UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Franklin Emanuel Barros Soukeff

Jogo Mega-Duque: uma proposta para o ensino de probabilidade

Ilha Solteira
2014

Franklin Emanuel Barros Soukeff

Jogo Mega-Duque: uma proposta para o ensino de probabilidade

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Orientador: Prof. Dr. José Marcos Lopes.

Ilha Solteira
2014

Soukeff, Franklin Emanuel Barros.
Jogo Mega-Duque : uma proposta para o ensino de probabilidade / Franklin Emanuel Barros Soukeff. -- São José do Rio Preto, 2014 78 f. : il., tabs.
Orientador: José Marcos Lopes
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
1. Matemática – Estudo e ensino. 2 . Probabilidades - Problemas, exercícios, etc. 3. Jogos de probabilidades (Matemática) 4. Solução de problemas. I. Lopes, José Marcos. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 519.21(076.1)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Franklin Emanuel Barros Soukeff

Jogo Mega-Duque: uma proposta para o ensino de probabilidade

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Marcos Lopes
UNESP – Ilha Solteira
Orientador

Profª. Drª. Mara Lúcia Martins Lopes
UNESP – Ilha Solteira

Profª. Drª. Andréia Cristina Ribeiro
UFMS – Paranaíba

Ilha Solteira
2014

DEDICATÓRIA

DEDICO

À minha querida esposa, Dayane Rodrigues da Silva Soukeff, que me apoiou durante esse período de estudos. Também a minha família, especialmente, minha mãe, Brígida, meu pai, Carlos Antonio, meus irmãos, Warton e Péricles. Não posso esquecer de meus avós Jorge e Dalva, e Alzira, que me incentivaram o tempo todo, sabendo entender minha ausência relativa em algumas ocasiões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço muitíssimo a minha esposa pela compreensão, ajuda em momentos difíceis, e por ter doado de bom grado o tempo dos sábados que deveriam ser dedicados a ela.

Muito obrigado a minha querida família, sempre presente em minha vida.

Agradeço aos meus cunhados Leiliane e Luiz pelo apoio em tantas ocasiões. Também agradeço à minha sogra Marta pela presença em minha defesa.

Meus agradecimentos também ao meu orientador, Dr. José Marcos Lopes, pela paciência, apoio e confiança. Também aos integrantes da banca por suas boas contribuições.

Não posso esquecer de companheiros que estiveram conosco nestes dois anos e meio juntos estudando, aprendendo e colaborando uns com os outros.

Aos amigos Jaqueline e Cristian Ranucci Amaral, que me emprestaram o jogo de bingo para aplicação na sala de aula. Ao amigo Ernandes, pelas sugestões referentes à apresentação da defesa. Aos colegas de sala Márcio Alves Proni, José Luiz, Valmir e Marli. Não posso esquecer da mãe da Marli, dona Rosária que, com bondade, me hospedou em sua casa durante o curso de verão.

Agradeço a meu Deus, Jeová, que sempre ouviu minhas orações nas ocasiões em que mais precisei de paz mental para estudar e ser bem sucedido nas difíceis provas pelas quais passei.

RESUMO

O presente trabalho tem em seu bojo uma proposta de ensino para o conteúdo de Probabilidade no Ensino Médio. Trata-se de um jogo educativo e motivador, chamado Mega-Duque. O jogo Mega-Duque segue os moldes do Jogo Mega-Sena, porém em escala menor, para que o educando possa ter uma compreensão mais concreta dos conceitos envolvidos em Probabilidade. O jogo Mega-Duque não só ilustra os conceitos de evento, espaço amostral, mas também motiva o aprendizado matemático, promove a socialização dos alunos, e ajuda no desenvolvimento crítico do futuro cidadão quanto aos jogos de azar. Neste sentido, o jogo segue as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. O trabalho também faz um apanhado histórico dos grandes matemáticos que ajudaram a sistematizar a teoria de Probabilidades. Há ainda uma descrição da aplicação em sala de aula da proposta de ensino. Este trabalho também procurou fazer uma interação entre a metodologia de Resolução de Problemas com o uso de jogos na educação matemática.

Palavras-chave: Probabilidade. Resolução de problemas. Jogos. Ensino de matemática.

ABSTRACT

This work is in its core a teaching proposal for the content of Probability in High School. This is an educational and motivating game called Mega-Duque. The game is patterned Mega-Duque Game Mega-Sena, but on a smaller scale, so that the student may have a more concrete understanding of the concepts involved in Probability. The Mega-Duque game not only illustrates these concepts with quality event, sample space, but also motivates the mathematical learning, promotes the socialization of students, help on critical development of the future citizens regarding gambling. In this sense, the game follows the guidelines contained in the National Curriculum Guidelines. The paper also makes a historical overview of the greatest mathematicians who helped systematize the theory of Probabilities. There is even a description of the application in the classroom of the proposal of teaching. Our study also sought to make a connection between the methodologies of problem solving with the use of games in mathematics education.

Keywords: *Probability. Problem solving. Games. Teaching of mathematics.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho ora apresentado trata-se de uma proposta para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. Diante da dificuldade muitas vezes observada em se ensinar o conteúdo de probabilidade de uma maneira cativante, interessante e contextualizada com a realidade à nossa volta, tivemos a iniciativa de elaborar uma proposta que contemplasse não só uma sugestão para se vencer os obstáculos acima mencionados, mas que também se baseasse nas orientações registradas nos documentos oficiais e nos trabalhos publicados por especialistas no ensino de Matemática.

Nesse trabalho apresentamos um jogo pedagógico inédito, voltado para o ensino de Probabilidade, o qual denominamos de Mega-Duque. O jogo segue os moldes do famoso jogo de azar promovido pela Caixa Econômica Federal, a Mega-Sena. Porém, foi elaborado em escala menor, com menos dezenas a serem sorteadas. Isso foi pensado de maneira proposital para que os alunos pudessem ter uma visão global das possibilidades reais de se ganhar ou perder no jogo. No presente trabalho, como se poderá verificar, é feito uma comparação entre os dois jogos, destacando-se as suas semelhanças e diferenças.

O jogo Mega-Duque foi elaborado de uma maneira que estivesse em consonância com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). De fato, o Jogo Mega-Duque tem como propósito motivar o aluno a participar das atividades em sala de aula. Além disso, o jogo Mega-Duque tem como diferencial o fato de ilustrar os conceitos mais importantes da Probabilidade Laplaciana, como Evento e Espaço Amostral.

Antes de detalharmos os aspectos importantes do Jogo Mega-Duque, nosso trabalho buscou fazer, No Capítulo 2, uma contextualização histórica sobre Probabilidade. Nosso objetivo não era esgotar o assunto, mas dar uma breve descrição dos principais matemáticos envolvidos no desenvolvimento e sistematização desse ramo da Matemática. Como se poderá notar neste capítulo, grandes matemáticos, como Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Euler, Poincaré e, principalmente, Laplace, deram grandes contribuições para a teoria da probabilidade.

Também no Capítulo 2, fizemos uma sistematização do que conhecemos atualmente como Probabilidade Laplaciana, com suas definições e conceitos. Além destes, procuramos demonstrar as principais propriedades, como a Probabilidade da União de Dois Eventos, Evento Complementar e Probabilidades Condicionais. As propriedades também foram ilustradas com exemplos simples, para que a compreensão das mesmas pudesse ser feita de maneira mais eficiente.

Para finalizar o Capítulo 2, procuramos descrever o Jogo Mega-Sena. O jogo foi apresentado com suas regras e características, conforme normatizado pela Caixa Econômica Federal. Também destacamos os valores envolvidos no investimento para se participar do jogo Mega-Sena, em contrapartida com as probabilidades reais de se ganhar. Este é um aspecto especialmente interessante, pois as chances de se ganhar são muito pequenas, de modo que um dos objetivos do jogo Mega-Duque é trazer aos alunos a necessidade de se ter uma visão crítica dos jogos de azar, tendo uma boa noção das reais chances que eles têm de perder dinheiro nestes jogos.

No Capítulo 3, procuramos associar a estratégia de Resolução de Problemas ao uso de Jogos no ensino-aprendizagem de Matemática. Atualmente a Resolução de Problemas é um dos pilares para o ensino de Matemática e são destacados nos PCN como uma estratégia motivadora, que permite ao aluno se ver no papel de protagonista de seu saber. Através dessa metodologia o aluno vivencia o papel similar ao de um pesquisador na busca da solução de um problema de pesquisa.

Muitos teóricos da Educação Matemática destacam que ensinar Matemática pode ser feito de maneira melhor quando se usa a estratégia de Resolução de Problemas. Mas como será percebido pelo leitor, no decorrer da leitura de nosso trabalho, os problemas devem ser usados de maneira adequada, ou seja, como ponto de partida para o ensino, ao invés de apenas aplicação de teoria dada anteriormente pelo professor. Deve ser assim para que os resultados esperados possam ser, de fato, alcançados.

No terceiro capítulo também fazemos uma breve explanação sobre o uso de jogos no ensino de Matemática. Destacamos as várias classificações de jogos e os que podem ser usados num contexto escolar, principalmente na

Educação Matemática. No final deste capítulo, é possível entender como associar a estratégia de Resolução de Problemas e o uso de Jogos no ensino-aprendizagem de Matemática.

No Capítulo 4, Descrição das Atividades em Sala de Aula, procuramos experimentar a proposta que elaboramos. Não queríamos apenas criar uma proposta inovadora para se ensinar probabilidade e deixá-la como sugestões a outros professores de Matemática. Neste trabalho, relatamos como foi posto em prática o Jogo Mega-Duque e os resultados que percebemos da atividade. Com isso, buscamos analisar se o jogo seria condizente com a realidade da sala de aula.

Inicialmente, procuramos identificar e justificar a escolha da Escola e da turma em que aplicamos nossa proposta. Após termos permissão da direção da escola para aplicarmos nossa atividade, tivemos nosso primeiro contato com os alunos da sala escolhida. Depois nos apresentamos e explicamos o objetivo de nossa atividade. Em seguida precisávamos entender o nível de conhecimento da turma a respeito de probabilidade. Por isso elaboramos um questionário, com questões de múltipla escolha e fizemos a aplicação. De posse do resultado do questionário, pudemos delinear os próximos passos.

Na próxima atividade, levamos o globo, utilizado no sorteio das bolas numeradas, para apresentarmos o Jogo Mega-Duque, suas características e regras, para então jogarmos. Durante o jogo, os alunos tiveram uma boa participação, porém ainda não tinham noção plena do que se tratava.

Na seção seguinte, levamos aos alunos os problemas relacionados ao Jogo. Pedimos que procurassem pensar nos problemas e associá-los ao Jogo. Nos subitens do Capítulo 4, é descrito como foi elaborada, para a sala escolhida, a sistematização dos conceitos de probabilidade a partir do Jogo Mega-Duque, fazendo uma associação com o jogo da Mega-Sena.

Nas Considerações Finais, no Capítulo 5, procuramos elencar os pontos altos do Jogo Mega-Duque, as vantagens de se usar esta proposta, bem como as variações didáticas que o professor pode adotar conforme a sala em que estiver atuando.

Também foi possível, com o desenvolvimento da proposta, perceber pontos que podem ser evitados ou aperfeiçoados e, portanto, procuramos dar sugestões pertinentes sobre estes nas considerações finais deste trabalho.

2 BREVE HISTÓRIA DA PROBABILIDADE, CONCEPÇÃO LAPLACIANA DE PROBABILIDADE E O JOGO DA MEGA-SENA

2.1 BREVE HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

A história da probabilidade tem em seu rol o nome de célebres matemáticos, como Jerônimo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Abraham De Moivre (1667-1754), Jacques Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1710-1761), Henri Poincaré (1854-1912). Mas, “a teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático” (BOYER, 2010, p. 340). Diante de tantos personagens importantes, tentemos estabelecer uma sequência cronológica para a história da probabilidade.

Foi Jerônimo Cardano quem escreveu a primeira obra de que se tem conhecimento sobre o estudo de probabilidades. Trata-se do livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro de Jogos de Azar). Como o próprio nome indica, refere-se mais a instruções sobre jogos, para que o jogador pudesse se proteger de adversários dispostos a trapacear. Porém, aparece já nele uma definição para probabilidade como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de casos possíveis em um evento.

Em 1654, foi proposto a Pascal, por Chevalier de Méré, jogador e amigo de Pascal, uma questão envolvendo jogos de dados. “Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades” (Ibidem, p. 250). Pascal fizera ligação entre o estudo das probabilidades e o triângulo aritmético, mais tarde conhecido com triângulo de Pascal.

Apesar das correspondências de Pascal e Fermat serem consideradas a origem do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade, a primeira publicação em teoria de probabilidade foi um pequeno livro intitulado *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados), de Christiaan Huygens (1629-1695).

Como podemos perceber, os primeiros interesses em probabilidade se deram em função do gosto dos humanos por jogos de azar. Sobre isso, Morgado et al. (2004) argumenta:

> Em verdade, a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes. Levando em conta o fascínio que os jogos de azar sempre exerceram sobre os homens, estimulando-os a achar maneiras seguras de ganhar, não é de espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas ou de dados tenham atraído a atenção de pessoas com mentes mais especulativas (MORGADO et al., 2004, p. 6).

Entretanto, posteriormente outros interesses motivaram o estudo das probabilidades. No ano de 1713, oito anos depois da morte de Jacques Bernoulli, foi publicada sua importante obra *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar). Segundo Boyer (2010, p. 288), “este é o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades”. Este tratado de Bernoulli é dividido em quatro partes. A primeira parte é uma reedição do livro de Huygens completado com vários comentários. A segunda parte contém uma teoria geral de combinações e permutações. Já a terceira e a quarta partes são dedicadas principalmente a problemas que ilustram a teoria das probabilidades. O célebre Teorema de Bernoulli, também chamado de Lei dos Grandes Números encontra-se na quarta parte desta obra.

> Este teorema foi a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Ele afirma, por exemplo, que se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande número de experimentos eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. O teorema permite também deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, sabendo como se comportaram em um grande número de experimentos. A Lei do Grandes Números deu origem a discussões conceituais ou filosóficas sobre o conceito de probabilidade (MORGADO et al., 2004, p. 8).

Em 1718, Abraham De Moivre publicou a obra *Doutrina do Acaso*. Trata-se de um trabalho que contém “numerosas questões sobre dados, o problema de pontos (com chances diferentes de ganhar), tirar bolas de cores diferentes de um saco, e outros jogos” (BOYER, 2010, p. 293). É interessante que De Moivre fazia o caminho inverso do que se faz atualmente, ou seja, estudar a Análise Combinatória para então partir para a Probabilidade. Por meio do estudo de probabilidades é que ele calculava o número total de arranjos possíveis de uma determinada situação, ou evento.

No século XVIII, os estudos das probabilidades passaram a ter uma motivação social. Situações como taxas de mortalidade, expectativa de vida, prêmios de seguros, estatísticas sobre impostos, doenças, loterias, motivaram um aprofundamento no estudo das probabilidades por parte de matemáticos como Euler, Daniel e Nicolaus Bernoulli. Especialmente significativo foi a contribuição de Euler com notações para o cálculo de probabilidades.

Também nas ciências naturais, na segunda metade do século XVIII, o papel da probabilidade passou a ter destaque. Foi em 1777 que o naturalista francês Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707-1788), propôs o conhecido “problema da agulha de Buffon”. O problema consiste em determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento ***l*** atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de distância ***d***, com ***d*** > ***l***, quando lançada aleatoriamente. Buffon deu a resposta corretamente, a saber, $2l/\pi d$, e a usou para calcular experimentalmente o valor de π.

Como mencionado acima, Laplace foi o matemático que mais contribuiu para a teoria das probabilidades. Segundo Boyer (2010):

> A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados ele incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités* de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis, e seu *Essai philosophique des probabilités* de 1814 é uma exposição introdutória para o leitor comum (BOYER, 2010, p. 340).

É possível perceber em Théorie analytique des probabilités “a mão de um mestre da análise que conhece seu cálculo avançado” (ibidem, p. 340). Neste trabalho, Laplace fez novas contribuições, reuniu, sistematizou e ampliou resultados produzidos por seus antecessores. Os fundamentos da teoria da probabilidade foram organizados por Laplace de uma maneira clássica, que se manteve praticamente inalterada.

Nos séculos XIX e XX, temos outros fatores e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Por exemplo, Poincaré é considerado um expoente no estudo das probabilidades. Ele é descrito como um matemático que se sentia à vontade em todos os ramos da Matemática. Entretanto, assim como Laplace, Poincaré escreveu extensamente sobre probabilidades. “Em certos aspectos sua obra é apenas uma continuação natural da de Laplace” (BOYER, 2010, p. 419).

Por volta dessa época, a Matemática como um todo foi invadida pela Teoria dos Conjuntos. Sobre isso, “poucos ramos (da matemática) foram tão completamente influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades” (Ibidem, p. 436). Outro destaque que se teve na história da Matemática, em especial em probabilidade, na virada do século XIX para o XX, foi a importante palestra de Hilbert (1862-1943), em Paris, 1900. Intitulada “Problemas Matemáticos”, consistiu numa exposição de 23 problemas que deveriam contribuir com o avanço da Matemática. Nesta palestra Hilbert conclama os matemáticos de então para construírem toda a Matemática sobre sistemas axiomáticos, incluindo a teoria das probabilidades. Muitos matemáticos se envolveram nesse projeto.

> Na Rússia, por exemplo, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-1987) fez importantes progressos em processos de Markov (1931) e satisfez em partes o sexto projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades, através do uso da teoria da medida de Lebesgue (Ibidem, p. 436).

Após esta breve descrição história sobre probabilidade, faremos agora uma sistematização do que atualmente nos referimos na Matemática como Probabilidade Laplaciana.

2.2 CONCEPÇÃO LAPLACIANA DE PROBABILIDADE

A Teoria da Probabilidade é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa modelos que podem ser usados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Experimentos *aleatórios* são aqueles que, repetidos sob mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes. Por outro lado, podemos também dizer que experimentos que, repetidos em condições semelhantes, produzem resultados essencialmente idênticos são chamados de experimentos *determinísticos*.

Especialmente os experimentos aleatórios são de interesse no estudo das probabilidades. Isso se dá visto que, no cotidiano, são os que mais estão presentes na rotina da vida. Questões como as a seguir são comuns em nosso dia-a-dia: choverá amanhã? Quantos ganhadores haverá na Mega-Sena? Quem tem maior chance de vencer as eleições? Portanto, como comentado acima, a Teoria da Probabilidade tem papel importante neste contexto. Diante disso, estabeleçamos alguns conceitos importantes, bem como exemplos de fenômenos aleatórios.

2.2.1 ESPAÇO AMOSTRAL E PROBABILIDADE DE LAPLACE

Segundo Morgado et al. (2004), a definição de probabilidade como quociente do número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis” foi a primeira definição formal de probabilidade, aparecendo na obra já citada *Liber de Ludo Aleae*, de Jerônimo Cardano. Para entendermos os motivos dessa definição já adotada desde os primórdios da teoria da probabilidade, vamos, inicialmente, analisar um exemplo.

Considere o seguinte experimento aleatório: jogue um dado e observe o número que sai na face de cima dele.

A primeira tarefa é descrever todos os possíveis resultados do experimento e calcular, ou contar, a sua quantidade. No experimento aleatório em questão, as possibilidades seriam sair, na face de cima do dado, os números *um, dois, três, quatro, cinco ou seis*. Logo, podemos concluir que seriam seis casos possíveis. Dito de outra maneira: explicitar qual é o *conjunto* de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos pertencentes a ele. Este conjunto é chamado de *Espaço Amostral* e é representado por S. O número de elementos pertencentes a S é representado por n(S). Assim, pode-se escrever:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$n(S) = 6$$

Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados *eventos.* Os subconjuntos com apenas um elemento são chamados de *eventos elementares.* Por exemplo, o subconjunto A = {2, 4, 6} é o evento que podemos chamar de *Números pares no dado.* O subconjunto B = {2, 3, 5} é o evento que podemos chamar de *Números primos no dado*. O subconjunto C = {1} é o evento elementar que podemos chamar de *Números menores que dois no dado*. Evidentemente, há vários eventos possíveis somente neste experimento aleatório. Cada subconjunto de S é um evento possível de existir e, portanto, sua respectiva probabilidade poderá ser calculada, como veremos a partir de agora.

Passemos agora para uma segunda tarefa: a de calcular a probabilidade de um evento acontecer. Consideremos o caso do evento A = {2, 4, 6}, do exemplo anterior. Intuitivamente, podemos deduzir que se repetirmos o experimento de jogar o dado um grande número de vezes e anotarmos o resultado da face de cima, obteremos um número par em aproximadamente a metade das vezes, ou seja, o evento A vai ocorrer mais ou menos a metade das vezes. O que está por trás dessa intuição é o seguinte: cada uma das faces do dado tem a mesma área, ou seja, tem as mesmas chances de serem contempladas. Dito de outra maneira, os eventos elementares são todos igualmente prováveis. De modo que podemos dizer que o dado é honesto. O número de elementos de A é justamente a metade dos elementos de S, ou seja, n(A) = 3, enquanto n(S) = 6.

Sendo assim, podemos definir a probabilidade de acontecer o evento A, denotado por P(A), da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

Laplace referia-se aos elementos de A como casos favoráveis. Já os elementos pertencentes ao espaço amostral S eram chamados de casos possíveis.

Façamos, então, uma generalização, a fim de formalizarmos a definição de probabilidade. Suponhamos que os experimentos aleatórios tenham as seguintes características:

i) Há um número finito ***n*** de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral S, com S ≠ ø.
ii) Os Eventos elementares são igualmente prováveis.
iii) Todo evento A é uma união de ***m*** eventos elementares onde ***m ≤ n.***

Define-se, então (MORGADO, et al., 2004):

$$\text{Probabilidade de A} = P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

Consequências imediatas desta definição são as seguintes propriedades:

i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
ii) $P(S) = 1$;
iii) $P(ø) = 0$ (pois $n(ø) = 0$).

Estas propriedades podem ser demonstradas da seguinte forma:

Para iii) e (ii), respectivamente, temos:

$n(ø) = 0 \Rightarrow P(ø) = \dfrac{n(ø)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} \Rightarrow P(ø) = 0$. Agora, como $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow P(S) = 1$.

Demostremos, agora, i):

$$ø \subset A \subset S \Rightarrow n(ø) \leq n(A) \leq n(S) \Rightarrow \frac{n(ø)}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Analisemos, agora, alguns exemplos:

Exemplo 1: Na experiência de tirar uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual a probabilidade de, se retirarmos uma carta ao acaso, a carta escolhida ser de *ouros*? E de ser de *damas*?

Solução: No baralho há 52 cartas diferentes com iguais chances de serem sorteadas. Logo, o espaço amostral S é composto de 52 cartas e podemos escrever que n(S) = 52. O primeiro evento, que podemos chamar de A, é sair carta de ouros. Há no baralho 13 cartas de ouros, ou seja, n(A) = 13. Portanto, temos: P(A) = n(A)/n(S) = 13/52 = 1/4.

Já no evento sair carta de damas, que chamaremos de B, temos uma dama de paus, uma de ouro, uma de espadas e uma de copas. Logo, temos quatro damas no baralho, isto é, n(B) = 4. Portanto, teremos P(B) = n(B)/n(S) = 4/52 = 1/13.

Exemplo 2: Jogando duas moedas simultaneamente, qual a probabilidade de sair as duas com faces iguais voltadas para cima?

Solução: Convencionando representar cara por K e coroa por C, nas moedas 1 e 2, podemos notar que as possibilidades de resultados são: S = {(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)}. Logo, há quatro possibilidades, ou seja, n(S) = 4. Vamos definir o evento E como sendo aquele onde as duas faces são iguais. Como há dois casos em que as faces viradas para cima se repetem, temos n(E) = 2. Portanto, P(E) = n(E)/n(S) = 2/4 = 1/2.

Exemplo 3: Para uma festa foram separadas noventa empadas de camarão, das quais, a pedido da organizadora, trinta deveriam ser mais apimentadas e separadas das demais. Por pressa e confusão de última hora, todas foram colocadas, ao acaso, numa mesma travessa para serem servidas. Qual a probabilidade de a primeira pessoa a se servir pegar uma empada mais apimentada?

Solução: Como há no total 90 empadas, este é o nosso espaço amostral; logo temos n(S) = 90. Nosso evento A é sair uma empada mais apimentada. Há 30 dessas empadas. Assim, n(A) = 30. Portanto, P(A) = 30/90 = 1/3.

2.2.2 PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Se A e B forem dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, então a probabilidade da União de dois eventos A e B será dada por:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}.$$

Portanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Se $A \cap B = ø$, os eventos A e B são chamados *mutuamente exclusivos*, e teremos $P(A \cap B) = 0$, o que implica que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 4: Retirando-se, ao acaso, uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual é a probabilidade de se obter uma dama ou uma carta de copas?

Solução: Na experiência de retirar uma carta de um baralho comum de 52 cartas, o espaço amostral S é o conjunto de todas as 52 cartas e, portanto, n(S) = 52. Se A for o evento “dama” e B o evento “carta de copas”, então n(A) = 4 e n(B) = 13. Dentre as quatro damas e as treze cartas de copas, existe uma carta em comum: a dama de copas. Assim sendo, $n(A \cap B) = 1$. Portanto, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13.$$

2.2.3 COMPLEMENTAR DE UM EVENTO

Seja S um espaço amostral e A e B eventos de S. Se $A \cup B = S$ e $A \cap B = ø$, então A é o Complementar de B em relação a S, e B é o complementar de A em relação a S. Podemos denotar da seguinte maneira: $A = B^c$ e $B = A^c$.

Com essas hipóteses temos a seguinte propriedade:

$P(A^c) = 1 – P(A)$

Demonstração:

$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 – P(A).$

2.2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considere o experimento que consiste em jogar um dado honesto de seis faces. Temos que o espaço amostral S é dado por S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sejam os eventos A = {2, 4, 6} e B = {1, 2, 4}. Temos que P(B) = 3/6 = 1/2. Esta é a probabilidade de B *a priori*, quer dizer, antes que o experimento se realize. Suponhamos que, uma vez realizado o experimento, alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, ou seja, que o evento A ocorreu. Nossa opinião sobre a ocorrência de B se modifica com esta informação, pois somente poderá ocorrer B se o resultado do experimento tiver sido 2 ou 4. Temos assim uma probabilidade *a posteriori*, ou como vamos chamá-la, a partir de agora, *probabilidade condicional de B dado A*. No caso em questão, nosso novo espaço amostral passa a ser formado pelos elementos de A, que podemos chamar de S_1 = {2, 4, 6}. Logo, a probabilidade de B aumenta, sendo dois casos favoráveis em três, ou seja, 2/3. De fato, esse resultado se consegue fazendo: $n(A \cap B) / n(A)$. Assim, define-se, (MORGADO, et al., 2004):

Dado dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número $P(A \cap B) / P(A)$, que representaremos por P(B/A). Simbolicamente,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

No exemplo acima, teríamos:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 5: Em um grupo de pessoas, dentre os homens, 92 falam inglês, 35 falam alemão, e 47 falam francês. Dentre as mulheres, 101 falam inglês, 33 falam alemão, e 52 falam francês. Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo-se que esta pessoa fala francês, qual a probabilidade de que seja homem?

Solução: Seja A o evento que ocorre se a pessoa escolhida fala francês e B se a pessoa escolhida for homem. Temos:

$$P(A) = (47 + 52) / 360 = 99 / 360,$$

$$P(A \cap B) = 47 / 360, \text{ e, portanto,}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{47}{360}}{\frac{99}{360}} = \frac{47}{99}.$$

2.3 O JOGO DA MEGA-SENA

Em 1996, a Caixa Econômica Federal lançou o jogo de loteria denominado Mega-Sena. Sendo a maior modalidade lotérica do país, o jogo consiste em se tentar acertar, independentemente da ordem, seis dezenas (sena) num total de 60 dezenas que são postas num globo e sorteadas. Tendo acertado as seis dezenas sorteadas, o apostador ganhará o prêmio máximo. Contudo, é possível ganhar prêmios de menor valor, por se acertar cinco (quina) ou quatro (quadra) dezenas a serem sorteadas.

Os sorteios são realizados duas vezes por semana, às quartas-feiras e aos sábados, às 20h, pelo horário de Brasília. A aposta mínima, de seis números, custa R$ 2,50. O apostador pode não só fazer a aposta mínima, mas marcar até, no máximo, 15 dezenas. Evidentemente, quanto maior a quantidade de números marcados no volante, maiores serão as chances de ganhar e, portanto, a aposta terá um custo proporcionalmente maior, chegando até a R$ 12.512,50. A figura 1 fornece os valores e as probabilidades de acerto para cada aposta.

Figura 1 – Probabilidade de acerto na Mega-Sena

PROBABILIDADE DE ACERTO NA MEGA-SENA

Quantidade Nº Jogados	Valor de Aposta	Probabilidade de acerto (1 em...)		
		Sena	Quina	Quadra
6	2,50	50.063.860	154.518	2.332
7	17,50	7.151.980	44.981	1.038
8	70,00	1.787.995	17.192	539
9	210,00	595.998	7.791	312
10	525,00	238.399	3.973	195
11	1.155,00	108.363	2.211	129
12	2.310,00	54.182	1.317	90
13	4.290,00	29.175	828	65
14	7.507,50	16.671	544	48
15	12.512,50	10.003	370	37

Fonte: BRASIL (2014b)

Como funciona o pagamento dos prêmios e a arrecadação? O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena);
- 19% entre os acertadores de 5 números (Quina);
- 19% entre os acertadores de 4 números (Quadra);
- 22% ficam acumulados e distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5;
- 5% ficam acumulados para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final 0 ou 5.

Se não houver acertador em nenhuma faixa, o valor acumulará para o concurso seguinte, na respectiva faixa de premiação. Um ponto importante é que os prêmios prescrevem 90 dias após a data dos sorteios, sendo o apostador o responsável pela conferência do resultado de seu bilhete. Passado esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES – Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

A Mega-Sena é o objeto de desejo do apostador brasileiro. Em especial, há pouco tempo criada, em 2008, o Concurso Especial de Fim de Ano, com nome comercial Mega da Virada, é o principal sorteio da Mega-Sena. Consiste num sorteio especial de fim de ano, durante os meses de novembro e dezembro, com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade, utilizando-se de volantes específicos.

Na Mega da Virada, a distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios é feita da seguinte forma:

- 62% - primeira faixa - seis acertos (sena);
- 19% - segunda faixa - cinco acertos (quina);
- 19% - terceira faixa - quatro acertos (quadra).

Neste sorteio especial, não há acúmulo do prêmio da mesma maneira que os demais concursos do ano. Se não houver um apostador que acerte as seis dezenas sorteadas, o prêmio será rateado entre os acertadores de cinco dezenas (quina). Persistindo a não contemplação do prêmio, este será dividido entre os acertadores de quatro dezenas (quadra). Não havendo ganhador, o prêmio é acumulado para o concurso seguinte, nas respectivas faixas.

Uma questão intrigante a respeito dos concursos da Mega-Sena são as estatísticas sobre dezenas mais sorteadas e as menos sorteadas. Apesar de serem equiprováveis as chances de sorteio de cada dezena, há um histórico sobre as dezenas que foram até hoje mais contempladas.

De acordo com Brasil (2014a) e Brasil (2014c), as dez dezenas mais sorteadas são, respectivamente, 05, 04, 53, 54, 51, 42, 17, 33, 24, 13. Já as menos contempladas até hoje são, respectivamente, 26, 22, 21, 09, 39, 55, 45, 48, 25, 15.

3 O USO DE JOGOS E DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

3.1 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nos últimos anos, a resolução de problemas vem sendo discutida por especialistas e pesquisadores da Educação Matemática como um caminho útil ao ensino. Isso é bastante pertinente, visto que a própria Matemática se desenvolveu em função, muitas vezes, de problemas envolvendo situações reais do cotidiano das pessoas, como negócios, divisão e medição de terras. Por exemplo, Roque e Carvalho (2012) destacam que:

> Quando a Matemática começou a ser praticada no Egito antigo, ela também estava associada a necessidades administrativas. A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração da sociedade (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 7).

Por outro lado, também, o desenvolvimento de outras ciências correlatas, como Física, Meteorologia, Economia, Química, dentre outras, exigiam uma sistematização para o correto entendimento e esclarecimento de seus fenômenos. Para se ilustrar isso, podemos recorrer à origem e desenvolvimento do que conhecemos atualmente como Cálculo na Matemática. Este remonta ao tempo de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716). Sobre essa época, é destacado que:

> O principal objeto de estudo, no século XVII, era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, muitas vezes de origem física, como o de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva. Ou seja, problemas de natureza geométrica ou cinemática tratadas com as ferramentas do cálculo. Tratava-se, portanto, de entrar em um novo domínio, o da relação entre quantidades (Ibidem, p. 246). – (grifo nosso).

Além disso, problemas peculiares à própria Matemática são um catalisador no desenvolvimento desta ciência em evolução. De fato, na busca de uma solução para um dado problema, pôde-se descobrir e desenvolver novos conhecimentos. Como exemplo, podemos citar um conceito atualmente aceito, mas que já foi considerado um empecilho à elegância matemática. Era um problema sem solução dentro da Matemática. Trata-se da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$. Roque e Carvalho (2012) nos lembram que:

> Apesar de toleradas devido a sua utilidade prática na realização de cálculos, as quantidades negativas e imaginárias não eram consideradas rigorosas. A partir do final do século XVIII e início do século XIX, começaram a ser sugeridas diferentes representações geométricas para os números negativos e complexos, tentando garantir sua aceitação no universo dos números (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 320).

Coube aos matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Caspar Wessel (1745-1818) e Jean-Robert Argand (1768-1822) dar uma solução e uma sustentação teórica para os Números Complexos.

Confirmando que essas três fontes de bons problemas têm contribuído para o desenvolvimento da Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN afirmam que:

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL,1997, p. 42).

Mesmo entendendo que os problemas tiveram papel importante no desenvolvimento da Matemática, podemos dizer que, no ensino de matemática, é recente o interesse por usá-los de uma maneira que estimule um interesse investigativo por parte dos alunos. Em geral, os problemas são empregados em salas de aula de Matemática apenas como forma de aplicação de conhecimentos transferidos pelo professor, para que os alunos treinem o que foi explanado. Com isso, passa-se a impressão de que a Matemática está pronta e acabada, perdendo-se o sentido da investigação.

Confirmando isso, Onuchic (1999, p. 199) atesta que “até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica”. A mesma autora ainda comenta que “a importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção” (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Por esta metodologia ainda ser relativamente recente e não totalmente implementada, para a grande maioria dos alunos, resolver problemas consiste em simplesmente fazer contas com os valores que são dados em um enunciado, ou apenas aplicar algum algoritmo visto em sala de aula. Este modo de ensinar é muitas vezes classificado como ensino tradicional, no qual o professor assume um papel de transmissor de conhecimentos, apenas apresentando definições, fórmulas e propriedades e, posteriormente, resolvendo exercícios utilizando esses resultados. Deste ponto de vista, o aluno é um mero receptor de informações prontas e acabadas, não tendo participação ativa no processo ensino-aprendizagem. Obviamente, é difícil encontrar alguma motivação na realização de uma atividade como a citada há pouco.

Sobre isso, D’Ambrósio (1993) argumenta:

> O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância (D’AMBRÓSIO, 1993, p. 36).

A Metodologia de Resolução de Problemas não tem esse foco. Os PCN elegem cinco princípios que norteiam o ensino de Matemática através dessa metodologia, a saber:

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.
>
> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.
>
> Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações,

> rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática.
>
> O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações.
>
> A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL,1997, p. 43-44).

Existem várias definições para problema matemático. Para os PCN,

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la (Ibidem, p. 44).

Para Hiebert et al. (1997), citado por Lopes (2011, p. 38), “um problema é definido como sendo qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não possuem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que exista um método específico para se chegar a solução correta”.

Uma outra definição para problema matemático encontramos em Onuchic e Allevato (2004, p. 221). Para os autores, problema “é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”.

Portanto, percebemos que diversos pesquisadores concordam que a resolução de problemas funciona como *start* para o ensino de matemática. Como citado anteriormente pelos PCN, é um “ponto de partida” para a atividade matemática. Evidentemente, para que o problema possa assumir esse papel, o problema matemático deve interessar ao aluno. Deve ser um problema também para o aluno, ou seja, deve motivá-lo a se envolver na situação em busca de uma solução.

Por exemplo, Bittar e Freitas (2005, p. 23) argumentam que, para que uma situação seja considerada como um problema é necessário que algumas condições particulares sejam satisfeitas. “Uma dessas condições é que quem esteja diante dela sinta vontade de encontrar uma solução e não tenha, de imediato, caminhos óbvios a seguir, isto é, tenha necessidade de parar um pouco para pensar e 'buscar' ideias".

Nesse mesmo contexto, Van de Walle (2009) destaca que um problema voltado para a aprendizagem matemática possui três características:

> *O problema deve começar onde os alunos estão*. O projeto ou seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes. Eles devem ter as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante. Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido.
>
> *O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender*. Ao resolver o problema ou fazer a atividade, os alunos devem estar preocupados principalmente em dar significado à matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias. Embora seja aceitável e até mesmo desejável ter contextos para os problemas que os tornem interessantes, esses aspectos não devem ser o foco da atividade. Nem as atividades "não-matemáticas" (cortar e colar, colorir gráficos, etc.) devem distrair os estudantes da matemática envolvida.
>
> *A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos*. Os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e por que elas estão corretas também é deles. A justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções (VAN DE WALLE, 2009, p. 57-58).

Mas como conseguir isso, ou seja, um bom problema matemático que contemple essas características? A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brosseau vem estabelecer um norte para esta questão. Segundo Passos e Teixeira (2011),

> A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), é um modelo teórico apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática, e na prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino da matemática nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que o permita apropriar-se de novos saberes (PASSOS; TEIXEIRA, 2011, p. 6).

Pensando no ensino de Matemática através da metodologia de resolução de problemas, vemos uma interação muito grande desta com a Teoria das Situações Didáticas. Por exemplo, Brousseau define:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] . O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (FREITAS, 2008, p. 80).

Dessa definição, podemos inferir que há três elementos fundamentais no processo ensino-aprendizagem: o professor, o aluno e o conhecimento matemático.

Vemos aqui que o professor tem o papel central de buscar situações problemas que possibilitem aos alunos uma simulação, por assim dizer, de uma investigação, ou pesquisa matemática. Como comentado anteriormente, muitos dos conhecimentos matemáticos partiram de problemas que exigiam respostas. A investigação em busca de soluções a essas questões fez evoluir a ciência Matemática.

Segundo Freitas (2002, p. 68), o “professor deve efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema”. Isso significa que o professor transfere o desafio intelectual da tarefa de resolução do problema para o aluno, que o assume como seu problema particular.

Dessa maneira, quando é posta diante do aluno situações em que ele possa usar seus conhecimentos adquiridos na sua experiência de vida, bem como na sua vida estudantil, para iniciar a análise de um problema envolvente, mas que, ao mesmo tempo, não tenha uma resposta óbvia, o aluno se vê na condição de protagonista de seu saber.

Nesse ponto, quando o aluno assume esse papel, tem-se o cumprimento do dito “Contrato Didático”, ou seja, “uma série de acordos bilaterais (entre professor e aluno), alguns explícitos e outros não, com os quais estão pautadas as relações que vigoram na relação didática entre professor e aluno” (PASSOS; TEIXEIRA, 2011, p. 7).

Entendido o papel importante que a metodologia de resolução de problemas tem dentro do ensino de matemática, verifiquemos como esta, associada aos jogos educativos, pode determinar uma boa parceria no processo ensino-aprendizagem.

3.2 O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Desde a infância, a atividade de brincar é inerente do ser humano. Mesmo com o passar dos anos, na adolescência, na vida adulta, bem como na dita "melhor idade", a diversão tem papel fundamental na vida das pessoas. E muitas dessas ocasiões são exploradas de forma coletiva, em grupo, o que proporciona maior prazer e felicidade aos envolvidos.

Muito dessas brincadeiras e diversões são exploradas das através de jogos. A atividade de jogar é tão comum e arraigada no nosso cotidiano, que poderíamos nos questionar quem de nós nunca participou de alguma atividade que envolvesse algum tipo de jogo.

Falando num contexto mais amplo sobre jogos, é possível identificar muitos tipos de jogos em nossa sociedade. Uma boa classificação para jogos é encontrada em Grando (1995). Segundo a autora, podemos classificá-los da seguinte forma:

> Jogos de azar – melhor seria se fossem chamados de "jogos de sorte". São aqueles que dependem apenas da "sorte" para se vencer o jogo. O jogador não tem como interferir ou alterar na solução. Ele depende das probabilidades para vencer. Exemplos deste tipo de jogos são: lançamentos de dados, par ou ímpar, cassinos, loterias...
>
> Jogos quebra-cabeça – são aqueles em que o jogador, na maioria das vezes, joga sozinho e sua solução ainda é desconhecida para ele. Exemplo deste tipo de jogos são: quebra-cabeças, enigmas, charadas, paradoxos, falácias, probleminhas e Torre de Hanói.
>
> Jogos de estratégia (e/ou jogos de construção de conceitos) – são aqueles que dependem única e exclusivamente do jogador para vencer. O fator "sorte" ou "aleatoriedade" não está presente. O jogador deve elaborar uma estratégia, que não dependa de sorte, para tentar vencer o jogo. Exemplos deste tipo de jogos são: xadrez, damas, kalah.
>
> Jogos de fixação de conceitos – são aqueles cujo objetivo está expresso em seu próprio nome: "fixar conceitos". São os mais comuns, muito utilizados nas escolas que propõe o uso de jogos no ensino ou "aplicar conceitos". Apresentam seu valor pedagógico na medida em que substituem, muitas vezes, as listas e mais listas de exercícios aplicadas pelos professores para que os alunos assimilem os conceitos trabalhados. É um jogo utilizado após o conceito.
>
> Jogos pedagógicos – são aqueles que possuem seu valor pedagógico, ou seja, que podem ser utilizados durante o processo ensino-aprendizagem. Na verdade, eles englobam todos os outros tipos: os de azar, quebra-cabeça, estratégia, fixação de conceitos e os computacionais; pois todos estes têm papel fundamental no ensino.

> Jogos computacionais – são os mais modernos e de maior interesse das crianças e jovens na atualidade. São aqueles que são projetados e executados no ambiente computacional (GRANDO, 1995, p. 52-53).

Segundo a mesma autora, esta classificação “leva em conta a função que o jogo pode assumir num contexto social e didático-metodológico” (Ibidem, p. 52). Isso significa que, ao jogarmos um dominó, um truco, um futebol, fazermos uma cruzadinha, resolvermos uma paciência, ou um passatempo, de alguma forma estamos jogando. É claro que, na maioria das vezes, estamos apenas fazendo o jogo pelo jogo.

Diante da classificação feita outrora, podemos perceber que os jogos fazem parte de nossa vida cotidiana, pois estamos a todo momento envolvidos em algum tipo de situação que se encaixa nas descrições acima. Evidentemente, na vida comum, o jogo tem o simples papel da diversão, prazer e descontração.

Focalizando, agora, a influência que os jogos têm, em especial, sobre as crianças, podemos notar que é grande o número de benefícios que os jogos, quando usados de maneira adequada no processo ensino-aprendizagem, trazem ao desenvolvimento intelectual, emocional e social delas.

Confirmando a tese de que os jogos beneficiam os educandos, os PCN elencam vários benefícios que as atividades matemáticas envolvendo jogos trazem:

> Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações.
>
> Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações.
>
> A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico (BRASIL, 1997, p. 48-49).

Especialmente no ensino de matemática, os jogos podem ser uma ótima alternativa motivadora nas salas de aula. Isso se dá pelo fato de o jogo envolver os alunos como que numa competição, que naturalmente exige criatividade e bom raciocínio. Vários autores destacam estas características positivas dos jogos no ensino de matemática. Por exemplo, Grando (1995) afirma que:

> O jogo propicia um ambiente favorável à motivação da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio para o desenvolvimento do pensamento abstrato (GRANDO, 1995, p. 63).

A mesma autora ainda destaca seis possibilidades psicopedagógicas promovidas pelas atividades envolvendo jogos: a competição, a criatividade, o raciocínio, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, seriedade e jogo, e o aspecto sociocultural.

Podemos também atentar para o fato de que a atividade de jogar desempenha um papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo, e no aprimoramento da linguagem, da criatividade, da atenção e da concentração, essenciais para o aprendizado em Matemática. Durante a realização do jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo (BORIN, 2004).

Ainda para corroborar a boa influência dos jogos no ambiente de ensino-aprendizagem de matemática, Borin (2004) atesta:

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem (Ibidem, p.9).

Algo que tem sido citado com regularidade é a semelhança entre o trabalho investigativo do cientista, na busca da solução para seu problema de pesquisa, e a atividade de jogar. Especialmente sobre o matemático profissional, podemos dizer que se encontra como se estivesse em um jogo, por assim dizer, onde, dentro de regras preestabelecidas, tenta encontrar uma estratégia correta para conseguir sua vitória, ou seja, a solução de seu problema. E, assim como em um jogo, precisa muitas vezes perder, repensar as hipóteses e estratégias erradas para evitar erros subsequentes. Para Grando (1995, p. 38) “nota-se um elemento lúdico na atividade científica, onde há a possibilidade de se jogar o próprio método [...]. Assim, o cientista, enquanto produz ciência, é levado pelo impulso criador, [...] demonstrando o caráter lúdico em suas atividades”.

Ainda para expandir a mesma ideia, Borin (2004) complementa:

> De fato, quando analisamos o comportamento e a atividade mental de um jogador disposto a ganhar, verificamos que a postura é a mesma de um cientista em busca de solução para um problema. Os dois, inicialmente, partem para uma experimentação ou tentativa para conhecer o que defrontam, sem muita ordem ou direção. Após essa fase, como numa investigação científica, coletam os dados que podem influenciar ou alterar as várias situações e formulam hipóteses que precisarão ser testadas. Estabelecida uma hipótese, partem para a experimentação ou jogada e observam o que acontece. Se for necessário, reformulam as hipóteses feitas e realizam nova verificação. A cada tentativa usam as conclusões obtidas e os erros cometidos para orientar as novas hipóteses até certificarem-se da resposta precisa para o problema original, o que, no caso do jogo, significa ter uma boa estratégia para vencer (BORIN, 2004, p. 8-9).

Desse ponto de vista, podemos inferir que os jogos podem proporcionar ao aluno uma posição privilegiada no processo ensino-aprendizagem. De fato, ele tem condições para ser protagonista do seu saber, como se fosse um cientista tentando descobrir a solução de um problema ou, como mencionado anteriormente, um elemento ativo do seu processo de aprendizagem.

Portanto, podemos perceber que a escolha de um bom jogo, aliada à metodologia da resolução de problemas, explanada anteriormente, podem proporcionar ao aluno boas condições de se apropriar do conhecimento matemático de uma maneira interessante e motivadora.

3.3 O JOGO ASSOCIADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nas duas seções anteriores, discutimos separadamente a metodologia de resolução de problemas e a estratégia de uso de jogos no ensino-aprendizagem de matemática. Em cada caso, percebemos a boa influência que cada uma pode exercer na sala de aula. Mas seria possível fazer uma interação entre as duas?

Esse assunto é destacado por Borin (2004). Esta autora afirma que há uma contundente argumentação para a introdução de jogos nas aulas de matemática. Após destacar os objetivos do uso de jogos no ensino de matemática, como o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, indutivo, concentração, criatividade, ela relaciona o uso de jogos à metodologia de resolução de problemas:

> No entanto, para atingirmos esses objetivos, é necessário que os jogos sejam escolhidos e trabalhados com o intuito de fazer o aluno ultrapassar a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar pela diversão apenas. Por isso é essencial a escolha de uma metodologia de trabalho que permita a exploração do potencial dos jogos no desenvolvimento de todas as habilidades citadas. [...]. A metodologia escolhida foi a de Resolução de Problemas, por ser a mais adequada para desenvolver uma postura crítica ante qualquer situação que exija resposta (BORIN, 2004, p. 10).

Podemos, então, perceber que os jogos e a resolução de problemas não são antagônicos, mas podem ser abordadas de maneira associada no ensino de Matemática.

Evidentemente, quando o professor ministra suas aulas, seu desejo é que os alunos compreendam o assunto abordado. Portanto, fica claro que o professor tem uma intenção, um propósito. Sobre isso, Moura (1992) declara que

> Ao optar pelo jogo como estratégia de ensino, o professor o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. E ao fazer isto tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade. Dessa forma, o jogo escolhido deverá permitir o cumprimento deste objetivo. O jogo para ensinar Matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado (MOURA, 1992, p. 47).

Nessa intenção mencionada há pouco, não podemos esquecer de destacar que um dos pontos altos do ensino de matemática é ajudar os estudantes a resolver problemas. Os problemas podem potencializar a compreensão dos alunos em relação ao objetivo do jogo escolhido pelo professor. Onuchic e Allevato (2004, p. 223) relatam que a “Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o *dar sentido*”.

Isso significa que é possível elaborar problemas relacionados às situações do jogo escolhido. Assim, os problemas escolhidos pelo professor têm o papel de explorar as várias facetas do jogo, ajudando o estudante a compreender os objetivos didáticos por detrás do jogo, dando sentido ao aprendizado matemático. Problemas bem elaborados pelo professor, relacionados ao jogo, colocarão o estudante numa situação de investigação na busca de descobrir boas estratégias para ganhar o jogo. Na busca por estas boas estratégias, evidentemente, os alunos passarão por fases de tentativas e erros, validação e reprovação de hipóteses, até deduzirem o caminho certo. E, é neste sentido que o trabalho dos alunos vai se aproximar com o trabalho científico de um matemático.

Dessa maneira, os objetivos gerais da matemática para o ensino podem ser alcançados, como por exemplo:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.
>
> Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1997, p. 51).

Moura (1992) aponta, ainda, semelhanças entre o uso de jogos no ensino e a resolução de problemas. A primeira trata-se da questão de o aluno se envolver na situação. Isso quer dizer que o aluno tem que querer jogar, envolver-se no jogo. O mesmo se dá com o problema. O problema deve ser assumido também pelo estudante.

A segunda está relacionada ao desenvolvimento de ambos. Os problemas têm as fases: problema desencadeador, construção do conceito, aplicação do conceito. Já o jogo tem as fases: jogo desencadeador, reinvenção do jogo, descoberta de estruturas.

Portanto, percebemos que os jogos e a metodologia de resolução de problemas têm muito a contribuir para o ensino-aprendizagem da matemática. Mais que isso, podem ser usados de maneira a se interagirem. O jogo pode ser o estímulo para o a atividade. Mas não queremos fazer na sala de aula o jogo pelo jogo. O professor deve ter uma intenção com o jogo. Essa intenção pode ser explorada e exposta com a metodologia de resolução de problemas.

4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES EM SALA DE AULA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capitulo, vamos descrever como se deu a abordagem do conceito de probabilidade utilizando-se o Jogo Mega-Duque. Inicialmente, faremos uma breve descrição da escola e da turma em que aplicamos a nossa proposta. Posteriormente, esclareceremos como foram as atividades usadas em sala de aula.

4.2 A ESCOLA MANOEL GARCIA LEAL

A fim de testarmos nossa proposta de ensino sobre Probabilidade, escolhemos a Escola Estadual Manoel Garcia Leal.

A Escola Manoel Garcia Leal foi criada pelo Decreto nº 1300, publicado no Diário Oficial nº 17553 de 31/03/1978. Fica situada na Rua Onze de Outubro, 900, no Bairro Industrial de Lourdes, em Paranaíba-MS.

No dia 17 de setembro de 2013, protocolamos junto à secretaria da Escola um formulário de Requerimento solicitando permissão para a execução das atividades nas dependências da Escola. O requerimento foi assinado pela diretora Laura Maria Rodrigues Salgueiro, a qual se mostrou bastante receptiva à nossa proposta.

A escolha da escola em que decidimos fazer o uso do Jogo Mega-Duque se deu pelo fato de já ter familiaridade com o ambiente escolar, tendo em vista já ter atuado no corpo docente da referida escola, bem como pela necessidade de encontrar um professor que estivesse disposto a participar das atividades envolvidas no jogo Mega-Duque.

Neste sentido, o professor Márcio Alves Proni se mostrou bastante empolgado em participar de nossa atividade. Ele é docente do 3º Ano do Ensino

Médio, no período noturno da referida escola. O professor Márcio tem uma longa experiência na carreira docente, sendo Especialista no Ensino de Matemática.

Comentando as ideias que tínhamos sobre uma nova proposta de ensino-aprendizagem envolvendo um jogo para se ensinar os conceitos sobre probabilidade, o Professor Márcio nos fez o convite para a apresentação da atividade na sala do 3º ano em que ele ministra suas aulas semanais. Dessa conversa surgiu a turma alvo de nosso estudo.

4.3 A TURMA ESCOLHIDA

A ementa disciplinar de Matemática na Escola Manoel Garcia Leal, no período noturno, prevê, segundo o Professor Márcio, uma consideração sobre Análise Combinatória no 4º bimestre do 2º Ano do Ensino Médio.

Esses conceitos são apresentados, em geral, antes dos conteúdos sobre Probabilidade, visto que serão ferramentas importantes no estudo sobre o número de elementos pertencentes aos Espaços Amostrais em diversas situações no momento de se estudar Probabilidade.

Segundo a Ementa, somente no 3º Ano do Ensino Médio é que a turma terá condições de considerar o conteúdo sobre Probabilidade. É o caso da turma em que aplicamos a proposta de ensino do Jogo Mega-Duque.

A turma do 3º ano noturno do Ensino Médio da escola Manoel Garcia Leal, ano 2013, era constituída de 39 alunos matriculados. Porém, como há muita evasão escolar e uma baixa frequência às aulas, tivemos em média, uns 18 alunos em cada atividade. Muito dessa baixa frequência se deve ao fato de que o público da escola se constitui de alunos que necessitam trabalhar durante o dia e, muitas vezes, por saírem tarde do emprego ou mesmo pelo cansaço físico, não encontram a motivação necessária para frequentarem as aulas noturnas.

Mesmo sabendo que os alunos alvo de nossa proposta já tinham algum contato com o conceito sobre probabilidade, resolvemos aplicar o Jogo Mega-

Duque. Qual o motivo? Eles poderiam ter uma nova experiência de ensino, uma nova abordagem, usando a nova proposta do Jogo Mega-Duque.

Nesse sentido, somos resguardados pelos PCN, que atestam:

> Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle. No Jogo, mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se autoconhecimento – até onde se pode chegar – e o conhecimento dos outros – o que se pode esperar e em que circunstancias (BRASIL,1997, p. 48).

Ainda segundo os PCN, “a participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico” (Ibidem, p. 49).

Além disso, Borin (2004, p. 9) destaca que, com o uso de jogos em sala de aula, é notado uma melhora significativa na motivação dos alunos, pois apresentam, em geral, um melhor desempenho e atitudes mais positivas ao enfrentarem os processos de aprendizagem.

Diante do exposto, decidimos fazer a aplicação das atividades no 3º Ano do Ensino Médio, período Noturno, da Escola Manoel Garcia Leal.

4.4 QUESTIONÁRIO PARA INVESTIGAÇÃO

Inicialmente, decidimos por aplicar um questionário com a finalidade de investigar o nível de conhecimento acerca das noções e intuições que os alunos tinham sobre os principais conceitos de probabilidade.

O questionário contempla 10 (dez) questões de múltipla escolha. As questões foram elaboradas de forma a não mencionar, inicialmente, a palavra “probabilidade”. Preferimos, nesse momento, usar a palavra “chance”, pois é, usualmente mais comum no dia a dia.

O questionário, que pode ser visto no ANEXO A, contém perguntas que testam a intuição dos alunos, intuição muitas vezes usada cotidianamente. Por exemplo, a primeira pergunta diz: “No lançamento de uma moeda, qual face tem mais chance de sair virada para cima?” É muito comum se ver essa situação, por exemplo, no início das partidas de futebol, quando o árbitro da partida faz uso de uma moeda para que os capitães de cada time possam decidir a escolha do lado em que o time jogará o primeiro tempo, ou se preferirá ter a posse da bola inicialmente.

Há uma outra questão que procurou testar a intuição dos alunos numa situação em que a resolução matemática desafia o senso comum. A nona questão diz: “Em uma sala de aula com 40 alunos, as chances de que pelo menos dois alunos façam aniversário no mesmo dia são: ( ) grandes; ( ) pequenas; ( ) quase impossível; ( ) não sei”. Essa foi uma das questões mais comentadas pelos alunos.

O questionário foi aplicado no dia 19 de setembro de 2013, com uma participação de 18 alunos. Nesse dia, o professor Márcio me apresentou à turma e pudemos discutir com os alunos as ideias de nossa proposta, com seus objetivos e condições. A turma presente se mostrou receptiva às atividades.

Um relatório com os resultados da aplicação do questionário está presente no ANEXO B. Nele, podemos perceber que os alunos possuíam algumas boas ideias sobre probabilidade. Porém pudemos notar que havia campo para explorarmos, e isso seria feito usando o Jogo Mega-Duque.

Por exemplo, o conceito sobre Espaço Amostral e seus elementos foi um ponto em que entendemos que o Jogo ajudaria os alunos a ter uma melhor compreensão, pois o Jogo, como será apresentado posteriormente, possibilita ao aluno enxergar que o Espaço Amostral de um Evento é o conjunto formado por todos os casos possíveis deste Evento.

A partir do questionário, pudemos nortear nossa próxima atividade, a apresentação das regras do Jogo Mega-Duque e a dinâmica de cada etapa percorrida pelos jogadores.

4.5 O JOGO MEGA-DUQUE

Vamos agora fazer a descrição do Jogo Mega-Duque, suas regras e possibilidades. Posteriormente, descreveremos como se deu a aplicação do Jogo, as impressões que tivemos, bem como as reações dos alunos.

O Jogo Mega-Duque é um jogo de loteria nos moldes da Mega-Sena, porém, foi planejado em escala menor para dar aos alunos participantes uma noção mais substancial, mais concreta, de um sorteio de bolas numeradas e das possibilidades reais de ganho.

O Jogo consiste no sorteio de duas bolas dentre dez bolas idênticas, numeradas de 1 a 10, colocadas em um globo, que é girado para que todas as dez bolas tenham iguais chances de serem sorteadas.

Os alunos participantes recebem uma folha em que há dez tabelas iguais, todas numeradas de 1 a 10, na qual poderão fazer suas apostas. Nessa folha, há um resumo das regras que devem ser seguidas. Um modelo da atividade com as tabelas pode ser visto no ANEXO C.

Fraga (2013) apresenta uma proposta pedagógica para ser utilizada em sala de aula semelhante ao Jogo Mega-Duque. A proposta consiste num jogo de loteria onde de 10 números são sorteados três. O autor não testou sua proposta em sala de aula. Entendemos que para sistematizar os conceitos básicos de probabilidade o sorteio de duas bolas, como no jogo Mega-Duque, seja mais adequado. Temos neste caso um Espaço Amostral com um número menor de elementos.

Há vários tipos de jogos existentes no contexto social em que estamos inseridos. Muitos deles podem ser usados com o propósito de se ensinar Matemática. Nesse contexto, Grando (1995) aponta seis classificações para os jogos, conforme destacado anteriormente: Jogos de Azar, Jogos quebra-cabeça, Jogos de estratégia, Jogos de fixação de conceitos, Jogos Pedagógicos e Jogos computacionais.

O Jogo Mega-Duque pertence à categoria dos Jogos Pedagógicos, pois segundo Grando (1995)

> Estes jogos têm por objetivo o ensino-aprendizagem num contexto educacional. Neste rol, incluímos todos os outros tipos de jogos em seu valor pedagógico. Assim, podemos definir os jogos de azar pedagógicos; os jogos de estratégia pedagógicos; os computacionais pedagógicos, dentre outros (GRANDO, 1995, p. 57).

Antes de se iniciar os sorteios, os alunos são orientados sobre o número de tabelas. São dez tabelas, pois o jogo terá dez rodadas de sorteios, e essas são divididas em quatro níveis de dificuldade de ganho do prêmio. Solicitamos aos alunos que usassem, inicialmente, as cinco tabelas da primeira coluna, posteriormente, passando para as outras cinco tabelas da segunda coluna. Nas três *primeiras rodadas*, a orientação é que se deve marcar apenas *dois números* em cada uma das três primeiras tabelas, ou seja, T-1, T-2 e T-3, respectivamente. Isso significa que os jogadores concorrerão com apenas dois números em cada tabela e, assim, neste primeiro nível, os alunos teriam apenas uma aposta simples em cada tabela.

Depois, o jogo passa para o *segundo nível*, ou seja, nas tabelas quatro, cinco e seis, isto é, T-4, T-5 e T-6, nessa ordem, os jogadores poderão participar marcando *três números* em cada tabela. Daí, passando para o *terceiro nível*, nas tabelas sete e oito, ou seja, T-7 e T-8, os alunos jogadores devem escolher *quatro números* nas tabelas.

Finalmente, no *último nível*, nas tabelas T-9 e T-10, os jogadores podem escolher *cinco números* em cada tabela.

A atividade visa simular uma situação real de jogo. Por isso, são considerados preços a serem cobrados, ficticiamente, para se participar do jogo. Esses preços vão aumentando à medida em que se escolhe apostar em mais números na tabela de jogo, como pode ser observado no ANEXO C.

4.6 APLICAÇÃO DO JOGO NA SALA DE AULA

O jogo foi apresentado à sala do 3º ano do Ensino Médio Noturno da Escola Manoel Garcia Leal no dia 23 de outubro de 2013. Nesse dia, estavam presentes 17 alunos.

Após distribuirmos a folha de atividade do ANEXO C, esclarecemos as regras do jogo e seus níveis de aprofundamento, conforme relatado há pouco. Fizemos uma tabela na lousa para ilustramos como deveria ser feita a marcação nas tabelas. Feito isso, solicitamos que os alunos fizessem suas apostas.

A partir daí, começamos a girar o globo com as dez bolinhas idênticas para o primeiro nível de sorteios nas três primeiras tabelas. Na primeira rodada, obtivemos um aluno contemplado. Na segunda, porém, não houve ganhador. Na terceira rodada novamente tivemos outro aluno contemplado.

A partir da quarta rodada, dentro do segundo nível de sorteio, onde era possível marcar três números na tabela, os ganhadores começaram a aparecer com mais frequência, o que já era esperado por mim e pelo Professor Márcio, que era o nosso auditor dos ganhadores.

Nesse momento é que percebemos a interação da turma, pois diante das contemplações, naturalmente o barulho na sala surgia. Lembramos que Borin (2004) afirma:

> É claro que, quando usamos o jogo em sala de aula, o barulho é inevitável, pois só através de discussões é possível chegar-se a resultados convincentes. É preciso encarar esse barulho de uma forma construtiva; sem ele, dificilmente, há clima ou motivação para o jogo (BORIN, 2004, p. 12).

O jogo com a turma durou 30 minutos, e, nesse período, pudemos constatar que “um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer” (BRASIL, 1997, p. 49).

De fato, todos os alunos participaram da atividade, e um aspecto que nos chamou a atenção foi que um mesmo apostador, por ganhar mais de uma vez, provocou nos outros alunos uma vontade a mais de ganhar também. Isso, naturalmente, contagiou toda a sala. Segundo Borin (2004):

> Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem (BORIN, 2004, p. 9).

Ao fim da atividade, foi exatamente isso que percebemos. Houve uma boa participação dos que estavam presentes à aula. Posteriormente em nosso trabalho, atestaremos os depoimentos dos alunos.

Mesmo assim, não foram todos os alunos que conseguiram fazer alguma ligação da proposta com as ideias matemáticas por detrás da atividade. Uma aluna nos perguntou para que o jogo serviria, se teria algum objetivo ou se seria só para nos divertirmos um pouco. Com um sorriso, respondi que na próxima atividade ela poderia compreender o sentido da aplicação do jogo.

4.7 O JOGO MEGA-DUQUE ASSOCIADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nossa próxima atividade com a sala do 3º Ano do Ensino Médio Noturno da Escola Manuel Garcia Leal foi realizado no dia 12 de novembro de 2013. Nessa atividade, nosso objetivo era propor aos discentes problemas relacionados às situações do Jogo Mega-Duque.

Segundo Van de Walle (2009, p. 57) “a maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas”. Daí nosso interesse em associar o Jogo Mega-Duque a esta metodologia.

A própria Matemática tem, por assim dizer, uma dívida com a resolução de problemas, muitas vezes de ordem cotidiana. Como já mencionamos no Capítulo 3, os PCN destacam que, na história da Matemática, é possível perceber que a Matemática se desenvolveu muitas vezes devido à motivação para responder perguntas provenientes de problemas de ordem prática, bem como de outras ciências (BRASIL, 1997).

Portanto, com esse pensamento unimos a motivação natural que o Jogo proporciona à metodologia de Resolução de Problemas.

Também, como já mencionado anteriormente, segundo Van de Walle (2009, p. 57-58), um problema voltado para a aprendizagem matemática deve possuir três características. A primeira é “O problema deve começar onde os alunos estão”. Isso significa que o problema deve ser tangível ao conhecimento dos alunos, mas, ainda assim, desafiador.

A segunda é “O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender”. E a terceira “A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos”.

Apesar de ensinar por Resolução de problemas ser “difícil”, Van de Walle (2009, p. 59) aponta sete valores acompanhados dessa metodologia. Dentre essas, vamos destacar: “A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas”, “desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido”, “envolve os alunos de modo que ocorrem menos problemas de indisciplina”, “desenvolve o potencial matemático”.

Alicerçado nestas orientações, propusemos uma lista de nove problemas em grau crescente de dificuldade. Além disso, cada problema exige que o aluno justifique a resposta dada, a fim de identificarmos as suas interpretações dos problemas. A atividade completa pode ser acompanhada no ANEXO D.

Nessa atividade, introduzimos a palavra “probabilidade”, mas ainda associada à palavra chance, para que houvesse uma melhor compreensão por parte dos alunos. Também, como pode ser visto no ANEXO D, fizemos uma referência a “aposta simples”, que consiste em o jogador apostar em apenas dois números na cartela. Também procuramos retratar, nos problemas, nomes de personagens, como “João”, “Carlos”, “Maria”, “Laura”, “Marta”, que, ficticiamente, eram jogadores, para tentar tornar mais real as apostas.

Propusemos a atividade em duplas, para que pudessem discutir as situações. Pudemos notar que os alunos se envolveram nas atividades, pois agora compreenderam o objetivo didático do jogo. De fato, procuraram fazer a associação do Jogo Mega-Duque com os problemas apresentados.

Todavia, verificamos que certas conclusões tiradas por algumas duplas foram tomadas de maneira tendenciosa, por se lembrarem de alguns casos específicos, isolados, no dia do sorteio, na atividade anterior. Por exemplo, no problema 1, que diz “Entre as bolas numeradas de 1 a 10, existe alguma bola que tem maior chance de ser sorteada?”, uma dupla respondeu que “algumas bolas saem mais que outras”. Deduzimos que essa dupla tirou essa conclusão devido ao fato de que, na atividade anterior, a bola número 6 ter sido sorteada um número maior de vezes que as outras. Um relatório com o resultado das respostas dadas pelos alunos aos problemas pode ser visto no ANEXO E.

4.8 INTRODUÇÃO À SISTEMATIZAÇÃO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

Na semana seguinte, no dia 20 de novembro de 2013, iniciamos a sistematização dos conceitos sobre Probabilidade, baseando-nos no Jogo Mega-Duque.

Inicialmente, propusemos alguns Jogadores fictícios. Usamos, para descontrair, os nomes de alguns professores da escola Manoel Garcia Leal, que os alunos foram nos sugerindo.

Após desenharmos na lousa algumas tabelas iguais às tabelas do ANEXO C, os dois primeiros apostadores que os alunos escolheram foram Eu e Márcio. Daí escolhi os números 1 e 2. O Márcio escolheu os números 4 e 5. Então, fiz o questionamento: “Com quantas apostas eu estou concorrendo? São diferentes as apostas (1;2) e (2;1)? E no caso do professor Márcio?” Boa parte da sala concordava que (1;2) e (2;1), (4;5) e (5;4) se tratavam, respectivamente, da mesma aposta e, portanto, concluíam que deveríamos ter a mesma chance no Jogo Mega-Duque.

Daí, fizemos o questionamento sobre a validade das apostas de um apostador que apostasse em (1;1), (2;2), (3;3) ... . A princípio, alguns pensavam que poderia ser uma aposta válida. Porém, quando tentavam fazer a marcação na tabela, viam que esse modelo de aposta não fazia sentido.

Passamos, então para um novo nível, em que o jogador poderia apostar em 3 números na tabela. Depois de os alunos nos sugerirem o nome do professor de Química, simulamos que ele teria apostado nos números 1, 2 e 3. Pedimos que eles escrevessem quantas apostas simples era possível fazer com a escolha destes três números. Depois de pouco tempo, já percebiam que era possível, dessa forma, ter as seguintes apostas simples (1; 2), (1; 3) e (2; 3), ou seja, o jogador apostava com três chances de ganhar.

Depois, passamos para os casos em que o apostador escolhia quatro e cinco números para apostar. Simulamos esses apostadores, marcando nas tabelas da lousa, respectivamente, os números 1, 2, 3, 4, e, na outra tabela, os números 1, 2, 3, 4, 5. Os alunos, automaticamente, diziam-nos as apostas possíveis nos dois casos.

Fazendo uma conexão com a atividades do ANEXO D, sobre os problemas relacionados ao Jogo Mega-Duque, fizemos as perguntas dos Problemas 1, “Entre as bolas numeradas de 1 a 10, existe alguma bola que tem maior chance de ser sorteada?” e do Problema 2, “Um jogador chamado João apostou nos números 1 e 9. Já Carlos apostou nos números 4 e 5. Qual dos dois têm mais chance de ser sorteado no jogo Mega-Duque?” Não ouve dificuldade nas respostas.

Após isso, fizemos então a pergunta do Problema 4, “Quantas apostas simples podem ser feitas no jogo Mega-Duque?”. Sugeri que anotássemos na lousa cada uma das possíveis apostas. Os alunos ditavam-nas. Portando, anotamos na lousa as 45 apostas simples que são possíveis no Jogo Mega-Duque. Com as apostas anotadas na lousa, não foi difícil responder ao Problema 5, “João fez uma aposta simples e Maria fez duas apostas simples. Qual jogador terá mais chances de ganhar no jogo Mega-Duque?”

O problema 6 faz o seguinte questionamento: “Uma apostadora chamada Maria marcou em sua tabela os números 5 e 7. Já a apostadora Marta marcou em sua tabela os números 1, 3 e 8. A apostadora Laura apostou nos números 2, 4, 9 e 10. Quantos reais cada apostadora pagará pelas apostas feitas? Qual delas têm mais chances de ganhar no jogo Mega-Duque? O preço cobrado pelas apostas é justo?" Esse foi um problema em que o índice de acerto foi alto, 16 acertos e 2 erros. Mesmo assim, muitos alunos comentaram que agora fazia sentido o questionamento quanto a ser justo o preço cobrado.

Após essa consideração, que durou uma aula de cerca de 50 minutos, estávamos preparados para a sistematização do conceito de Probabilidade, fazendo a articulação do Jogo Mega-Duque com a metodologia de Resolução de Problemas.

4.9 SISTEMATIZAÇÃO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

Um dos objetivos do Jogo Mega-Duque é poder ajudar os alunos a terem conhecimento das propriedades e ideias básicas da Probabilidade Laplaciana. O Jogo tem o poder de ilustrar as várias partes e conceitos intrínsecos à Probabilidade, dentre eles as noções de Espaço Amostral, Evento, e a quantidade de elementos pertencentes a estes.

Neste sentido, quando iniciamos as propostas de jogadas com os diferentes níveis de apostas, com as marcações nas tabelas com dois, três, quatro e cinco números, procuramos simular apostas reais, como já comentado. Desta forma, os alunos participaram em nos ajudar a destacar na lousa as quantidades de apostas que eram possíveis fazer em cada nível do Jogo.

Não tiveram dificuldade em nos dizer que havia, para os níveis de apostas com dois, três, quatro e cinco números marcados nas tabelas, as respectivas quantidades de apostas, a saber, uma, três, seis e dez. O mesmo aconteceu com respeito a elencar a possibilidade total de apostas, ou seja, quarenta e cinco apostas possíveis. A partir de agora, podíamos falar em Probabilidade.

Segundo Morgado (2006, p. 113), Espaço Amostral é "o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória". Em geral, é representado pela letra S. No caso do Jogo Mega-Duque, o Espaço Amostral é constituído de quarenta e cinco possíveis resultados, ou seja, quarenta e cinco duplas de números que podem ser sorteadas, a saber, S = {(1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (1;7), (1;8), (1;9), (1;10), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (2;7), (2;8), (2;9), (2;10), (3;4), (3;5), (3;6), (3;7), (3;8), (3;9), (3;10), (4;5), (4;6), (4;7), (4;8), (4;9), (4;10), (5;6), (5;7), (5;8), (5;9), (5;10), (6;7), (6;8), (6;9), (6;10), (7;8), (7;9), (7;10), (8;9), (8;10), (9;10)}.

Ainda segundo Morgado (2006), um Evento é um Subconjunto do Espaço Amostral. Dessa forma pudemos destacar que é possível obter diversos eventos do espaço amostral do Jogo Mega-Duque. Por exemplo, quando um jogador escolhe dois números na tabela, como o “quatro” e o “cinco”, ele na verdade, obtém um evento simples, que pode ser designado pela letra A, de tal forma que o número de elementos que este evento A possui constitui-se de um único elemento, ou seja, A={(4;5)}. Se algum jogador escolher os números “quatro”, “cinco” e “seis” para marcar na tabela, por exemplo, terá um evento B = {(4;5), (4;6), (5;6)}, isto é, com três elementos. De maneira análoga, o jogador que marcar quatro ou cinco números na tabela, terá eventos C e D com, respectivamente, seis e dez elementos.

Após definir os conceitos de Espaço Amostral, que convencionamos representar por S, e Evento, apresentamos a maneira de se calcular a probabilidade de acontecer um evento aleatório. Segundo Morgado (2006, p.113), “experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem resultados diferentes são chamadas de aleatórias”. Esse é o caso do Jogo Mega-Duque, visto que os quarenta e cinco elementos do espaço amostral são equiprováveis.

Definimos, então, a Probabilidade Laplaciana como a razão entre o número de elementos do Evento, que podemos representar por A, e o número de elementos do Espaço Amostral S, da experiência aleatória. Em símbolos, escreve-se $P(A) = n(A)/n(S)$. Definido dessa forma, os jogadores do Jogo Mega-Duque que apostarem em dois números na tabela terão a probabilidade de ganhar dada por $P(A) = 1/45$, que em percentual, corresponde a, aproximadamente, 2,22%.

Para os apostadores de três, quatro e cinco números na tabela, as probabilidades de ganhar no Jogo Mega-Duque são, respectivamente, de $P(B) = 3/45 = 1/15$, aproximadamente 6,66%, $P(C) = 6/45 = 2/15$, aproximadamente 13,33% e $P(D) = 10/45 = 2/9$, aproximadamente 22,22%.

Definimos, também, os conceitos de Evento Nulo e Evento Certo. Porém, para o contexto do Jogo Mega-Duque, estes tipos de eventos não têm sentido prático. O Evento Nulo não se aplica ao Jogo, pois quem participar dele terá que escolher uma aposta em, no mínimo dois números na tabela, e, no máximo, cinco. E, por este último motivo, de as regras do Jogo permitir a escolha máxima de cinco números a serem marcados na tabela, o evento abrangido pela aposta do jogador que a escolher terá dez elementos. Portanto não temos Evento Certo no Jogo Mega-Duque.

4.10 ASSOCIAÇÃO DO JOGO MEGA-DUQUE COM O JOGO MEGA-SENA

Como já mencionado na Introdução do trabalho, o Jogo Mega-Duque foi inspirado no Jogo da Mega-Sena, administrado pela Caixa Econômica Federal. Trata-se de uma modalidade de apostas muito difundida no Brasil, que leva diversos cidadãos a depositarem sua confiança na chance de serem contemplados no sorteio, realizando, portanto, o sonho de se tornarem milionários.

Seria a chance de ganhar na Mega-Sena uma questão facilmente alcançável? Como ajudar os alunos a terem uma visão mais concreta dessa modalidade de apostas? O Jogo Mega-Duque é um trampolim que permite aos alunos terem uma noção mais concisa de como funciona o Jogo da Mega-Sena, e as reais chances de ganho de um apostador.

Foi exatamente isso que constatamos no dia 27 de novembro de 2013. Inicialmente, lembramos aos alunos como era a tabela do Jogo Mega-Duque, que é constituída de dez opções de marcações numeradas de 1 a 10. Daí, distribuímos a todos os alunos na sala um exemplar de “volante”, isto é, a tabela oficial usada para a marcação das apostas no Jogo da Mega-Sena. Foi esclarecido que o volante é constituído de sessenta opções de apostas, numeradas de 1 a 60. O apostador pode escolher apostar de 6 a 15 números no volante. Uma aposta simples no volante do Jogo Mega-Sena é uma marcação de apenas seis números no volante.

Após relembramos que no Jogo Mega-Duque era possível realizar até quarenta e cinco apostas simples, corresponde ao seu Espaço Amostral, perguntamos aos alunos quantas apostas simples seria possível fazer no Jogo da Mega-Sena. Sugeri que fizéssemos de maneira análoga ao que fizemos no Jogo Mega-Duque. Fui a lousa e pedi que fossem me dizendo as apostas possíveis. Até fiz uma brincadeira dizendo eu começaria com a primeira aposta simples (1, 2, 3, 4, 5, 6). Quando comecei a escrever na lousa as primeiras apostas que eles iam me ditando, trocando o 6 por 7, por 8, por 9, por 10..., ou seja (1, 2, 3, 4, 5, 7); (1, 2, 3, 4, 5, 8); (1, 2, 3, 4, 5, 9); (1, 2, 3, 4, 5, 10) ..., eles logo notaram que não seria o melhor caminho.

Foi então que perguntei a sala se, no Jogo Mega-Duque, não haveria uma outra forma de encontrarmos o resultado total de quarenta e cinco possibilidades de apostas simples do Jogo. Usando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), para a escolha da dupla formadora da aposta simples no Jogo Mega-Duque, calculamos o número de elementos do espaço amostral.

De fato, há dez números na tabela do Jogo Mega-Duque. Para a escolha do primeiro número da dupla, temos a nossa disposição dez possíveis escolhas. Suponhamos que escolhamos o número 6. Feito isso, para a escolha do segundo número da dupla, temos nove números a nossa disposição, pois não é possível escolher novamente o número 6, já que a aposta (6, 6) não tem validade no Jogo. Suponhamos que seja o número 7. Daí temos a aposta simples (6, 7). Usando o PFC, teremos 10.9 = 90 possibilidades. Perguntamos aos alunos: “mas não eram quarenta e cinco?”

É suficiente notar que a aposta (6, 7) corresponde a aposta (7, 6), de modo que não são duas, mas trata-se da mesma aposta. Pensando de maneira análoga com as demais apostas simples, vemos a necessidade de dividirmos as aparentes 90 possibilidades por 2! = 2.1 = 2, pois 2! corresponde à quantidade de repetições para cada aposta simples. Logo percebemos que o espaço amostral do Jogo Mega-Duque tem 45 elementos. Uma outra maneira de chegarmos a essa marca é calcularmos $C_{10,2}$, que denota a Combinação Simples de 10 elementos, tomados dois a dois.

Estendendo, então, estes mesmos raciocínios para o Jogo da Mega-Sena, verificamos que, para uma aposta simples, com a escolha de seis números no volante, há para o 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, e 6º números escolhidos, respectivamente, 60, 59, 58, 57, 56, 55, opções de escolha. Pelo PFC, isso daria 36.045.979.200 de possibilidades. Suponhamos que a aposta simples tenha sido a aposta (1, 2, 3, 4, 5, 6). De maneira análoga ao que foi feito no Jogo Mega-Duque, é preciso ainda dividir por 6! = 720, pois dentro da quantidade de apostas 36.045.979.200, há 720 aparições de cada aposta simples. Portanto, concluímos que o Espaço Amostral do Jogo da Mega-Sena é composto de 50.063.860 elementos, ou apostas simples, de seis números marcados no volante. Este último valor corresponde a $C_{60,6}$, isto é, a Combinação Simples de sessenta elementos, tomados seis a seis.

Neste ponto percebemos uma vantagem que existe no uso do Jogo Mega-Duque. De um espaço amostral de 50.063.860 elementos possíveis de serem sorteados para um com 45, há uma facilidade maior de compreensão das chances de uma aposta ser contemplada.

Outra importante questão é que o Jogo Mega-Duque proporciona uma reflexão da intuição probabilística na Educação Básica. A associação do Jogo Mega-Duque com a Mega-Sena ajuda os alunos a entender a natureza probabilística dos jogos de azar. Dessa forma, estes podem desenvolver uma atitude mais crítica com relação às suas reais chances de vencer em jogos que prometem fortunas. De fato, há uma disparidade enorme entre o risco de se perder dinheiro e as chances de se ganhar dinheiro. Em consonância com isso, temos que:

> O desenvolvimento da intuição em relação as probabilidades, na Educação Básica, como uma forma de tornar os alunos conscientes da natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos, etc.), que são lucrativos para quem os promovem, mas que trazem um risco desproporcional de perda de dinheiro para quem aposta (GODINO et al., 1998, citado por LOPES; BALIEIRO FILHO, 2011, p. 38).

Mesmo assim, verifiquemos os custos dos investimentos envolvidos na Mega-Sena. Evidentemente, do mesmo modo como no Jogo Mega-Duque, quanto mais números se marca no volante, mais cara será a aposta, devido ao fato de que se aumentam as chances de ganhar. Sobre isso, note, novamente, a figura 2.

Figura 2 – Probabilidade de acerto na Mega-Sena

PROBABILIDADE DE ACERTO NA MEGA-SENA

Quantidade Nº Jogados	Valor de Aposta	Probabilidade de acerto (1 em...)		
		Sena	Quina	Quadra
6	2,50	50.063.860	154.518	2.332
7	17,50	7.151.980	44.981	1.038
8	70,00	1.787.995	17.192	539
9	210,00	595.998	7.791	312
10	525,00	238.399	3.973	195
11	1.155,00	108.363	2.211	129
12	2.310,00	54.182	1.317	90
13	4.290,00	29.175	828	65
14	7.507,50	16.671	544	48
15	12.512,50	10.003	370	37

Fonte: BRASIL (2014b)

Como pode ser visto, o preço de uma aposta simples é de R$2,50. Apostando em sete números no volante, o preço já passa para R$17,50. Uma aposta em quinze números, o apostador deve desembolsar nada menos que R$12.512,50. Qual o motivo?

Vamos pensar no Jogo Mega-Duque. Se o apostador fizer uma aposta simples, digamos em (3, 4), pagará R$ 5,00. Se apostar em (3, 4, 5), na verdade, estará apostando no evento {(3, 4), (3, 5), (4, 5)}, que tem três elementos, ou três apostas simples. Logo deve pagar R$ 5,00 para cada aposta, ou seja, R$15,00. Como já foi comentado acima, as apostas em quatro e cinco números custam, respectivamente, R$ 30,00, e R$ 50,00. Mas escrever, um por um, os eventos que representam estas apostas é trabalhoso. Como calculá-los, especialmente no caso do Jogo da Mega-Sena?

No caso do Jogo Mega-Duque, para as apostas em três, quatro e cinco números na tabela, podem ser calculadas com as combinações a seguir, respectivamente, $C_{3,2}= 3$, $C_{4,2}= 6$, e $C_{5,2}= 10$.

De maneira análoga, no caso da Mega-Sena, teremos, para a aposta em sete números no volante, uma combinação $C_{7,6} = 7$ apostas simples. Portanto, é justo pagar R$ 17,50 por esta aposta. Para as demais marcações no volante teremos a combinação $C_{8,6} = 28$ possibilidades, $C_{9,6} = 84$ possibilidades, $C_{10,6} = 210$ possibilidades. Assim segue-se até a última e mais cara aposta, com 15 números escolhidos no volante. São uma $C_{15,6} = 5005$ possibilidades. Por isso o preço de R$ 12.512,50 = 5005 x R$2,50.

Portanto, após explanado estes pontos na sala de aula do 3º Ano do Ensino Médio da Escola Manoel Garcia Leal, pudemos concluir as atividades relacionadas ao Jogo Mega-Duque. Este Jogo tem o papel de motivar, embasar e, posteriormente, aprofundar o estudo sobre Probabilidade.

Evidentemente, o professor tem uma flexibilidade para seguir o caminho que melhor se adaptar à realidade de sua sala de aula, podendo, a partir disso fazer as opções que julgar necessárias. Portanto, nessa interface, o Jogo Mega-Duque pode servir como um apoio à atividade didático-pedagógica do professor de Matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando o professor se dedica na preparação de uma aula, ou na elaboração de um plano de ensino e, finalmente, entra na sala para pôr em prática o que preparou, fica evidente que seu objetivo é ajudar os alunos a aprender algo que considera relevante dentro de sua área de atuação. De fato, ele o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. Essa aprendizagem, por sua vez, poderá contribuir para a formação sociocultural do educando, a fim de que se torne um ser humano apto a desempenhar seu papel como cidadão na sociedade.

Dentro dessa meta de buscar uma maneira eficaz para se ensinar, muitas sugestões e orientações são propiciadas ao educador, especialmente o matemático, para que atinja esse objetivo. Uma delas são os PCN. Sobre isso, na seção *Ao Professor* temos a seguinte afirmação:

> Nosso objetivo é auxiliá-lo na execução de seu trabalho, compartilhando seu esforço diário de fazer com que as crianças dominem os conhecimentos de que necessitam para crescer como cidadãos plenamente reconhecidos e conscientes de seu papel em nossa sociedade. Sabemos que isso só será alcançado se oferecermos à criança brasileira pleno acesso aos recursos culturais relevantes para a conquista de sua cidadania (BRASIL, 1997, p. 5).

Não é incomum, porém, observarmos grandes dificuldades de assimilação dos conceitos matemáticos por parte dos educandos, nas diversas etapas por onde passam, durante sua estadia no ensino básico. Por isso, cada vez mais os educadores matemáticos se desdobram na busca de aprimoramento de metodologias e propostas de ensino que possam tornar o ensino-aprendizagem de matemática uma tarefa mais eficaz e, até mesmo, mais prazerosa e prática. Já outros educadores matemáticos buscam estudar e entender como os educandos assimilam determinados conceitos dentro da matemática.

De fato, dentro da conhecida atualmente como Educação Matemática, existem diversas correntes, ou tendências, em prol do aprimoramento do ensino-aprendizagem de Matemática. Algumas delas que poderíamos citar são a Etnomatemática, Modelagem Matemática, Didática Francesa, Resolução de Problemas, dentre outras. Deveras, dentro de uma ou de outra tendência, um grande número de artigos, dissertações e teses são elaborados com uma finalidade em comum: contribuir para uma melhor educação matemática.

No bojo dessas discussões, dentro da área da Matemática sobre Probabilidades, que entendemos ser de suma importância não só para a Matemática, mas também para o cotidiano das pessoas comuns, procuramos elaborar uma proposta de ensino que pudesse ser uma maneira eficaz para se abordar o tema das probabilidades.

Porém, não quisemos apenas elaborá-la, mas também experimentá-la para sentir os resultados, como pôde ser visto em nosso trabalho. Podemos dizer que atingimos bem os objetivos a ela propostos. Um deles foi perceber que os alunos tiveram uma boa participação nas atividades. O Jogo foi bastante cativante, pois não só chamou a atenção dos alunos para a aula, mas também foi uma boa maneira de introdução para o conteúdo de Probabilidade. Ainda, adicionalmente, mostrou-se um modo eficiente de explicar os principais conceitos dentro de probabilidade, como espaço amostral e evento.

Em nossa proposta, procuramos fazer uma associação bem próxima da teoria com a prática, para que os alunos pudessem ter uma noção mais substancial do que queríamos passar a eles. Durante os sorteios, percebemos nos alunos uma forte motivação para se inserir no contexto do jogo. Além disso, o jogo rendeu vários comentários positivos sobre a atividade. Um aluno comentou: “Foi diferente, pois saímos da aula teórica e fomos para a prática. Para de ser uma aula cansativa e passa a ser divertida”. Outro aluno declarou: “Foi uma atividade legal, pois incentiva o aprendizado da matéria. Estimula o processo de aprendizagem de probabilidade”. O Jogo Mega-Duque tem características ímpares que fazem os alunos participarem com bastante entusiasmo da atividade. Uma delas é o prazer que temos em participar em um jogo de azar. O simples fato do sorteio já é estimulante.

Outra característica importante é que o fato de o espaço amostral envolvido no jogo ser relativamente pequeno, com 45 possibilidades de escolhas, faz com que as chances de se ganhar não sejam tão pequenas, a ponto de quase ninguém ganhar. Isso com certeza iria desestimular a participação dos alunos. Também o fato de existir vários estágios de apostas, com chances de ganho crescentes, provoca uma motivação extra, pois se vê a vontade de ganhar aflorar cada vez mais.

Infelizmente, um objetivo que tínhamos para nossa proposta não pôde ser concretizado. Pensávamos que seria possível fazer uma nova aplicação do questionário do ANEXO A, a fim de apurarmos os efeitos *a posteriori* do Jogo Mega-Duque. Porém, dependíamos de tempo hábil para realizarmos esta atividade, o que não foi possível devido ao calendário escolar, pois o ano letivo já estava quase se encerrando. Como a sala escolhida era regida por outro docente, conforme relatado, não dispúnhamos de muitas oportunidades para realizar as seções idealizadas. Logo, não reaplicamos o questionário. Mesmo assim, entendemos que a proposta teve êxito no que se refere aos demais objetivos a que nos propomos.

Durante a apresentação do jogo percebemos algumas coisas que podem ser melhoradas. Por exemplo, não havia apenas um professor durante a aplicação, pois o professor Márcio, como comentado, participou quase como um auditor para conferir as apostas, para que não houvesse alguma trapaça. Isso se deu pelo fato de estarmos usando a turma em que o professor Márcio ministra suas aulas. Quando o professor regente estiver aplicando a proposta sozinho em sala, bem possivelmente terá que dedicar algum tempo extra para a verificação das apostas dos alunos. Isso poderá ser feito de maneira prévia ao sorteio, solicitando aos alunos que assinalem os nomes na folha de atividade, e marquem nas dez tabelas suas apostas, ao invés de ir marcando sorteio a sorteio, o que daria margem para trapaças dos alunos e gastaria mais tempo. Depois, talvez seja interessante que se recolha as folhas das apostas e as distribua de maneira aleatória entre os alunos, para que cada um seja o auditor das apostas uns dos outros. Isso fomentará a sala a participar ainda mais, tornando a interação da sala ainda maior.

Outra observação importante a ser feita (que inclusive não nos ocorreu durante nossa aplicação da atividade fazer) é que seria bom, durante os sorteios, anotar quantas rodadas foram feitas até que se tivesse o primeiro aluno contemplado. O Jogo Mega-Duque não é como um bingo, em que se vai sorteando várias bolas até ter um apostador acerte. Na verdade, em cada rodada de sorteio são sorteadas apenas duas bolas. O ganhador deve acertar os números destas duas bolas. Caso não haja ninguém que acerte, inicia-se uma nova rodada. O Jogo Mega-Duque, como já comentado, tem os moldes da Mega-Sena. Quando nenhum apostador acerta as seis dezenas sorteadas, o prêmio acumula.

Como se pôde constatar, O Jogo Mega-Duque é uma proposta voltada para o ensino dos principais conceitos da Probabilidade. Com base neste jogo, pode-se cativar a atenção dos alunos para um assunto tão importante não só na Matemática, mas também para a formação geral do aluno.

O Jogo Mega-Duque está embasado nas orientações contidas nos documentos oficiais, como os PCN, que destacam o papel central que o jogo pode exercer no ensino de Matemática na educação básica. Também está em consonância com os escritos dos principais teóricos da Educação Matemática que dissertam sobre o uso de Jogos para se ensinar Matemática.

Por outro lado, faz uma ótima tabela com a estratégia de Resolução de Problemas. Ambos podem ser usados em total parceria, com o fim de se extrair o máximo de interação dos educandos nas atividades propostas. Como se pode notar em nosso trabalho, é possível elaborar diversos problemas motivadores que são ilustrados com as várias situações vividas durante o Jogo Mega-Duque.

Evidentemente, nosso trabalho trata-se de uma proposta que pode nortear as atividades do professor de Matemática. Não é nossa intenção esgotar todas as possibilidades de uso do Jogo. Cada professor tem a liberdade de expandir as fronteiras do Jogo. Por exemplo, numa determinada sala, o professor regente pode sentir a necessidade de aplicar mais rodadas de sorteios, não apenas dez, como foi em nossa aplicação. Por outro lado, podem-se criar novos problemas interessantes relacionados ao Jogo. De fato, o professor regente deverá tomar as decisões mais convenientes para cada situação.

Finalmente, ensinar exige tempo, dedicação, altruísmo. Com um olhar otimista para a Educação, ainda enxergamos um desejo de que esta possa mudar o futuro das pessoas, especialmente o das crianças e adolescentes, à nossa volta. Terminamos nosso trabalho com um sentimento de que atingimos nosso objetivo, fazendo uma singela contribuição à Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2. ed. Campo Grande,MS: UFMS, 2005. 267 p.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM-IME, USP, 2004. 100 p.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 2010. 512 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino fundamental – Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. **Mega-Sena estatísticas das dezenas mais sorteadas**. Brasil, 2014a. Disponível em: http://www.guiadaloteria.com.br/estatistica-dezenas-mais-sorteadas-da-mega-sena.html. Acesso em: 01 jul. 2014.

BRASIL. **Mega-Sena probabilidade**. Brasil, 2014b. Disponível em: http://www1.caixa.gov.br/loterias/ loterias/megasena/probabilidades.asp. Acesso em: 01 jul. 2014.

BRASIL. **Tudo sobre a Mega-Sena**. Brasil, 2014c. Disponível em: http://www.reidaloteria.com/dezenas.html. Acesso em: 01 jul. 2014.

D'AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-posições,** Campinas,v. 4, n. 1, p. 35-41, 1993. Disponível em: http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposicoes/textos/10-artigos-d%5C%27 ambrosiobs.pdf. Acesso em: 15 ago. 2014.

FRAGA, R. R. **O estudo das loterias**: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio. Dissertação de Mestrado. Programa PROFMAT. IMPA. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/283/2011_00135_RODRIGO_RODRIGUES_FRAGA.pdf?sequence=1. Acesso em: 03 set. 2013.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 65-87.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008, p. 77-111.

GRANDO, R. C. **O Jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. 1995. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

LOPES, J. M.; BALIEIRO FILHO, I. F. Percepções de professores do ensino médio sobre mudanças de suas práticas de ensino de probabilidade. **Revista de Educação Matemática,** São Paulo, v. 13, n.15, p. 37-54, 2011.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade:** com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 343 p.

MORGADO, A. C. O. Probabilidade. In: LIMA, E. L. (Org.). **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM 2006. 308 p. Coleção do Professor de Matemática.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático.** São Paulo: FDE, 1992. (Série Ideias, 10). Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf. Acesso em: 14 jun. 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Ed. Da UNESP, 2004. p.199-218.

PASSOS, C. C. M; TEIXEIRA, P. J. M. Um pouco da teoria da situações didáticas de Guy Brousseau. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais** ..., Recife, PE. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/ files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2484/public/2484-9290-1-PB.pdf . Acesso em: 09 abr. 2014.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro.:SBM, 2012. 467 p. Coleção Profmat.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANEXOS

ANEXO A

Docente: Franklin Emanuel de Barros Soukeff

Discente: ________________________________

Data: __/__/____

QUESTIONÁRIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida pelo Professor Franklin Emanuel Barros Soukeff, mestrando do Programa Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sob orientação do Professor Dr. José Marcos Lopes - Unesp/Ilha Solteira-SP.

1) No lançamento de uma moeda, qual face tem mais chance de sair virada para cima?

( ) cara ( ) coroa ( ) mesma chance para as duas ( ) não sei

2) No lançamento de um dado honesto, qual número tem mais chance de sair?

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) todos têm mesma chance ( ) não sei

3) Na comparação entre os lançamentos de um dado e de uma moeda, o que tem mais chance de acontecer?

( ) sair face 6 no dado ( ) sair cara na moeda ( ) não sei

4) No lançamento simultâneo de duas moedas, é mais fácil sair virada para cima duas faces diferentes do que duas faces iguais?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

5) Lançando-se dois dados honestos simultaneamente, o que tem mais chance de acontecer?

( ) dois números diferentes ( ) dois números iguais ( ) não sei

6) Lançando-se dois dados honestos simultaneamente e somando-se os resultados, qual soma tem mais chance e acontecer?

( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) Não sei

7) Num jogo de baralho comum, de 52 cartas, retirando-se ao acaso uma carta, é mais fácil retirar uma carta de Valete do que uma de Dama?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

8) Num jogo de baralho comum, de 52 cartas, retirando-se ao acaso uma carta, qual tem mais chance de ser retirada?

( ) carta de espadas ( ) carta de Reis ( ) mesma chance ( ) não sei

9) Em uma sala de aula com 40 alunos, a chance de que pelo menos dois alunos façam aniversário no mesmo dia é:

( ) grande ( ) pequena ( ) quase impossível ( ) não sei

10) Um casal teve três filhos homens. Como a mãe sempre quis ter uma filha, desejam ter mais um filho. A nova criança tem mais chance de ser:

( ) menino ( ) menina ( ) chances iguais ( ) não sei.

Obrigado pela colaboração.

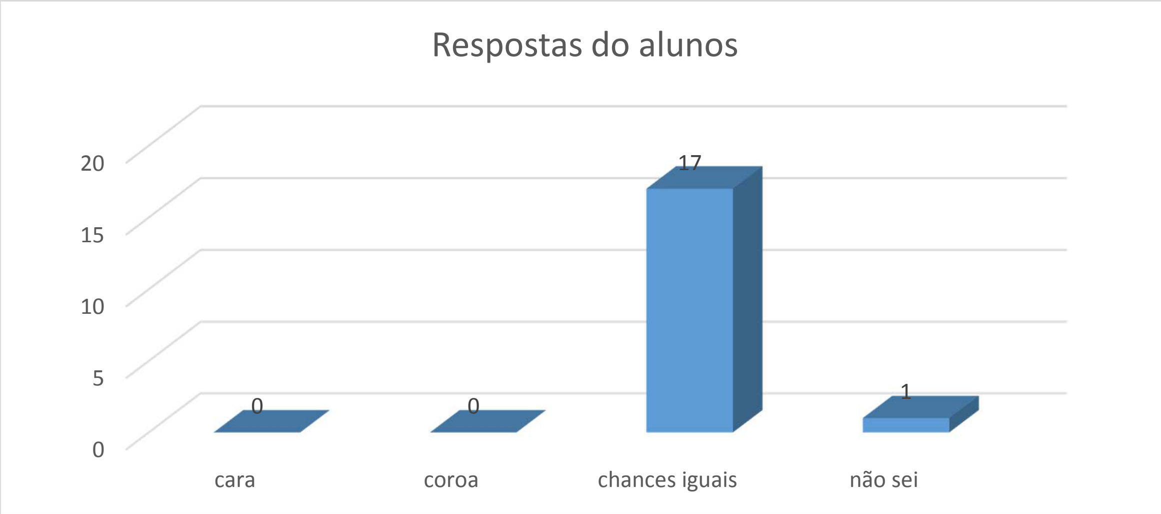
ANEXO B

RESULTADO DO QUESTIONÁRIO

1) No lançamento de uma moeda, qual face tem mais chance de sair virada para cima?

( ) cara ( ) coroa ( ) mesma chance para as duas ( ) não sei

Figura 3 – Resposta dos alunos ao Problema 1



Fonte: Elaboração do próprio autor

2) No lançamento de um dado honesto, qual número tem mais chance de sair?

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) todos têm mesma chance ( ) não sei

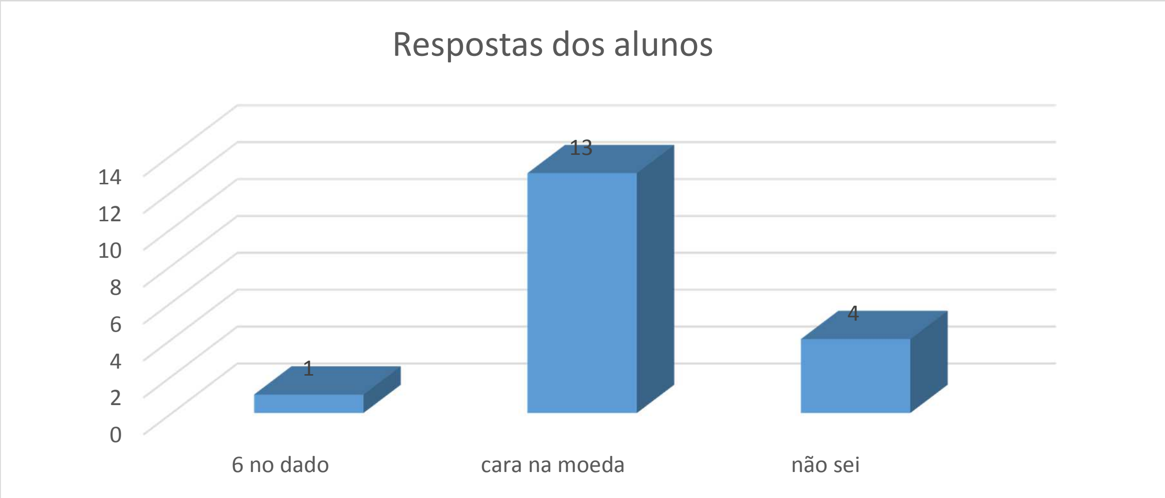
Figura 4 – Resposta dos alunos ao Problema 2

Fonte: Elaboração do próprio autor

3) Na comparação entre os lançamentos de um dado e de uma moeda, o que tem mais chance de acontecer?

( ) sair face 6 no dado ( ) sair cara na moeda ( ) não sei

Figura 5 – Resposta dos alunos ao Problema 3

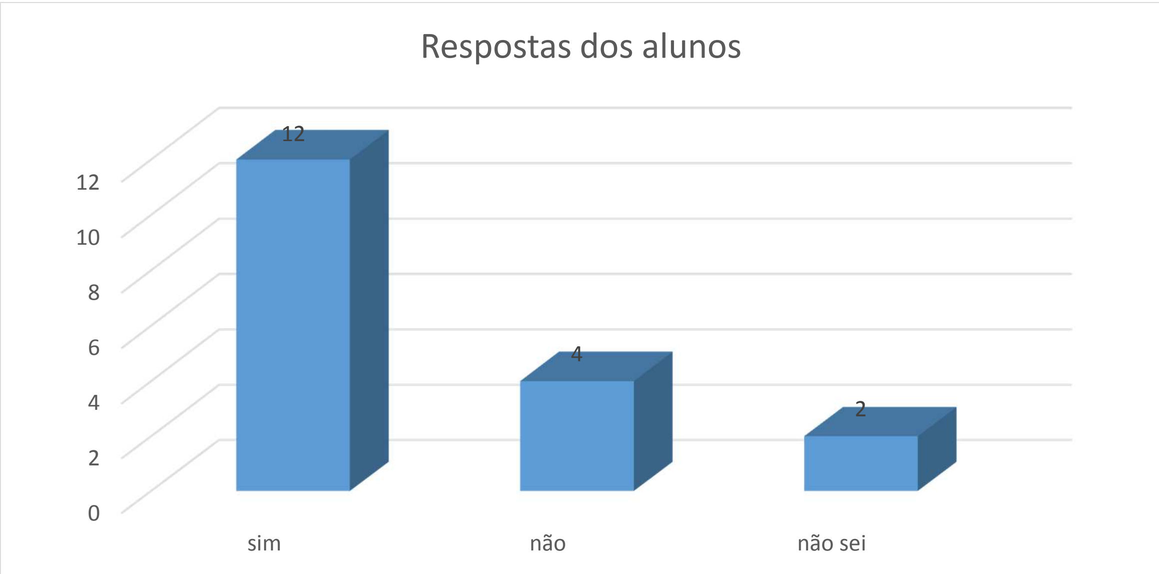


Fonte: Elaboração do próprio autor

4) No lançamento simultâneo de duas moedas, é mais fácil sair virada para cima duas faces diferentes do que duas faces iguais?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

Figura 6 – Resposta dos alunos ao Problema 4

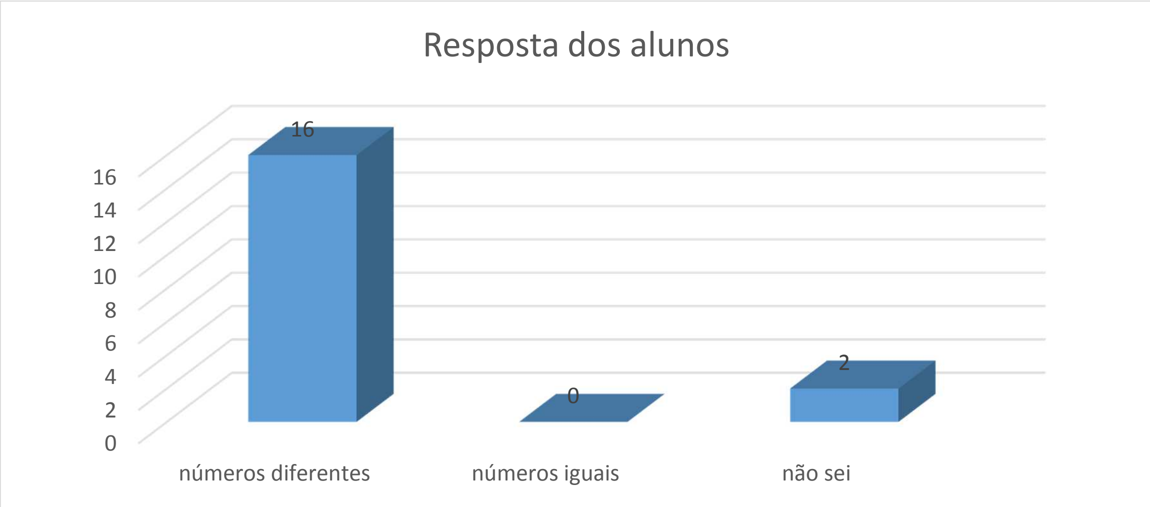


Fonte: Elaboração do próprio autor

5) Lançando dois dados honestos simultaneamente, o que tem mais chance de acontecer?

( ) dois números diferentes ( ) dois números iguais ( ) não sei

Figura 7 – Resposta dos alunos ao Problema 5

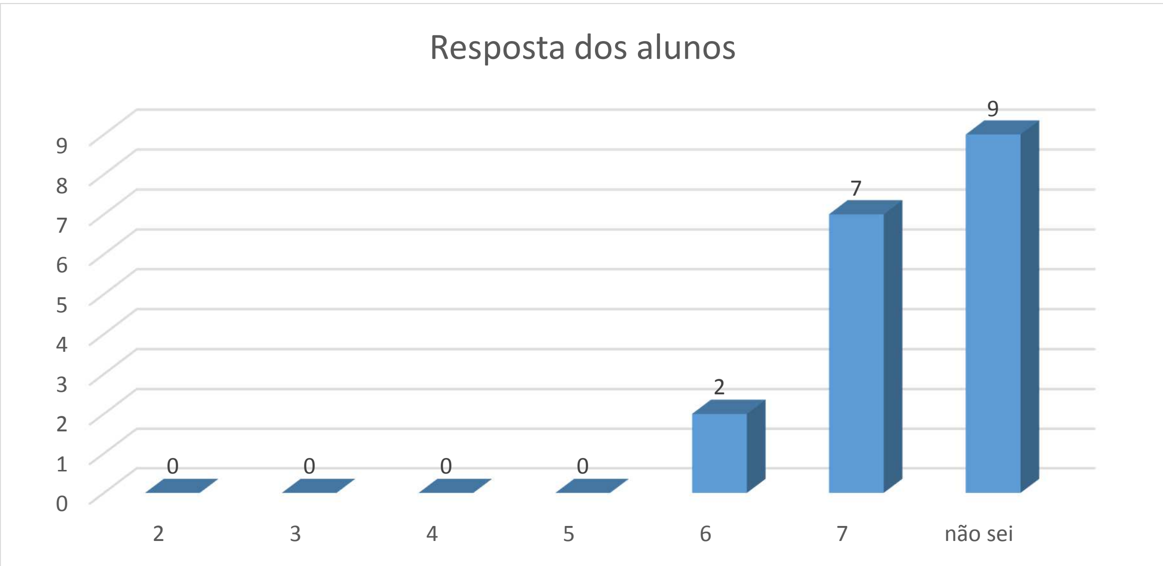


Fonte: Elaboração do próprio autor

6) Lançando dois dados honestos simultaneamente e somando os resultados, qual soma tem mais chance e acontecer?

( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) Não sei

Figura 8 – Resposta dos alunos ao Problema 6



Fonte: Elaboração do próprio autor

7) Num jogo de baralho comum, de 52 cartas, retirando-se ao acaso uma carta, é mais fácil retirar uma carta de Valete do que uma de Dama?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

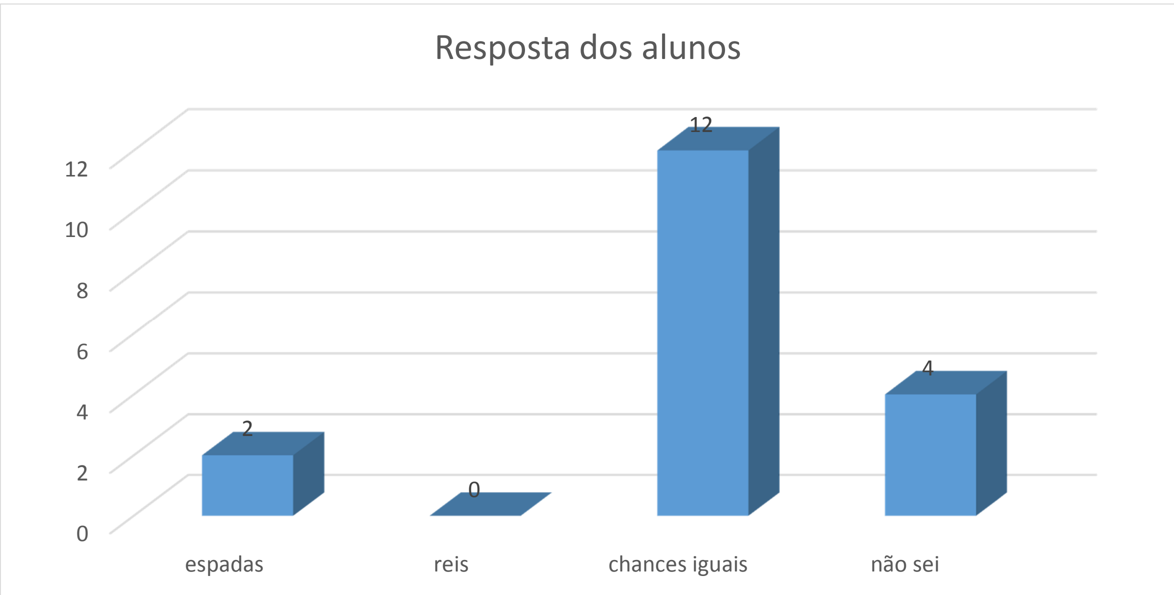
Figura 9 – Resposta dos alunos ao Problema 7

Fonte: Elaboração do próprio autor

8) Num jogo de baralho comum, de 52 cartas, retirando-se ao acaso uma carta, qual tem mais chance de ser retirada?

( ) carta de espadas ( ) carta de Reis ( ) mesma chance ( ) não sei

Figura 10 – Resposta dos alunos ao Problema 8

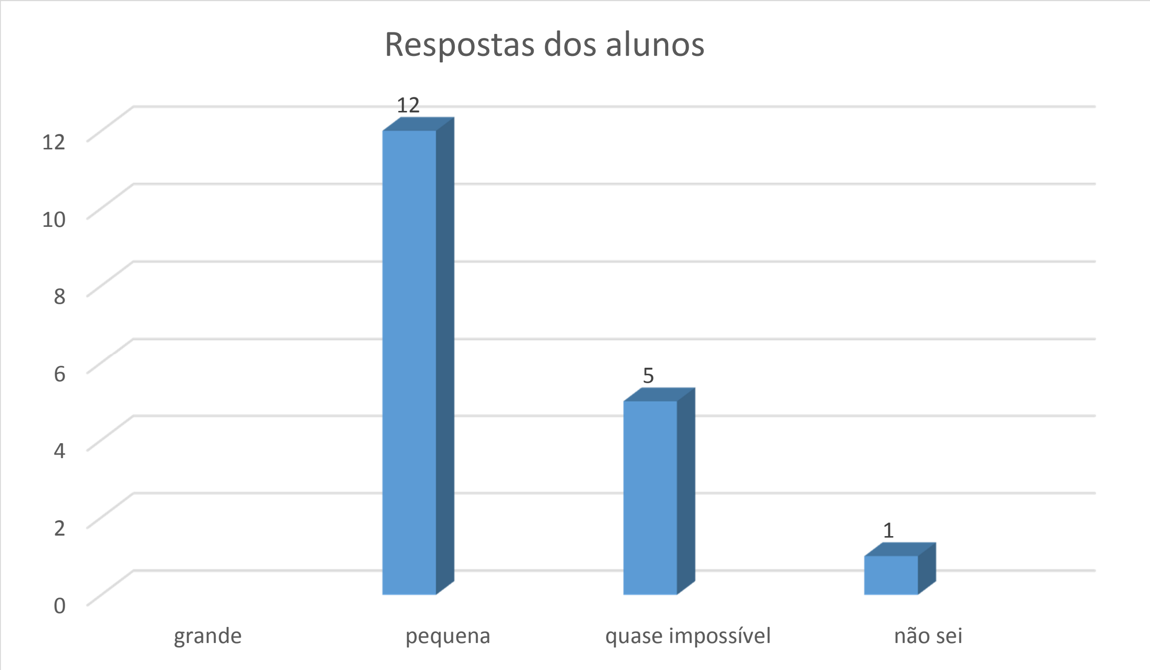


Fonte: Elaboração do próprio autor

9) Em uma sala de aula com 40 alunos, a chance de que pelo menos dois alunos façam aniversário no mesmo dia é:

( ) grande ( ) pequena ( ) quase impossível ( ) não sei

Figura 11 – Resposta dos alunos ao Problema 9

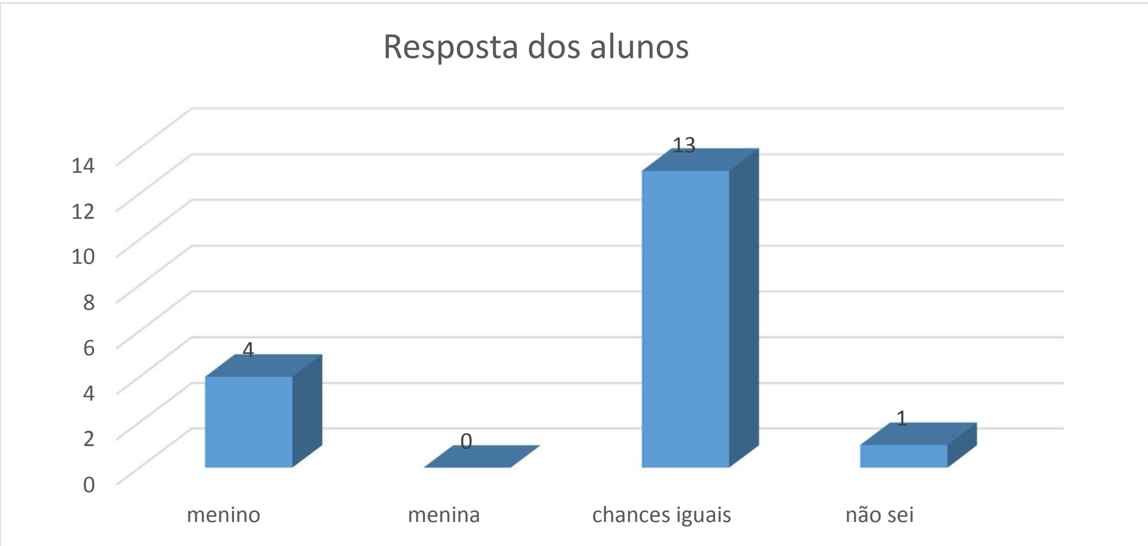


Fonte: Elaboração do próprio autor

10) Um casal teve três filhos homens. Como a mãe sempre quis ter uma filha, desejam ter mais um filho. A nova criança tem mais chance de ser:

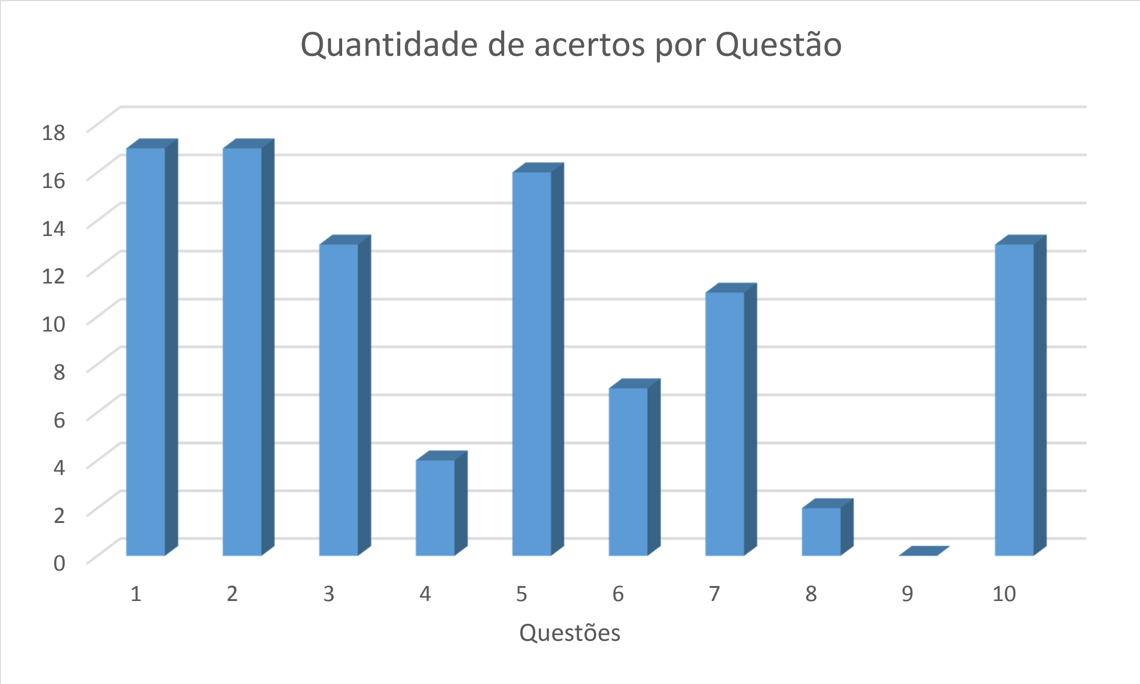
( ) menino ( ) menina ( ) chances iguais ( ) não sei.

Figura 12 – Resposta dos alunos ao Problema 10



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 13 – Quantidade de acertos por Questão



Fonte: Elaboração do próprio autor

ANEXO C

O Jogo Mega-Duque

Docente: Franklin Emanuel Barros Soukeff

Discente: ______________________________

Data: __/__/____

1. Regras

1.1. O jogo consiste no sorteio de 02 (duas) bolas entre 10 (dez) bolas numeradas de 1 a 10.
1.2. Os participantes do sorteio terão a oportunidade de escolherem e marcarem nas tabelas abaixo de duas até cinco numerações.
1.3. O valor de cada aposta está representado na tabela a seguir:

Quantidade de números escolhidos	2	3	4	5
Valor da aposta (em reais)	5,00	15,00	30,00	50,00

2. Tabelas para marcação das apostas.

Tabela T-1. Marcação de dois números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-2. Marcação de dois números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-3. Marcação de dois números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-4. Marcação de três números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-5. Marcação de três números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-6. Marcação de três números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-7. Marcação de quatro números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-8. Marcação de quatro números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-9. Marcação de cinco números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Tabela T-10. Marcação de cinco números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

ANEXO D - Problemas relacionados ao Jogo Mega-Duque

Docente: Franklin Emanuel Barros Soukeff

Discentes:

____

Data: ____/____/______

Atividade: Problemas relacionados ao Jogo Mega-Duque:

Problema 1.Entre as bolas numeradas de 1 a 10, existe alguma bola que tem maior chance de ser sorteada? Justifique sua resposta.

Problema 2. Um jogador chamado João apostou nos números 1 e 9. Já Carlos apostou nos números 4 e 5. Qual dos dois têm mais chance de ser sorteado no jogo Mega-Duque? Justifique sua resposta.

Problema 3. Na aposta simples do Jogo Mega-Duque, o jogador terá mais chance de ganhar se escolher:

(a) Dois números pares;

(b) Dois números ímpares

(c) Um número par e um número ímpar.

Justifique sua resposta.

Problema 4. Quantas apostas simples podem ser feitas no jogo Mega-Duque? Justifique sua resposta.

Problema 5. João fez uma aposta simples e Maria fez duas apostas simples. Qual jogador terá mais chances de ganhar no jogo Mega-Duque? Justifique sua resposta.

Problema 6. Uma apostadora chamada Maria marcou em sua tabela os números 5 e 7. Já a apostadora Marta marcou em sua tabela os números 1, 3 e 8. A apostadora Laura apostou nos números 2, 4, 9 e 10. Quantos reais cada apostadora pagará pelas apostas feitas? Qual delas têm mais chances de ganhar no jogo Mega-Duque? O preço cobrado pelas apostas é justo? Justificar sua resposta.

Problema 7. João decidiu marcar 3 (três) números na tabela. Neste caso:

(a) Ele está concorrendo com quantas apostas simples? Justifique sua resposta.

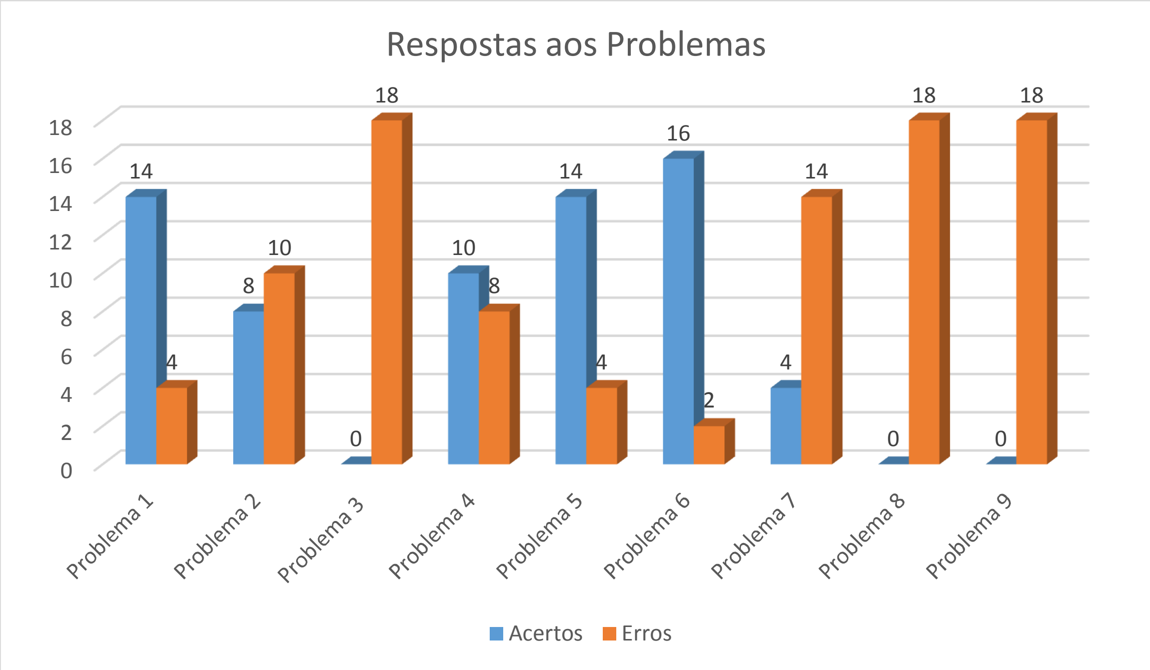
(b) Qual a probabilidade de João ganhar no jogo Mega-Duque? Justifique sua resposta.

Problema 8. João fez 6 (seis) apostas simples e Maria fez uma aposta marcando 4 (quatro) números na tabela. Qual jogador terá maior probabilidade de ganhar no jogo Mega-Duque? Justifique sua resposta.

Problema 9. A probabilidade de ganhar no jogo Mega-Duque será maior se fizermos 10 (dez) apostas simples ou se fizermos uma única aposta marcando 5 (cinco) números na tabela? Justifique sua resposta.

ANEXO E - Relatório das Respostas aos Problemas do Anexo D

Figura 14 – Respostas aos Problemas do Anexo D



Fonte: Elaboração do próprio autor

ANEXO F – REQUERIMENTO I DE AUTORIZAÇÃO PARA ATIVIDADE

Requerimento n. 01

À Diretora da Escola Estadual de Mato Grosso Sul Manuel Garcia Leal,

Eu, **Franklin Emanuel Barros Soukeff**, brasileiro, casado, economiário, registrado no Registro Geral de Pessoa Física – RG - sob o n. 1191985, SSP/MS, bem como CPF n. 006.327.291-12, residente e domiciliado no Município de Paranaíba, CEP 79.500-000, Rua Júlio César Rodrigues de Melo, Casa n. 58, Bairro Vila Militar **REQUEIRO**, por meio deste, autorização para desenvolver pesquisa de conclusão de curso stricto sensu em matemática, oferecido pela Unesp/Ilha Solteira - SP. Para tanto, escolher-se-á uma turma de ensino médio e, sob a orientação do que este subscreve e do docente da disciplina de matemática será aplicada uma "nova" proposta pedagógica acerca do ensino de probabilidade por meio da metodologia de resolução de problemas concomitante com o uso de jogos.

Nada mais a requerer, abaixo subscrevo.

Franklin Emanuel de Barros Soukeff

Paranaíba, 17 de setembro de 2013.

Requerimento recebido por __________________________________ no dia 17 de setembro de 2013

ANEXO G - REQUERIMENTO II DE AUTORIZAÇÃO PARA ATIVIDADE

Requerimento n. 02

A Márcio Alves Proni, Professor da Escola Estadual de Mato Grosso Sul Manoel Garcia Leal,

Eu, **Franklin Emanuel Barros Soukeff**, brasileiro, casado, economiário, registrado no Registro Geral de Pessoa Física – RG - sob o n. 1191985, SSP/MS, bem como CPF n. 006.327.291-12, residente e domiciliado no Município de Paranaíba, CEP 79.500-000, Rua Júlio César Rodrigues de Melo, Casa n. 58, Bairro Vila Militar **REQUEIRO**, por meio deste, autorização para desenvolver pesquisa de conclusão de curso stricto sensu em matemática, oferecido pela Unesp/Ilha Solteira – SP, bem como autorização para citação do nome do referido docente na versão final do trabalho. Para tanto, escolher-se-á uma turma de ensino médio e, sob a orientação do que este subscreve e do docente da disciplina de matemática será aplicada uma "nova" proposta de ensino acerca do ensino de probabilidade por meio da metodologia de resolução de problemas concomitante com o uso de jogos.

Nada mais a requerer, abaixo subscrevo.

Franklin Emanuel de Barros Soukeff

Paranaíba, 17 de setembro de 2013.

Requerimento recebido e autorizado por ________________________________ no dia 17 de setembro de 2013