º

Observação 5: As etapas da figura 13 são apenas para arcos no primeiro e quarto quadrantes.

✓ Para a tangente de um arco do segundo quadrante, basta encontrar o arco correspondente no quarto quadrante e daí seguir como nas etapas descritas anteriormente para a tangente na figura 13.

Exemplo: Tang 150° = (150° +180° = 330°) = tang 330°

Assim, sendo α um arco do segundo quadrante tem-se: tang α = tang (α + 180°)

✓ Para a tangente de um arco do terceiro quadrante basta encontrar o arco correspondente no primeiro quadrante e daí seguir como nas etapas descritas anteriormente para a tangente.

Exemplo: Tang 210° = (210° - 180° = 30°) = tang 30°

Assim, sendo α um arco do terceiro quadrante tem-se: tang α = tang (α – 180°)

1.3.4 Cotangente de um Ângulo

Veja na figura 14 como determinar a cotangente de 50º.

1. - Posicione a extremidade da régua 1 sobre o ponto correspondente ao Ângulo de 50° na circunferência.
2. - Posicione a régua 2 de forma a formar com a régua 1 um ângulo razo, ou seja, as duas réguas ficarão alinhadas.
3. - Verifique o valor que a régua intercepta na reta cotangente, esse é o valor da cotang 50°.

Observação 6: Cotang 50° = 0,83

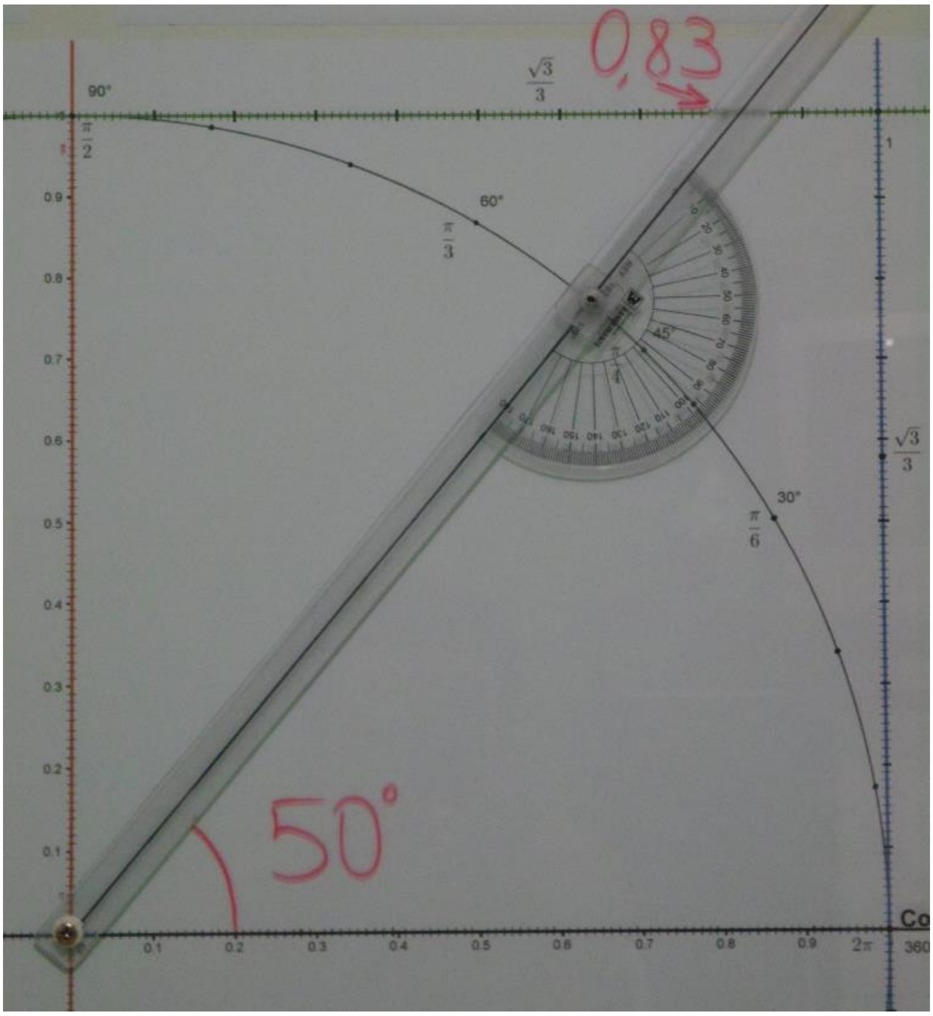

Figura 14: Método de como se calcular a cotangente de 50º

Observação 7: As etapas da figura 14 são apenas para arcos no primeiro e segundo quadrantes.

✓ Para a cotangente de um arco do terceiro quadrante, basta encontrar o arco correspondente no primeiro quadrante e daí seguir as etapas descritas para a cotangente na figura 14.

Exemplo: cotang 240° = (240° - 180° = 60°) = cotang 60°

Assim, sendo α um arco do terceiro quadrante, tem-se: cotang α = cotang (α - 180).

✓ Para a cotangente de um arco do quarto quadrante basta encontrar o arco correspondente no segundo quadrante e daí seguir as etapas descritas para a cotangente na figura 14.

Exemplo: cotang 300° = (300° - 180° = 120°) = cotang 120°

Assim, sendo α um arco do segundo quadrante, tem-se cotang α = cotang (α - 180). Logo, para determinar o valor da cotangente de um arco do terceiro ou quarto quadrante a formula é a mesma, sendo α esse arco cotang α = cotang (α – 180°).

3.3.5 Arcos que possuem medidas iguais para seno, cosseno, tangente e cotangente.

Por meio da figura 15 pode-se perceber que os arcos suplementares do primeiro e segundo quadrantes possuem o mesmo valor para o seno.

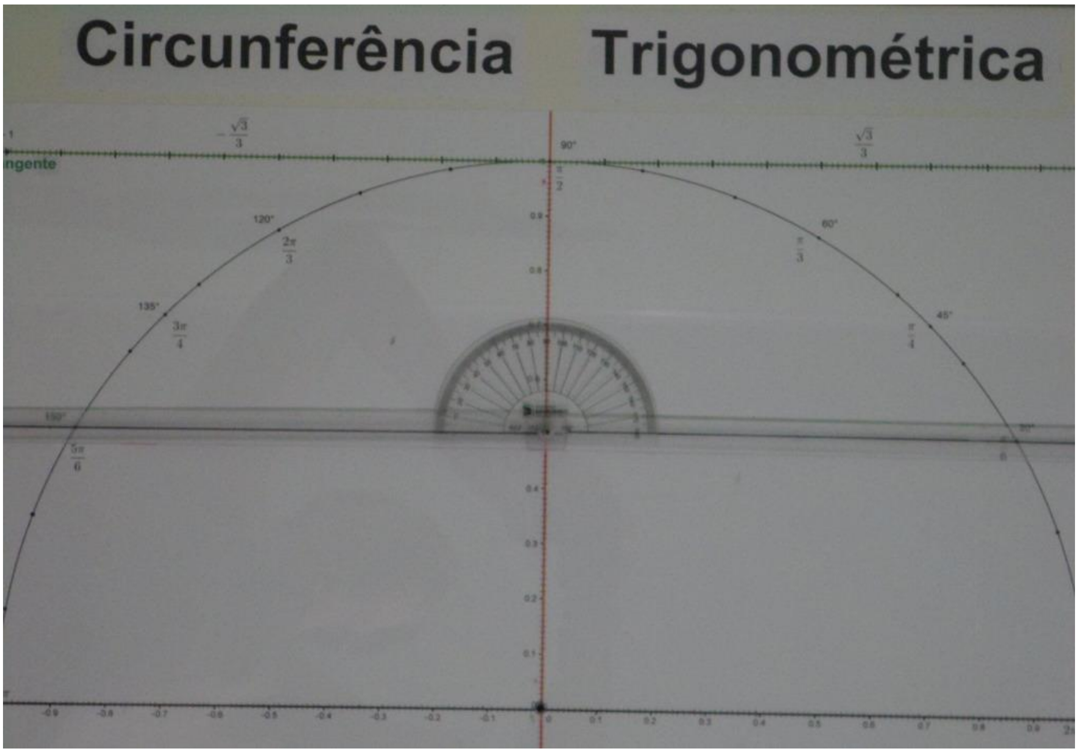

Figura 15: Arcos suplementares.

Observação 8: De forma análoga, arcos do terceiro e quarto quadrantes simétricos em relação ao eixo do seno também terão a mesma medida para o seno.

Por meio da figura 16 pode-se perceber que arcos replementares do primeiro e quarto quadrantes possuem o mesmo valor para o cosseno.

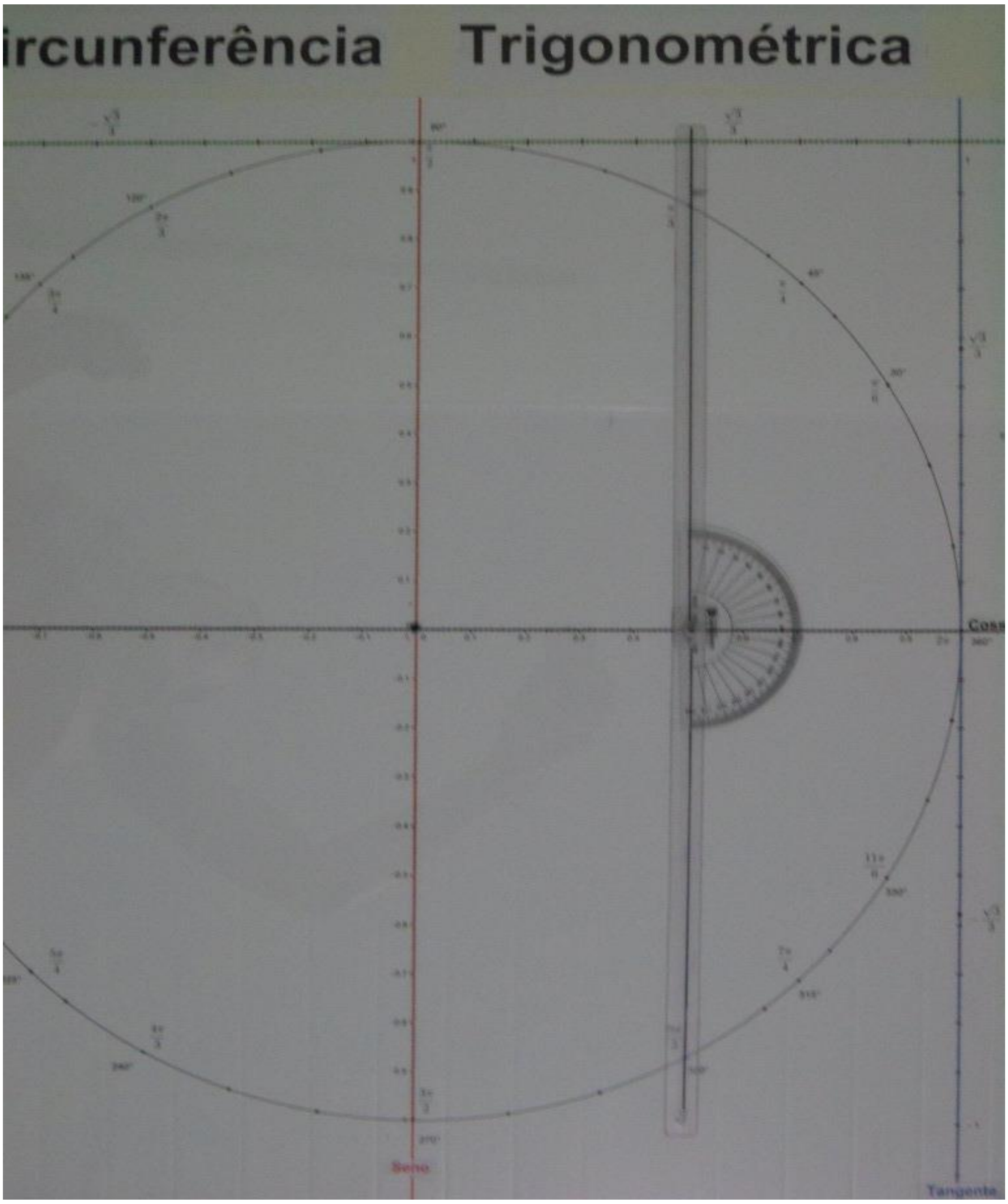

Figura 16: Arcos replementares

Observação 9: De forma análoga, arcos replementares do segundo e terceiro quadrantes também terão a mesma medida para o cosseno.

3.3.6 Arcos Côngruos

Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade. Uma regra prática eficiente para determinar essa afirmação consiste em verificar se a diferença entre eles é um número divisível ou múltiplo de 360º, isto é, a diferença entre as medidas dos arcos dividida por 360º precisa ter resto igual a zero.

Para mostrar este tema na circunferência trigonométrica desenvolvida neste trabalho o professor pode tomar dois arcos côngruos. Por exemplo: 60° e 1500°, então.

1º - Marque na circunferência trigonométrica o ponto A em 60°.

2º - A partir de zero dê voltas com as réguas na circunferência contando com os alunos a quantidade de graus a partir do primeiro movimento. Somando o valor de cada volta ao final da quarta volta terá um total de 1440°. Continue até completar 1500° e os alunos perceberão que os pontos coincidirão.

3º - Marque o ponto B (1500°) sobre o ponto A (60°).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O material concreto pode ser usado sempre durante as aulas, para que o aluno visualize e crie imagens mentais sobre a circunferência trigonométrica. Muitas vezes, acha-se que com uma única experimentação o material conseguirá cumprir o seu papel. Porém ele se torna mais eficaz quando é manipulado várias vezes até que o aluno consiga realmente apreender as informações nele contidas. Com o tempo ele deixará de ser necessário, pois o aluno conseguirá construir imagens mentais para serem utilizadas quando precisar.

O uso de materiais concretos facilitam a aprendizagem dos alunos e o trabalho do professor. No caso da trigonometria por ser um assunto que apresenta muitas dificuldades, quando o aluno tem a oportunidade de manusear o material esse irá fixar melhor essa imagem e pode assim representa-la em um momento posterior.

A proposta é que o uso da circunferência trigonométrica manipulável proporcione aulas mais dinâmicas e significativas para alunos e professores, favorecendo a discussão, a troca de ideias, os questionamentos, o levantamento de hipóteses e a formulação de conceitos por parte dos alunos. Espera-se que o aluno participe ativamente do seu processo de construção do conhecimento. A riqueza visual e manipulativa destes materiais ajudará os alunos a relacionarem as várias informações tratadas na trigonometria.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

AZEVEDO, Edith D. M. **Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano.** In: Revista de Educação e Matemática, n. 3, 1979 (p. 26-27).

BOYER, Carl B. - **História da Matemática** - Editora Edgard Blücher - São Paulo - 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática.** São Paulo: ática, 1990.

GEOGEBRA 4.4.19.0, Software livre. Versão para Windows XP/Vista/7/8/8.1. Disponível em http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm. acessado em; 13/12/2013.

LIMA, Elon Lages; **Meu professor de matemática.** Rio de Janeiro 2ª Ed. SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas Elementares**. Rio de Janeiro 2ª Ed. SBM, 2005.

***O início da trigonometria**.* Disponível em: http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html. Acessado em: 06 de novembro de 2013.

O que é MDF?, Disponível em: http://www.montagge.com.br/mdf.htm, acessado em: 05 de março de 2013.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** Forense Universitária. Rio de Janeiro, 1967.

Plano Cartesiano. Disponível em: *http://www.brasilescola.com/matematica/plano-cartesiano.htm.* Acessado em: 05 de março de 2014.

Um pouco da história da trigonometria. *Disponível em:* *http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm.* Acessado em: 05 de março de 2014.