Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O Método de Ponto Proximal para Otimização Convexa

Francisco Jones dos Reis Chaves

Teresina - 2014

Francisco Jones dos Reis Chaves

Dissertação de Mestrado:

O Método de Ponto Proximal para Otimização Convexa

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2014

Aos meus pais, à minha esposa, aos meus irmãos, aos meus sobrinhos e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof^{o} Jurandir de Oliveira Lopes pela apresentação da proposta que gerou esta dissertação e por suas orientações imprescindíveis ao êxito deste trabalho.

Agradeço ao IMPA por ter implantando o PROFMAT em Teresina.

Agradeço em especial à minha esposa Letícia, por tudo o que ela representa e pelas excelentes dicas de redação.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos a resolução do Problema de Minimização através do Método do Ponto Proximal. Mostraremos que o algoritmo desse método gera uma sequência de pontos denominadas de iteradas que converge para o ponto de mínimo ou ínfimo (quando não houver o mínimo) de uma função convexa e limitada inferiormente.

Abstract

In this work we present the resolution of the minimization problem by the method of Proximal Point. We show that this method the algorithm generates a sequence of points called iterated which converges to the point of minimum or smallest (when there is the least) a convex function and bounded below.

Sumário

Introdução

Encontrar os pontos extremos de uma função é um dos mais relevantes problemas enfrentados pela humanidade em diversas áreas. Como, por exemplo, em administração ou economia, onde é comum encontrarmos situações em que se necessite localizar os pontos de máximos ou mínimos de determinadas funções, como se vê em [13]. Um administrador está normalmente interessado em maximizar os lucros de uma empresa quando vai decidir sobre a quantidade a ser produzida. Em outra situação, ele pode também querer minimizar certos tipos de custos de produção. Nesse sentido, ele está tentando achar os pontos de máximo e mínimo das funções lucro e custo, respectivamente, para determinada quantidade a ser produzida. A resolução de problemas dessa natureza encontra no Cálculo um forte aliado. Mais precisamente, na resolução de equações do tipo f(x)=0 onde f é a primeira derivada de uma função contínua. A questão é que frequentemente os dados desses problemas geram equações de difícil resolução algébrica, daí a importância de métodos numéricos, que a exemplo do Método de Newton (ver p 112 de [4]), são capazes de gerar uma sequência numérica que converge para a solução desses problemas.

É nesse contexto que apresentamos o Método do Ponto Proximal para Minimização Convexa como, introduzido por Martinet [7] e Rockafellar [10], que se destina a resolver o problema de Minimização, isto é,

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x). \tag{1}$$

Esse método é uma ferramenta capaz de encontrar uma boa aproximação para o valor mínimo de uma classe de funções e ao mesmo tempo localizar com boa precisão as raízes de diversas equações do tipo a que nos referimos acima. No capítulo 1, apresenta-se um breve estudo sobre a convergência de sequências numéricas infinitas (listas de números reais escritos em uma ordem definida), em outras palavras, procura-se determinar o que ocorre com os termos dessas listas de números quando n tende ao infinito, ao tempo que busca-se fornecer uma base teórica para a demonstração da existência e unicidade do mínimo global de uma função contínua e coerciva. Para tanto, enuncia-se o Teorema de Weiertrass, como em [4], e abordam-se alguns dos principais conceitos e teoremas envolvendo a teoria dos limites, continuidade de funções e derivadas. E para uma melhor caracterização das funções as quais este trabalho se dedica, faz-se um rápido estudo sobre funções convexas. No capítulo 2, mostra-se a resolução do Problema de Minimização (como em [1]), através do Método do Ponto Proximal, o qual seu algoritmo gera uma sequência que converge para uma solução e/ou ao ínfimo do problema (1).

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Sequências de números reais

O principal objetivo desta seção é estudar a convergência de sequências numéricas infinitas, em outras palavras, determinar o que ocorre com os termos dessas listas de números quando n tende ao infinito.

Observação 1. *Os principais resultados e definiçãoes encontradas nesta seção podem ser encontrados em [4], [7] ou [11].*

Consideremos o número 1 como o menor elemento do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$.

Definição 1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número natural x_n que é o n-ésimo termo da sequência.*

Geralmente usa-se uma das notações: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ para representar a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1. $x_n = \dfrac{1}{n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. $(-1, 1, -1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...)$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4. $x_n = 1$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2. *É importante destacar a diferença entre uma sequência e o conjunto formado pelos seus termos.*

Por exemplo: O conjunto $\{0,1,2\}$ é formado pelos termos da sequência $(0,1,0,2,0,1,0,2,...)$ enquanto que o conjunto $\{1\}$ contém todos termos da sequência $(1,1,1,1,...)$.

Definição 2. *Diz-se que uma sequência (x_n) é limitada inferiormente (respectivamente superiormente) quando existe um número real r tal que $x_n \geqslant r$ (respectivamente $x_n \leqslant r$) para todo natural n.*

Se uma sequência é limitada inferiormente e superiormente diz-se que a sequência é limitada. O que equivale a dizer que existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leqslant c$ para todo natural n.

Exemplo 5. *A sequência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, tem todos os seus termos contidos no intervalo $[0,1]$. Portanto, limitada.*

Exemplo 6. *A sequência cujo termo geral é $x_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$, é limitada inferiormente por zero mas não é limitada superiormente, pois o conjunto dos números naturais é ilimitado.*

Definição 3. *Uma subsequência de uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ em que $n_k < n_{k+1}$, para todo natural k. Isto é, trata-se de uma restrição da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$.*

Exemplo 7. *Sejam a e q números naturais. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = a \cdot q^{n-1}$, $n \geqslant 1$. Observe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q.*

A progressão geométrica $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão q^2 é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pois, tomando $n_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$x_{n_k} = a \cdot q^{n_k - 1} = a \cdot q^{(2k-1)-1} = a \cdot q^{2k-2} = a \cdot (q^2)^{k-1}.$$

Definição 4. *Uma sequência (x_n) chama-se monótona quando se tem $x_n \leqslant x_{n+1}$ ou $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo n natural. No primeiro caso, diz-se que (x_n) é não-decrescente e, no segundo, que (x_n) é não-crescente. Se for $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$) para todo natural n, dizemos que a sequência é crescente (respectivamente decrescente).*

Definição 5. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita convergente se existe um real ℓ tal que:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Isto significa dizer que, para valores de n suficientemente grandes, os termos x_n tornam-se tão próximos de ℓ quanto se queira.

Nesse caso, diz-se que ℓ é o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que x_n converge para ℓ quando n tende a mais infinito ($\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$). Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, então dizemos que ela é divergente.

Exemplo 8. *A sequência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, converge para zero.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Temos então $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, então $x_n = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} = x_{n_0} < \varepsilon$. Logo, temos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \forall\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

Teorema 1. *Sejam os números reais a e b e uma sequência (x_n). Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que ocorra $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ com $a \neq b$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall\, n > n_1 \ \Rightarrow\ |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\, n > n_2 \ \Rightarrow\ |x_n - b| < \varepsilon.$$

Escolha $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Sendo assim, para todo $n > n_0$temos que:

$$|a-b| = |(x_n - a) - (x_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |a-b| < |a-b|.$$

Um absurdo. Portanto, temos que $a = b$. □

Teorema 2. *Se $\lim x_n = \ell$ então toda subsequência de (x_n) converge para ℓ.*

Demonstração. Sendo $\lim x_n = \ell$, segue que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0 \Rightarrow x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon). \tag{1.1}$$

Seja $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observe que para todo natural n sempre que existe um natural k tal que $n_k > n$. Deste fato e de (1.1) tem-se que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0,\ \exists\, n_k > n > n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \Rightarrow \lim x_{n_k} = \ell.$$

□

Teorema 3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $\ell \in \mathbb{R}$. Logo, dado um $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\forall\, n > n_0 \Rightarrow x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Considere o conjunto $A = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\}$ e sendo $\alpha = \min A$ e $\beta = \max A$, temos que $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$, para todo natural n. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Teorema 4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona, digamos não-decrescente. Então o conjunto $A = \{x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots\}$ possui supremo, pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja $\beta = \sup A$ (ver definição na p. 16 de [4]), sendo assim, dado um $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\forall\, n > n_0$ temos

$$\beta - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n < \beta + \varepsilon.$$

O que prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para β. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for monótona não-crescente, o raciocínio é similar. □

Teorema 5. (Teorema de Bolzano Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N};\, x_n > x_m \text{ para todo natural } m > n\}$$

Se A for finito, existe um natural $n_1 \notin A$ que é cota superior de A. Sendo assim, existe $n_2 \notin A$, com $n_1 < n_2$ e $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Como $n_2 \notin A$, existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_2} \leqslant x_{n_3}$. Logo, por indução, definimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monótona. Portanto, pelo Teorema 4, esta subsequência é convergente.

Por outro lado, se A for infinito, escrevamos $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$. Assim, se $i < j$, $n_i < n_j$ e, como $n_i \in N$, obtemos $x_{n_i} > x_{n_j}$. Donde concluímos que a $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona. Portanto, convergente. □

Proposição 1. *Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, ela própria é convergente.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona, digamos não-decrescente e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ser convergente, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo existe $A > 0$ tal que $x_{n_k} < A$ para todo k natural.

Pela definição de subsequência, para todo natura n existe um natural k tal que $n_k > n$. Como (x_n) é monótona não-decrescente, temos então que $x_n \leqslant x_{n_k} < A$. Logo, podemos concluir que, além de monótona não-decrescente, (x_n) é limitada superiormente por A. Nesse caso, segue, pelo Teorema 4, que (x_n) é convergente.

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for monótona não-crescente, o raciocínio é similar. □

Proposição 2. *Se uma subsequência de uma sequência monótona converge para um número real α, a sequência também convergente para α.*

Demonstração. Seque imediatamente do Teorema 2 e da Proposição 1. □

Definição 6. *Diz-se que um real x_0 é um ponto de acumulação do conjunto $D \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança de x_0 contém algum ponto de D diferente do próprio x_0. Isto quer dizer que para todo real $\varepsilon > 0$ tem-se $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (D - \{x_0\}) \neq \emptyset$.*

Teorema 6. *Dados $D \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in R$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) x_0 é um ponto de acumulação de D;

(2) x_0 é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in D - \{x_0\}$;

(3) Todo intervalo aberto de centro x_0 contém uma infinidade de pontos D.

Demonstração. Supondo (1), para todo natural n podemos achar um ponto $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, na vizinhança $\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$. Logo $\lim x_n = x_0$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer natural n_0 o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1}, que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência constante com limite $x_{n_1} \neq x_0$. O que é um absurdo de acordo com o Teorema 2. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2) $\Rightarrow$ (3). Finalmente, a implicação (3) $\Rightarrow$ (1) segue imediatamente da definição de ponto de acumulação. □

Definição 7. *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado quando existe um número real $A > 0$ tal que $x \in [-A, A]$ para todo x em D.*

Teorema 7. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite ao menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $D \subset R$ infinito limitado. Como todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável (ver p 7 de [4]), assim D possui um subconjunto enumerável $D' = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Fixando esta enumeração, temos uma sequência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a D, portanto uma sequência limitada, a qual pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência (x_{n_j}) convergente. Seja $x_0 = \lim x_{n_j}$. Como os termos x_{n_j} são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a x_0. Descartando-o, caso exista, teremos x_0 como limite de uma sequência de pontos $x_{n_j} \in D - \{x_0\}$. Logo, pela Definição 6, x_0 é um ponto de acumulação de D. □

1.2 Limites, Continuidade e Derivada de Funções Reais

Nesta seção procura-se fornecer uma base teórica para a demonstração da existência e unicidade de um mínimo global (como em [9]) de uma função coerciva e convexa. Para tanto, abordaremos alguns dos principais conceitos e teoremas envolvendo a teoria dos limites e continuidade de funções. Enunciaremos o Teorema de Weiertrass, o Teorema de Rolle e o Teorema do valor médio.

Observação 3. *Os prinicipais resultados aqui obtidos podem ser encontrados em [3], [6], [9] ou [10].*

Definição 8. *Diz-se que um número real L é limite de $f(x)$ quando x tende para x_0, e escreve-se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Teorema 8. *Sejam dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e os reais a, L_1 e L_2. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_1 + L_2$ e $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.*

Demonstração. a) Para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica em } |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ implica em } |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $0 < |x - a| < \delta$ implica em:

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad L_2 - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somando membro a membro essas duas últimas desigualdades temos:

$$L_1 + L_2 - \varepsilon < f(x) + g(x) < L_1 + L_2 + \varepsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L - 2)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_1 + L_2.$$

b) Sabe-se que existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ implica em:

$$|f(x) - L_1| < 1 \Rightarrow L_1 - 1 < f(x) < L_1 + 1 \Rightarrow -|L_1| - 1 \leqslant f(x) \leqslant |L_1| + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leqslant |L_1| + 1.$$

Também existem $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$ tais que para todo $\varepsilon = p + k$, com p, $k > 0$, temos:

$$|f(x) - L_1| < \frac{p}{|L_2| + 1} \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

e

$$|g(x) - L_2| < \frac{k}{|L_1| + 1} \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_3$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, para $0 < |x - a| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1) \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &\leqslant |f(x)(g(x) - L_2)| + |L_2(f(x) - L_1)| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &\leqslant |f(x)| \cdot |(g(x) - L_2)| + |L_2| \cdot |(f(x) - L_1)| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &< |f(x)| \cdot \frac{k}{|L_1| + 1} + L_2 \cdot \frac{p}{|L_2| + 1} \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &< (|L_1| + 1) \cdot \frac{k}{|L_1| + 1} + (L_2 + 1) \cdot \frac{p}{|L_2| + 1}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $|f(x)g(x) - L_1L_2| < k + p = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2$.

□

Definição 9. *Diz-se que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*, quando dado* $M > 0$ *existe um real positivo* x_1 *tal que para todo* $x > x_1$ *temos que* $f(x) > M$.

Definição 10. *Diz-se que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, *quando dado* $M > 0$ *existe um real positivo* x_2 *tal que para todo* $x < -x_2$ *temos que* $f(x) > M$.

Exemplo 9. *Vamos mostrar que* $\lim_{|x| \to \infty} x^2 = +\infty$.

Solução. *Sendo* $f(x) = x^2$ *e um* $M > 0$, *basta tomarmos* $x_0 = \sqrt{M} > 0$. *Pois nesse caso, temos que:*

$$|x| > x_0 \Rightarrow x^2 > {x_0}^2 \Rightarrow f(x) > M. \tag{1.2}$$

De (1.2) e das Definições 9 e 10 segue o que queríamos mostrar.

Definição 11. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função definida no conjunto* $D \subset \mathbb{R}$. *Diz-se que* f *é contínua em um ponto* $x_0 \in D$, *se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Observação 4. *Se* x_0 *pertence ao conjunto* D *e ao conjunto dos pontos de acumulação de* D, *então* f *é contínua em* x_0 *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definição 12. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função definida no conjunto* $D \subset \mathbb{R}$. *Diz-se que* f *é contínua em* D *se* f *for contínua em todos os pontos de* D.

Proposição 3. *A soma e e produto de funções contínuas são funções contínuas.*

Demonstração. Ver p. 77 de [3]. □

Teorema 9. (Teorema de Weierstrass). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua definida no intervalo* $[a, b]$, *fechado e limitado da reta. Então, existem números* c *e* d *em* $[a, b]$, *tais que, para todo* $x \in [a, b]$, *tem-se que* $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

Demonstração. Ver p. 81 de [4]. □

Definição 13. *Uma função real* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua diz-se coerciva se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplo 10. $f(x) = x^2$

Exemplo 11. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos x$

Definição 14. *A derivada de uma função* f *definida em um intervalo aberto* D, *e denotada por* f', *é dada em cada* $x \in D$ *por:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

se este limite existir e for finito.

Se em algum ponto x_0 *de* D *este limite não existir ou for infinito, diz-se que a função não é derivável em* x_0.

Teorema 10. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se* f *é derivável em* x_0 *então* f *é contínua em* x_0.

Demonstração. Temos que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Passando o limite com h tendendo a zero, temos:

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$$

Porém, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$ e $\lim_{h \to 0} h = 0$. Logo,

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ é contínua em } x_0.$$

□

Teorema 11. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e derivável em* (a, b). *Se* f *tem um mínimo local em* $x_0 \in (a, b)$, *então* $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Suponha que f tenha um mínimo local em x_0. Como f é derivável em x_0, então:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Como x_0 é mínimo local em (a, b) segue que $f(x_0) \leqslant f(x)$, o que implica que $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $x < x_0$ então $x - x_0 < 0$ e, portanto, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ para $x_0 \in (a, b)$, logo,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \qquad (1.3)$$

Por outro lado, $x > x_0$ então $x - x_0 > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ para $x_0 \in (a, b)$, logo,

$$\lim_{x \to x_0{}^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Comparando as desigualdades (1.3) e (1.4) e sabendo que são o mesmo número, resulta em:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0.$$

□

Teorema 12. (Teorema de Rolle). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com* $f(a) = f(b)$. *Se* f *é derivável em* (a, b) *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c, estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. □

Teorema 13. (Teorema do Valor Médio). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e derivável em* (a, b). *Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração. Consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Essa reta é o gráfico da função

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Seja g a função que é a diferença entre f e h, ou seja, $g(x) = f(x) - h(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

Quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

e, quando $x = b$, temos:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Logo, pelo Teorema de Rolle, conclui-se que existe um número c no intervalo (a, b), tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos que $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e, portanto, $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, ou seja, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, como queríamos provar. □

Observação 5. *Uma importante consequência do Teorema do Valor Médio é a relação do sinal da primeira derivada da função com o seu crescimento. (mais detalhes em [7]).*

Proposição 4. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e derivável em* (a, b) *então:*

i) f *é não-decrescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) \geqslant 0$ *para todo* x *em* (a, b). *Além disso, se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é crescente em* $[a, b]$.

ii) f *é não-crescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f'(x) \leqslant 0$ *para todo* x *em* (a, b). *Além disso, se* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é decrescente em* $[a, b]$.

Demonstração. Suponha que f seja não-decrescente em $[a, b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$.

Se $h > 0$, temos que $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x + h) \geqslant f(x) \Rightarrow f(x + h) - f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Em ambos os casos, tem-se que $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$. Portanto,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

.

Suponha que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sejam x_0, $x_1 \in [a, b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $x \in (x_0, x_1)$ tal que;

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(x) \geqslant 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_0)$ e, portanto, f é não-decrescente. De maneira análoga pode-se provar o item (ii). □

Corolário 1. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e duas vezes derivável em* (a, b) *então:*

i) f' *é não-decrescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f''(x) \geqslant 0$ *para todo* x *em* (a, b)*. Além disso, se* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f' *é crescente em* $[a, b]$*.*

ii) f' *é não-crescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f''(x) \leqslant 0$ *para todo* x *em* (a, b)*. Além disso, se* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f' *é decrescente em* $[a, b]$*.*

Proposição 5. *Seja* f *uma função contínua e duas vezes derivável em* $\mathbb{R}$*. Se* $f'' \geqslant 0$ *para todo* x *em* $\mathbb{R}$*, então* $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$*,* $\forall\, x$*.*

Demonstração. Devemos mostrar que dado qualquer real x_0 a imagem $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ para todo x real com $x \neq x_0$.

Vamos supor que $x > x_0$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x]$, temos que existe $c \in (x_0, x)$ tal que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{1.5}$$

Como $f'' \geqslant 0$ para todo x real então (pela parte (i) do Corolário 1) f' é uma função não-decrescente e, portanto,

$$f'(x_0) \leqslant f'(c). \tag{1.6}$$

Multiplicando (1.6) por $x - x_0$, temos que:

$$f'(c)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.7}$$

De (1.5) e (1.7) vem

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

O que mostra que a curva está acima da tangente em $(x_0, f(x_0))$ para $x > x_0$.

Sendo $x < x_0$ temos que existe $c \in (x, x_0)$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ e $f'(c) \leqslant f'(x_0)$ uma vez que f' é não-decrescente. Multiplicando esta última desigualdade pelo fator negativo $x - x_0$ inverte-se o sinal da desigualdade, isto é:

$$f'(c)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

□

Proposição 6. *Seja* f *uma função contínua e duas vezes derivável em* $\mathbb{R}$. *Se* $f'' > 0$ *para todo* x *em* $\mathbb{R}$, *então* $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall\, x \neq x_0$.

Demonstração. Devemos mostrar que dado qualquer real x_0 a imagem $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ para todo x real com $x \neq x_0$.

Vamos supor que $x > x_0$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x]$, temos que existe $c \in (x_0, x)$ tal que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{1.8}$$

Como $f'' > 0$ para todo x real então (pela parte (i) do Corolário 1) f' é uma função crescente e, portanto,

$$f'(x_0) < f'(c). \tag{1.9}$$

Multiplicando (1.9) por $x - x_0$, temos que:

$$f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x_0) + f'(c)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.10}$$

De (1.8) e (1.10) vem

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

O que mostra que a curva está acima da tangente em $(x_0, f(x_0))$ para $x > x_0$.

Sendo $x < x_0$ temos que existe $c \in (x, x_0)$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ e $f'(c) < f'(x_0)$ uma vez que f' é crescente. Multiplicando esta última desigualdade pelo fator negativo $x - x_0$ inverte-se o sinal da desigualdade, isto é:

$$f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

□

Exemplo 12. $f(x) = ax^2$, *com* $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Seja $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0)$, *sendo* x_0 *um real qualquer. Derivando a função* f *duas vezes, temos* $f'(x) = 2ax$ *e* $f''(x) = 2a > 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0) = ax^2 - ax_0^2 - 2ax_0(x - x_0) \\ &= ax^2 - ax_0^2 - 2ax_0x + 2ax_0^2, \end{aligned}$$

o que implica em $g(x) = a(x - x_0)^2$.

Sendo assim, $g(x) > 0$ *para todo real* $x \neq x_0$. *Portanto,* $f(x) > f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$.

Proposição 7. *Se uma função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é coerciva, então* f *possui um mínimo global.*

Demonstração. Sendo f é coerciva, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Sendo assim, dado um número real $a > 0$, é possível encontrarmos um real positivo b tal que $a \in [-b, b]$ e para todo $|x| > b$ tem-se $f(x) > f(a)$.

Como f é contínua no intervalo fechado $[-b, b]$, segue pelo Teorema 9 que existe $x_0 \in [-b, b]$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [-b, b]$. E como para todo $|x| > b$ tem-se $f(x) > f(a)$, segue que $f(x_0) \leqslant f(a) < f(x)$, para todo x real. Logo, x_0 é o mínimo global de f. □

1.3 Funções Convexas

Nesta seção faremos um breve estudo sobre funções convexas e seus principais resultados. As definições e resultados podem ser encontrados em [1], [2], [4] ou [9].

Definição 15. (Função Convexa) *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita convexa se dados dois pontos quais* A *e* B *do gráfico a corda que une os dois pontos está sempre acima do gráfico de* f *(ver figura 1.1).*

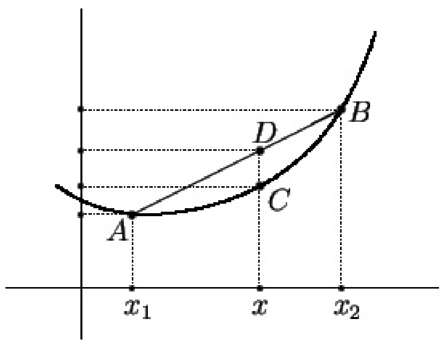

Figura 1.1: Função convexa.

Observe que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, isto é, a imagem da média aritmética entre dois pontos quaisquer x_1 e x_2 é sempre menor ou igual à média aritmética das imagens, isto também significa que uma reta tangente à curva de uma função convexa, como na figura acima, está abaixo de qualquer outra reta paralela e secante à essa curva.

O mesmo vale para a média ponderada, ou seja, dizemos que uma função f é convexa quando para quaisquer reais $x_1 < x_2$, tem-se que:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2), \text{ em que } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Observação 6. *Se para quaisquer reais $x_1 < x_2$ vale $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ou $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, com $0 < \alpha < 1$, dizemos que f é estritamente convexa. (para mais informações ver [2])*

Exemplo 13. $f(x) = x^2 + 3x$

Sejam os reais $x_1 < x_2$, temos:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{x_1^2+3x_1+x_2^2+3x_2}{2} \\
&= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - 3\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \\
&= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \\
&= \frac{-(x_1^2+x_2^2)^2+2x_1x_2}{4} = -\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1x_2}{4} \\
&= -\frac{(x_1-x_2)^2}{4} < 0,
\end{aligned}$$

pois $(x_1-x_2)^2 > 0$.
Logo, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, o quer dizer que f é estritamente convexa.

Exemplo 14. $f(x) = |x|$

Sejam os reais x_1, x_2 e α com $0 < \alpha < 1$. Da desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = |\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2| &\leqslant |\alpha x_1| + |(1-\alpha)x_2| \\
&\leqslant |\alpha||x_1| + |(1-\alpha)||x_2| \\
&\leqslant \alpha|x_1| + (1-\alpha)|x_2| \\
&\leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2),
\end{aligned}$$

pois α e $1-\alpha$ são positivos.

Portanto, $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, o que quer dizer que f é convexa.

Proposição 8. *Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa é contínua.*

Demonstração. Ver cap. 4 de [2]. □

Proposição 9. *Toda função* f *duas vezes derivável em* $\mathbb{R}$ *com* $f'' \geqslant 0$ *para todo* x *real é convexa (* $f'' > 0$ *para todo* x *real é estritamente convexa). Além, disso se* f *possui um ponto de mínimo local e é estritamente convexa, então o esse ponto é mínimo global e único.*

Demonstração. A Proposição 5 garante que se f é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ com $f'' \geqslant 0$ para todo x real, tem-se:

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Sendo assim, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, fazendo $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, temos:

$$f(x_1) \geqslant f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) + f'\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right)\left(x_1 - [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]\right)$$

e

$$f(x_2) \geqslant f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) + f'\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right)\left(x_2 - [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]\right)$$

Multiplicando a primeira equação por α e segunda por $1 - \alpha$, e somando membro a membro as desigualdades acima, temos:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \forall\ \alpha\ \in [0,1].$$

Logo, f é convexa.

Agora, se $f'' > 0$ para todo x real a Proposição 6 garante que todos as desigualdades anteriores relativo a prova desta proposição são estritas para quaisquer $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, f é estritamente convexa.

Além disso, se x_0 é ponto de mínimo local de f temos que $f'(x_0) = 0$. Sendo f é estritamente convexa, temos que:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \forall x \neq x_0,$$

daí

$$f(x) > f(x_0)\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ com } x \neq x_0.$$

Portanto, x_0 é ponto de mínimo global de f e é único. □

Exemplo 15. *A função* $f(x) = ax + b$ *é convexa, pois* $f''(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 16. *Considere a função* $f(x) = e^x + e^{-x}$. *Temos que:*

$$f'(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^x + e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f *é estritamente convexa.*

Proposição 10. *Considere três números reais* $x_1 < x_2 < x_3$ *e uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa. É verdade que:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Demonstração. Sabe-se que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3$, com $0 < \alpha < 1$. Logo, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, α e $1-\alpha$ são todos positivos.

Sendo f convexa temos:

$$\begin{aligned}
f(x_2) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3) &\leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_3) \\
f(x_2) - \alpha f(x_2) &\leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_3) - \alpha f(x_2) \\
(1-\alpha)f(x_2) &\leqslant \alpha[f(x_1) - f(x_2)] + (1-\alpha)f(x_3) \\
(1-\alpha)f(x_2) - (1-\alpha)f(x_3) &\leqslant \alpha[f(x_1) - f(x_2)] \\
\alpha[f(x_2) - f(x_1)] &\leqslant (1-\alpha)[f(x_3) - f(x_2)]. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 \\
x_2 - \alpha x_2 &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 - \alpha x_2 \\
(1-\alpha)x_2 &= \alpha(x_1 - x_2) + (1-\alpha)x_3 \\
(1-\alpha)x_2 - (1-\alpha)x_3 &= \alpha(x_1 - x_2) \\
(1-\alpha)(x_2 - x_3) &= \alpha(x_1 - x_2) \\
(1-\alpha)(x_3 - x_2) &= \alpha(x_2 - x_1) > 0 \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Como (1.13) é positiva, os inversos de seus termos também o são, logo, multiplicando membro a membro (1.12) por seus inversos a desigualdade será preservada, isto é:

$$\frac{\alpha[f(x_2) - f(x_1)]}{\alpha(x_2 - x_1)} \leqslant \frac{(1-\alpha)[f(x_3) - f(x_2)]}{(1-\alpha)(x_3 - x_2)} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

□

Proposição 11. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é convexa e derivável, então* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função não-decrescente.*

Demonstração. Tomemos, em $\mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Pela completeza de $\mathbb{R}$, existe $h > 0$ tal que $x_1 < x_1 + h < x_2 < x_2 + h$. Como f é convexa, pela Proposição 10 temos:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1 + h)}{x_2 - (x_1 + h)} \leqslant \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}.$$

Passando o limite, com h tendendo a zero, em ambos os membros dessa última desigualdade, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} \Rightarrow f'(x_1) \leqslant f'(x_2).$$

Portanto, f' é não-decrescente. $\square$

Capítulo 2

Método do Ponto Proximal

Neste capítulo, apresentaremos a resolução do Problema de Minimização convexa usando o Método do Ponto Proximal (semelhante ao que está em [1]). Analisaremos o comportamento dos termos da sequência, e de suas imagens, que conduz à uma solução (caso exista) e ao valor de mínimo(ao ínfimo) da função f, repectivamente.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Considere o seguinte problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ f(x^*) \leqslant f(x) \text{ para todo e } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

Denotaremos por S^* o correspondente conjunto solução do problema (2.1). É claro que o conjunto S^* pode ser vazio, e até mesmo que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty.$$

Assim, para garantir a boa definição do método que definiremos adiante, necessitamos das seguintes hipóteses:

(H_1) $f''(x) \geqslant 0$ (f é duas vezes derivável e convexa);

(H_2) $f(x) \geqslant L$ (f é limitada inferiormente).

As funções citadas nos exemplos a seguir satisfazem as hipóteses (H_1) e (H_2).

Exemplo 17. $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{2}$

Exemplo 18. $f(x) = 2\cosh x = e^x + e^{-x}$

Exemplo 19. $f(x) = e^{-x}$.

Sendo que os dois primeiros exemplos possuem ponto de mínimo e o terceiro possui somente o ínfimo.

2.1 Algoritmo do Ponto Proximal

Agora descreveremos o nosso algoritmo para resolver o problema (2.1). Para isto, vamos considerar a seguinte condição:

(C) a sequência de números reais positivos λ_k satisfaz $\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_2$ para reais positivos λ_1 e λ_2.

Algoritmo:

Passo 1 (Inicialização). Escolha $x^0 \in \mathbb{R}$ *e* λ_k *satisfazendo a condição* (C)

Passo 2 (Iteração). Dado x^{k-1}, *encontre* $x^k \in \mathbb{R}$ *minimizador da função:*

$$f_k(x) := f(x) + \lambda_k(x - x^{k-1})^2. \tag{2.2}$$

Passo 3 (Critério de parada) . Se $x^k = x^{k-1}$, *pare. Caso contrário, faça* $k := k+1$ *e retorne para o Passo 2.*

Observação 7. *Para mais informações consulte [1] e [8].*

2.1.1 Boa Definição

Mostraremos através do resultado seguinte a boa definição do método.

Teorema 14. *Seja* f *uma função real tal que valem* (H_1) *e* (H_2). *Então, para todo* k *natural existe um único* x^k *satisfazendo (2.2).*

Demonstração. Para provarmos a existência e a unicidade precisamos mostrar que f_k é contínua, coerciva e estritamente convexa (isto é, $f_k''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

De fato: Por (H_1), f é derivável, o que quer dizer que f é contínua (Teorema 10) e $g(x) = \lambda_k(x - x^{k-1})^2$ é contínua, logo a função f_k é contínua (Proposição 3).

Por (H_2), temos que $f(x) \geqslant L$, para algum L e todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\lim_{|k|\to\infty} g(x) = \lim_{|k|\to\infty} \lambda_k(x - x^{k-1})^2 = +\infty \text{ para } \lambda_k > 0.$$

Sendo assim, como $f_k(x) = f(x) + g(x) \geqslant L + g(x)$, temos que

$$\lim_{|k|\to\infty} f_k(x) = \lim_{|k|\to\infty} (f(x) + g(x)) \geqslant L + \infty = +\infty,$$

o que implica que $\lim\limits_{|k|\to\infty} f_k(x) = +\infty$, ou seja, f_k é coerciva (Definição 13).

Logo, pela Proposição 7, para todo natural k existe um mínimo global x^k de f_k.

Por outro lado, $f_k''(x) = f''(x) + g''(x) > 0$, pois $f''(x) \geqslant 0$ (por H_1) e $g''(x) = 2\lambda_k > 0$. Logo, pela Proposição 6, tem-se que:

$$f_k(x) > f_k(x^k) + f_k'(x^k)(x - x^k), \;\; \forall x \neq x^k.$$

Como x^k é mínimo de f_k segue, do Teorema 11, que $f_k'(x^k) = 0$, o que significa dizer que:

$$f_k(x) > f_k(x^k) + f_k'(x^k)(x - x^k) = f_k(x^k) \Rightarrow f_k(x) > f_k(x^k), \;\; \forall x \neq x^k.$$

Portanto, para todo k natural existe um único x^k satisfazendo (2.2). □

Assim, segue-se do Teorema 11 que para todo k, temos:

$$f_k'(x^k) = 0 \Rightarrow f'(x^k) = 2\lambda_k(x^{k-1} - x^k). \tag{2.3}$$

Observação 8. *(Critério de parada) Se $x^k = x^{k-1}$, então x^k é uma solução de (2.1). Pois nesse caso, $f'(x^k) = 0$, e como $f'' \geqslant 0$, segue que, $f(x) \geqslant f(x^k)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

2.1.2 Análise de convergência

Vamos supor a partir de agora que $x^k \neq x^{k-1}$ para todo k natural. pois do contrário, x^k é o minimizador de f, de acordo com a Observação 8.

Proposição 12. *i) A sequência $\{f(x^k)\}$ é estritamente decrescente e convergente.*

ii) $\lim_{k\to\infty} \left|x^k - x^{k-1}\right| = 0$.

iii) $\lim_{k\to\infty} f'(x^k) = 0$.

Demonstração. i) Sendo x^k minimizador de f_k, segue-se que:

$$f(x^k) + \lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 \leqslant f(x) + \lambda_k(x - x^{k-1})^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $x = x^{k-1}$, temos:

$$f(x^k) + \lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 \leqslant f(x^{k-1}) + \lambda_k(x^{k-1} - x^{k-1})^2 = f(x^{k-1}) \Rightarrow f(x^k) < f(x^{k-1}),$$

já que $\lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 > 0$ pois $x^k \neq x^{k-1}$ e $\lambda_k > 0$.

Sendo f limitada inferiormente, segue do Teorema 4 que a sequência $\{f(x^k)\}$ é convergente.

ii) Como acabamos de ver acima, para $x = x^{k-1}$, temos que:

$$f(x^k) + \lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 \leqslant f(x^{k-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 \leqslant f(x^{k-1}) - f(x^k) \Rightarrow 0 < \sqrt{\lambda_k(x^k - x^{k-1})^2} \leqslant \sqrt{f(x^{k-1}) - f(x^k)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\lambda_k}\left|x^k - x^{k-1}\right| \leqslant \sqrt{f(x^{k-1}) - f(x^k)}. \tag{2.4}$$

Vejamos o que acontece quando passamos o limite com k tendendo a mais infinito na desigualdade (2.4):

Uma vez que $\{f(x^{k-1})\}$ e $\{f(x^k)\}$ convergem ambas para o mesmo limite, pois $\{f(x^{k-1})\}$ é uma subsequência da sequência convergente $\{f(x^k)\}$ e existem reais positivos λ_1 e λ_2 tais que $\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_2$, temos que:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{f(x^{k-1}) - f(x^k)} = 0,$$

o que implica, da desigualdade (2.4), em $\lim_{k\to\infty} \left|x^k - x^{k-1}\right| = 0$.

iii) De (2.3) segue que $f'(x^k) = 2\lambda_k(x^k - x^{k-1})$. Passando limite com k tendendo a mais infinito na igualdade acima temos, pelo item ii), que:

$$\lim_{k\to\infty} f'(x^k) = \lim_{k\to\infty} 2\lambda_k(x^k - x^{k-1}) = 0.$$

□

Para análise de convergência vamos considerar o seguinte conjunto:

$$U := \{\bar{x} \in \mathbb{R} |\, f(\bar{x}) < f(x^k)\, \text{para todo}\, k\}.$$

Proposição 13. *Se* $S^* \neq \varnothing$*, então* $U \neq \varnothing$*.*

Demonstração. Se $S^* \neq \varnothing$, então existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) \leqslant f(x)$, para todo x em $\mathbb{R}$. Vamos supor que $x^* \in \{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, logo $x^* = x^k$ para algum k natural. Como a sequência $\{f(x^k)\}$ é estritamente decrescente e o conjunto $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é infinito, temos que:

$$f(x^{k+1}) < f(x^*) = f(x^k) < f(x^{k-1}) \Rightarrow f(x^{k+1}) < f(x^*).$$

O qual gera um absurdo. Logo $x^* \notin \{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. O que significa dizer que $f(x^*) < f(x^k)$, para todo natural k, isto é, $x^* \in U$, o que implica em $U \neq \varnothing$. □

Proposição 14. *Suponha que* $U \neq \varnothing$*. Seja* $\bar{x} \in U$*, então para todo* k *natural temos que:*

$$(\bar{x} - x^k)^2 < (\bar{x} - x^{k-1})^2 - (x^k - x^{k-1})^2. \tag{2.5}$$

Demonstração.

$$(\bar{x}-x^{k-1})^2 = \left[(\bar{x}-x^k)+(x^k-x^{k-1})\right]^2 = (\bar{x}-x^k)^2+2(\bar{x}-x^k)(x^k-x^{k-1})+(x^k-x^{k-1})^2.$$

Assim, de (2.3):

$$(\bar{x}-x^{k-1})^2 = (\bar{x}-x^k)^2+(\lambda_k)^{-1}f'(x^k)(x^k-\bar{x})+(x^k-x^{k-1})^2.$$

Fixemos k natural, vamos inicialmente considerar $\bar{x} < x^k$.

Sabemos, por hipótese, que $f(\bar{x}) < f(x^k)$ para todo k. Além disso, pelo Teorema 13 (Teorema do Valor Médio), existe $c \in (\bar{x}, x^k)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x^k)-f(\bar{x})}{x^k-\bar{x}}.$$

Observe que $f(x^k) - f(\bar{x}) > 0$, pois $f(\bar{x}) < f(x^k)$ e, além disso, como $f'' > 0$, segue, pelo Corolário 1, que f' é crescente, ou seja:

$$c \in (\bar{x}, x^k) \Rightarrow \bar{x} < c < x^k \Rightarrow f'(c) < f'(x^k).$$

Logo:

$$0 < f(x^k) - f(\bar{x}) = f'(c)(x^k-\bar{x}) < f'(x^k)(x^k-\bar{x}) \Rightarrow f'(x^k)(x^k-\bar{x}) > 0.$$

E como $\lambda_k > 0$, temos $(\lambda_k)^{-1}f'(x^k)(x^k-\bar{x}) > 0$.

Se retirarmos a parcela $(\lambda_k)^{-1}f'(x^k)(x^k-\bar{x}) > 0$ da igualdade:

$$(\bar{x}-x^{k-1})^2 = (\bar{x}-x^k)^2+(\lambda_k)^{-1}f'(x^k)(x^k-\bar{x})+(x^k-x^{k-1})^2,$$

segue imediatamente que $(\bar{x}-x^{k-1})^2 > (\bar{x}-x^k)^2+(x^k-x^{k-1})^2$, isto é:

$$(\bar{x}-x^k)^2 < (\bar{x}-x^{k-1})^2-(x^k-x^{k-1})^2.$$

Agora vamos supor que $x^k < \bar{x}$.

De maneira análoga à demonstração anterior, existe $c \in (x^k, \bar{x})$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\bar{x})-f(x^k)}{\bar{x}-x^k}.$$

Temos que $f(\bar{x}) - f(x^k) < 0$, pois $f(\bar{x}) < f(x^k)$ e sendo f' decrescente, segue que, $c \in (x^k, \bar{x}) \Rightarrow x^k < c < \bar{x}$ o que implica em $f'(c) < f'(x^k)$. Logo,

$$0 > f(\bar{x}) - f(x^k) = f'(c)(\bar{x}-x^k) > f'(x^k)(\bar{x}-x^k) \Rightarrow f'(x^k)(\bar{x}-x^k) < 0.$$

Multiplicando esta última desigualdade por menos um temos que

$$f'(x^k)(x^k - \bar{x}) > 0 \ \text{ e } \ (\lambda_k)^{-1} f'(x^k)(x^k - \bar{x}) > 0.$$

Sendo assim, da mesma forma anterior, concluímos que:

$$(\bar{x} - x^k)^2 < (\bar{x} - x^{k-1})^2 - (x^k - x^{k-1})^2.$$

□

Observação 9. *Uma consequência imediata da Proposição 14 é que* $|\bar{x} - x^k| < |\bar{x} - x^{k-1}|$*, para todo natural* k*, pois por hipótese* $x^k \neq x^{k-1}$*, o que quer dizer* $(x^k - x^{k-1})^2 > 0$.

Teorema 15. *Se* $U \neq \varnothing$*, então para todo* $\bar{x} \in U$*, tem-se:*

i) A sequência $\{|(\bar{x} - x^k)|\}$ *é convergente. Consequentemente* $\{x^k\}$ *é limitada;*

ii) A sequência $\{x^k\}$ *converge para uma solução do (2.1).*

Demonstração. i) Da Observação 9, segue-se que: $|\bar{x} - x^k| < |\bar{x} - x^{k-1}| < ... < |\bar{x} - x^0|$.

O que significa dizer que a sequência $\{|(\bar{x} - x^k)|\}$ é monótona e limitada superiormente. Assim, pelo Teoream 4, $\{|(\bar{x} - x^k)|\}$ converge para algum limite L.

Por outro lado, de $|\bar{x} - x^k| < |\bar{x} - x^0|$, segue que $\{x^k\}$ limitada . Portanto a sequência $\{|(\bar{x} - x^k)|\}$ é convergente e a sequência $\{x^k\}$ é limitada.

ii) Seja $D = \{x^k; k \in \mathbb{N}\}$. Como k tende a mais infinito e a sequência $\{x^k\}$ é limitada, o conjunto infinito D é limitado. Sendo assim, pelo Teorema 7, D possui ao menos um ponto de acumulação.

Seja x^* um ponto de acumulação de D. Pelo Teorema 6 existe uma subsequência $\{x^{k_j}\}$ de $\{x^k\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x^{k_j} = x^* \quad \text{e} \quad x^{k_j} \in D - \{x^*\}.$$

Assim,

$$\lim_{k_j\to+\infty} f(x^{k_j}) = \lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*) < f(x^k).$$

Logo, $x^* \in U$. Como $\{|(x^* - x^k)|\}$ é convergente e $\{|(x^* - x_j^k)|\}$ converge a zero. Portanto, pela Proposição 2, $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Além disso, pela Proposição 12, temos que:

$$f'(x^*) = \lim_{k\to\infty} f'(x^k) = \lim_{k\to\infty} \lambda_k (x^{k-1} - x^k) = 0.$$

Portanto, x^* é solução do (2.1). □

Teorema 16. *Se* $U = \varnothing$. *Então:*

i) A sequência $\{x^k\}$ *é ilimitada;*

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Demonstração. i) Suponha por absurdo que $\{x^k\}$ é limitada. Seja x^* um ponto de acumulação de $\{x^k\}$, assim existe $\{x^{k_j}\}$ tal que $\lim\limits_{j\to+\infty} f(x^{k_j}) = f(x^*)$. Assim, $\lim\limits_{j\to+\infty} f(x^{k_j}) = \lim\limits_{j\to+\infty} f(x^k) = f(x^*) < f(x^k)$. Conclui-se que $x^* \in U$. Logo, temos uma contradição.

ii) Suponha por absurdo que $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) < \alpha < \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)$. Como o conjunto imagem de f está contido em $\mathbb{R}$, então, pela definição de ínfimo (ver definição em [4]) existe x^* tal que: $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) < f(x^*) < \alpha < \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) \leqslant f(x^k)$, isto é, $f(x^*)\alpha < f(x^k)$. Logo $x^* \in U$. Logo, temos uma contradição. □

2.1.3 Análise das ordenações dos termos da sequência

Agora vamos analisar as possíveis ordenações dos termos de $\{x^k\}$. De (2.2) segue que: $x^k = x^{k-1} \pm \sqrt{\dfrac{f_k(x^k) - f(x^k)}{\lambda_k}}$.

Sabemos que, para todo natural k, temos: $x^k \neq x^{k-1}$, $\{f(x^k)\}$ é estritamente decrescente e $f_k(x^k) - f(x^k) = \lambda_k(x^k - x^{k-1})^2 > 0$, com $\lambda_k > 0$.

Sejam $D_1 = \{x^k;\ x^k = x^{k-1} + \Delta_k\}$ e $D_2 = \{x^k;\ x^k = x^{k-1} - \Delta_k\}$ onde

$$\Delta_k = \sqrt{\frac{f_k(x^k) - f(x^k)}{\lambda_k}} > 0.$$

Observe que $D_1 \cup D_2 = D$ e $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, pois se fosse $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, haveria: $x^k \in D_1 \cap D_2$, isto é, $x^k = x^{k-1} + \Delta_k$ e $x^k = x^{k-1} - \Delta_k$, e acaso isso ocorresse, somando estas últimas igualdades, teríamos $x^k = x^{k-1}$. O que, por hipótese, é um absurdo. Logo, há três possibilidades:

1ª possibilidade: $D_1 \neq \varnothing$ e $D_2 = \varnothing \Rightarrow D_1 = D$ e $x^k = x^{k-1} + \Delta_k$.

Nesse caso, temos que $x^k > x^{k-1}$, ou seja:

$$x^0 < x^1 < x^2 < x^3 < ... < x^k < ... < x^*$$

e

$$f(x^0) > f(x^1) > f(x^2) > f(x^3) > ... > f(x^k) > ... > f(x^*).$$

2ª possibilidade: $D_1 = \varnothing$ e $D_2 \neq \varnothing \Rightarrow D_2 = D$ e $x^k = x^{k-1} - \Delta_k$.

Nesse caso, temos que $x^k < x^{k-1}$, ou seja:

$$x^* < ... < x^k < ... < x^3 < x^2 < x^1 < x^0$$

e

$$f(x^*) < ... < f(x^k) < ... < f(x^3) < f(x^2) < f(x^1) < f(x^0).$$

3ª possibilidade: $D_1 \neq \varnothing$ e $D_2 \neq \varnothing$. Assim, $x^k = x^{k-1} + \Delta_k$ ou $x^k = x^{k-1} - \Delta_k$.

Sabemos que os elementos de D_1 estão dispostos em ordem crescente sendo $x^i < x^j$, para quaisquer naturais i e j com $i < j$. Já em D_2, os elementos estão em ordem decrescente, isto é, $x^i > x^j$ quando $i < j$. Se D_1 é finito, então D_2 é infinito. Logo, os elementos de D_2 formam uma subsequência decrescente (x^{k_j}) de (x^k). E sendo assim, pelo Teorema 2, esta subsequência converge para x^*. Logo:

$$x^* < ... < x^{k_j} < ... < x^{k_3} < x^{k_2} < x^{k_1} < x^{k_0}$$

e

$$f(x^{k_0}) > f(x^{k_1}) > f(x^{k_2}) > f(x^{k_3}) > ... > f(x^{k_j}) > ...f(x^*).$$

Porém, se D_2 é finito, então D_1 é infinito. Logo, os elementos de D_1 formam uma subsequência crescente (x^{k_j}) de (x^k). E sendo assim, pelo Teorema 2, esta subsequência converge para x^*. Logo:

$$x^{n_0} < x^{n_1} < x^{n_2} < x^{n_3} < ... < x^{n_j} < ... < x^*$$

e

$$f(x^{n_0}) > f(x^{n_1}) > f(x^{n_2}) > f(x^{n_3}) > ... > f(x^{n_j}) > ...f(x^*).$$

Quando ambos são infinitos, ocorre simultaneamente (x^{n_j}) de (x^{k_j}). Logo:

$$x^{n_0} < x^{n_1} < x^{n_2} < x^{n_3} < ... < x^{n_j} < ... < x^* < ... < x^{k_j} < ... < x^{k_2} < x^{k_1} < x^{k_0}$$

e

$$f(x^*) < ... < f(x^k) < ... < f(x^3) < f(x^2) < f(x^1) < f(x^0).$$

Observação 10. *Isto nos faz lembrar um pêndulo contraindo gradativamente o seu período ao tempo em que empreende um desacelerado movimento de descida e indo lentamente estacionar em seu ponto mais baixo.*

Capítulo 3

Considerações Finais

A eficácia do Método de Minimização Proximal está comprovada na resolução do Problema de Minimização Convexa contida neste trabalho. Porém, a forma implícita como o Método gera o Algoritmo o torna não muito prático, uma vez que é necessário o uso de recursos computacionais avançados para resover:

$$f'(x^k) = 2\lambda_k(x^{k-1} - x^k), \tag{3.1}$$

No entanto, o Método de Newton, que é explicíto, é bastante eficaz na resolução de (3.1), ou seje, é possivel construir uma sequência cujo limite é uma boa aproximação da solução do problema (2.1).

Referências Bibliográficas

[1] Amaral, José Henrique Salazar. Bento, Glaydston de Carvalho, *O Método de Ponto Proximal para Otimização Convexa*, Goiás-GO. Instituto de matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II.

[2] Amorin, Ronan Gomes, *Introdução à Análise Convexa: Conjuntos e Funções Convexas*, Goiás-GO, 2013.

[3] Guidorizzi, Hamilton, *Curso de Cálculo*, Volume 1, Quinta Edição, Rio de Janeiro, RJ, Editora LTC.

[4] Lima, Elon Lages *Análise Real*, Volume 1, Funções de uma variável, Décima Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[5] Malta, Iaci. Pesco, Sinesio. Lopes, Hélio, *Cálculo a uma variável*, Volume 1, Uma Introdução ao Cálculo, Editora PUC-Rio/Loyola, 2002.

[6] Malta, Iaci. Pesco, Sinesio. Lopes, Hélio, *Cálculo a uma variável*, Volume 2, Editora PUC-Rio, 2002.

[7] Martinet, B. *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives.* (French)Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle 4 , Ser. R-3, 154-158, (1970).

[8] Iusem, A. N. *Métodos proximais em otimização.* 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1995.

[9] Izmailov, A., Solodov, M. - *M. Otimização*, Volume 1, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[10] Rockafellar, R. T.*Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. 14, 877-898, (1976).

[11] Thomas, G. B. - *Cálculo*, Volume 1, São Paulo: Addison Wesley, 2002.

[12] Thomas, G. B. - *Cálculo*, Volume 2, São Paulo: Addison Wesley, 2002.

[13] Murolo, Afrânio Carlos. Bonetto, Giácomo Augusto, Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade ? São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.