INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALEXANDRE SILVA DAS CHAGAS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NO ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

RIO DE JANEIRO /RJ

2014

ALEXANDRE SILVA DAS CHAGAS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NO ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso Pós-graduação stricto sensu de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva

RIO DE JANEIRO / RJ

2014

ALEXANDRE SILVA DAS CHAGAS

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NO ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso Pós-graduação stricto sensu de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: ____ de ______de_______

Banca Examinadora

Prof. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva - Orientador
Doutor – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Prof... - Membro
Doutor – Universidade ....

Prof..- Membro
Doutor – Universidade ....

RIO DE JANEIRO

2014

A Deus,
toda glória!

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda sabedoria, que com sua infinita bondade e amor, esteve ao meu lado me dando ânimo e coragem para prosseguir, mesmo diante dos obstáculos que pareciam ser intransponíveis.

Ao meu professor orientador, Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva, pela sua capacidade intelectual, incentivo e valiosas orientações.

Aos professores do IMPA envolvidos com o PROFMAT, pela dedicação e disposição para lutar pela melhoria do ensino de Matemática.

Ao professor Thales do Couto Filho, por me enviar os dois capítulos de vetores do livro escrito por ele.

Aos professores da banca examinadora, pela participação.

À CAPES, pelo suporte financeiro durante o curso.

À minha esposa, Sara, pela dedicação, compreensão e paciência durante esses anos de estudo. Sem ela teria sido muito mais difícil chegar até aqui. Ela é a melhor esposa do mundo!

À minha filha, Júlia, pela alegria que me contagiava e me motivava a prosseguir.

Aos meus pais, Nilton e Lúcia, que sempre incentivaram os meus estudos e tiveram participação imprescindível na minha formação.

Às minhas irmãs, Aline e Amanda, pelo incentivo.

Ao meu sogro Miguel e à sua família (que é minha também), pelas constantes ajudas para que eu conseguisse concluir este trabalho.

Aos amigos da turma PROFMAT 2012, em especial ao Leandro, pelo companheirismo durante o curso.

A todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

RESUMO

Tendo em vista que os vetores são ferramentas matemáticas que facilitam a dedução de fórmulas e tornam a resolução de um grande número de problemas muito mais simples e elegante, além de ter aplicação em várias áreas como, por exemplo, a Física, este trabalho tem como objetivo propor o ensino de vetores no ensino médio em Matemática e apresentar um material que possa ser utilizado por professores, contendo um embasamento teórico do assunto e atividades a serem desenvolvidas com o software Geogebra. O trabalho apresenta argumentos que justifiquem o ensino de vetores no ensino médio em Matemática, mostrando através da resolução de alguns problemas, a vantagem (em muitos casos) de se utilizar vetores para simplificar cálculos. Outro objetivo do trabalho é mostrar que a utilização do Geogebra pode oferecer dinamismo e inovação às aulas.

Palavras-chaves: Ensino. Vetores. Ensino Médio. Geogebra.

ABSTRACT

Given that the vectors can be used as a mathematical tool that facilitates the deduction of formulas and makes the resolution of a large number of very simple and elegant problems, and have application in various areas such as, for example, Physics, this paper aims to propose the teaching of vectors in high school in mathematics and present a material that can be used by teachers, containing the theoretical background of the subject and activities to be developed with the Geogebra software. The paper presents arguments to justify the teaching of vectors in High School Mathematics. Showing by solving some problems, the advantage (in many cases) to use vectors to simplify calculations. Another purpose is to show that the use of Geogebra can offer dynamic and innovative classes.

Keywords: Education. Vectors. Secondary school. Geogebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta de material para o ensino de vetores no ensino médio com atividades a serem desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra.

No capítulo 2, são feitas considerações que demonstram a importância dos vetores no ensino da Física do ensino médio, porém ressaltando que vetor é um conceito matemático. Devendo, portanto, estar também entre os conteúdos que são trabalhados em Matemática. Neste capítulo, faz-se um comentário sobre o PNLD 2012 e a ausência de vetores nas coleções aprovadas e apresentadas no guia de livros didáticos.

Mostra-se a relevância do conceito de vetores para um melhor aproveitamento no estudo dos conteúdos relacionados com a Álgebra Linear do ensino médio, ou seja, o presente trabalho afirma que, com os vetores, é possível fazer um estudo mais significativo das Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

Através de um comparativo entre o uso de vetores e a utilização de métodos convencionais em demonstrações e resolução de problemas, mostraremos que os vetores podem ser utilizados como poderosas ferramentas na Geometria Analítica por oferecerem simplicidade e elegância nas resoluções.

Pretende-se com isso, mostrar que a abordagem vetorial da Geometria Analítica é muito mais vantajosa que a abordagem que não faz uso de vetores. O mesmo pode ser dito com relação aos Números Complexos. Quando é dado um tratamento vetorial ao estudo dos Números Complexos, o assunto é mais bem explorado.

O trabalho também apresenta, através de exemplos, os vetores como ferramentas para demonstrações da geometria plana, mostrando uma aplicação dos vetores na geometria euclidiana e a simplicidade que estes podem oferecer a algumas demonstrações desta disciplina. Além de comentar sobre a contibuição do ensino de vetores no processo de transição do ensino médio para o ensino superior.

Tendo em vista que os programas da maioria das escolas brasileiras não incluem vetores, o propósito principal de todas estas considerações é apresentar argumentos que justifiquem e incentivem uma reformulação nos currículos de

Matemática, afim de que seja promovido o ensino de vetores no ensino médio em Matemática.

No capítulo 3, faz-se uma apresentação do Geogebra. A apresentação é breve e destaca o que é o Geogebra, através de um comentário sobre seu histórico, de uma descrição sucinta sobre o referido programa e um tutorial básico de vetores no Geogebra.

Neste capítulo, justifica-se a escolha do software feita pelo autor para o desenvolvimento deste trabalho. É feita uma apresentação da estrutura básica de funcionamento do Geogebra. Comentamos também sobre as vantagens dos alunos estudarem neste ambiente e a utilização deste programa como recurso didático computacional.

No capítulo 4, é apresentada uma fundamentação teórica do assunto. E no último capítulo, uma proposta de material que possa ser utilizada por professores para o ensino de vetores no plano no ensino médio. O trabalho propõe atividades de investigação matemática que estarão neste capítulo, de forma que possam ser desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra.

2 POR QUE ENSINAR VETORES NO ENSINO MÉDIO EM MATEMÁTICA?

Os vetores são, sem dúvida, uma ferramenta importantíssima na Matemática e em outras áreas. Um dos objetivos deste trabalho é propor que o conteúdo de vetores seja ensinado no ensino médio em Matemática nas escolas brasileiras. Para isso, apresentaremos alguns argumentos que justifiquem essa proposta. Muitos desses argumentos mostrarão as vantagens do ensino deste importante conceito nesta etapa da vida escolar.

2.1 Vetor: Um Conceito Matemático

A Física lida com um grande número de grandezas que estão associadas a vetores. Essas grandezas são chamadas de grandezas vetoriais. Por isso o conceito de vetor é amplamente usado na física, inclusive em nível de ensino médio. No Brasil, os vetores aparecem nos livros didáticos de Física e são apresentados aos alunos do ensino médio pelos professores desta disciplina.

Apesar dos vetores estarem presentes apenas nos livros didáticos de Física do ensino médio, vetor é um conceito matemático. Portanto, deveria fazer parte também dos livros didáticos de Matemática do ensino médio.

Sobre este assunto, é feita uma observação, no livro “Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, lançado em 2001 pela SBM e editado pelo professor Elon Lages Lima. O livro mostra as conclusões obtidas após uma análise detalhada de doze coleções de livros didáticos usados no ensino médio de Matemática no Brasil. Na análise de um dos livros, é feito o seguinte comentário:

> **“[...]** ***um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática.*****”**(Lima, 2001, p.130, grifo nosso)

Na análise de outro livro, aparece a seguinte observação:

> **“*Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, [...] , é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física”.*** (Lima, 2001, p.62, grifo nosso)

O principal objetivo do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é auxiliar o trabalho pedagógico dos professores através da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. O Ministério da Educação (MEC), através de uma equipe de professores universitários e professores da educação básica, após avaliar as obras, faz a publicação do Guia de Livros Didáticos com um resumo crítico das coleções consideradas aprovadas.

As escolas, após receberem o guia, fazem a escolha dos títulos que melhor as atendem, dentre os títulos disponíveis. Este processo acontece de três em três anos, de forma alternada entre anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental ou ensino médio.

Para avaliar as coleções do PNLD 2012, a equipe de professores dividiu os conteúdos de Matemática do ensino médio em seis campos: números e operações; funções; equações algébricas; geometria analítica; geometria; estatística e probabilidades.

Apesar do Guia de Livros Didáticos destacar que a geometria analítica deve compreender o ensino de vetores, conforme trecho abaixo:

> **“Dada a sua importância como uma conexão entre a geometria e a álgebra, a geometria analítica foi destacada em um campo específico, que compreende: retas, circunferências e cônicas no plano cartesiano; vetores; e transformações geométricas”** (BRASIL, 2011, pag.18)

Dos sete títulos de Matemática do ensino médio que foram selecionados para fazer parte do último guia (PNLD 2012), nenhum deles apresenta algum capítulo exclusivo destinado ao conteúdo de vetores. Apenas uma coleção traz, superficialmente, vetores, mesmo assim, no capítulo de determinantes e não de geometria analítica.

2.2 Os Vetores e a Álgebra Linear do Ensino Médio

O estudo dos assuntos que se enquadram no contexto da Álgebra Linear do ensino médio (Matrizes, determinantes e sistema lineares), quando feito sem o uso de vetores, não explora todos os aspectos desta disciplina. Isto porque, ao se estudar esses assuntos, sem que o conceito de vetores seja considerado, o aspecto geométrico que envolve esse tema é desprezado.

Com os vetores, esses assuntos poderiam ser vistos do ponto de vista geométrico, facilitando o entendimento dessa importante disciplina da Matemática. Por exemplo, o aluno ao estudar os vetores no espaço estaria em condições de ser apresentado à equação do plano. Com esse conhecimento, a resolução de sistemas lineares de três equações e três incógnitas seria feita com uma interpretação geométrica. O aluno entenderia que as três equações definiriam três planos e que a solução do sistema são pontos que pertencem à interseção dos três planos.

Como os vetores não são apresentados ao aluno do ensino médio, cria-se um obstáculo para mostrar a presença deles nas linhas e colunas das matrizes e a equivalência entre operações matriciais e operações vetoriais. Além de impossibilitar o estudo de transformações geométricas simples (rotações, translações, dilatações ou contrações) que poderiam ser, tranquilamente, ensinadas em nível de ensino médio e contribuiria no ensino da trigonometria. Com isso, perde-se uma excelente oportunidade de explorar melhor a noção de matrizes e suas operações.

Além disso, com os vetores, os determinantes também podem ser interpretados do ponto de vista geométrico, ou seja, o módulo do determinante de uma matriz 3x3 é igual ao volume do paralelepípedo que tem como arestas os vetores linhas dessa matriz.

Se os programas de Matemática do ensino médio das escolas brasileiras incluíssem os vetores, os alunos estariam também, em condições, de serem apresentados ao conceito de combinação e dependência linear de vetores. Importantes assuntos para um estudo mais proveitoso de sistemas lineares, matrizes e determinantes, pois o conceito de combinação linear de vetores pode ser associado ao fato de uma matriz ter inversa ou não, um sistema linear ter solução ou não e um determinante se anular ou não.

2.3 A abordagem Vetorial da Geometria Analítica e dos Números Complexos

2.3.1 Os Vetores na Geometria Analítica

Além de propiciarem um melhor entendimento de conceitos da Álgebra Linear do ensino médio, os vetores também permitem uma abordagem muito mais vantajosa para a Geometria Analítica.

Esta disciplina quando estudada com uma abordagem vetorial torna-se mais simples e elegante. Os vetores a enriquecem, pois simplificam demonstrações e oferecem, para muitos problemas, soluções que demandam muito menos esforço de cálculo. A abordagem vetorial da Geometria Analítica também é extremamente importante para outras disciplinas como a Física, o Cálculo e outras.

A Geometria Analítica no plano, apesar de ser extremamente mais simples quando vista com uma abordagem vetorial, é possível ser estudada sem o uso de vetores. Os livros nacionais de Matemática para o ensino médio não dão um tratamento vetorial a essa disciplina. No entanto, a Geometria Analítica no espaço é impraticável sem a noção de vetores. O conceito de vetor é indispensável no estudo da Geometria Analítica espacial.

Devido à ausência de vetores, na maioria dos programas de Matemática do ensino médio das escolas brasileiras, a geometria espacial só pode ser apresentada aos alunos de forma sintética. Dessa forma, o aluno perde a oportunidade de estudar a geometria espacial de maneira analítica. O estudo fica, basicamente, restrito aos cálculos de comprimentos, áreas e volumes de sólidos. Isto o impede, por exemplo, de ver a equação do plano que simplificaria grandemente o estudo dos sistemas lineares de três equações e três incógnitas ao permitir uma interpretação geométrica.

Podemos apresentar alguns exemplos, como os que seguem abaixo, de demonstrações e problemas, feitos através da Geometria Analítica com abordagem vetorial, e desta disciplina sem fazer uso dos vetores com o objetivo de mostrar as potencialidades dos vetores na Geometria Analítica.

Determine a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r de equação $ax + by = c$

A figura mostra que a distância do ponto P à reta r é a distância entre os pontos P e P', sendo que P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r.

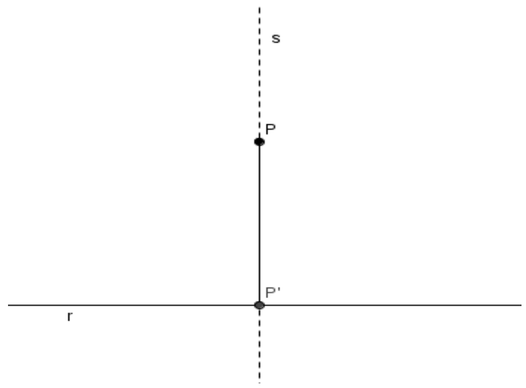


Figura 2.1: Distância de ponto à reta

Coeficiente angular de r:

$$ax + by = c \Rightarrow by = -ax + c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$m_r = -\frac{a}{b}$$

Equação da reta s:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 \Rightarrow \frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x_0 - y_0$$

Coordenadas de P': são aquelas do ponto de intersecção de r e s que são obtidas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} ax+by=c. \\ \frac{b}{a}x-y=\frac{b}{a}x_o-y_0.(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ \frac{b^2}{a}x-by=\frac{b^2}{a}x_o-by_0 \\ \hline (a+\frac{b^2}{a})x=c+\frac{b^2}{a}x_0-by_o \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{\frac{b^2}{a}x_0-by_o+c}{a+\frac{b^2}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{\frac{b^2}{a}x_0-\frac{ab}{a}y_o+\frac{a}{a}c}{\frac{a^2+b^2}{a}}=\frac{\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a}}=\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}$$

Substituindo $x=\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}$ na segunda equação, temos:

$$\frac{b}{a}.\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}-y=\frac{b}{a}.x_0-y_0 \Rightarrow y=y_0+\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}-x_0\right).\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y=y_0+\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}-\frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}x_0\right).\frac{b}{a} \Rightarrow y=y_0+\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac-a^2x_0-b^2x_0}{a^2+b^2}\right).\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y=y_0+\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2}-\frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}x_0\right).\frac{b}{a} \Rightarrow y=y_0+\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac-a^2x_0-b^2x_0}{a^2+b^2}\right).\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y=y_0+\left(\frac{-aby_0+ac-a^2x_0}{a^2+b^2}\right).\frac{b}{a}=y_0+\left(\frac{-ax_0-by_0+c}{a^2+c^2}\right).b$$

$$\Rightarrow \frac{y_0(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}+\frac{-abx_0-b^2y_0+bc}{a^2+b^2} \Rightarrow y=\frac{a^2y_0+b^2y_0-abx_0-b^2y_0+bc}{a^2+b^2} \Rightarrow y=\frac{a^2y_0-abx_0+bc}{a^2+b^2}$$

Portanto, $P'\left(\frac{b^2x_0-aby_0+ac}{a^2+b^2},\frac{a^2y_0-abx_0+bc}{a^2+b^2}\right)$

Distância entre os pontos P e P':

$$d(P,P')^2=\left(x_0-\frac{(b^2x_0-aby_0+ac)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{(a^2y_0-abx_0+bc)}{a^2+b^2}\right)^2$$

$$= \left(x_0 \, \frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)} - \frac{(b^2 x_0 - aby_0 + ac)}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(y_0 \, \frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)} - \frac{(a^2 y_0 - abx_0 + bc)}{a^2+b^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a^2 x_0 + b^2 x_0 - b^2 x_0 + aby_0 - ac}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{a^2 y_0 + b^2 y_0 - a^2 y_0 + abx_0 - bc}{a^2+b^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a^2 x_0 + aby_0 - ac}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{b^2 y_0 + abx_0 - bc}{a^2+b^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a(ax_0 \;\; + by_0 - c)}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{b(b \;\; y_0 + ax_0 - c)}{a^2+b^2} \right)^2$$

$$= \frac{a^2 (ax_0 + by_0 - c)^2}{(a^2+b^2)} + \frac{b^2 (by_0 + ax_0 - c)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(ax_0 + by_0 - c)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{(ax_0 + by_0 - c)^2}{a^2+b^2}$$

Portanto,

$$d(P,P')^2 = \frac{(ax_0 + by_0 - c)^2}{a^2+b^2} \Rightarrow d(P,P') \;\; = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 - c)^2}{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo, a distância d do ponto P à reta r é:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vamos, agora, fazer a demonstração, usando vetores.

Determine a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r de equação $ax + by = c$.

A distância d entre um ponto P e uma reta r é, por definição, a distância entre P e a sua projeção ortogonal P' sobre r, ou seja, $d = |\overrightarrow{P'P}|$

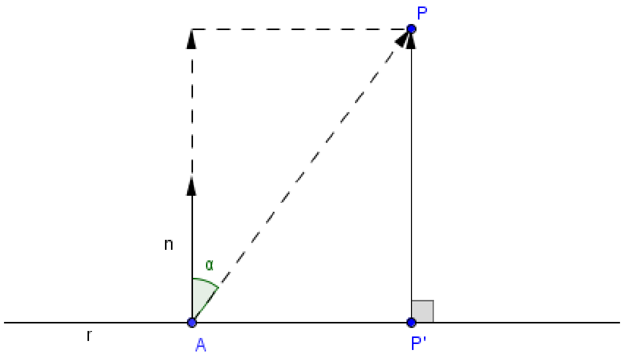


Figura 2.2: Distância de ponto à reta

Tomemos um ponto $A(x_1, y_1)$ em r.

Seja $\vec{n} = (a,b)$ um vetor normal à reta r. O vetor $\overrightarrow{P'P}$ é a projeção de $\overrightarrow{AP}$ na direção de $\vec{n}$. Portanto sendo α o ângulo entre $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{n}$ temos:

$$d = \left|\overrightarrow{P'P}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\cos\alpha\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\vec{n}\right|}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\right|$$

Mas $\overrightarrow{AP} = P - A = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, então

$$d = \left|\frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\right| = \left|\frac{(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Como $A \in r$ então $ax_1 + by_1 = c$, portanto

$$d = \left|\frac{ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Logo,

$$d = \frac{\left|ax_0 + by_0 - c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ao compararmos as duas demonstrações, podemos chegar à conclusão que a demonstração que usa vetores é muito mais simples.

Vamos também resolver o problema abaixo das duas formas utilizadas acima: Uma sem usar vetores e a outra com uma abordagem vetorial.

$A(3,4)$ e $B(2,7)$ são vértices do quadrado $ABCD$. Determine as coordenadas dos vértices C e D.

Resolução 1:

Ao calcularmos a distância entre os pontos A e B, determinamos a medida l do lado do quadrado.

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{10}$$

Coeficiente angular da reta AB:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-4}{2-3} = -3$$

Equação da reta AB:

Substituindo as coordenadas do ponto A temos:

$$y - y_0 = m_{AB}(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -3(x-3) \Rightarrow 3x + y = 13$$

Vamos determinar as equações de duas retas perpendiculares à reta AB. Uma passando por A e a outra por B. Consideremos r a reta que passa por A e s a que passa por B.

As retas r e s são perpendiculares à reta AB, portanto são paralelas entre si. Logo, seus coeficientes angulares são iguais.

Coeficiente angular das retas r e s:

$$m_r = m_s = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3}$$

Equação da reta r:

Substituindo as coordenadas do ponto A temos:

$$y - y_0 = m_r(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow -\frac{x}{3} + y = 3 \Rightarrow -x + 3y = 9$$

Equação da reta s:

Substituindo as coordenadas do ponto B temos:

$$y - y_0 = m_s(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow -\frac{x}{3} + y = \frac{19}{3} \Rightarrow -x + 3y = 19$$

Vamos determinar as duas retas paralelas à reta AB que distam $\sqrt{10}$ da reta AB.

A distância entre as retas paralelas $ax + by = c$ e $ax + by = c'$ é dada por:

$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lembrando que a equação da reta AB é $3x + y = 13$, então uma reta paralela à reta AB é

$t: 3x + y = c$. Assim temos,

$$d = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|c - 13|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c - 13| = 10$$

Logo $c = 23$ ou $c = 3$, ou seja,

$t_1: 3x + y = 23$ e $t_2: 3x + y = 3$

O problema tem duas soluções. Vamos determinar, primeiramente, os pontos C e C', que são obtidos, respectivamente, pela interseção das retas s e t_1 e das retas s e t_2, resolvendo os sistemas abaixo.

$$\begin{cases} -x + 3y = 19 \\ 3x + y = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = 8$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 19 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 6$$

Logo, $C = (5,8)$ e $C' = (-1,6)$

Vamos, agora, determinar os pontos D e D', obtidos, respectivamente, pela interseção das retas r e t_1 e das retas r e t_2.

$$\begin{cases} -x+3y=9 \\ \qquad\qquad \Rightarrow x=6 \text{ e } y=5 \\ 3x+y=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+3y=9 \\ \qquad\qquad \Rightarrow x=0 \text{ e } y=3 \\ 3x+y=3 \end{cases}$$

Logo, $D=(6,5)$ e $D'=(0,3)$

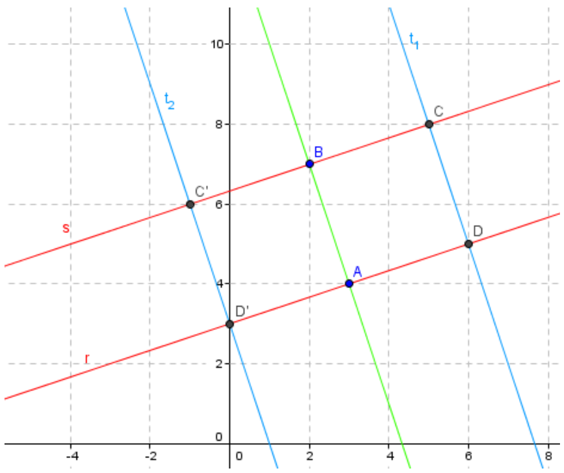


Figura 2.3: Quadrado $ABCD$ obtido pela interseção das retas

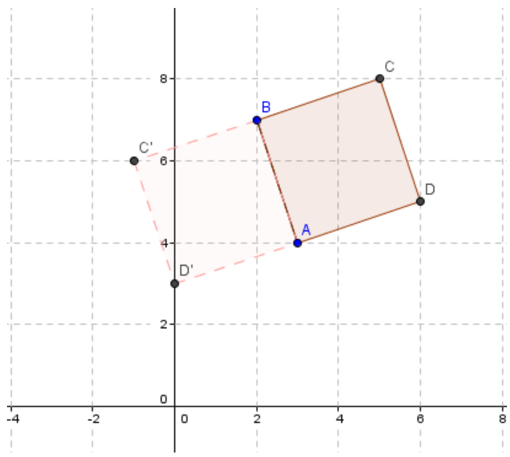


Figura 2.4: Quadrado $ABCD$

Segue abaixo outra maneira de resolver o problema:

$A(3,4)$ **e** $B(2,7)$ **são vértices do quadrado** $ABCD$**. Determine as coordenadas dos vértices** C **e** D**.**

Resolução 2:

A distância entre os pontos A e B é igual à medida l do lado do quadrado.

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-3)^2+(7-4)^2}=\sqrt{10}$$

Consideremos duas circunferências de raio $\sqrt{10}$, uma com centro em A e a outra com centro em B. As respectivas equações destas circunferência são:

$(x-3)^2+(y-4)^2=10$ e $(x-2)^2+(y-7)^2=10$

Vamos, agora, determinar a equação da reta AB.

Coeficiente angular da reta AB:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-4}{2-3}=-3$$

Substituindo as coordenadas do ponto A temos:

$$y-y_0=m_{AB}(x-x_0)\Rightarrow y-4=-3(x-3)\Rightarrow 3x+y=13$$

Consideremos r a reta que passa por A e é perpendicular à reta AB.

Coeficiente angular da reta r:

$$m_r=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{(-3)}=\frac{1}{3}$$

Equação da reta r:

Substituindo as coordenadas do ponto A temos:

$$y-y_0=m_r(x-x_0)\Rightarrow y-4=\frac{1}{3}(x-3)\Rightarrow -\frac{x}{3}+y=3\Rightarrow -x+3y=9$$

Consideremos s a reta que passa por B e é perpendicular à reta AB.

Os coeficientes angulares das retas r e s são iguais, pois elas são paralelas (r e s são perpendiculares à reta AB).

Equação da reta s:

Substituindo as coordenadas do ponto B temos,

$$y-y_0=m_s(x-x_0)\Rightarrow y-7=\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow -\frac{x}{3}+y=\frac{19}{3}\Rightarrow -x+3y=19$$

A interseção entre a circunferência de centro em e a reta s são os pontos C e C' e a interseção entre a circunferência de centro em A e a reta r são os pontos D e D'. Portanto, o problema apresenta duas soluções.

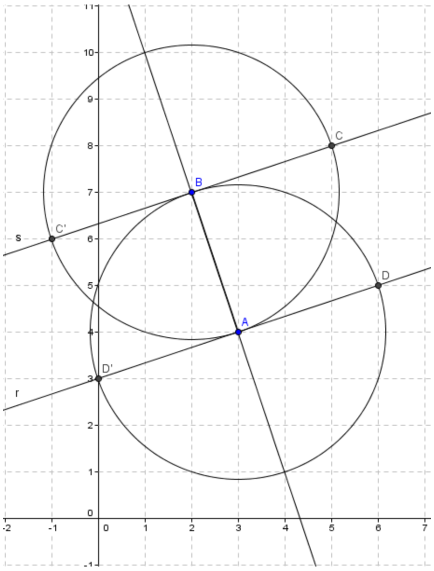


Figura 2.5: Quadrado $ABCD$ obtido pela interseção de circunferências e retas

Para encontrarmos as coordenadas dos pontos C e C' devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-7)^2=10\\ -x+3y=19\end{cases}$$

Isolando x na equação da reta e substituindo na da circunferência, teremos:

$x=3y-19$ e $(3y-21)^2+(y-7)^2=10 \Rightarrow y^2-14y+48=0 \Rightarrow y=8$ e $y=6$

Substituindo $y=8$ em $x=3y-19$ temos $x=5$

Substituindo $y=6$ em $x=3y-19$ temos $x=-1$

Logo, $C=(5,8)$ e $C'=(-1,6)$.

Para encontrarmos as coordenadas dos pontos D e D' devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=10\\ -x+3y=9\end{cases}$$

Isolando x na equação da reta e substituindo na da circunferência, teremos:

$x=3y-9$ e $(3y-12)^2+(y-4)^2=10 \Rightarrow y^2-8y+15=0 \Rightarrow y=5$ e $y=3$

Substituindo $y=5$ em $x=3y-9$ temos $x=6$

Substituindo $y=3$ em $x=3y-9$ temos $x=0$

Logo, $D=(6,5)$ e $D'=(0,3)$.

Agora, vamos resolver o problema, usando vetores.

$A=(3,4)$ **e** $B=(2,7)$ **são vértices do quadrado** $ABCD$ **. Determine as coordenadas dos vértices** C **e** D**.**

Resolução 3:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,3)$

O vetor $\vec{v}=(3,1)$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e tem o mesmo módulo que $\overrightarrow{AB}$. Basta verificar que $\vec{v}.\overrightarrow{AB}=0$ e $\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{3^2+1^2}$. Fazendo $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, temos que $\overrightarrow{AD}=(3,1)\Rightarrow D-A=(3,1)\Rightarrow D=(6,5)$ e $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow C-B=(3,1)\Rightarrow C=(5,8)$.

Para encontrarmos a outra solução fazemos

$-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD'}=D'-A=(-3,-1)\Rightarrow D'=(0,3)$ e $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AD'}\Rightarrow C'-B=(-3,-1)\Rightarrow C'=(-1,6)$

Podemos concluir que a resolução do problema, com tratamento vetorial, é mais simples que as outras duas resoluções que não fazem uso de vetores, pois exige menos esforço de cálculo.

2.3.2 A Abordagem Vetorial dos Números Complexos

Outro assunto que, quando visto através de uma abordagem vetorial, é mais bem explorado, é o conteúdo de números complexos. Isso porque, o ensino de números complexos, do ponto de vista puramente algébrico (maneira como tradicionalmente é ensinado), desperdiça a possibilidade de visualização oferecida pela geometria. Mas, essa não é a única vantagem em se dar um significado geométrico aos números complexos. Existem outros benefícios que podem ser apresentados.

Suponhamos fixado um sistema de coordenadas no plano. Quando representamos um número complexo $Z = x + yi$ pelo ponto $P(x, y)$, onde a parte real x é a abscissa e a parte imaginária y a ordenada, podemos associar esse número complexo Z ao vetor $v = \overrightarrow{OP}$ cujas coordenadas são (x, y) e o ponto O é a origem do sistema de coordenadas .

Dessa forma, os números complexos ganham uma interpretação geométrica e além da visualização essa abordagem proporciona que seja estabelecida uma relação biunívoca entre os números complexos e os vetores no plano. Com isso, muitos problemas que envolvem os números complexos podem ser resolvidos através de conceitos vetoriais.

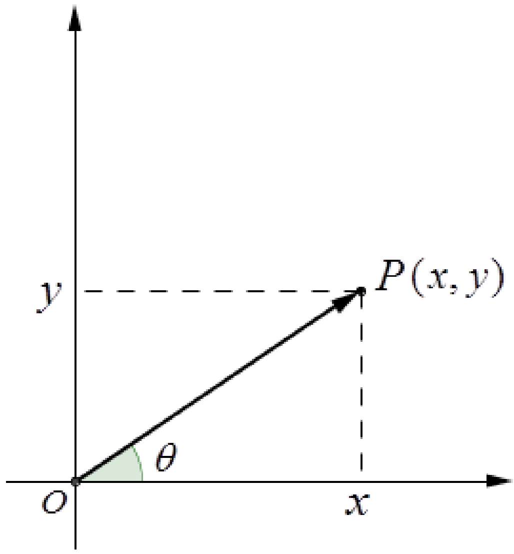


Figura 2.6: Vetor $v = \overrightarrow{OP}$ associado ao número complexo $Z = x + yi$

A intepretação vetorial de um número complexo permite que o conceito de módulo de um número complexo seja associado ao módulo de um vetor e o seu argumento seja associado ao ângulo formado entre um vetor e o semieixo positivo dos x. Assim, a forma trigonométrica de um número complexo pode ser vista pelo aluno de uma maneira mais intuitiva.

Ao relacionarmos os números complexos a vetores, podemos utilizar as coordenadas desses vetores para apresentar os conceitos de igualdade, conjugado, adição e subtração de números complexos e multiplicação por um número real.

A interpretação geométrica da multiplicação de complexos é a seguinte: quando multiplicamos um número complexo Z por um complexo $W = r(\cos\theta + i sen\theta)$, o vetor que representa Z sofre uma dilatação ou contração, por um fator r, e uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, .

Enfim, podemos concluir que o tratamento vetorial dado aos números complexos pode ser um fator facilitador no ensino desse assunto, pois permite que os alunos tenham uma visualização geométrica dos números complexos e tirem proveito de todo dinamismo oferecido pelos vetores. Esse é mais um dos argumentos que justificam o ensino de vetores em Matemática no ensino médio.

2.4 Os Vetores como Ferramentas para Demonstrações da Geometria Plana

Os vetores também são ótimas ferramentas para a demonstração de propriedades em polígonos. Para essas demostrações, é necessário o conhecimento do conceito de igualdade de vetores, vetor oposto e operações vetoriais como soma e diferença.

Algumas demonstrações da geometria plana tornam-se mais simples com o uso de vetores. Vamos mostrar isto através de dois exemplos:

Exemplo 1:

Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e é a metade deste.

Resolução:

Seja M o ponto médio de AC e N o ponto médio de BC.

Assim, $M = \dfrac{A+C}{2}$ e $N = \dfrac{B+C}{2}$.

Como $M - N = \dfrac{A+C}{2} - \dfrac{(B+C)}{2} = \dfrac{1}{2}(A-B) \Rightarrow N - M = \dfrac{1}{2}(B-A) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Donde segue que MN é paralelo a AB e MN é a metade de AB.

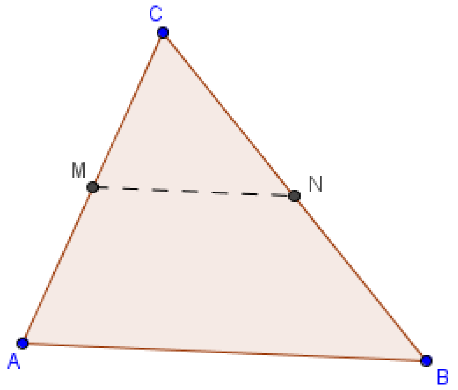


Figura 2.7: Segmento MN
no triângulo ABC

Exemplo 2:

Mostre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

Resolução:

Sejam A, B, C e D os vértices consecutivos de um paralelogramo.

Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B - A = C - D \Rightarrow B + D = A + C \Rightarrow \dfrac{B+D}{2} = \dfrac{A+C}{2}$

Fazendo $P = \dfrac{B+D}{2} = \dfrac{A+C}{2}$, temos que P é o ponto médio das diagonais AC e BC.

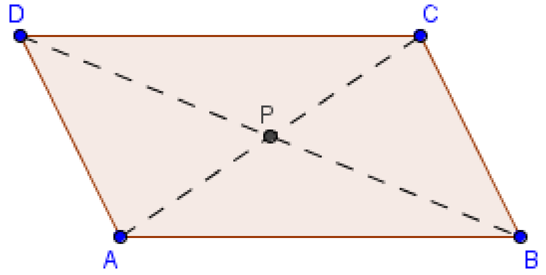


Figura 2.8: Ponto Médio P das
diagonais AC e BC

Podemos ver que importantes teoremas da geometria plana podem ser demonstrados vetorialmente. Os vetores podem ser utilizados como ferramentas para demonstrações alternativas da geometria sintética. Em muitos casos, o emprego dos vetores nas resoluções oferece uma grande simplificação na execução dos cálculos.

2.5 A contribuição do estudo de vetores na transição do ensino médio para o superior

O cálculo I é uma das disciplinas dos cursos da área de exatas de nível superior que mais reprovam. Alguns atribuem esse fato ao despreparo dos alunos para estudo dessa disciplina. De acordo com esses especialistas, muitos alunos que saem do ensino médio e ingressam no superior apresentam dificuldades por não terem adquirido o preparo necessário para um bom desempenho em Cálculo I.

Algumas escolas têm reorganizado o currículo de Matemática do ensino médio com objetivo de reduzir dificuldades no processo de transição do ensino médio para o ensino superior.

Uma escola que pode ser citada como exemplo de unidade de ensino, que tem adotado uma reformulação no programa de Matemática das três séries do ensino médio, com esse objetivo, é o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp UFRJ). O colégio é a unidade de Ensino Fundamental e Médio da UFRJ.

Com atividades nos campos de ensino, pesquisa e extensão o colégio atua no Ensino Básico, Técnico e Tecnológico e tem como característica as constantes experimentações de metodologias e estratégias de ensino que são realizadas na unidade escolar.

Uma pesquisa sobre a influência de uma reestruturação curricular em Matemática do CAp UFRJ, na transição do ensino médio para o superior, realizada pelo Projeto Fundão, Projeto de Extensão Universitária da UFRJ, divulgada, em 2013, através do artigo “A Influência de uma Abordagem Vetorial para o Ensino Médio na Aprendizagem de Cálculo I’’, escrito pelos professores Cecília Azevedo, Daniella Assemany, Lilian Nasser, Geneci Alves, Marcelo Torraca, revelou resultados interessantes. Um dos objetivos da pesquisa era investigar se a reformulação de conteúdos de Matemática, que teve como ponto principal o ensino de vetores nas três séries do ensino médio do colégio, contribuiu para melhorar o desempenho, na disciplina de Cálculo I, dos alunos que deixavam o ensino médio e ingressavam em cursos da área de exatas.

A pesquisa mostrou que a reeorganização dos conteúdos de matemática no ensino médio, principalmente o ensino de vetores desde a 1ª série, contribuiu para que fossem alcançados resultados positivos pelos alunos do CAp UFRJ, no estudo das disciplinas do ensino superior, devido ao conhecimento prévio de vetores.

O ensino de vetores no ensino médio em Matemática pode ser apresentado como uma das medidas para minimizar essas dificuldades encontradas pelos alunos que ingressam no ensino superior. Isso porque, como já foi dito acima, os vetores podem proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos da Álgebra Linear do ensino médio, tais como matrizes, determinantes e sistemas lineares, permitem uma abordagem mais vantajosa para os Números Complexos e para a Geometria Analítica no plano, possibilitam o estudo da Geometria Analítica no espaço e oferecem alternativas para demonstrações da Geometria Plana. Sem contar que a abordagem da Geometria Analítica, em nível superior, é predominantemente vetorial.

Além disso, o ensino de vetores nessa etapa da educação básica, pode contribuir no estudo das funções (um dos fundamentos do Cálculo I) , como por exemplo, na determinação da lei de uma função afim através da translação de pontos e construção de gráficos de funções através da translação de gráficos de funções elementares.

3 O SOFTWARE GEOGEBRA

Neste capítulo, será feita uma breve apresentação sobre o Geogebra. O objetivo é mostrar a estrutura básica de funcionamento do software e destacar o motivo da escolha desse programa para o desenvolvimento desse trabalho.

3.1 Considerações Iniciais

O Geogebra é um software de matemática dinâmica. O nome Geogebra é devido ao programa reunir geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. O programa foi criado por Markus Hohenwarter da universidade de Salzburg, na Áustria, para ser utilizado nas escolas com objetivo de aprender e ensinar Matemática.

3.2 As Diferentes Formas de Exibição de um Objeto Matemático

O Geogebra permite construções geométricas com pontos, segmentos, retas, vetores, cônicas e gráficos de funções. Essas construções podem ser exibidas de três formas diferentes: na Zona Gráfica (Janela de Visualização), na Zona Algébtrica (Janela de Álgebra) e na Folha de Cálculo (Planilha).

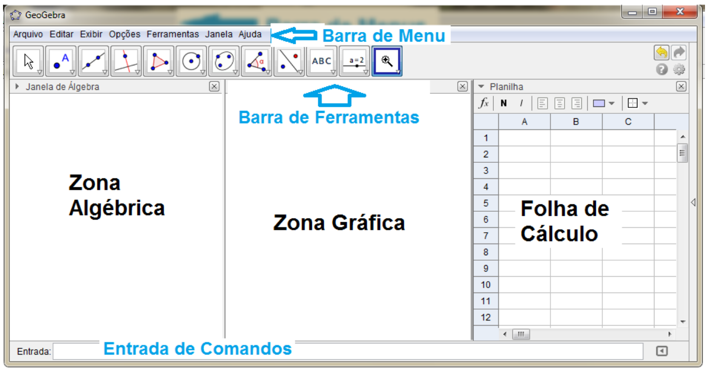


Figura 3.1: Diferentes representações no Geogebra

Quando um objeto é criado na zona gráfica, surge também sua representação na zona algébrica. Da mesma forma, um objeto inserido nas células da planilha tem sua representação mostrada na zona gráfica.

As três diferentes representações (gráfica, algébrica e na planilha) de um mesmo objeto ficam interligadas com coordenadas de pontos e equações que também se modificam de acordo com as mudanças realizadas em qualquer uma delas.

A representação gráfica se dá, por exemplo, através de pontos e gráficos de funções. A representação algébrica por meio de coordenadas de pontos e equações e a representação na folha de cálculo através de dados do objeto nas células da planilha.

3.3 Eixos Coordenados e Malha Quadriculada

Na zona gráfica (ou janela de visualização), o geogebra permite exibir ou esconder os objetos. Para isso, podemos usar a ferramenta '**Exibir/Esconder objetos',** da barra de ferramentas**.** Outra maneira é clicar no ícone à esquerda do objeto, na zona algébrica (janela de visualização), e alterar o estado de visibilidade do objeto em visível ou escondido.

O geogebra também permite exibir ou esconder eixos coordenados e uma malha quadriculada, na zona gráfica. O que pode ser feito clicando com o botão direito do mouse na área da zona gráfica e selecionando '**Eixos'** e**/**ou '**Malha'.**

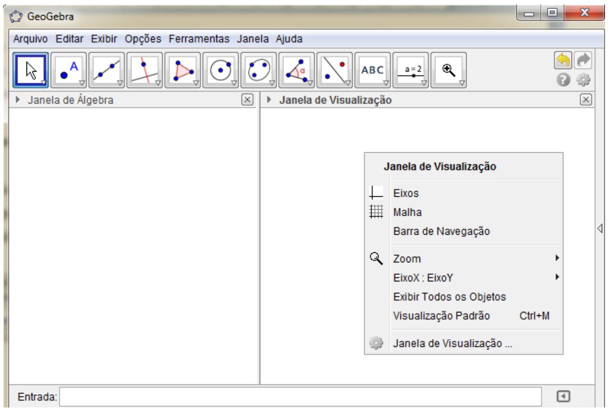


Figura 3.2: Caixa de diálogo para seleção de eixos e/ou malha

Depois de selecionados os itens **Eixos** e **Malha**, os eixos coordenados e a malha quadriculada serão exibidos na janela de visualização como mostra a figura 3.2.

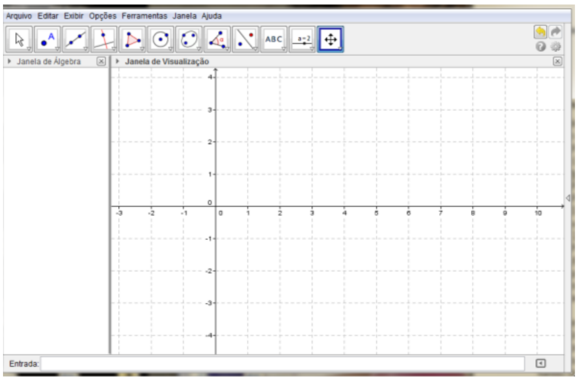


Figura 3.3: Eixos e malha selecionados

Ao clicarmos com o botão direito no fundo da zona gráfica e selecionarmos ‘**Janela de Visualização**’, temos a opção de personalizar os eixos coordenados e a malha. Podemos, por exemplo, alterar a cor, o estilo da linha, as unidades de medida e as distâncias das graduações dos eixos. Da mesma forma, podemos escolher o tipo da malha entre cartesiana, isométrica e polar, o estilo das linhas do quadriculado e a cor.

3.4 Alguns Comandos da Barra de Ferramentas

Mostraremos alguns comandos importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Esses comandos são acionados ao clicamos nos botões da barra de ferramentas. No canto inferior direito de cada botão da barra, aparece uma pequena seta para baixo. Clicando nela, é aberta uma caixa onde aparecem outras ferramentas.

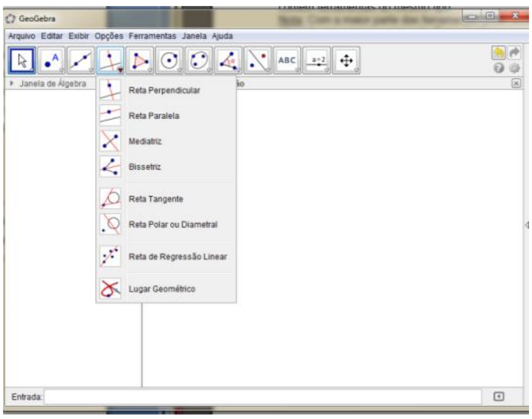
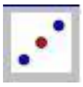


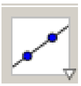
Figura 3.4: Comandos da barra de ferramentas

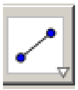
Ao posicionarmos o cursor do mouse em cima de um botão da barra de ferramentas, aparece a função do respectivo comando. Seguem abaixo as funções de alguns desses comandos:

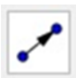
 **Mover**: Arrasta ou seleciona um ou mais objetos. O objeto selecionado através desse comando pode ser apagado com a tecla delete ou movimentado com as setas do teclado.

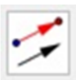
 **Novo Ponto:** Cria um novo ponto na janela de visualização com coordenadas fixadas assim que o botão do mouse é liberado. O comando também permite criar um ponto em um outro objeto já existente.

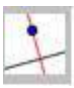
 **Ponto Médio ou Centro:** Cria um ponto médio de um segmento ao clicar neste segmento ou nas suas extremidades (dois pontos). O comando também permite criar o centro de uma cônica.

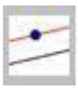
 **Reta Definida por Dois Pontos:** Cria uma reta a partir de dois pontos. A reta passa por estes dois pontos.

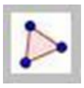
 **Segmento Definido por Dois Pontos:** Cria um segmento a partir de dois pontos. A janela de Álgebra mostra o comprimento do segmento.

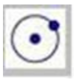
 **Vetor definido por dois pontos:** Cria um vetor a partir de dois pontos extremos escolhidos.

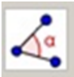
 **Vetor a partir de um ponto:** Cria um vetor a partir de um ponto criado, tendo como referência, um outro vetor.

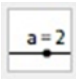
 **Reta Perpendicular** : Cria uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento de reta, lado de um polígono ou vetor.

 **Reta Paralela:** Cria uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento de reta, lado de um polígono ou vetor.

 **Polígono:** Cria polígonos, a partir de pontos escolhidos na área de trabalho.

 **Circunferência:** Selecionando um ponto M e um ponto P define a circunferência de centro M passando por P.

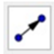
 **Ângulo:** Traça ângulo entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semi-retas); entre dois vetores ou ainda interiores de um polígono.



Controle deslizante: Nos fornece uma barra com uma escala de valores que varia de acordo com o desejo do usuário. Esses valores sempre serão associados a algum objeto criado na área de trabalho.

3.5 Trabalhando com Vetores no Geogebra

3.5.1 Usando a Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas do Geogebra nos oferece uma maneira fácil de trabalhar com vetores. Começaremos usando o comando  ‘***Vetor definido por dois pontos***’**.** Este comando tem a função de criar um vetor a partir de dois pontos extremos escolhidos.

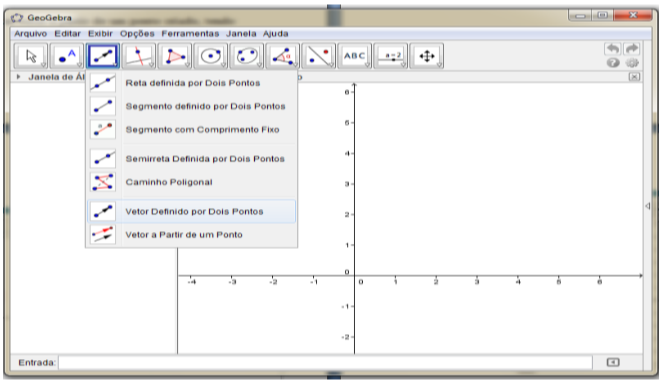
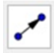


Figura 3.5: Selecionando o comando "*Vetor Definido por Dois Pontos*"

Criamos dois pontos A e B, selecionamos a ferramenta  **‘Vetor definido por dois pontos**’, clicamos no ponto A e, logo em seguida, no ponto B. Temos, então, o vetor u.

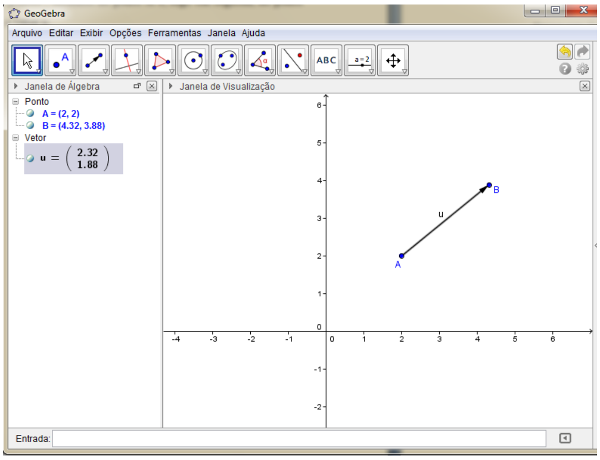
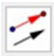
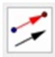


Figura 3.6: Vetor u formado pelos pontos A e B

Agora, vamos utilizar a ferramenta  ‘**vetor a partir de um ponto**’. Este comando cria um vetor a partir de um ponto criado, tendo como referência, um outro vetor existente.

Para isso, criamos o ponto C, selecionamos a ferramenta  ‘**vetor a partir de um ponto**’, clicamos no vetor u (criado anteriormante) e, em seguida, no ponto C. Temos, então, o vetor v.

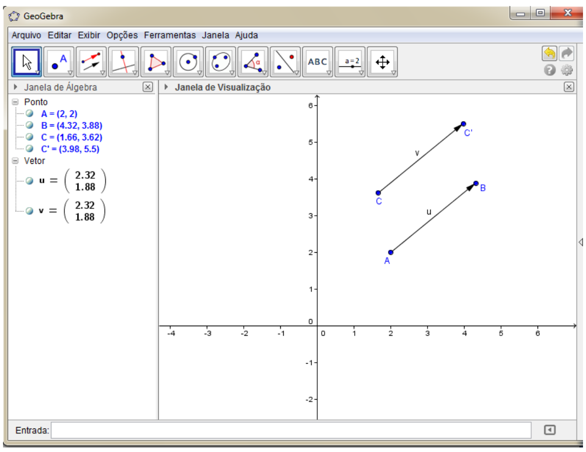


Figura 3.7: Vetor v criado a partir do vetor u

É importante ressaltar que o vetor v tem a mesma direção, o mesmo sentido e mesmo módulo do vetor u, ou seja, são vetores iguais.

3.5.2 Usando a Barra de Entrada

Além da barra de ferramentas para trabalhar com vetores, podemos usar, também, a barra de entrada.

Para criamos um vetor u, na barra de entrada, basta digitarmos as coordenadas desse vetor acompanhadas da letra minúscula que identifica o vetor. Por exemplo, $u = (2,5)$. Esse vetor tem sua origem no ponto $(0,0)$ e sua extremidade no ponto $(2,5)$. A coordenadas de um vetor, no Geogebra, são representadas na forma matricial, na janela de álgebra.

Vale a pena dizer, que se ao invés de digitarmos a letra minúscula tivéssemos digitado uma letra maiúscula, teríamos criado o ponto $U = (2,5)$ e não um vetor.

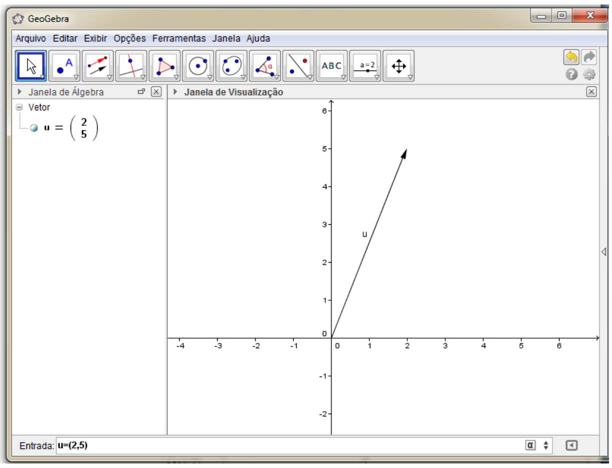


Figure 3.8: Vetor u criado através da barra de entrada

Para calcularmos o módulo do vetor, usamos o comando ‘Comprimento’ na barra de entrada. Ao começarmos a digitar a palavra comprimento na barra de entrada, aparecem várias opções de comando. Basta escolher a opção ‘Comprimento[<vetor>]’ e no lugar de ‘<vetor>’ digitar a letra que representa o vetor, por exemplo, Comprimento[u]. O módulo do vetor aparecerá na janela de álgebra, acima do vetor.

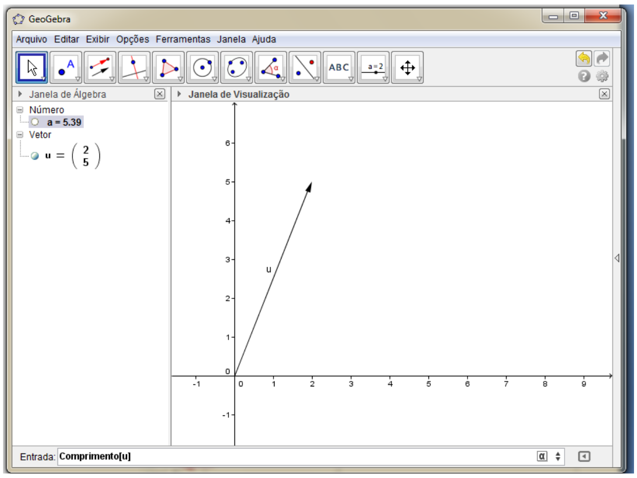


Figura 3.9: Módulo do vetor u na Janela de Álgebra

Através da barra de entrada, podemos, também, determinar o versor de um vetor. Basta, usarmos o comando ‘VetorUnitário’, na barra de entrada. Colocando ‘VetorUnitário[u]’, na barra, temos um vetor de mesma direção e sentido de u, porém com módulo 1.

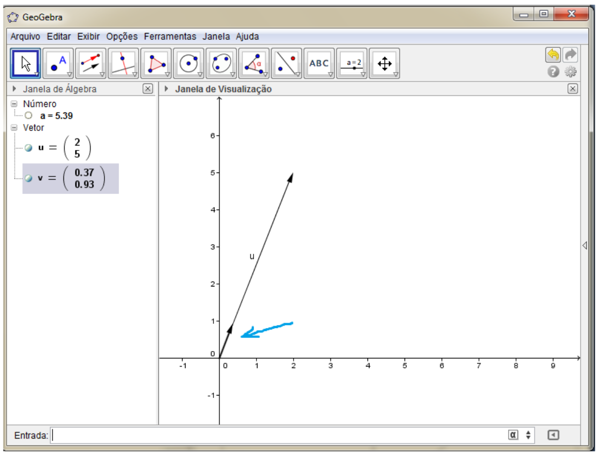


Figura 3.10: Vetor unitário de u

Além disso, podemos determinar o vetor ortogonal ao vetor u, através do comando ‘VetorPerpendicular’. Colocando ‘VetorPerpendicular[u]’, na barra, será criado um vetor v, ortogonal ao vetor u.

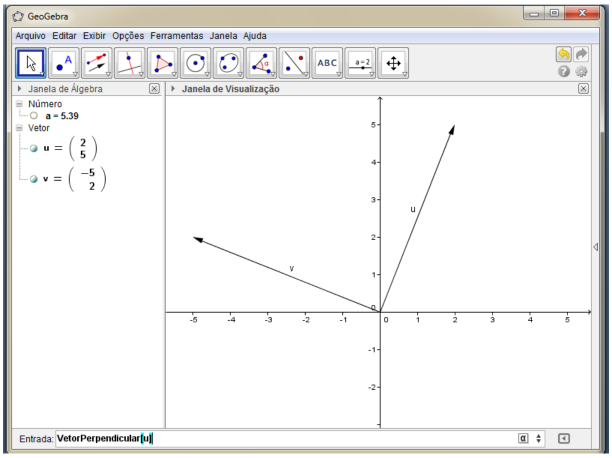


Figura 3.11: Vetor ortogonal ao vetor u

Também é possível criar um vetor definido por dois pontos, usando a barra de entrada. Para isso, basta usar o comando ‘Vetor[<ponto inicial>,<ponto final>]’. Por exemplo, se colocarmos ‘Vetor[$(-1,2),(4,5)$]’, teremos o vetor u que tem o ponto $(-1,2)$ como origem e o ponto $(4,5)$ como extremidade.

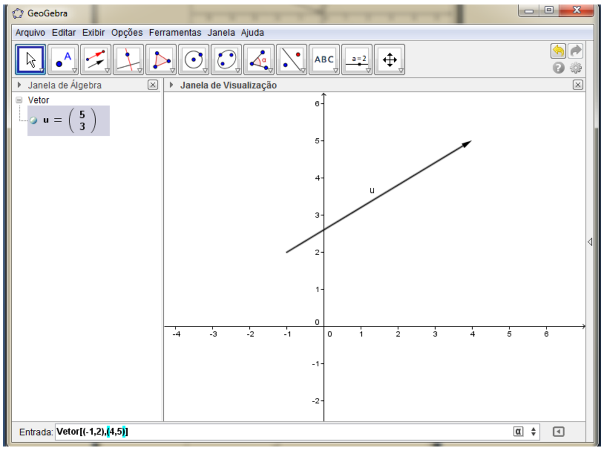


Figura 3.12: Vetor definido por dois pontos através da barra de entrada

Podemos usar, também, a barra de entrada para fazer operações com vetores. Como soma, produto por um número real e produto interno. Vejamos como isso é possível : Vamos criar o vetor v de coordenadas $(4,1)$, ou seja, digitamos "$v = (4,1)$" na barra de entrada. Para fazer a soma dos vetores u e v, basta digitarmos '$u+v$' nesta mesma barra. Temos, então o vetor w que é o vetor soma de u e v.

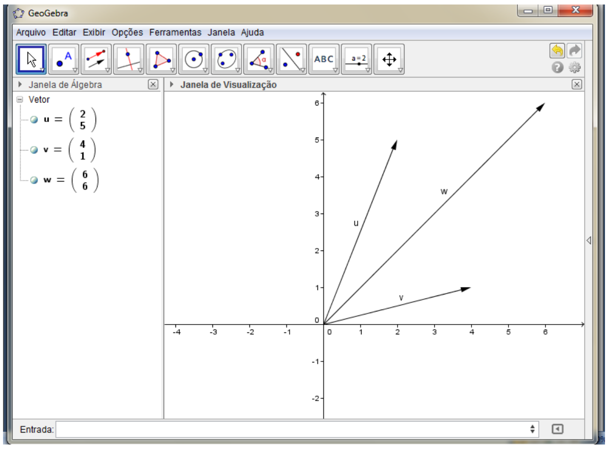


Figura 3.13: Vetor soma w

Agora, vamos fazer o produto de um vetor por um número real. Por exemplo, multiplicar 2 por v. Basta digitarmos '$2*v$', na barra de entrada. Temos, então o vetor z que tem a mesma direção e mesmo sentido de v, porém o dobro do módulo do vetor v.

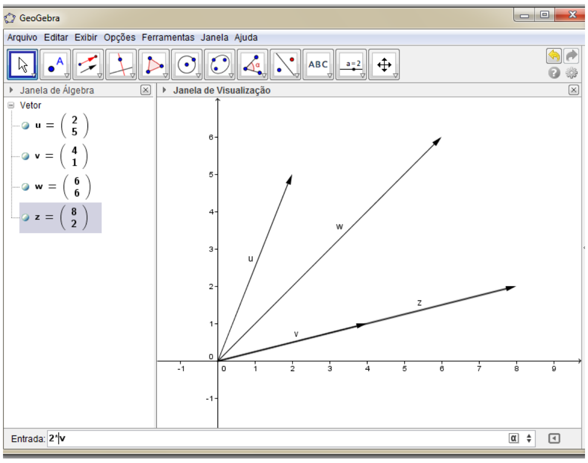


Figura 3.14: Vetor $z = 2v$

Usando a barra de entrada, podemos ainda calcular o produto interno de dois vetores. Por exemplo u e v, criados anteriormente. Basta digitarmos '$u*v$', na barra de entrada. O resultado aparecerá na janela de álgebra, acima dos vetores. Nesse caso, podemos observar que o produto interno dos vetores u e v é 13.

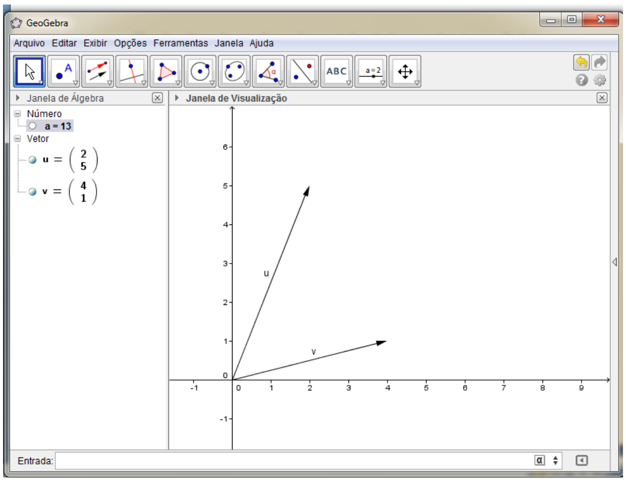


Figura 3.15: Produto interno dos vetores
u e v exibido na janela de álgebra

Um detalhe importante, que vale a pena ser ressaltado, é que ao mudar as coordenadas dos vetores, em qualquer uma das atividades acima, temos também a mudança dos resultados que estão relacionados com os vetores em questão.

Por exemplo, no caso do cálculo do módulo do vetor $u = (2{,}5)$, se mudássemos as coordenadas para $u = (3{,}4)$ teríamos também a mudança de seu módulo automaticamente. Isso vale para qualquer uma das atividades do Geogebra envolvendo vetores.

Para alterar as coordenadas de um vetor, podemos clicar com o botão direito do mouse em cima do vetor, na janela de álgebra, ir em propriedades e mudar as coordenadas na caixa de entrada ‘Valor’ ou ‘Definição’

3.6 Motivação para a escolha do programa

São muitas as vantagens de se utilizar o Geogebra como recurso didático computacional: o Geogebra é um software de geometria dinâmica de download gratuito, reúne em um só ambiente aspectos geométricos e algébricos de um mesmo objeto, oferece um grande número de recursos e mesmo assim é simples de usar. Estes foram os principais fatores que motivaram a escolha desse programa para o desenvolvimento desse trabalho.

4 VETORES NO PLANO

Neste capítulo será apresentado um embasamento teórico sobre o assunto com o objetivo de servir de auxílio para os professores, nas atividades que serão apresentadas no capítulo 5. A principal referência bibliográfica, do capítulo, é o livro: "A Matemática do Ensino Médio - Volume 3'' dos autores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesár Morgado.

A palavra vetor é oriunda do termo latino *vehere*, que significa transportar. De fato, o principal objetivo dos vetores é deslocar pontos, isto é, fazer translações. Por exemplo, quando um vetor desloca cada um dos pontos de uma figura, ele efetua uma translação dessa figura, ou seja, a figura toda é deslocada.

Na figura abaixo, o triângulo $A'B'C'$ é a translação do triângulo ABC pelo vetor v. A translação do triângulo ABC fica determinada pelas características do vetor.

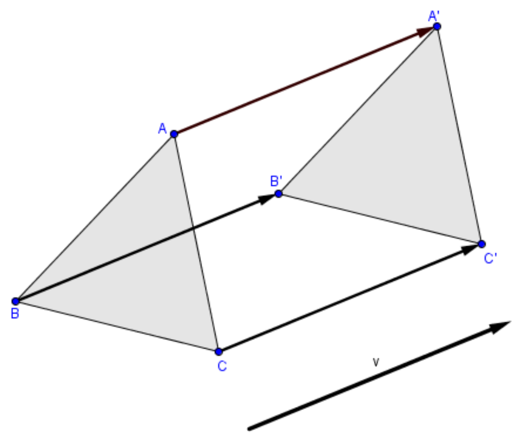


Figura 4.1: Translação do triângulo ABC

4.1 Segmento Orientado

Diz-se que um segmento de reta está orientado quando se escolhe uma de suas extremidades para ser o ponto inicial e a outra para ser o ponto final. No segmento orientado AB, A é o ponto inicial e B é o ponto final do segmento. Neste caso, foi estabelecido o sentido de percurso de A para B.

Um segmento orientado degenerado, no qual o início e a extremidade final se reduzem a um mesmo ponto é chamado de segmento orientado nulo. É comum representar um segmento orientado não nulo AB por uma flecha com origem no ponto A apontando para o ponto B, como mostra a figura 4.2.

Caso fosse escolhido o sentido de B para A, teríamos o segmento orientado BA. Dizemos que o segmento orientado BA tem sentido oposto ao do segmento AB.

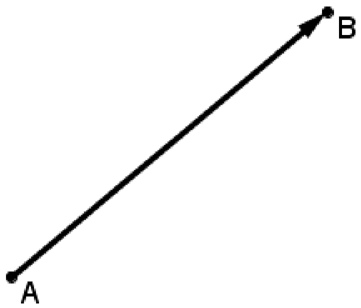


Figura 4.2: Segmento orientado AB

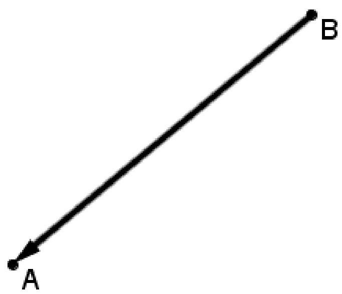


Figura 4.3: Segmento orientado BA

Fixada uma unidade de comprimento, dizemos que dois segmentos orientados AB e CD possuem o mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD CD têm o mesmo comprimento.

IDizemos que dois segmentos orientados AB e CD são paralelos se as respectivas retas suportes AB e CD são paralelas. Sendo comum dizer, neste caso, que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção.

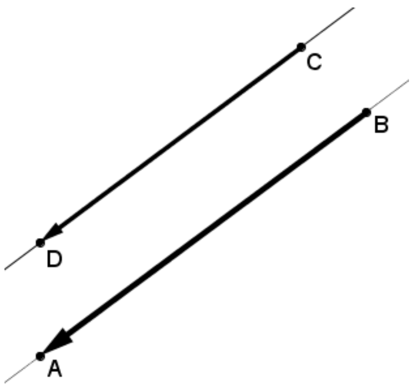


Figura 4.4: Segmentos orientados paralelos de mesmo sentido

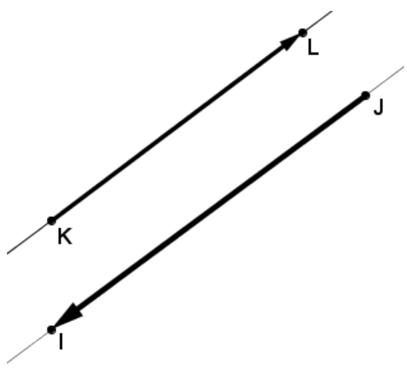


Figura 4.5: Segmentos orientados paralelos de sentido contrário

O paralelismo entre as retas suportes inclui o caso em que elas coincidem. Neste caso, os segmentos orientados dessas retas são chamados de colineares e também são considerados como tendo a mesma direção.

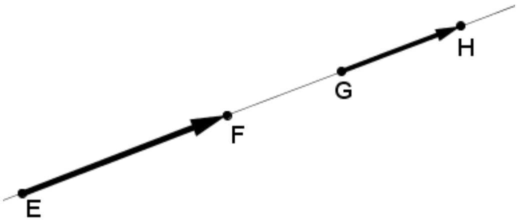


Figura 4.6: Segmentos orientados colineares de mesmo sentido

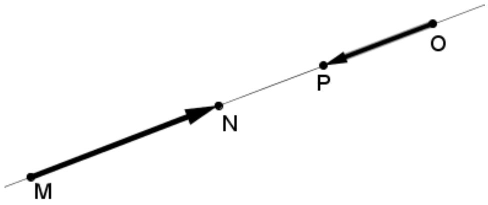


Figura 4.7: Segmentos orientados colineares de sentido contrário

4.2 Segmentos Orientados Equipolentes

Dois segmentos orientados são ditos *equipolentes* quando:

1) Têm o mesmo comprimento;
2) São paralelos ou colineares (têm a mesma direção);
3) Têm o mesmo sentido.

Dois segmentos orientados AB e CD paralelos e de mesmo comprimento têm o mesmo sentido quando AB e CD são lados opostos de um paralelogramo do qual os outros lados opostos são AC e BD.

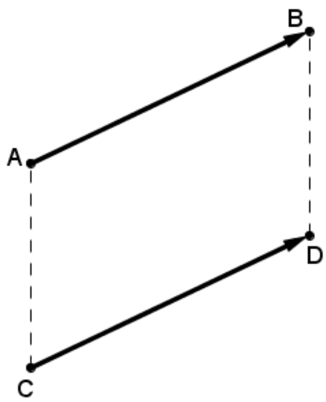


Figura 4.8: Segmentos equipolentes

Uma condição necessária e suficiente para que os segmentos orientados AB e CD sejam equipolentes é que o ponto médio de BC coincida com o ponto médio de AD , pois através de conhecimentos da Geometria Plana, sabemos que as diagonais de um paralelogramo cortam-se em um ponto que é o ponto médio de ambas.

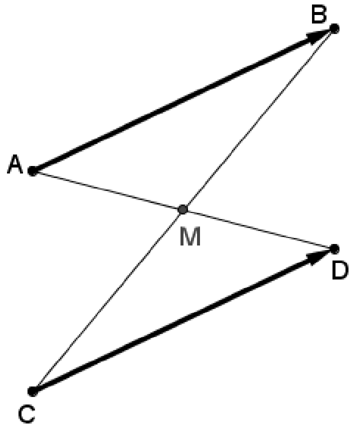


Figura 4.9: Ponto médio
M de AD e BC

Quando os segmentos orientados AB e CD são equipolentes e estão sobre a mesma reta, isto é, são colineares, BC e AD também tem o mesmo ponto médio.

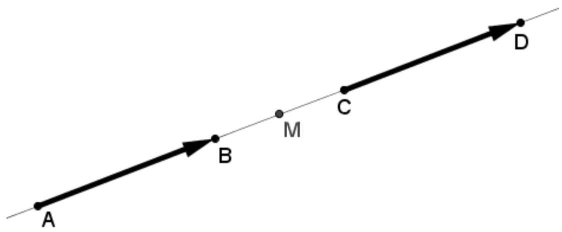


Figura 4.10: Ponto médio M de AD e BC

4.3 Vetor no Plano

Quando dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes diz-se que eles representam o mesmo vetor v . Escreve-se $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. O vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . Cada segmento orientado equipolente a AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Assim, temos segmentos orientados diferentes, porém representando o mesmo vetor.

Se os segmentos orientados CD, EF, GH, IJ, KL e MN são equipolentes a AB, podemos escrever $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$. Todos eles são representantes do vetor v.

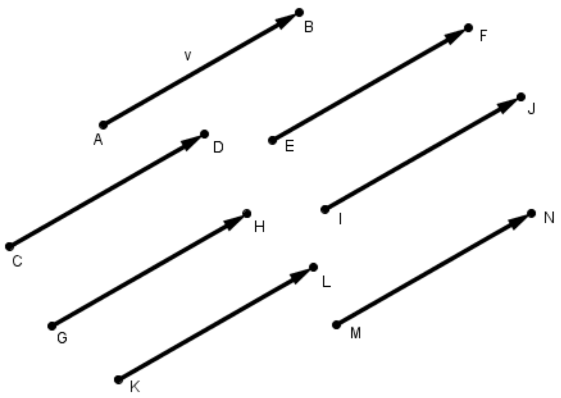


Figura 4.11: Segmentos equipolentes representantes do vetor v

4.3.1 Vetor nulo

Vetor nulo é o vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Admitindo que os segmentos orientados nulos sejam equipolentes entre si, temos que todos os representantes do vetor nulo são segmentos com ponto inicial e ponto final coincidentes. O vetor nulo é indicado por 0.

4.3.2 Módulo de um vetor

Chamamos de módulo ou norma de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes. Usamos a notação $|v|$ para indicar o módulo do vetor v. Se $|v| = 1$, dizemos que o vetor v é unitário.

4.3.3 Vetor Oposto

Dado o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, seu simétrico, ou oposto, é o vetor $\overrightarrow{BA}$ e indica-se por $-v$ ou $-\overrightarrow{AB}$.

4.3.4 Vetores Iguais

Dois vetores $v = \overrightarrow{AB}$ e $u = \overrightarrow{CD}$ são iguais se, somente se, os segmentos orientados AB e CD que os representam são equipolentes.

4.3.5 Vetores Paralelos

Dois vetores não nulos v e u são paralelos se tiverem segmentos orientados representantes AB e CD paralelos ou colineares. Neste caso, dizemos que os vetores v e u têm a mesma direção e também são chamados de colineares, pois podem ser representados sobre uma mesma reta. Admite-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

4.3.6 Versor de um vetor

O versor de um vetor não nulo v é o vetor unitário paralelo e de mesmo sentido de v.

4.4 Operações com Vetores

Os vetores permitem que se façam operações entre eles. As propriedades dessas operações são simples. Vamos definir agora duas operações: A soma de vetores e a multiplicação de um vetor por um número real.

4.4.1 Adição de Vetores

Podemos definir a soma de dois vetores v e u de duas maneiras que se equivalem. Na primeira maneira, representamos um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ e, depois, o vetor $u = \overrightarrow{BC}$. Em seguida, representamos um segmento orientado com ponto inicial em A e ponto final em C. O vetor soma de v com u é representado pelo segmento orientado AC. Logo, podemos escrever $v + u = \overrightarrow{AC}$.

Esta definição continua válida mesmo quando os segmentos orientados AB e BC são colineares.

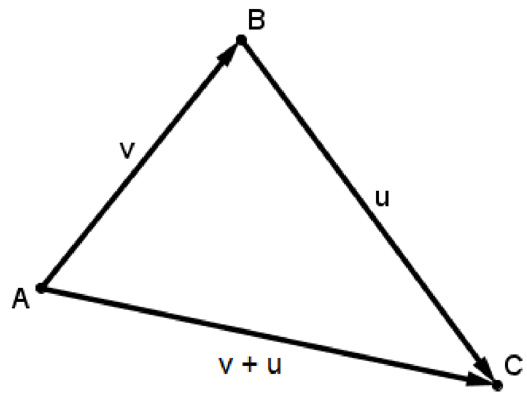


Figura 4.12: Soma de vetores

Na outra maneira, representamos os vetores $v = \overrightarrow{AB}$ e $u = \overrightarrow{AC}$ através de segmentos orientados com mesmo ponto inicial. Em seguida, construímos o paralelogramo ABCD. Definimos então o vetor $v + u = \overrightarrow{AD}$, onde AD é a diagonal do paralelogramo.

Esta segunda maneira é conhecida como “regra do paralelogramo” e só é válida quando os segmentos orientados AB e AC não são colineares, pois, caso contrário, não se tem um paralelogramo.

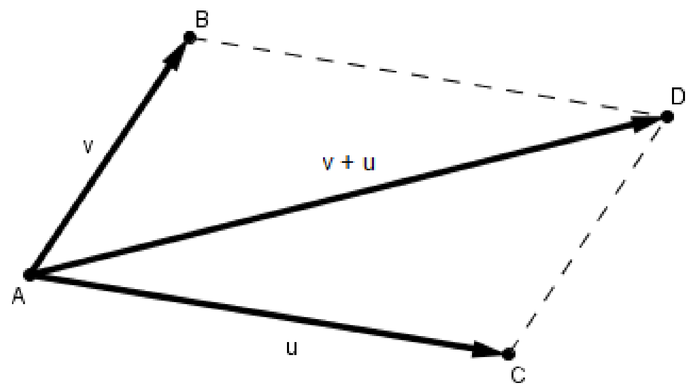


Figura 4.13: Soma de vetores - Regra do paralelogramo

4.4.2 Multiplicação de um Vetor por um Número Real

A outra operação, citada anteriormente, é a multiplicação de um vetor v por um número real t, que tem como resultado o vetor indicado por tv. Por definição, seguem as características desse vetor:

Se $t = 0$ ou $v = 0$, então $tv = 0$.

Se $t \neq 0$ e $v \neq 0$, o vetor tv é tal que:

a) Se $t > 0$ e $v = \overrightarrow{AB} \neq 0$, temos que $tv = \overrightarrow{AC}$, onde C é um ponto da reta AB tal que os segmentos orientados AB e AC têm o mesmo sentido. Portanto, os vetores v e tv têm o mesmo sentido.

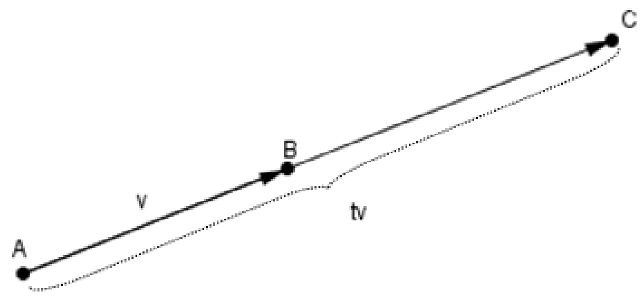


Figura 4.14: Vetor tv se $v \neq 0$ e $t > 0$

Se $t < 0$ e $v = \overrightarrow{AB} \neq 0$, temos que $tv = \overrightarrow{AC}$, onde C é um ponto da reta AB tal que os segmentos orientados AB e AC têm sentidos contrários, assim como, os vetores v e tv.

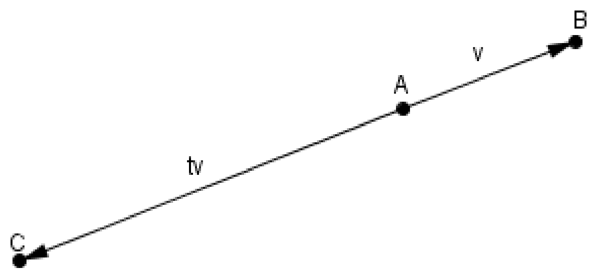


Figura 4.15: Vetor tv se $v \neq 0$ e $t < 0$

b) tv tem a mesma de direção de v.

c) $|tv| = |t||v|$, ou seja, o comprimento do vetor tv é igual ao comprimento de v multiplicado por $|t|$.

As propriedades das operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um número real serão apresentadas nas próximas seções onde os vetores serão vistos em termos de coordenadas.

4.5 Coordenadas no Plano

Uma reta é orientada quando sobre ela se estabeleceu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso é considerado negativo. Uma reta orientada recebe o nome de eixo quando se fixa nela um ponto O chamado *origem*.

Podemos fazer uma correspondência biunívoca entre um eixo qualquer e o conjunto R dos números reais. Para isso, basta fazer a origem O do eixo corresponder com o número zero, cada ponto P, à direita de O, corresponder com um número positivo e os pontos, à esquerda de O, fazer corresponder a números negativos.

4.5.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Seja π um plano, um sistema de coordenadas cartesianas no plano π é um par de eixos OX e OY, contidos em π, perpendiculares e de mesma origem O.

O eixo OX é chamado de eixo das abscissas e OY de eixo das ordenadas. Indica-se o sistema através da notação OXY.

Lembrando que o conjunto R^2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais, a cada ponto P do plano π podemos associar a um par ordenado (x, y) do R^2. Dizemos que os números x e y são as coordenadas do ponto P e indicamos por $P = (x, y)$, onde x é a abscissa e y é a ordenada de P. A origem O do sistema de coordenadas corresponde ao par ordenado $(0,0)$.

Existe, portanto, uma correspondência biunívoca entre os pontos P do plano π e os pares ordenados (x, y) de números reais, ao se fixar um sistema de coordenadas em π.

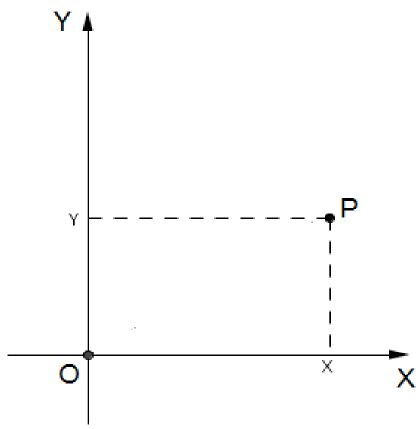


Figura 4.16: Sistema de eixos ortogonais

Os eixos ortogonais OX e OY dividem o plano em quatro partes. Cada uma dessas regiões é chamada de *quadrante.* Os quadrantes são numerados no sentido anti-horário.

O 1º quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x > 0$ e $y > 0$.

O 2º quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x < 0$ e $y > 0$.

O 3º quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x < 0$ e $y < 0$.

O 4º quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x > 0$ e $y < 0$.

Os pontos da forma $P = (x, 0)$ estão sobre o eixo OX e os pontos $P = (0, y)$ estão sobre o eixo OY.

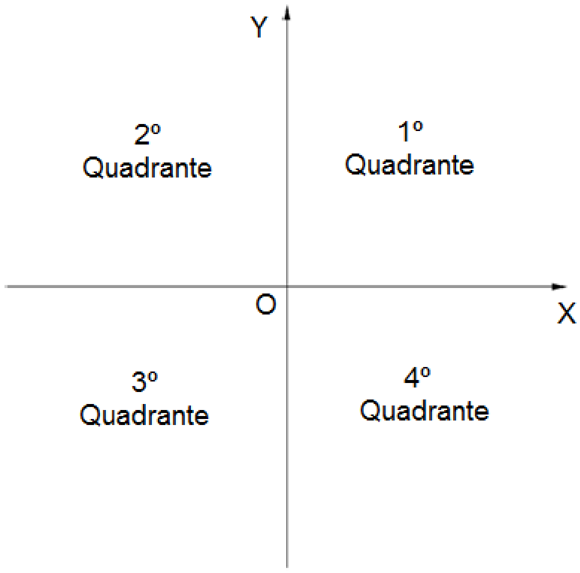


Figura 4.17: Quadrantes

4.5.2 Distância entre Pontos do Plano

Dados dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do plano em relação ao sistema de eixos ortogonais OXY. Se $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então a distância entre P e Q, que indicamos por $d(P, Q)$, é a distância entre dois pontos do eixo OY. A distância entre dois pontos de um eixo é o módulo da diferença dos números reais que estão associados a esses pontos, portanto, neste caso, $d(P, Q) = |y_2 - y_1|$.

Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, então $d(P, Q) = |x_2 - x_1|$, que é a distância entre dois pontos do eixo OX. Porém, se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, considerando o ponto $R = (x_2, y_1)$, a distância de P a Q, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo PQR. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(Q, R)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2$$

Logo, $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

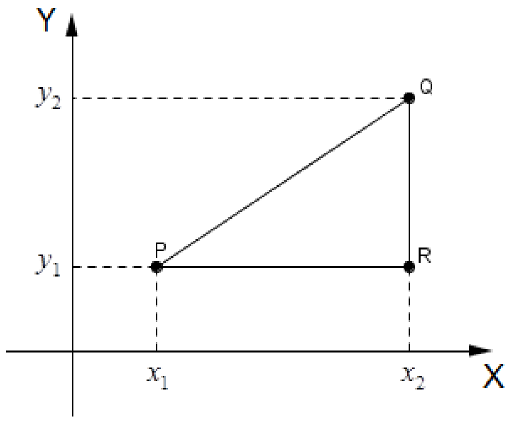


Figura 4.18: Distância entre os pontos P e Q

4.5.3 Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento Orientado

Se PQ é um segmento orientado, onde $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ são pontos do plano representados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, então, o ponto médio M do segmento PQ tem coordenadas $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

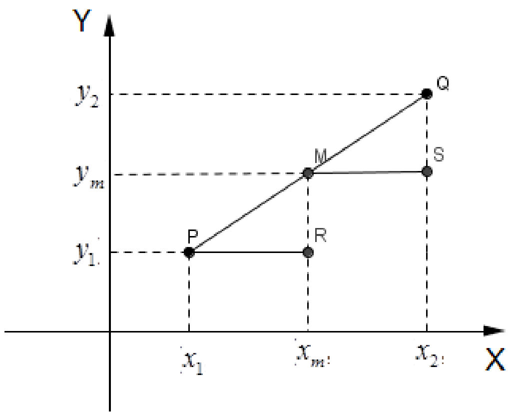


Figura 4.19: Ponto médio M do segmento PQ

Demonstração:

Seja $M=(x_m,y_m)$ o ponto médio do segmento PQ, onde $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$. Consideremos que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, ou seja, o segmento PQ é paralelo ao eixo OX. Neste caso, $y_m = y_1 = y_2$ e $x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Se $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, o segmento PQ é paralelo ao eixo OY. Logo, $x_m = x_1 = x_2$ e $y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow y_m = \dfrac{y_1+y_2}{2}$

Suponhamos agora que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, isto é, PQ não é paralelo ao eixo OX nem ao eixo OY. Considerando os pontos $R=(x_m,y_1)$ e $S=(x_2,y_m)$, podemos notar que os triângulos retângulos PMR e MQS são congruentes pelo caso LAA_o, pois os ângulos $R\hat{P}M$ e $S\hat{M}Q$ são congruentes e PM e MQ têm a mesma medida, visto que M é ponto médio de PQ. Portanto os segmentos PR e MS têm o mesmo comprimento. Da mesma forma, os segmentos RM e SQ também possuem a mesma medida. Logo, $x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ e $y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow y_m = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

4.6 Vetores no Plano Cartesiano

Se $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$, $C=(x_c,y_c)$ e $D=(x_d,y_d)$ são pontos do plano em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, tais que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, então $x_b - x_a = x_d - x_c$ e $y_b - y_a = y_d - y_c$.

Demonstração:

Se dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes, vimos, anteriormente, que o ponto médio de BC coincide com o ponto médio de AD, então

$$\left(\frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2}\right) = \left(\frac{x_a + x_d}{2}, \frac{y_a + y_d}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_b + x_c, y_b + y_c) = (x_a + x_d, y_a + x_d)$$

$$\Leftrightarrow x_b + x_c = x_a + x_d \text{ e } y_b + y_c = y_a + y_d$$

$$\Leftrightarrow x_b - x_a = x_d - x_c \text{ e } y_b - y_a = y_d - y_c$$

Geralmente, manipulam-se vetores através de suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais.

4.6.1 Coordenadas de um Vetor

Seja $v = \overrightarrow{AB}$. Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, os números $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são chamados de coordenadas do vetor v em relação ao sistema de coordenadas considerado. Escrevemos $v = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Quando dizemos que $v = (x, y)$, é o mesmo que afirmar que o vetor v pode ser representado por um segmento orientado que tem ponto inicial em $O = (0,0)$ e ponto final em $P = (x, y)$, ou seja, $v = \overrightarrow{OP}$.

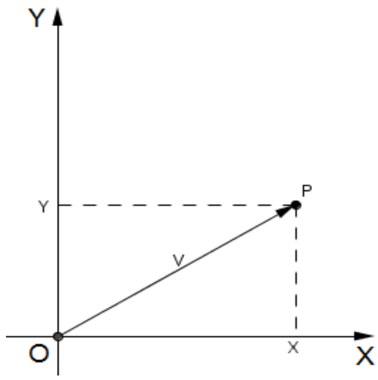


Figura 4.20: Vetor no plano cartesiano

4.6.2 Operações com Vetores em termos de Coordenadas

Sejam os vetores $v=(x_1,y_1)$ e $u=(x_2,y_2)$ em relação a um sistema de coordenadas ortogonais OXY e $t \in R$. Define-se:

$$v+u=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$tv=(tx_1,ty_1)$$

Sabendo que, para somar os vetores v e u, somam-se as coordenadas correspondentes de v e u, e para multiplicar um número real t por um vetor v, multiplica-se cada coordenada de v por t, a partir das propriedades da adição e multiplicação de números reais, pode-se deduzir facilmente, as propriedades da adição de vetores e da multiplicação de um vetor por um número real.

4.6.3 Propriedades da Adição de Vetores

Sejam v, u e w, vetores quaisquer do plano. Têm-se as seguintes propriedades:

Comutativa: $v+u=u+v$

Associatividade: $(v+u)+w=v+(u+w)$

Elemento Neutro aditivo: $v+0=0+v=v$

Inverso Aditivo: $-v+v=v+(-v)=0$

4.6.4 Propriedades da Multiplicação de um Vetor por um Número Real

Sejam v e u vetores quaisquer do plano e os números reais t e s. Tem-se:

Associatividade: $s(tv)=st(v)$

Elemento Neutro multiplicativo: $1v=v$

Distributividade: $(t+s)v=tv+sv$

$$t(v+u)=tv+tu$$

As demonstrações destas propriedades serão omitidas, mas são de fácil dedução.

4.7 Produto Interno

Além das duas operações, que foram definidas, anteriormente, existe uma terceira operação entre vetores que é o produto interno. Esta operação pode ser definida de duas maneiras. A primeira consiste numa abordagem geométrica e a outra em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Antes de darmos uma definição geométrica ao produto interno definiremos o ângulo entre dois vetores não nulos e o módulo de um vetor em termos de coordenadas.

Ângulo entre Vetores

O ângulo entre os vetores não nulos v e u, é por definição, o ângulo $B\hat{A}C$, onde $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são respectivos representantes de $v = \overrightarrow{AB}$ e $u = \overrightarrow{AC}$ que possuem mesmo ponto inicial A.

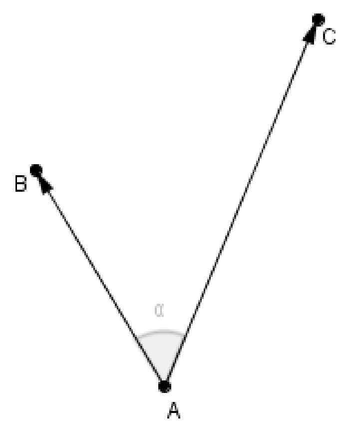


Figura 4.21: Ângulo entre vetores

Vetores Ortogonais

Dois vetores não nulos u e v são ortogonais (ou perpendiculares), e indica-se por $u \perp v$, se o ângulo entre eles é reto.

Módulo de um Vetor em termos de Coordenadas

Se $v = \overrightarrow{AB}$, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, em relação a um sistema de eixos ortogonais, então o módulo ou a norma do vetor v é:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se $v = \overrightarrow{OP}$, onde $O = (0,0)$ e $P = (x, y)$, então:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.7.1 Definição Geométrica do Produto Interno

O produto interno dos vetores v e u, é por definição, o número real $< v,u > = |v|\ |u| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre v e u. Se $v = 0$ ou $u = 0$, então $< v,u > = 0.$

O ângulo θ entre dois vetores v e u está relacionado ao produto interno deles.

$$< v,u > \ > 0 \iff \cos\theta > 0 \iff 0 \le \theta < 90^\circ$$

$$< v,u > = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90^\circ$$

$$< v,u > \ < 0 \iff \cos\theta < 0 \iff 90^\circ < \theta \le 180^\circ$$

Condição de Ortogonalidade

Através da afirmação acima podemos estabelecer que a condição de ortogonalidade entre dois vetores é que o produto interno deles seja nulo, ou seja, dois vetores u e v são ortogonais se, e somente, $<u,v>=0$.

4.7.2 Produto Interno em Termos de Coordenadas

Sejam $u=\overrightarrow{OP}$ e $v=\overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, onde $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$ e O é a origem de um sistema de coordenadas de eixos ortogonais.

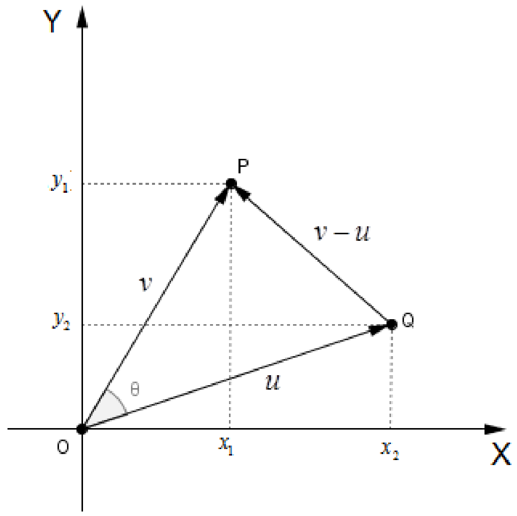


Figura 4.22: Triângulo OPQ
formado pelos vetores v, u e $v-u$

O vetor $\overrightarrow{QP}=v-u=(x_1-x_2,y_1-y_2)$. Seja θ o ângulo entre os vetores $u=\overrightarrow{OP}$ e $v=\overrightarrow{OQ}$. Pela lei dos cossenos no triângulo OPQ, temos:

$$|v-u|^2=|u|^2+|v|^2-2|u||v|\cos\theta$$

Lembrando que, se $v=(x,y)$, então $|v| = \sqrt{x^2+y^2}$. Podemos substituir $|v-u|^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$, $|u|^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2$ e $|v|^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2$ na igualdade acima, onde obtemos:

$$2|u||v|\cos\theta = x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2$$

$$= x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 - x_1{}^2 + 2x_1x_2 - x_2{}^2 - y_1{}^2 + 2y_1y_2 - y_2{}^2$$

$$= 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

$$= 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$|v||u|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$$

Mas, $<u,v> = |v||u|\cos\theta$

Portanto, $<u,v> = x_1x_2 + y_1y_2$

4.7.3 Propriedades do Produto Interno

Fazendo uso de coordenadas e sabendo que $<u,v> = x_1x_2 + y_1y_2$, é fácil deduzir as propriedades do produto interno.

Sejam u, v e w, vetores quaisquer do plano e t um número real. Tem-se assim:

1) $<v,v> \ = |v|^2 \geq 0$

2) $<v,v> = 0 \Leftrightarrow v = 0$

3) $<u,v> = <v,u>$

4) $<u+v,w> = <u,w> + <v,w>$

5) $<u,v+w> = <u,v> + <u,w>$

6) $<tu,w> = <u,tw> + t<u,w>$

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo, será apresentada uma proposta de atividades que possa ser utilizada no ensino de vetores em turmas da 1ª série do ensino médio. As atividades desta proposta são apresentadas para serem desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra. O trabalho faz uso de atividades que estão relacionadas à metodologia de investigações matemáticas.

As atividades investigativas visam desenvolver a capacidade dos alunos de intuirem através de experimentações e, consequentemente, fazerem deduções e generalizações. A proposta das atividades de investigação matemática está de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> [...] A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p.70).

Essa abordagem permite que os alunos façam suas suposições e elaborem ideias a respeito do conteúdo trabalhado. Com isso, no decorrer da aplicação de cada atividade proposta, o professor encontra um ambiente favorável para apresentar as definições, conceitos e demonstrações sobre o assunto que foi estudado.

As atividades propostas neste capítulo são correspondentes aos assuntos apresentados no capítulo 4 deste trabalho. Os conteúdos que serão abordados são: segmentos equipolentes, conceito de vetor, operações com vetores, vetores no plano cartesiano, operações com vetores em termos de coordenadas, módulo de vetor, ângulo entre vetores.

5.1 Atividade 1 - Conceito de Vetor

Os pré-requisitos para esta atividade são: definição de segmento orientado, comprimento de segmento orientado, segmentos orientados paralelos.

Para essa atividade, a malha e os eixos devem estar desabilitados. Para isso, se ambos estiverem habilitados, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização. Ao abrir a caixa de diálogo, clique em “Eixos”, em seguida, em “Malha”.

1.1 Crie os pontos A, B e construa o segmento orientado AB utilizando o comando *Vetor Definido por Dois Pontos*.

1.2 Crie os pontos C, D, E, F, G, H, I e J, de modo que fiquem bem distribuídos, na janela de visualização e construa os segmentos orientados CC', DD', EE', FF', GG', HH', II' e JJ' utilizando a ferramenta *Vetor a Partir de um Ponto e* tomando como referência o segmento orientado AB .

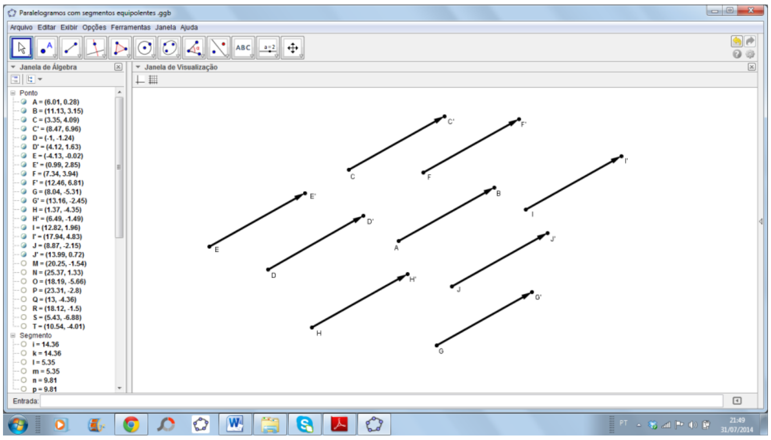


Figura 5.1: Segmentos Orientados

1.3 Movimente livremente o ponto B, extremidade final do segmento AB, através da ferramenta *Mover*. O que você observou com relação ao comprimento, sentido e direção do segmento orientado AB? E com relação ao comprimento, sentido e direção dos segmentos CC', DD', EE', FF', GG', HH', II' e JJ', o que aconteceu?

1.4. Utilizando a ferramenta *Segmento definido por Dois Pontos*, construa os segmentos AC e BC'. Repita o mesmo procedimento para construir os segmentos DE e $D'E'$. Como são chamados os polígonos $ABC'C$ e $DEE'D'$? Justifique sua resposta.

O professor pode aproveitar esse momento para definir o conceito de Equipolência de segmentos orientados.

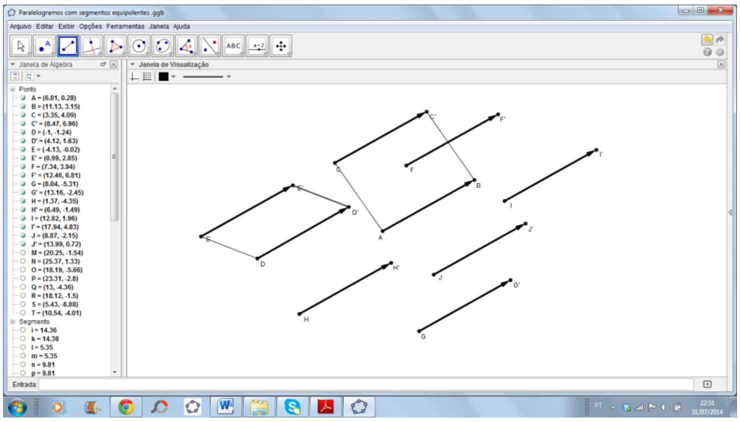


Figura 5.2: Polígonos $ABC'C$ e $DEE'D'$

1.5. Apague os segmentos orientados CC', DD', EE', FF', GG', HH', II' e JJ'. Habilite o rastro do segmento orientado AB. Movimente livremente o segmento orientado AB pela janela de visualização. Que tipo de figuras são formadas pelo rastro deixado na movimentação do segmento?

Após a exploração desta atividade, o professor pode apresentar ao aluno a definição de vetor. As definições de módulo de vetor, vetores iguais e vetores paralelos também podem ser apresentadas.

1.6. Abra um novo arquivo. Crie os pontos A, B e C. Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa o triângulo ABC.

1.7. Crie os pontos D e E. Construa o vetor $v = \overrightarrow{DE}$. Utilizando a ferramenta *Translação por um Vetor,* faça a translação do triângulo ABC, clicando no triângulo e depois no vetor. O triângulo $A'B'C'$ é a translação do triângulo ABC, ou seja, o triângulo ABC se deslocou até o triângulo $A'B'C'$. Qual o comprimento do deslocamento? Qual o sentido da translação? Qual a direção segundo a qual a translação foi realizada?

1.8. Selecione a ferramenta *Mover* e movimente livremente os vértices do triângulo ABC. O que pode ser observado?

1.9. Movimente livremente o ponto E, extremidade do vetor $v = \overrightarrow{DE}$. O que acontece com o vetor $v = \overrightarrow{DE}$? O que acontece com o triângulo $A'B'C'$?

Nesse momento, o professor pode falar sobre o principal objetivo dos vetores que é deslocar pontos através das translações. Comentando que as translações ficam determinadas pelas características do vetor (comprimento, direção e sentido).

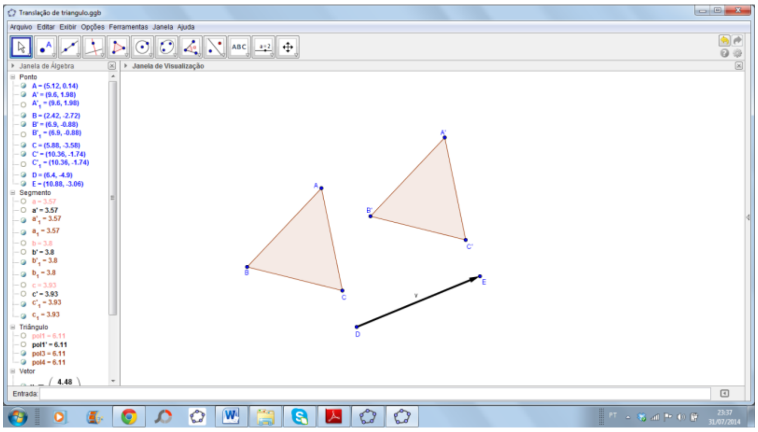


Figura 5.3: Translação do triângulo ABC

O principal objetivo da atividade 1 é o entendimento do conceito de vetor. No item 1.3, o aluno é levado a manipular os segmentos orientados e observar as características que eles têm em comum. A observação dessas características visa preparar o aluno para a apresentação do conceito de equipolência de segmentos orientados.

No item 1.4, o objetivo é analisar que segmentos orientados estão relacionados a paralelogramos. O aluno deve concluir que os polígonos $ABC'C$ e $DEE'D'$ são paralelogramos, pois os lados opostos são congruentes e paralelos. Já em 1.5, o rastro do segmento orientado AB são segmentos orientados equipolentes a AB. Esta observação pode servir para introduzir a definição do conceito de vetor fazendo o aluno compreender que todos os segmentos orientados equipolentes a AB representam o mesmo vetor v.

Os itens 1.7, 1.8 e 1.9, servem para explorar a ideia do principal objetivo dos vetores que é deslocar pontos, ou seja, fazer translações. O aluno é conduzido a perceber que o comprimento do deslocamento do triângulo ABC é a norma do vetor e a direção e o sentido da translação são respectivamente a direção e o sentido do vetor $v = \overrightarrow{DE}$. Dessa forma, fica claro que as características do vetor determinam a translação.

5.2 Atividade 2 - Adição de Vetores

Para essa atividade, os eixos devem estar habilitados e a malha desabilitada. Para isso, se ambos estiverem habilitados, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização. Ao abrir a caixa de diálogo, clique em “Malha”.

Pré-requisito: Conceito de Vetor

2.1. Crie o ponto A na interseção dos eixos, origem do sistema.

2.2. Desabilite os eixos e crie os pontos B, C e D.

2.3. Construa os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$, utilizando o comando *Vetor Definido por Dois Pontos .*

2.4. Selecione a ferramenta *Mover*, clique em cima do vetor $v = \overrightarrow{CD}$ e arraste-o até que o ponto C coincida com o ponto B (extremidade final do vetor $u = \overrightarrow{AB}$).

2.5. Na barra de entrada, digite “ $u + v$ “. Qual o ponto inicial (origem) do vetor formado? Qual o ponto final do vetor?

2.6. Apague o vetor w, formado na atividade 2.5, movimente livremente os pontos B, C e D. O que acontece com os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$?

2.7. Clique, novamente, no vetor $v = \overrightarrow{CD}$ e arraste-o até que o ponto C coincida com o ponto B.

2.8. Digite "$u + v$", na barra de entrada. Qual o ponto inicial (origem) do vetor formado? Qual o ponto final do vetor?

2.9. Apague o vetor w, formado no item 2.8. Através do comando *Mover, d*esloque o vetor $v = \overrightarrow{CD}$, de forma que o ponto C não coincida com B. Crie um vetor w igual a $v = \overrightarrow{CD}$, com ponto inicial em B, utilizando o comando *Vetor a Partir de um Ponto*. Qual o ponto final do vetor w criado?

2.10. Na barra de entrada, digite "$u + w$". Qual o ponto inicial do vetor z formado? E o ponto final ?

2.11. Selecione a ferramenta *Mover* e movimente livremente os pontos B e D. O que acontece com o vetor $u = \overrightarrow{AB}$? E com o vetor w? O ponto inicial do vetor z mudou? E o ponto final?

Nesse momento, o professor pode apresentar a primeira maneira de definir a soma de vetores, conhecida como "regra do polígono".

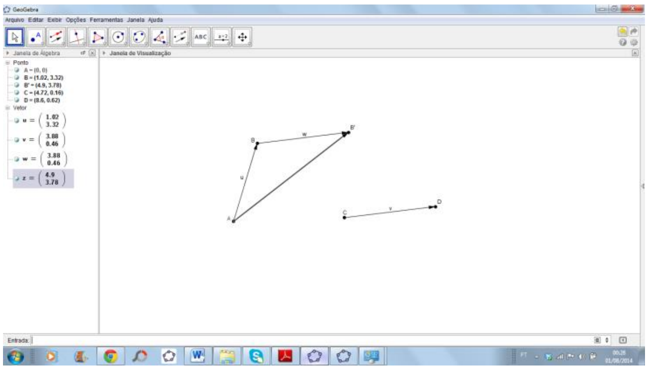


Figura 5.4: Regra do Polígono

2.12.Utilizando o comando *Reta definida por Dois Pontos*, construa a reta AB, selecionando os pontos A e B.

2.13. Selecione a ferramenta *Mover* e movimente o ponto D até que o ponto final do vetor w esteja sobre a reta AB. O ponto inicial do vetor z mudou? E o ponto final?

Após a exploração da atividade 2.13, o professor pode dizer que esta primeira maneira de definir a soma de vetores também é válida quando os segmentos orientados são colineares.

2.14. Abra um novo arquivo no Geogebra, habilite os eixos e crie o ponto A na interseção dos eixos.

2.15. Desabilite os eixos e crie os pontos B e C.

2.16. Utilizando o comando *Vetor Definido por Dois Pontos, c*onstrua os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$.

2.17. Através do comando *Vetor a Partir de um Ponto,* crie um vetor w igual a $u = \overrightarrow{AB}$, com ponto inicial em B e um vetor z igual a $v = \overrightarrow{AC}$, com ponto inicial em C. Qual o ponto final do vetor com ponto inicial em B? Qual o ponto final do vetor com ponto inicial em C? Qual o nome do polígono formado? Justifique sua resposta.

2.18. Na barra de entrada, digite “$u+w$”. Qual o ponto inicial do vetor $u+w$ formado? E o ponto final ?

2.19. Selecione a ferramenta *Mover* e movimente livremente os pontos B e C. O que aconteceu com os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$? O ponto inicial do vetor $u+w$ mudou? E o ponto final?

Nesse momento, o professor pode apresentar a segunda maneira de definir a soma de vetores, conhecida como “regra do paralelogramo”.

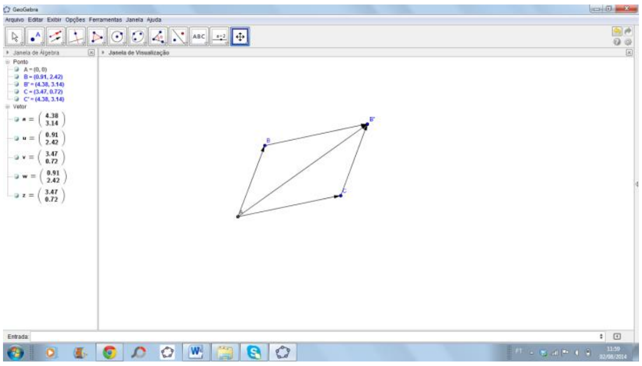


Figura 5.5: Regra do Paralelogramo

O principal objetivo da atividade 2 é proporcionar o entendimento da adição de vetores com tratamento geométrico. No item 2.5, o aluno é levado a observar que a soma de dois vetores u e v tem como resultado um vetor $u+w$, que tem origem no ponto inicial de u e extremidade no ponto final de v.

No item 2.10, se os vetores v e w são iguais, então $u+v=u+w$. Ao manipular os vetores u e w, em 2.11, o aluno, provavelmente, perceberá que apesar da alteração nos vetores u e w, o vetor soma $u+w$ ou $u+v$ continua tendo ponto inicial em A e ponto final na extremidade de w. Esta observação pode servir para o professor apresentar a primeira forma de definir a adição de vetores. Essa definição é conhecida como “regra do polígono”.

Em 2.13, a construção da reta AB é para que os vetores u e w tenham a mesma direção. O objetivo é ressaltar que esta primeira maneira de definir a soma de vetores também é válida quando os vetores somados têm a mesma direção.

O aluno deve concluir, em 2.17, que o polígono é um paralelogramo, pois os lados opostos são formados por vetores iguais. No item 2.18, o aluno deve observar que o vetor $u+v$ está relacionado com a diagonal do paralelogramo formado. E, em 2.19, os vetores $u=\overrightarrow{AB}$ e $v=\overrightarrow{AC}$ são alterados quando seus pontos finais são manipulados, porém o vetor soma $u+v$ continua formando a diagonal do paralelogramo. Com isso, o professor pode apresentar a segunda maneira de definir a soma de vetores, conhecida como “regra do paralelogramo”.

5.3 Atividade 3 - Multiplicação de um Vetor por um Número Real

Para essa atividade, os eixos e a malha devem estar habilitados inicialmente.

3.1. Crie os pontos A e B, de modo que AB seja um lado horizontal de um dos quadrados da malha. Construa o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, utilizando comando *Vetor Definido por Dois Pontos.*

3.2. Utilize a ferramenta Ampliar ou a roda do mouse para dar um zoom, de modo que a interseção dos eixos fique visível na janela de visualização. Se necessário, use a ferramenta Mover para arrastar os eixos.

3.3. Desabilite os eixos. Selecione a ferramenta *Controle Deslizante* e depois clique na janela de visualização. Ao abrir a caixa de diálogo, marque a opção “número”. Na caixa “Nome”, digite “k”. Na aba “Intervalos”, coloque min.: -5, max.: 5 e incremento: 0,1.

3.4. Na caixa de entrada, digite $k*u$ e dê um “enter”. O que aconteceu?

3.5. Movimente o controle deslizante. O que podemos observar sobre o comprimento, a direção e o sentido do vetor ku com relação ao vetor u, quando:

a) $0 < k < 1$?

b) $k = 1$?

c) $k = 3$?

d) $1 < k < 5$?

e) $-1 < k < 0$?

f) $k = -1$?

g) $k = -2$?

h) $-5 < k < -1$?

Após a exploração desta atividade, o professor pode apresentar a definição de multiplicação de um vetor por um número real. Utilizar o caso $k = -1$ para definir e apresentar as características de um vetor oposto.

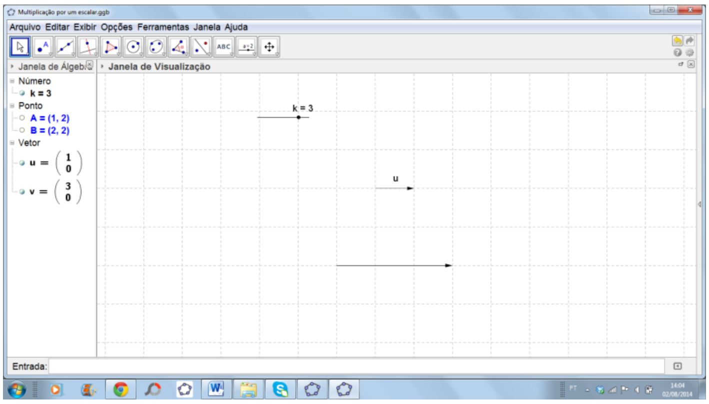


Figura 5.6: Vetor ku

Nesta atividade, a malha habilitada e a construção do vetor $u = \overrightarrow{AB}$ na horizontal têm o objetivo de facilitar a comparação do comprimento do vetor ku com relação ao comprimento de u, em 3.4. No item 3.3, o aluno deve ser levado ao entender que ku é um vetor.

Em 3.4, deve ser observado que quando $0 < k < 1$, o vetor ku tem comprimento menor que o de u e direção e sentido, respectivamente, iguais. A justificativa do comprimento ser menor é a seguinte:

Se $0 < k < 1$ então $|k| < 1$. Logo, $|k||v| = |kv| < |v|$.

Quando $k = 1$, o vetor ku é igual ao vetor u, ou seja, tem comprimento, direção e sentido iguais ao de u. Se $1 < k < 5$, o vetor ku tem comprimento maior que o de u e direção e sentido, respectivamente, iguais.

Se $-1 < k < 0$, ku tem comprimento menor que o de u, mesma direção e sentido contrário ao de u. Quando $-5 < k < -1$, o vetor ku tem comprimento maior que o de u, mesma direção e sentido contrário ao de u.

5.4 Atividade 4 - Vetores no Plano Cartesiano

Para essa atividade, os eixos e a malha devem estar habilitados.

Pré-requisitos: Sistema de coordenadas cartesianas no plano.

4.1. Na interseção dos eixos (origem do sistema), crie o ponto A.

4.2. Crie um ponto B. Quais são as coordenadas do ponto B, indicadas na Janela de Álgebra?

4.3. Construa o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos.*

4.4. Clique com o botão direito no ponto B e selecione: Propriedades – Básico – Exibir Rótulo – Nome e Valor. Utilizando o comando *Mover,* movimente livremente o ponto B. O que acontece com as coordenadas do ponto? E com a representação do vetor na Janela de Álgebra? Ao comparar as coordenadas do ponto B com a representação do vetor, o que você observa?

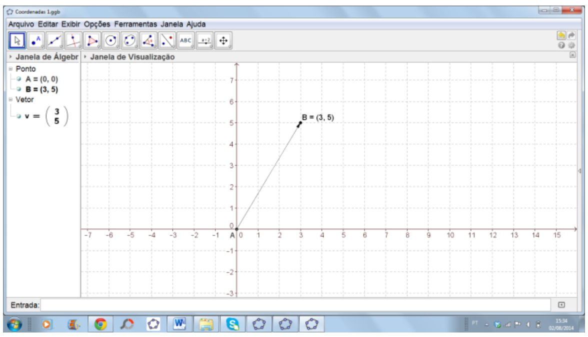


Figura 5.7: Vetor na Origem do Sistema

4.5. Abra um novo arquivo. Crie os pontos A e B e construa o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, utilizando a ferramenta Vetor Definido por Dois Pontos. Clique com o botão direito no pontos A e B e selecione: Propriedades – Básico – Exibir Rótulo – Nome e Valor. Qual a representação do vetor u na Janela de Álgebra? Subtraia a coordenada x do ponto B da coordenada x do ponto A. Subtraia a coordenada y de B da coordenada y de A. Comparando os resultados, com a representação do vetor u, o que pode ser observado?

4.6. Selecione o comando *Mover,* clique em cima do vetor u e arraste, movimentando-o livremente. O que acontece com as coordenadas dos pontos A e do ponto B? E com as coordenadas do vetor u

4.7. Ainda, utilizando o comando *Mover,* movimente o vetor $u = \overrightarrow{AB}$ deixando-o em uma posição diferente da qual ele estava no item 4.5. Subtraia a coordenada x do ponto B da coordenada x do ponto A. Subtraia a coordenada y de B da coordenada y de A. Comparando os resultados, com a representação do vetor u, o que pode ser observado?

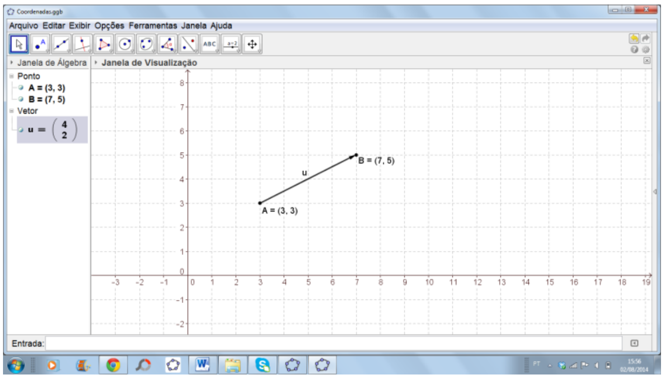


Figura 5.8: Vetor fora da Origem do Sistema

4.8. Mova o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, até que o ponto A coincida com a origem do sistema (interseção dos eixos). Quais são as coordenadas do ponto A e do ponto B? Comparando as coordenadas do ponto B com a representação do vetor, o que pode ser observado?

Após explorar esta atividade com os alunos, o professor pode apresentar a representação de um vetor em termos de coordenadas.

No item 4.4, o objetivo é levar o aluno a observar que ao movimentar o ponto B, suas coordenadas são modificadas e, consequentemente, as coordenadas do vetor $u = \overrightarrow{AB}$, que são iguais às do ponto B, também são alteradas. Vale ressaltar que o Geogebra representa as coordenadas de um vetor através de uma matriz 2x1.

Em 4.5, ao subtrair as coordenadas do ponto B pelas coordenadas do ponto A, o aluno deve observar que o resultado é igual às coordenadas do vetor $u = \overrightarrow{AB}$, ou seja, se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então $v = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Já em 4.6, deve ser observado que apesar das coordenadas dos pontos se alterarem, as coordenadas do vetor não se modificam.

Isto, porque se $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$ e $D = (x_d, y_d)$ são pontos do plano em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, tais que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, então $x_b - x_a = x_d - x_c$ e $y_b - y_a = y_d - y_c$. Lembrando que os número $x_b - x_a = x_d - x_c$ e $y_b - y_a = y_d - y_c$ são as coordenadas do vetor $u = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

No último item da atividade, o objetivo é levar o aluno ao entendimento de que ao dizermos que $v = (x, y)$, é o mesmo que afirmar que o vetor v pode ser representado por um segmento orientado que tem ponto inicial na origem do sistema de coordenadas e ponto final em $P = (x, y)$, ou seja, $v = \overrightarrow{OP}$.

5.5 Atividade 5 - Operações com Vetores no Plano Cartesiano: Adição de Vetores e Multiplicação de um Vetor por um Número Real

Para essa atividade, os eixos e a malha devem estar habilitados.

5.1. Crie o ponto A na origem do sistema de coordenadas.

5.2. Crie os pontos B e C e construa os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, utilizando o comando *Vetor Definido por Dois Pontos.*

5.3. Através do comando *Vetor a Partir de um Ponto,* crie um vetor w igual a $u = \overrightarrow{AB}$, com ponto inicial em B e um vetor z igual a $v = \overrightarrow{AC}$, com ponto inicial em C. Quais as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$?

5.4. Na barra de entrada, digite "$u + v$". Quais as coordenadas do vetor $u + v$ formado?

5.5. Clique com o botão direito em cima do ponto final do vetor $u + w$. Ao abrir a caixa de diálogo, clique em propriedades. Na aba "básico", marque "Exibir rótulo" e escolha "Nome e Valor". Repita o mesmo procedimento para os pontos B e C.

5.6. Selecione a ferramenta *Mover* e movimente livremente os pontos B e C. O que acontece com as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$? E com as coordenadas do vetor $u + w$?

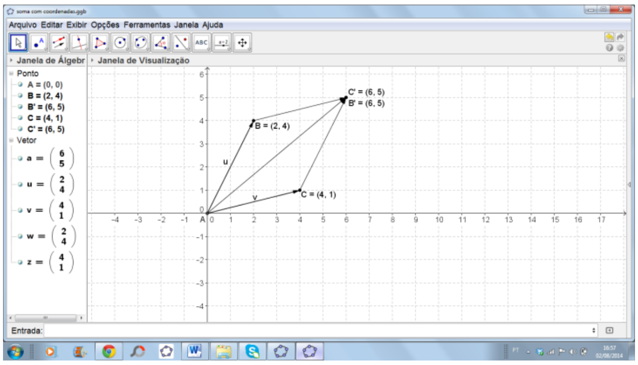


Figura 5.9: Soma de Vetores no Plano
Cartesiano

5.7. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente os pontos B e C e escolha uma posição para o vetor u e uma posição para v. Faça a soma da coordenada x do vetor u com a coordenada x do vetor v. Em seguida, some as coordenadas y dos vetores u e v. Comparando os resultados, com as coordenadas do vetor $u + v$, o que pode ser observado?

5.8. Ainda, através da ferramenta *Mover,* escolha outras posições para os vetores u e v. Faça a soma das coordenadas dos vetores e compare os resultados com as coordenadas de $u+v$. O que você observou?

Nesse momento, o professor pode definir a soma dos vetores u e v e deduzir suas propriedades.

5.9. Abra um novo arquivo. Crie o ponto A na origem do sistema.

5.10. Crie um ponto B e construa o vetor $u=\overrightarrow{AB}$, utilizando o comando *Vetor Definido por Dois Pontos.* Quais as coordenadas do vetor u?

5.11. Selecione a ferramenta *Controle Deslizante* e depois clique na janela de visualização. Ao abrir a caixa de diálogo, marque a opção "número". Na caixa "Nome", digite "k". Na aba "Intervalos", coloque min.: -5, max.: 5 e incremento: 0,1.

5.12. Na caixa de entrada, digite $k*u$ e dê um "enter". Quais as coordenadas do vetor ku formado?

5.11. Movimente o controle deslizante e identifique as coordenadas do vetor ku e as coordenadas do vetor u, quando:

a) $k=1$?

b) $k=-1$?

c) $k=2$?

d) $k=-2$?

5.12. É possível observar alguma relação entre os valores das coordenadas do vetor u e os valores das coordenadas de ku?

5.13. Movimente o controle deslizante e escolha um valor para k. Multiplique o valor de k pelas coordenadas de u (Se desejar, pode utilizar a calculadora do computador). Compare os resultados obtidos com as coordenadas do vetor ku. O que você observou?

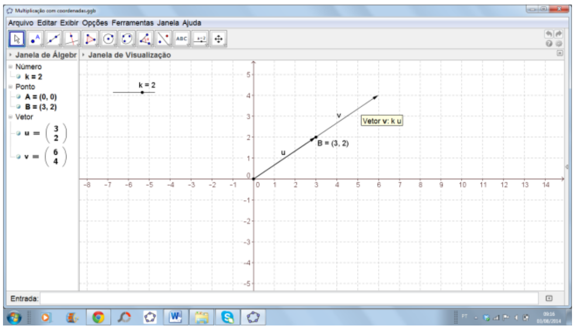


Figura 5.10: Multiplicação por um
Número Real no Plano Cartesiano

5.14. Movimente o controle deslizante, escolha outro valor para k e repita o procedimento de 5.13. O que pode ser observado?

O professor pode aproveitar este momento para definir a multiplicação de um vetor por um número real. Demonstrando algumas propriedades desta operação.

Os oito primeiros itens desta atividade têm objetivo de explorar o conceito de adição de vetores em termos de coordenadas. Os itens 5.3 e 5.4 propõem a utilização da regra do paralelogramo no plano cartesiano. O aluno é levado a compreender que para obter as coordenadas do vetor soma de dois vetores somam-se as coordenadas correspondentes desses vetores.

A partir do item 5.10, a atividade trabalha o conceito de multiplicação de um vetor por um número real em termos de coordenadas. Em 5.11 e 5.12, o objetivo é que o aluno, de forma intuitiva, observe a relação existente entre as coordenadas dos vetores u e ku. Nos itens 5.13 e 5.14, multiplicando cada valor de k pelas coordenadas de u obtém-se as coordenadas do vetor ku.

5.6 Atividade 6 - Ângulo entre Vetores e Módulo de Vetor em termos de Coordenada

Para essa atividade, os eixos e a malha devem estar habilitados.

6.1. Crie os pontos A, B e C e construa os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos.*

6.2. Através da ferramenta *Ângulo*, determine o ângulo $B\hat{A}C$ clicando nos pontos C A e B (Se o ângulo indicado for o maior, clique na ordem contrária: B, A e C). Qual a medida do ângulo indicado?

6.3. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente livremente o ponto C, em seguida, o ponto B. O que acontece com o ângulo $B\hat{A}C$?

Neste momento, o professor pode dar a definição de ângulo entre vetores.

6.4. Apague os objetos da janela de visualização. Crie o ponto A na origem do sistema. Crie o ponto B no segundo quadrante e o ponto C, no primeiro quadrante.

6.5. Construa os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos.*

6.6. Através da ferramenta *Ângulo*, construa o ângulo entre os vetores u e v, clicando no vetor $v = \overrightarrow{AC}$ em seguida em $u = \overrightarrow{AB}$. Qual a medida do ângulo entre os vetores?

6.7. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente o ponto B, até que ele esteja sobre a parte superior do eixo OY (posicione o ponto sobre uma coordenada inteira do eixo), em seguida, movimente o ponto C, até que ele esteja sobre a parte positiva do eixo OX (posicione o ponto sobre uma coordenada inteira do eixo). Desabilite os eixos e a malha. Qual a medida do ângulo entre os vetores?

O professor pode aproveitar esta parte da atividade para definir vetores ortogonais.

6.8. Abra um novo arquivo. Habilite os eixos e a malha. Crie o ponto A na origem do sistema.

6.9. Crie o ponto B e construa o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos.*

6.10. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente o ponto B, até que ele tenha coordenadas $(4,3)$. Neste caso, quais são as coordenadas do vetor $u = \overrightarrow{AB}$?

6.11. Através do comando *Reta Perpendicular*, construa uma reta a, passando por B, perpendicular ao eixo OX. Utilizando o comando *Interseção de Dois Objetos*, crie um ponto B na interseção da reta a com o eixo OX.

6.12. Na janela de Álgebra, torne a reta a invisível. Utilizando o comando *Polígono*, construa o triângulo ABC. Qual a classificação deste triângulo? Justifique sua resposta.

6.13. Qual a medida do lado AC, no triângulo ABC? E do lado CB? Calcule a medida de AB. Qual a relação que pode ser estabelecida entre o módulo do vetor $u = \overrightarrow{AB}$ e a medida de AB?

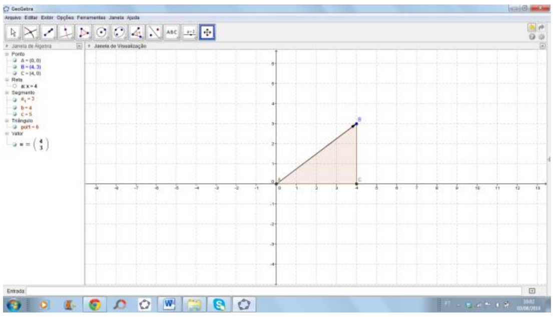


Figura 5.11: Triângulo ABC

6.14. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente o ponto B, de forma que, $u = \overrightarrow{AB} = (5,2)$. Neste caso, qual o módulo do vetor u?

6.15. Qual o módulo do vetor $u = (x, y)$?

6.16. Abra um novo arquivo. Crie os pontos $A = (1,3)$ e $B = (5,6)$. Construa o vetor $u = \overrightarrow{AB}$, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos.* Quais as coordenadas deste vetor indicadas na Janela de Álgebra? Como estas coordenadas podem ser obtidas a partir das coordenadas dos pontos A e B?

6.17. Utilizando a ferramenta *Mover*, movimente o vetor $u = \overrightarrow{AB}$ até que ele esteja na origem do sistema. As coordenadas do vetor se alteraram? Qual o módulo do vetor u?

6.16. Se $v = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, em relação a um sistema de eixos ortogonais. Qual é o módulo de v?

Até o item 6.7, a atividade explora o conceito de ângulo entre vetores. O objetivo é proporcionar o entendimento de que o ângulo entre dois vetores u e v é o menor ângulo entre os segmentos orientados representantes destes vetores e com o mesmo ponto inicial, como no item 6.2. Em 6.4 a 6.7, o aluno é levado a construir vetores ortogonais para que possa ser apresentado a esse importante conceito.

Em 6.10, o aluno deve lembrar que as coordenadas do vetor $u = \overrightarrow{AB}$ são as mesmas do ponto B, ou seja , $(4,3)$. Os itens 6.11 e 6.12 detalham a construção do triângulo ABC que é retângulo, pois o ângulo $A\hat{C}B$ é reto, já que é determinado por retas perpendiculares. Em 6.13, temos $AC = 4$, $CB = 3$ e pelo teorema de Pitágoras, $AB = 5$. O aluno deve concluir que o módulo do vetor é igual à medida de AB.

Analogamente a 6.13, calculando o módulo do vetor u, temos $|u| = \sqrt{29}$, em 6.14. No item 6.15, o aluno é levado a deduzir a fórmula que permite calcular o módulo de um vetor $u = (x, y)$. A dedução é simples e utiliza o teorema de Pitágoras, como vimos anteriormente, em casos particulares. O resultado é $|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Em 6.16, as coordenadas do vetor que devem aparecer indicadas na Janela de Álgebra são $(4,3)$. Estas coordenadas são obtidas subtraindo as coordenadas do ponto B das coordenadas correspondentes do ponto A, ou seja, $u = \overrightarrow{AB} = B - A$. No item 6.17, ao mover o vetor para a origem, suas coordenadas não se alteram. Portanto, o módulo de $u = \overrightarrow{AB}$ pode ser calculado como se ele estivesse, anteriormente, na origem, logo $|u| = 5$.

Em 6.16, deve ser feita a dedução da fórmula que calcula o módulo de um vetor fora da origem. Para isso, basta observar que as coordenadas do vetor são $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Portanto, temos que $|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

5.7 Atividades no Geogebra Tube

Algumas atividades apresentadas, neste capítulo, estão disponíveis no site https://www.geogebratube.org/. O Geogebra Tube é uma plataforma com construções e recursos relacionados com o Geogebra. Os materiais disponibilizados no site são compartilhados por alunos e professores e podem ser baixados gratuitamente.

As atividades podem ser acessadas no Geogebra Tube, através dos links abaixo:

1) Segmentos equipolentes:
https://www.geogebratube.org/student/m142790

2) Segmentos equipolentes e polígonos:
https://www.geogebratube.org/student/m143281

3) Translação:
https://www.geogebratube.org/student/m143295

4) Adição de vetores:
https://www.geogebratube.org/student/m143311

5) Regra do paralelogramo:
https://www.geogebratube.org/student/m143318

6) Multiplicação de vetor por um número real:
https://www.geogebratube.org/student/m143323

7) Vetor plano cartesiano:
https://www.geogebratube.org/student/m143336

8) Vetor fora da origem do sistema:
https://www.geogebratube.org/student/m143356

9) Soma de vetores no plano cartesiano:
https://www.geogebratube.org/student/m143402

10) Multiplicação de vetor por um número real coordenadas:
https://www.geogebratube.org/student/m143408

11) Módulo de um vetor no plano cartesiano:
https://www.geogebratube.org/material/show/id/143414

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas algumas justificativas para o ensino de vetores no ensino médio em Matemática. Os vetores são ferramentas matemáticas importíssimas com várias aplicações em diversas áreas, apesar disso seu conteúdo é ministrado, na maioria das escolas, apenas nas aulas de Física. Os livros didáticos de Matemática do ensino médio, em quase sua totalidade, não apresentam esse importante assunto.

O presente trabalho ressaltou que os alunos teriam melhor aproveitamento em muitas disciplinas que são abordadas, no ensino médio em Matemática, se no estudo destas disciplinas fossem utilizados conhecimentos relacionados ao conceito de vetor. Geometria Analítica, Números Complexos, Geometria Euclidiana e os conteúdos que se enquadram no contexto da Álgebra Linear do ensino médio (Matrizes, determinantes e sistema lineares) são algumas disciplinas que se beneficiariam das potencialidades oferecidas pelos vetores.

Além disso, destacou-se que o estudo do conteúdo de vetores pode contribuir no processo de transição do ensino médio para o Ensino Superior, por reduzir as dificuldades e oferecer um melhor preparo para algumas disciplinas de nível superior dos cursos da área de exatas.

Outro objetivo do trabalho foi apresentar uma proposta de atividades para o ensino de vetores. Junto com esta proposta foi apresentado um embasamento teórico sobre o assunto. As atividades sugeridas seguem a metodologia de investigações matemáticas. Esta abordagem faz uso de atividades investigativas que desenvolvem no aluno a capacidade de intuir, fazer suposições e elaborar ideias sobre o conteúdo estudado. E no decorrer das atividades, o professor apresenta as definições e demonstrações sobre o assunto.

As atividades propostas são apresentadas para serem desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra. Concluímos que o programa além das vantagens de ser gratuito, reunir um grande número de recursos e ser simples de usar é também um excelente recurso didático computacional.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] ASSEMANY, Daniela ; NASSER, Lilian ; ALVES, Geneci; AZEVEDO, Cecília; TORRACA, Marcelo. A Influência de uma Abordagem Vetorial para o Ensino Médio na Aprendizagem de Cálculo I. VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, Montevideu, Uruguai, 2013.

[2] BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987.

[3] BRASIL, MEC, SEB. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

[4] FILHO, Thales do Couto; JORGE, Miguel; SILVA, Felipe Ferreira; TEIXEIRA, Ralph Costa. Matemática Para o Ensino Médio - Col. Aprender - Vol. 3 - 1ª Ed. 2011.

[5] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. MA36: Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012

[6] Guia de livros didáticos : PNLD 2012 : Matemática / Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

[7] HEFEZ, Abramo. MA23: Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2011

[8] HOHENWARTER, Markus e HOHENWARTER, Judith ; Manual Oficial do Geogebra. Universidade Salzburgo, Austria. 2001

[9] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. Matemática: Ciência e Aplicacões - Volume 3. São Paulo: Saraiva, 2011

[10] LIMA, Elon Lages. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de janeiro, 2001

[11] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesár. A Matemática do Ensino Médio - Volume 3. Rio de Janeiro, 2006.

[12] LIMA, Elon Lages. Coordenadas no Plano. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2011

[13] LIMA, Elon Lages. Coordenadas no Espaço. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 1998

[14] MACHADO, Antônio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica – 2ª Ed. São Paulo: Atual, 1982

[15] POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

[16] STEINBRUCH, Alfredo; Winterle, Paulo. Geometria Analítica. 2ª edicão, São Paulo, 1987

[17] STRAPASON , Lisie Pippi; BISOGNI , Vanilde. Investigação Matemática na Sala de Aula: Experiência com Alunos do Ensino Médio sobre Sucessões Numéricas. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, BA, 2010.

[18] VENTURI, Jacir J. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica – 9ª Edição – Curitiba : Unificado, 1991