UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

GLÓRIA MARCY BASTOS FONZAR

TRÊS LAGOAS – MS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

GLÓRIA MARCY BASTOS FONZAR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini

TRÊS LAGOAS – MS

2014

BANCA EXAMINADORA

RESOLUÇÃO Nº 009 DE 04 DE AGOSTO DE 2014.

O COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL do Campus de Três Lagoas, no uso de suas atribuições resolve:

Aprovar a banca de defesa da dissertação de mestrado intitulada: CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL, da mestranda Glória Marcy Bastos Fonzar sob orientação do Prof Dr Edivaldo Romanini, a ser realizada em 14/08/2014, como segue:

Prof Dr. Edivaldo Romanini – UFMS (Presidente)

Prof Dr. Renato César da Silva – UFMS (Titular)

Prof Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte – UEMS (Titular)

Prof Dr. Osmar Jesus Macedo - UFMS (Suplente)

Dedico este trabalho aos meus filhos Ricardo e Paloma, por serem o sentido de minha vida e a razão de minha busca pelo conhecimento e vitórias na Educação.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me permitir a oportunidade e a capacidade para os estudos.

A minha mãe querida, sempre presente em minha vida, me apoiando e me dedicando muito amor.

A meus filhos e nora: Ricardo Bruno Bastos Borzani, Paloma Bastos Fonzar e Inaê Barros de Almeida Lopes Borzani, pelo amor e apoio incondicional.

A meus familiares, que sempre me apoiaram e me incentivaram em minhas decisões.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edivaldo Romanini, pela atenção, paciência, gentileza, compreensão e inspiração profissional.

Ao Coordenador do PROFMAT da UFMS de Três Lagoas, Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozi, pela fé em minha capacidade, incentivo constante e apoio para o sucesso.

A todos os professores do PROFMAT da UFMS, Campus de Três Lagoas, pela forma atenciosa, gentil, pacienciosa, sábia e idealista com que nos orientaram nos estudos.

Aos colegas da Turma do PROFMAT 2012, pelo companheirismo, amizade e incentivo constante; em especial aos queridos amigos Glaucia Maria Queiróz de Freitas e Júlio Cesar Calvoso, por todos os momentos de estudos, cumplicidade, apoio, incentivo e amizade.

RESUMO

Neste trabalho nos propomos a estudar o crescimento e o decaimento exponencial, descrevendo situações de aprendizagens que visam proporcionar aos alunos condições de associar fenômenos da natureza com esta área de conhecimento da matemática. Muitos problemas que tentam interpretar fenômenos da física, química e biologia, são geralmente expressos por meio de equações matemáticas, que se prestam a interpretar numericamente as situações e a fazer possíveis previsões. A modelagem matemática nos permite concluir que para situações problemas em que a razão entre a taxa de variação da função e o valor da função em determinado instante seja constante, a solução única será a função exponencial que é o modelo adequado para a solução do problema. Associar o conhecimento matemático às ciências, permitirá aos alunos a percepção da importância da matemática para seu dia a dia. A utilização de variados recursos didáticos, que buscam organizar os conhecimentos para que os alunos vivenciem experiências, além de desenvolverem competências para aprender, lhes conferem ações para a realização de seus objetivos de forma autônoma, para sua inserção social e exercício da cidadania. Relacionar crescimento e decaimento exponencial com fenômenos e situações variadas como: crescimento celular, juros compostos e inflação, desintegração radioativa, absorção de drogas por organismos vivos, resfriamento de corpos, dinâmicas populacionais, dentre outros; que são expressos por meio de modelos que descrevem grandezas cuja taxa de variação seja em cada instante proporcional ao valor da grandeza naquele exato instante, proporciona a aprendizagem da função exponencial de forma contextualizada e interdisciplinar.

Palavras-chave: **Modelagem matemática. Crescimento e decaimento exponencial. Taxa de variação.**

ABSTRACT

In this work we proposed to study the grow and exponential decay, describing learning situations that aim to provide students with conditions associated to the phenomena of nature with this area of knowledge of mathematics. Many problems that try to interpret the Physics, Chemistry and Biology phenomena, are generally expressed by Mathematics equations, which lend themselves to numerically interpret situations and make predictions possible. Mathematical modeling allows us to conclude that for problem situations in which the ratio of the rate of change of the function and the function value is constant at any given moment, the only solution is the exponential function which is the appropriate model pair solving the problem. Join mathematical knowledge to science will allow students to realize the important of mathematics to their daily lives. The use of various teaching resources, seeking to organize the knowledge for students to experience experiments, and develop skills to learn, impart action to meet their goals autonomously for their social inclusion and citizenship. Relate exponential grow and decay, with situations and phenomena such as cell growth, inflation and compound interest, radioactive decay, drug absorption by living organism, cooling bodies, population dynamics, among others; which are expressed though models that describe quantities whose rate of change is proportional to the value in each the greatness that very instant moment provides the learning of exponential function in a contextualized and interdisciplinary way.

Keywords: mathematical modeling. Exponential grow and decay. Change rate.

SUMÁRIO

LISTA DE NOTAÇÕES

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

$\mathbb{N}$: Conjunto dos *números naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos *números inteiros*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos *números racionais*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\mathbb{R}$: Conjunto dos *números reais.*

$\mathbb{R}^+$: Conjunto dos *números reais positivos*

$$\mathbb{R}^+ = \{ x \epsilon \mathbb{R};\ x > 0\}.$$

$\Rightarrow$: *Implicação lógica.*

$\Leftrightarrow$: *Equivalência lógica.*

. , $'$: *Derivada.*

$\int$: *Integral.*

$\mathcal{H}_1^x$: *Hipérbole variando de 1 a x.*

1 INTRODUÇÃO

"A arte de ensinar é a arte de propiciar o descobrimento"
MARK VAN DOREN

No Brasil, o Ensino Médio vem passando por processos de reformulações curriculares e mudanças, iniciados com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDBEN) de 1996, confirmada e regulamentada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e pelas diretrizes do Conselho Nacional de Educação de 1998 [6].

Organizado pelo Ministério da Educação, por meio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica, o projeto de Reforma do Ensino Médio visa adequar o currículo dessa etapa de ensino às novas condições sociais, econômicas e culturais impostas pela sociedade tecnológica, de modo a contornar a defasagem entre o nível do ensino básico brasileiro em comparação ao apresentado nos países desenvolvidos.

No antigo modelo de Ensino Médio ou Secundário, os conteúdos eram organizados em torno de dois paradigmas formativos: o pré-universitário e o profissionalizante. No primeiro caso, organizam-se as disciplinas teóricas com vistas a serem administradas aos alunos para obtenção de um domínio propedêutico de saberes escolares, buscando a preparação geral do aluno para ingresso em curso superior. No segundo caso, a versão profissionalizante, os saberes práticos, ligados à formação técnica como via de cumprimento de funções produtivas ou de serviços, são valorizados em detrimento de uma formação cultural mais ampla e significativa [6].

A mudança de paradigma consiste na busca de uma escola que não se limite ao imediatismo e utilitarismo, que situa o Ensino Médio como etapa final da educação básica, isto implica compreender a necessidade de adotar diferentes formas de organização curricular e, sobretudo, estabelecer princípios orientadores para a garantia de uma formação eficaz dos jovens brasileiros, capaz de atender os diferentes anseios daqueles que se encontram na faixa etária de escolarização, para que possam participar do processo de construção de uma sociedade mais solidária, reconhecendo suas potencialidades e os desafios para a inserção em um mundo competitivo do trabalho.

A identidade do Ensino Médio se define na superação do dualismo entre propedêutico e profissionalizante. Importante então a configuração de um modelo que agregue identidade unitária para esta etapa da educação básica, assumindo formas diversas e contextualizadas, com vistas na realidade brasileira [6].

Busca-se uma escola que não se limite ao interesse imediato, pragmático e utilitário.

Entender a necessidade de uma formação com base unitária implica em perceber as diversidades do mundo moderno, no sentido de se promover à capacidade de pensar, refletir, compreender e agir sobre as determinações da vida social e produtiva – articulando trabalho, ciência e cultura; na perspectiva da emancipação humana, de forma igualitária a todos os cidadãos [6].

De acordo com o texto Ensino Médio Inovador[1] a concepção deve estruturar-se aliada com o avanço científico, tecnológico e cultural:

> “Nesta concepção, o Ensino Médio deve ser estruturado em consonância com o avanço do conhecimento científico e tecnológico, fazendo da cultura um componente da formação geral, articulada com o trabalho produtivo. Esta perspectiva pressupõe a vinculação dos conceitos científicos com a prática relacionada à contextualização dos fenômenos físicos, químicos e biológicos, bem como a superação de dicotomias entre humanismo e tecnologia e entre a formação teórica e técnica-instrumental”.

Nos últimos anos, os poderes públicos passaram a investir cada vez mais na inclusão de jovens de baixa renda no Ensino Superior.

Estas políticas são caracterizadas como compensatórias e afirmativas, assim como o sistema de cotas raciais e sociais, destacando-se o Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies) e o Programa Universidade para Todos (Prouni), projetos estes que representam parcerias entre o Poder Público e Instituições Particulares de Ensino Superior [5, 7].

O Fies foi criado em 1999, como substituto ao antigo programa de crédito educativo, objetiva financiar a graduação de estudantes matriculados em instituições particulares reconhecidas pelo Ministério da Educação, que não se encontram em condições de arcar com os custos das mensalidades [5].

[1] *Ensino médio Inovador.* Brasília: MEC/SEB, 2009. p. 4.

Neste programa, a maioria dos alunos recebe auxílio de 50% do valor das mensalidades, enquanto que os alunos matriculados em cursos de formação de médicos e professores, profissionais considerados prioritários para o desenvolvimento do país, podem receber financiamento de 100%. O aluno pode pagar o financiamento em serviços após a conclusão do curso, atuando no programa Saúde da Família, para os médicos, ou ministrando aulas em escolas públicas, no caso de professores licenciados [5].

O Prouni, por sua vez, surgiu em 2004, sendo institucionalizado por lei em 2005, voltado para estudantes egressos do Ensino Médio em Escolas Públicas ou que tenham cursado Escolas Particulares na condição de bolsistas. Este programa concede bolsas parciais ou integrais, de acordo com a condição econômica do aluno selecionado na prova Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que é uma avaliação anual, não obrigatória, destinada aos estudantes concluintes e egressos do Ensino Médio, tendo como objetivo fundamental, analisar a qualidade do ensino e eficiência em capacitar os jovens para o exercício de sua cidadania, capacidade racional e desenvolvimento profissional [4,7].

O mais recente programa público de inclusão universitária é o chamado Sistema de Seleção Unificada (Sisu). Neste sistema, participam as Universidades Federais e demais Instituições Públicas de Ensino Superior, que adotaram a nota do Exame Nacional do Ensino Médio como critério exclusivo de seleção para seus cursos de graduação [8].

O ENEM foi estruturado em 1998 por um grupo de autores-professores que definiram seu formato: uma redação e um teste de múltipla escolha contendo 63 questões. Com o passar dos tempos, muitas Universidades Públicas e Particulares, passaram a contar com a prova do ENEM como critério exclusivo ou parcial para a seleção de novos alunos. Em 2009, com o objetivo de unificar gradualmente o vestibular de diversas instituições Federais de Ensino Superior, o ENEM foi modificado, passando a contar com 180 questões objetivas com cinco alternativas, além da redação, que continua tendo como critério a construção de um texto dissertativo. Este novo modelo, por ser mais extenso, passou a ser realizado em dois dias, mantendo sua principal característica de interdisciplinaridade, cobrando dos alunos, além de capacidade leitora, a capacidade de relacionar conteúdos tradicionalmente divididos em diferentes matérias [4].

Diante da mudança de concepção para o ensino de disciplinas do Ensino Médio, existe uma grande preocupação com a melhoria do ensino da Matemática, pois embora se verifiquem problemas e dificuldades em outras disciplinas, é na Matemática que se evidencia a maior aversão por parte dos alunos, além disso, segundo Maria Cecília de Oliveira Micotti[2]

> "A aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama a atenção."

A contextualização, associada à interdisplinariedade, vem sendo divulgada pelo MEC como princípio curricular central dos PCNs, capaz de produzir uma revolução no ensino. A ideia básica de formar indivíduos que se realizem como pessoas, cidadãos e profissionais, exige da escola muito mais do que a simples transmissão e acúmulo de informações. Exige experiências concretas e diversificadas, transpostas da vida cotidiana para as situações de aprendizagem [6].

Segundo os PCNs, a contextualização tem como característica fundamental o fato de que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto, ou seja, quando se trabalha o conhecimento de modo contextualizado a escola está retirando o aluno da sua condição de expectador passivo. A aprendizagem contextualizada preconizada pelos PCNs visa que o aluno aprenda a mobilizar competências para solucionar problemas com contextos apropriados, de maneira a ser capaz de transferir essa capacidade de resolução de problemas para os contextos do mundo social e, especialmente, do mundo produtivo. Mais explicitamente a contextualização situa-se na perspectiva de

[2] MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. *O ensino e as propostas pedagógicas*. In: BICUDO, Maria Aparecida.

formação de habilidades, que serão avaliadas nos exames centralizados e nos processos de trabalho.

Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno. Defende-se a ideia de que a contextualização estimula a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno [6].

Em consequência das grandes mudanças pelas quais tem passado a sociedade, a escola tem passado por profundas transformações, e estas questões cercam o processo ensino-aprendizagem.

Em face das mudanças, a atuação do professor veste-se de uma nova dimensão: possibilitar que o aluno, ao acessar informações, seja capaz de decodificá-las, interpretá-las e emitir um julgamento. Diante disto, o professor é visto como um mediador entre os conhecimentos e os alunos, como também facilitador, incentivador e avaliador de todo o processo de ensino-aprendizagem.

Diversos estudos apontam para uma necessidade de mudança na atuação do professor, principalmente em relação a suas capacidades e procedimentos profissionais, que permitam desenvolver o currículo de forma reflexiva, autônoma e crítica.

Como destaca Ubiratan D'Ambrosio[3], a utilização de tecnologias na educação ou a educação a distância são meios disponíveis que não substituirão o papel do professor, que continua ocupando papel fundamental na educação e ao utilizar-se das tecnologias como meios auxiliares para melhorar sua prática, porém o professor incapaz de lidar com estas tecnologias não terá espaço na educação, senão vejamos:

> "Não há dúvida quanto à importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto a educação a distância quanto outras utilizações de tecnologia na educação, mas nada substituirá o professor. Todos estes serão meios auxiliares para o professor. Mas o professor, incapaz de se utilizar desses meios, não terá espaço na educação. O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos seus alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e,

[3] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. p. 79-80.

> naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos."

No desempenho da função de facilitador de aprendizagens, o professor não expõe todo o conteúdo, mas fornece informações que os alunos não teriam condições de obter sozinhos, proporcionando-lhes acesso a ferramentas necessárias a construção do conhecimento. Já no desempenho da função de mediador, o professor é responsável por encaminhar os processos e procedimentos utilizados pelos alunos, para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas [11].

Deve o professor conhecer as condições socioculturais, as expectativas e as competências cognitivas de seus alunos, a fim de selecionar situações relacionadas às vivências de seus alunos, trabalhando em vários contextos, estimulando o trabalho coletivo, propiciando oportunidades em que os alunos possam argumentar e confrontar coerentemente suas ideias [11].

Neste contexto, ser professor é assumir uma missão de preparar as novas gerações para o futuro em que terão que viver.

A prática pedagógica é um dos vetores que explicita a dimensão qualitativa do trabalho que o professor desenvolve na escola, a relação de compromisso do educador com seus alunos e com a educação.

Para desenvolver sua missão, o professor precisa se desenvolver e se apropriar de habilidades de manusear diferentes recursos didáticos, como jogos, leituras de textos e *softwares* adequados, a serem utilizados de maneira a preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, inserindo-o no processo de ensino-aprendizagem, com utilização destinada a obtenção e troca de informações, desenvolvimento de conceitos, dentre outras.

Inseridos no conhecimento das necessidades educacionais atuais, bem como nas dificuldades encontradas no ensino da matemática, faz-se necessário ao professor, encontrar uma maneira diferenciada de proporcionar acesso ao conhecimento matemático para os alunos do Ensino Médio, proporcionando não só o desenvolvimento de habilidades necessárias à aprendizagem, mas também fornecendo-lhes conhecimentos a serem utilizados em diversas situações cotidianas, na vida acadêmica em estudos futuros e na vida profissional.

Um dos desafios do professor de matemática, particularmente dos professores de Ensino Médio, é desenvolver situações de aprendizagens que atendam às necessidades de aprendizagens dos alunos, facilitando a linguagem e favorecendo a compreensão dos conceitos.

Neste diapasão, o ensino das funções é fundamental para a construção do conhecimento matemático, pois a descrição algébrica de dependência de grandezas que podem ser representadas graficamente permitem além da aprendizagem, a exploração de vários campos das áreas do conhecimento, para a compreensão de fenômenos que podem ser modelados por funções, uma vez que é comum e conveniente expressarmos fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais, dentre outros, por meio de funções, o que justifica a importância do seu estudo mais detalhado no Ensino Médio.

Em particular, dentre as funções que modelam situações do mundo real, a função exponencial, que modela situações de crescimento e decrescimento, em que a taxa de variação da função é proporcional ao próprio valor assumido pela função em cada instante, apresentando ainda a particularidade de relacionar-se com as progressões aritmética e geométrica, merece um estudo que permita o conhecimento de suas características e propriedades, como também sua utilização na modelagem de alguns com fenômenos da natureza e sua relação com as progressões aritmética e geométrica.

O presente trabalho dedica-se ao estudo da função exponencial, fazendo um estudo aprofundado de suas propriedades, além de apresentar situações de diversos campos das áreas de biologia, física e química, que são modeladas por funções exponenciais, apresentando também, a partir do desenvolvimento de Equações Diferenciais Ordinárias, o surgimento do modelo exponencial que interpreta tais fenômenos.

Assim, o objetivo do desenvolvimento deste trabalho, além da necessidade para a obtenção do título de mestre no programa PROFMAT, é também o de fazer um estudo aprofundado da função exponencial, aplicando os conhecimentos obtidos na disciplina de MA11 do programa PROFMAT, para a produção de um texto que sirva de referência para professores da rede de Ensino Público, e ainda desenvolver situações de ensino, que possam ser aplicadas em sala de aula, de forma a permitir a aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades, permitindo a capacidade de relacionar a matemática com fenômenos da natureza, com o desenvolvimento da capacidade de ler, refletir, interpretar, associar, calcular, interpretar gráficos e tabelas, enfim, atividades que serão permitidas com o desenvolvimento do pensamento matemático.

A primeira ideia de escolha do presente tema surgiu quando relemos a Revista do Professor de Matemática nº. 62, e nos deparamos com o artigo "*Crescimento Exponencial? O que é isso?"* de autoria da Professora Sylvia Mandel, que introduziu o assunto com o seguinte texto:

> "Os impactos ambientais aumentaram a partir do séc. XVII, como consequência da revolução, houve um crescimento exponencial da população do planeta, composto de pobres em sua maioria".

No artigo, a professora Sylvia Mandel propunha que os alunos construíssem em malha quadriculada os gráficos das funções $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2^x$ e $m(x) = 0{,}5^x$, comparando as curvas obtidas.

Compreendemos que a atividade desenvolvida no ano de 2007, poderia ser aprimorada com a utilização do software GeoGebra, recurso pedagógico que foi criado em 2001, por Markus Hohenwarte, com o objetivo de dinamizar o estudo da álgebra e da geometria.

Pensamos que talvez a professora não tenha utilizado o recurso computacional naquela época por que ainda não havia nas escolas a implementação de salas de informática, com acesso a softwares educacionais.

Desta forma adaptamos o texto da professora Sylvia e o aplicamos em sala de aula com a utilização do recurso computacional, tendo um resultado satisfatório.

A escolha do tema formalizou-se durante os estudos das disciplinas de Números e Funções Reais e Resolução de Problemas, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), quando entramos em contato com diversas situações de aprendizagens, que atendem às necessidades de um ensino contextualizado e inovador, com interface com diversas áreas do conhecimento como: física, química e biologia; pois observamos que os alunos apresentam dificuldades em relacionar fenômenos científicos à matemática, restringindo-se a interpretar gráficos e realizar cálculos, aplicando determinadas fórmulas padronizadas, sem contudo, associá-las coerentemente aos acontecimentos típicos como aplicações financeiras, ocorrências de terremotos, tsunamis e demais abalos sísmicos, duplicações celulares, datação fóssil, ação de medicamentos no corpo humano, desintegração de partículas radioativas, dentre outras. É importante que o conhecimento matemático esteja associado às ciências, de forma que o aluno compreenda que a matemática facilita a interpretação dos fenômenos naturais, além de possibilitar interferências.

Contribuiu ainda para a escolha do tema deste trabalho, a aprendizagem que tivemos a oportunidade de experimentar no curso de Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, que nos proporcionou reestudar derivadas e integrais, como também aprender o assunto Séries de Potências, Séries de Taylor e Séries de MacLaurin.

Com base nestas justificativas, a presente dissertação busca aprofundar os conhecimentos sobre funções exponenciais, organizar, selecionar e propor atividades práticas, com o objetivo de associar fenômenos da natureza com o crescimento e o decaimento exponencial, para a melhora da prática pedagógica e, como consequência, a melhoria da qualidade de ensino de matemática para o Ensino Médio.

O estudo da Função Exponencial, embora não seja trivial, permite um trabalho diferenciado em termos de problematizações e contextualizações.

Como o assunto que aborda funções exponenciais e logarítmicas é abrangente, limitamo-nos a estudar o crescimento e decaimento exponencial, nos propondo a continuar nossos estudos sobre os logaritmos em uma próxima oportunidade, embora em diversas situações práticas apresentadas façamos uso de operações e propriedades dos logaritmos para a resolução de situações problemas.

Justificamos que todos os tópicos de embasamento teórico apresentados nos capítulos seguintes, são resultados de pesquisas em livros de autores compromissados com a formação de professores de matemática, tanto em nível e graduação quanto em nível de especialização e mestrado, priorizando os textos que nos foram apresentados no programa PROFMAT.

Não ousamos apresentar nada novo, mas dar um novo olhar para nossas práticas pedagógicas e preparação de aulas, a fim de tornar o ensino e a aprendizagem da matemática mais profícuo.

A finalidade deste trabalho, longe de apresentar “receitas prontas” para atender a todas as necessidades da Educação e do ensino da matemática, é propor aos interessados no tema, oportunidades de conhecer nossos estudos no Mestrado Profissional em Rede Nacional, cujo reflexo foi imediato em nossa experiência profissional e estudos pessoais.

Por fim, o texto por nós desenvolvido, permitirá aos professores que com ele tenham contato, um estudo aprofundado do tema, haja vista as abordagens que aqui foram inseridas, com utilização de derivadas, integrais e equações diferenciais, modelagem matemática além de diversas situações problemas que poderão servir para enriquecer as aulas de professores da rede de ensino.

Neste primeiro capítulo, buscamos expor os motivos que nos guiaram na escolha do tema, um conjunto formado pelas necessidades educacionais atuais e necessidades de proporcionar ensino de qualidade em sala de aula.

No segundo capítulo, abordaremos aspectos teóricos de equações diferenciais. A saber, será definida a equação diferencial ordinária de primeira ordem, seguido de teoremas fundamentais como o da existência e unicidade de solução. Veremos ainda que determinadas equações apresentam como solução única uma função exponencial.

No terceiro capítulo, trabalhamos com a modelagem matemática de problemas de funções exponenciais a partir de equações diferenciais, tais como: decaimento radioativo, crescimento de uma célula, crescimento populacional, resfriamento de corpos (Lei de Newton), juros compostos, dentre outros.

No quarto capítulo apresentamos o referencial teórico da caracterização da função exponencial e das funções do tipo exponencial, conhecimento buscado em livros sugeridos no programa PROFMAT.

No quinto capítulo, apresentamos atividades práticas que foram trabalhadas com alunos do 1º. Ano do Ensino Médio e do 3º. Ano do Ensino Médio, com utilização de diferentes recursos pedagógicos, tais como apresentação de textos, plotagem de gráficos utilizando o software GeoGebra, contextualização com disciplinas das ciências como Física, Química e Biologia, com apresentação dos roteiros de atividades que poderão facilitar sua aplicação na prática docente.

As conclusões, no sexto capítulo, relatarão os resultados obtidos em relação à aprendizagem do tema funções exponenciais, tanto no plano do desenvolvimento de nosso conhecimento, como das aprendizagens dos alunos.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

"Infinitos e indivisíveis transcendem nosso entendimento finito, o primeiro por conta de sua magnitude, o segundo pela sua pequenez; imagine o que eles são quando combinados" GALILEU GALILEI (1564-1642).

Neste capítulo serão abordados aspectos teóricos relacionados com as equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem. Serão consideradas condições para a obtenção da solução geral de uma EDO de primeira ordem homogênea e não homogênea, a saber, através do teorema de existência e unicidade de soluções. Será visto que tais soluções são expressas em termos de exponenciais. Estas expressões servem para obter a solução de vários problemas matemáticos modelados via equações diferenciais, como serão descritos em tópicos mais adiante.

2.1 Definição de Equações Diferenciais

Uma equação diferencial é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas.

Sua ordem é dada pela ordem da derivada mais alta que ocorre na equação.

Uma função $\boldsymbol{f}$ é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ para todos os valores de $\boldsymbol{x}$ em algum intervalo.

Resolver uma equação diferencial significa encontrar todas as possíveis soluções da equação, o que geralmente não é tarefa fácil.

Normalmente, quando aplicamos as equações diferenciais, não estamos interessados em encontrar a família de soluções (ou *solução geral*), mas sim em encontrar uma solução particular que satisfaça algumas condições adicionais, que normalmente é chamada de ***condição inicial***, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é chamado de ***problema de valor inicial***.

Em muitos problemas precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$, que é a condição inicial.

STEWART[4] afirma que quando impomos uma condição inicial, geometricamente olhamos para uma família de curvas soluções e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0), fisicamente isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante inicial t_0 e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

Nos próximos tópicos definiremos as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como também apresentaremos o problema do valor inicial para encontrar a solução de uma equação diferencial linear homogênea, cuja solução única é a equação exponencial que será posteriormente aplicada na modelagem de situações de crescimento e decaimento exponencial, através da modelagem matemática.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de Primeira Ordem

Por definição, toda equação diferencial da forma:

$$\boldsymbol{\dot{x} = a(t)x + b(t)\ (L)}$$

é chamada de Equação Diferencial Linear de 1º Ordem, em que: $\dot{x} = \frac{d}{dt}$ e $a, b: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, são funções contínuas no intervalo (α, β) [9].

Observamos que quando $b(t) \equiv 0$, então $\dot{x} = a(t)x$ e assim temos uma Equação Diferencial Linear Homogênea (EDLH) associada a equação linear (L).

Outra notação utilizada para uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é a dada por:

$\boldsymbol{y' = a(x)y + b(x)\ (L)},$ em que $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$.

Ainda por definição, dizemos que uma função y: $(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ é solução de (L) se y satisfazer a equação diferencial, ou seja, se

$$\boldsymbol{y' = a(x)y + b(x), \forall\, x \in (\alpha, \beta)}.$$

Duas observações merecem destaque:

[4] STEWART, James. Cálculo, volume II. James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. São Paulo: Cengage Learning, 2013, p. 540

(a) $f(x) \equiv 0, \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ é sempre solução de uma Equação Diferencial Ordinária Homogênea. Esta solução é chamada de Solução Trivial e é obvia sua demonstração;

(b) Sejam $f = f(x)$ e $T = T(x)$ duas soluções de uma EDLH. Então,

(i) $f + T$ é solução da EDO;

(ii) $c.f$ também é solução, $\forall \ c \ \in \ \mathbb{R}$.

De fato, para (i) seja $z(x) = (f + T)(x) = f(x) + T(x)$, logo, $z'(x) = f'(x) + T'(x) = a(x)f + a(x)T = a(x)(f + T) = a(x)z(x)$, portanto $z'(x) = a(x)z(x)$.
Já para (ii), seja $m(x) = (cf)(x) = cf(x)$, logo $m'(x) = cf'(x) = c(a(x)f) = a(x)cf = a(x)m$, assim, $m'(x) = a(x)m(x)$.

Em face das observações anteriores, fica estabelecido o seguinte resultado: *"O conjunto das soluções da equação Diferencial Linear Homogênea forma um espaço vetorial real"* [9].

Dizemos que uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ é solução do Problema de Valor Inicial (PVI) se satisfazer a equação diferencial, e, além disso, também satisfazer uma condição inicial dada, ou seja, se for verificado que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'(x) = a(x)y + b(x), \forall x \in (\alpha, \beta)} \\ \boldsymbol{y(x_0) = y_0.} \end{cases}$$

2.2.1 Solução Geral da Equação Diferencial Linear Homogênea (EDLH)

Considerando a equação diferencial linear homogênea $y'(x) = a(x)y$, serão assumidos formalmente os cálculos a seguir.

Seja $y'(x) = a(x)y(x) \ \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \ (ln|y(x)|) = a(x)$

$\Rightarrow ln|y(x)| = c + \int a(x)dx \ \ \Rightarrow ln|y(x)| = c + \int_r^x a(u)du, \ \ \forall \, r, \ \alpha \ \leq r \leq x \leq \beta,$

$\Rightarrow |y(x)| = \ e^c \, . e^{\int_r^x a(u)du} = k \, . e^{\int_r^x a(u)du} \Rightarrow \left|\left(e^{-\int_r^x a(u)du}\right) y(x)\right| = k.$

Utilizando o Lema: "Se $g = g(x)$ é uma função contínua tal que $|g(x)| = k$ então $g(x) = k$", segue então que $y(x). e^{-\int_r^x a(u)du} = k, \ \therefore y(x) = k \, . e^{\int_r^x a(u)du}$ para $\alpha \leq x \ \leq \ \beta$ [9].

Desse modo, fica estabelecido que "a solução geral da Equação Diferencial Linear Homogênea é dada por $y(x) = k\,.\,e^{\int_r^x a(u)du}$, $\alpha \le r \le x \le \beta$."

De fato, seja $y = y(x)$ uma solução da EDLH; logo,

$$\frac{d}{dy}\left(y(x).e^{-\int_r^x a(u)du} \right) = y'(x).e^{-\int_r^x a(u)du} = y(x).e^{-\int_r^x a(u)du}.a(x)$$

$$= y'.e^{-\int_r^x a(u)du} - a(x).y.e^{-\int_r^x a(u)du}$$

$$= e^{-\int_r^x a(u)du}.\big(y' - a(x)y\big) = e^{-\int_r^x a(u)du}.0 = 0,$$

assim, $y(x).e^{-\int_r^x a(u)du} = k$, $\therefore y(x) = k.e^{-\int_r^x a(u)du}$.

Um resultado fundamental no estudo de EDO diz respeito à existência e unicidade de solução de uma equação diferencial. Assim, podemos enunciar o teorema da existência como: "A equação linear homogênea de primeira ordem tem sempre solução".

De fato, seja $y(x) = k.e^{\int a(x)dx}, \forall x$. Esta função é solução de LH.
Com efeito, vemos que,

$y' = k.a(x).e^{\int a(x)dx} = a(x).k.e^{\int a(x)dx} = a(x).y$, logo $y' = a(x)y$.

Portanto y é uma solução.

Para garantir a unicidade de solução devemos acrescentar a EDO uma condição inicial, desse modo, o Teorema da Existência e Unicidade pode ser enunciado do seguinte modo: "O PVI: $\begin{cases} y(x) = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, possui uma única solução".

De fato, pelo teorema da existência, $y(x) = k.e^{\int_r^x a(u)du}$ é solução de LH. Em particular para $r = x_0$, temos $y(x) = k.e^{\int_{x_0}^x a(u)du}$ é solução de LH, portanto:

$y(x_0) = k.e^{\int_{x_0}^{x} a(u)du} = k.e^0 = k$.

Fazendo $k = y_0$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{y(x) = y_0 .e^{\int_{x_0}^{x} a(u)du}}},$$

e esta função é a única solução do PVI.

Consequência 1: O PVI: $\begin{cases} y'(x) = a(x)y \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$, possui uma única solução, a saber, $y(x) \equiv 0.$

De fato, $y(x) = y_0.e^{\int_{x_0}^{x} a(u)du}$ é a única solução do PVI. Entretanto, $y_0 = 0.$ Logo esta única solução é dada por $y(x) = 0 \,.\, e^{\int_{x_0}^{x} a(u)du} = 0$, portanto $y(x) = 0$.

Consequência 2: Se $f = f(x)$ e $T = T(x)$ são duas soluções da equação linear homogênea tal que $f(x_0) = T(x_0)$ para algum x_0, então $f(x) = T(x), \forall x$.

De fato, seja $z(x) = (f - T)(x) = f(x) - T(x)$. Portanto z é solução da equação linear homogênea, também $z(x_0) = 0.$ Pela consequência 1, $z(x) = 0$, portanto $f = T.$

Observação (Teorema da Dimensão): O espaço vetorial real das soluções da equação linear homogênea tem dimensão um.

De fato, seja o PVI: $\begin{cases} y'(x) = a(x)y \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$. Pelo Teorema da Existência e Unicidade, existe uma única solução do PVI. Seja $\hat{y} = \hat{y}(x)$ esta solução. Temos ainda que $\hat{y}(x) \neq 0, \forall x.$ Portanto $\hat{y}$ é linearmente independente. Seja $y(x)$ uma solução qualquer da equação linear homogênea, e $z(x) = y(x) - y(x_0).\hat{y}(x).$ Portanto, z também é solução da equação linear homogênea, pois é combinação linear de soluções. Ainda mais,

$$z(x) = y(x_0) - y(x_0).\hat{y}(x_0) = y(x_0).\left[1 - \hat{y}(x_0)\right] = y(x_0).0 = 0 .$$

Pela consequência 1, $y(x) = 0$.

$$\therefore y(x) = y(x_0).\,\hat{y}\,(x).$$

Logo, $\hat{y}$ gera o espaço das soluções da EDO de 1ª. ordem. Portanto, $\{\hat{y}\}$ é base do espaço e assim a dimensão do espaço da linear homogênea é um.

Outra observação relevante é que uma base para o espaço das equações diferenciais homogêneas, descrito pelo PVI: $\begin{cases} y(x) = a(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, é dada por $\hat{y}(x) = e^{\int_0^x a(u)du}$.

2.2.2 Solução Geral da Equação Diferencial Ordinária Linear

Novamente, serão admitidas formalmente as contas a seguir.

Seja a equação diferencial linear,

$$y'(x) = a(x)y + b(x), \tag{2.1}$$

Multiplicando a equação (2.1) por $v = v(x)$, temos:

$$y'v = a(x)y.v + b(x)v. \tag{2.2}$$

Seja v, tal que,

$$v' = -a(x)v, \tag{2.3}$$

assim, a equação (2.2) transforma-se em

$$y'.v = -v'.y + b(x)v \Rightarrow y'.v + v'.y = b(x).v\ . \tag{2.4}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(yv) = vb(x)\ . \tag{2.5}$$

Segue ainda que,

$$v(x) = e^{-\int_r^x a(u)du}, \tag{2.6}$$

satisfaz a equação (2.1).

Seja, $F(x) = \int_r^x a(u)du$. Substituindo (2.6) em (2.5), temos:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x).e^{-F(x)}\right) = e^{-F(x)}.b(x).$$

Integrando membro a membro, segue que,

$$y(x).e^{-F(x)} = \int_r^x e^{-F(s)}b(s)ds + k\ ,$$

então $y(x) = k.e^{F(x)} + e^{F(x)}\int_r^x e^{-F(x)}b(s)ds$,

que é a solução geral da equação diferencial linear. Logo,

$$\frac{d}{dy}\left(y.e^{-F(x)}\right) = y'.e^{-F(x)} - y.e^{-F(x)}.a(x)$$

$$= a(x)y.e^{-F(x)} + b(x).e^{-F(x)} - y.e^{-F(x)}a(x)$$

$$= b(x).e^{-F(x)}.$$

Assim, $y.e^{-F(x)}$ e $\int b(x).e^{-F(x)}dx$, são primitivas de uma mesma função, a saber, $b(x).e^{-F(x)}$, desse modo,

$$y.e^{-F(x)} = k + \int b(x).e^{-F(x)}dx,$$

pois duas primitivas de uma mesma função diferem por uma constante (nesse caso k).

Portanto, $y(x) = k.e^{F(x)} + e^{F(x)}\int b(x).e^{-F(x)}dx$, ou então,

$y(x) = k.e^{F(x)} + e^{F(x)}\int_r^x b(s).e^{-F(s)}ds, \forall r.$

Teorema da Existência: A equação diferencial linear possui sempre solução.

Demonstração: Seja $y(x) = ke^{F(x)} + e^{F(x)}\int b(x).e^{-F(x)}dx$. Temos que y(x) é uma solução da equação diferencial linear.

De fato, como

$y'(x) = k.e^{F(x)}.a(x) + e^{F(x)}.\int b(x).e^{-F(x)}dx.a(x) + e^{F(x)}.b(x).e^{-F(x)},$

$$\Rightarrow y'(x) = a(x).\left[ke^{F(x)} + e^{F(x)}\int b(x).e^{-F(x)}dx\right] + b(x),$$

logo,

$$y'(x) = a(x).y(x) + b(x),$$

portanto,

$$y'(x) = a(x)y + b(x).$$

Teorema da Existência e Unicidade: O PVI: $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ possui solução única.

Demonstração: Pelo Teorema da Existência, temos:

$y(x) = ke^{F(x)} + e^{F(x)}\int_r^x b(s).e^{-F(s)}ds, \forall r,$

é solução da equação diferencial linear. Em particular para $r = x_{0,}$

$y(x) = ke^{F(x)} + e^{F(x)}\int_{x_0}^{x} b(s)e^{-F(s)}ds$,

é também solução. Logo,

$y(x_0) = ke^{F(x_0)} + e^{F(x_0)}\int_{x_0}^{x_0} b(s)e^{-F(s)}ds = ke^0 + e^0.0 = k$.

Fazendo $k = y_0$, segue que: $y(x) = y_0 e^{F(x)} + e^{F(x)}\int_{x_0}^{x} b(s)e^{-F(s)}ds,$ e essa função é solução do PVI.

Observação 1: Sejam f e T duas soluções da equação diferencial linear. Entretanto, f + T não é solução da equação diferencial linear.

De fato, seja $z(x) = (f + T)(x) = f(x) + T(x)$; logo

$$z'(x) = f'(x) + T'(x) = a(x)f + b(x) + a(x)T + b(x)$$

$$= a(x)(f + T) + 2b(x) = a(x)z + 2b(x).$$

$$\therefore z' = a(x)z + 2b(x) \neq a(x)z + b(x).$$

Portanto, $f + T$ não é solução da equação diferencial linear.

Observação 2: Do mesmo modo se f é solução da equação diferencial linear, isto não implica que cf seja solução da equação diferencial linear.

Observação 3: Sejam f solução da equação diferencial linear homogênea e T solução da equação diferencial linear não homogênea; então $f + T$ é solução da equação diferencial linear não homogênea.

De fato, seja $z(x) = (f + T)(x) = f(x) + T(x)$; logo,

$$z' = f' + T' = a(x)f + a(x)T + b(x) = a(x).(f + T) + b(x) = a(x)z + b(x).$$

$$\therefore z' = a(x)z + b(x).$$

No próximo capítulo serão consideradas as aplicações das EDOs na modelagem de problemas envolvendo equações exponenciais, serão utilizadas técnicas de solução de equações diferenciais para a resolução do problema considerado.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

> *"Se você não pode resolver o problema a que se propôs, então tente simplifica-lo. A condição única é esta: você não deve simplificá-lo demasiadamente".*
> *MARK KAC (1914-1983)*

Neste tópico veremos que muitos problemas que tentam interpretar fenômenos físicos, químicos e biológicos, são geralmente expressos por meio de funções matemáticas, que tentam interpretar numericamente os problemas e fazer possíveis previsões. Apresentaremos um breve histórico do desenvolvimento da matemática, a partir do método da razão preconizado por René Descartes, chegando a Leibniz, que culminaram com o desenvolvimento da modelagem matemática de problemas reais. A seguir mostraremos os tipos de modelos matemáticos, classificados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas. Veremos também que existem muitas funções que modelam problemas e relações, mas nos ateremos àqueles que modelam funções exponenciais. A seguir, apresentaremos a modelagem matemática de alguns problemas utilizando equações diferenciais.

3.1 Introdução

Um fenômeno do mundo real, como por exemplo: o tamanho de uma população, juros compostos e inflação, a concentração de um produto em uma reação química, a difusão de calor e o resfriamento de um corpo, o crescimento de uma célula, a desintegração radioativa, a absorção de drogas por um paciente em tratamento, dentre outros, podem ser descritos matematicamente, frequentemente por meio de uma função.

O objetivo de se usar modelos é entender o fenômeno e tentar fazer previsões.

De acordo com BASSANEZI[5]:

> *"A aplicação correta da matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não*

[5] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3 ed. 3ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2011, p. 18.

> *perdendo de vista a fonte que originou tal processo. Este procedimento construtivo conduz ao que se convencionou chamar de Matemática Aplicada."*

O método da razão preconizado por René Descartes (1596-1650) e transmitido em seu "Discurso sobre o método de bem conduzir a razão na busca para a verdade", de 1637, ao anunciar seu programa de pesquisa filosófica, unificou e esclareceu toda a ciência, uma vez que a busca pelo conhecimento científico deve aceitar somente o que seja claro de tal forma que nossa mente não exclua dúvidas, dividir os grandes problemas em problemas menores e argumentar, partindo do simples para o complexo, verificando o resultado final.

Leibniz (1646-1719), duas gerações após Descartes, sonhava com um modelo universal, pelo qual, os problemas humanos pudessem ser tratados de forma racional e sistemática, através da computação lógica [10].

Assim, devido ao seu poder de síntese e generalização, a matemática passou a exercer um papel de agente unificador de um mundo racionalizado.

Dado um problema do mundo real, é necessário primeiramente formular um modelo matemático, através de identificação e especificações de variáveis dependentes e independentes, formulando hipóteses que simplifiquem o fenômeno, tornando-o tratável pela matemática, para que se utilize o conhecimento da situação física e os recursos matemáticos disponíveis, justamente para obter as equações procuradas [1].

Para BASSANEZI[6], os modelos matemáticos, são classificados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas em:

a) Linear ou não linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;

b) Estático, quando representa a forma do objeto, por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo, ou Dinâmico quando simula variações de estágios, como por exemplo o crescimento de uma população;

c) Educacional, quando baseia-se em um número pequeno ou em simples suposições, tendo geralmente soluções analíticas, ou Aplicativo que se baseia

---

[6] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3 ed. 3ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2011, p. 20

em hipóteses reais, geralmente envolvendo inter-relações de um grande número de variáveis, fornecendo sistemas de equações com numerosos parâmetros;
d) Estocástico ou Determinístico, de acordo com a utilização ou não de variáveis aleatórias nas equações.

O modelo determinístico, supondo conhecer informações suficientes em determinado instante ou estágio de certo processo, tenta prever todo o futuro de forma precisa.

A partir da representação numérica de uma função, podemos obter uma representação gráfica, que pode em muitas situações sugerir fórmulas algébricas apropriadas.

Segundo STEWART[7], *"um bom modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma idealização".*

Assim, é necessário e importante que se conheça as limitações de um modelo, pois a palavra final é dada pela Mãe Natureza [26].

Sobre a utilidade de conceitos da matemática, LIMA[8], afirma que:

> *"Vários conceitos básicos da Matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que inicialmente pensada e vieram, com a evolução das ideias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nesta Ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas mas a relevância teórica se manteve."*

Existe uma infinidade de funções que modelam problemas e relações observadas no mundo real. Porém neste trabalho, o enfoque será dado àquelas que modelam funções exponenciais, com equações diferenciais de primeira ordem, ou seja, aquelas da forma $\frac{dy}{dt} = k.y$, que serão utilizadas em sala de aula.

[7] STEWART, James. Cálculo, volume I. James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. São Paulo: Cengage Learning, 2013, p. 22

[8] LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011, p. 28

3.2 O modelo diferencial $\frac{dy}{dt} = k.y$

Sempre que determinada lei afirma que a taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta quantidade, será obtida uma equação diferencial da forma:

$\frac{dy}{dt} = k.y$, em que k expressa a constante de proporcionalidade.

Utilizando a solução da EDO, da página 27, dada por $\boldsymbol{y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(u)du}}$, temos $a(u) = k$, logo $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(u)du} = y_0 e^{ku|_{t_0}^{t}} = y_0 e^{k(t - t_0)}$, portanto:

$y(t) = y_0 e^{k(t - t_0)}, -\infty < t < \infty$.

Vale a pena observar que o modelo $\frac{dy}{dt} = k.y$, após seu desenvolvimento, chegará em uma equação exponencial, significando que a variação instantânea (crescimento ou decaimento) de uma variável dependente y, em relação a uma variável independente t, é proporcional a y.

De modo geral, a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = k.y$, que representa situações em que a taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta mesma quantidade, recai em situações que podem ser expressas por $y(t) = y_0 . e^{k.t}$, com $-\infty < t < \infty$, que é a solução única para o problema.

A seguir, serão apresentadas algumas situações de aplicação do modelo diferencial que se apresentam como única solução para problemas, recaindo em funções exponenciais.

3.3 Decaimento Radioativo

A “meia-vida” de uma substância é o tempo necessário para desintegrar a metade do material. Conhecendo a meia vida de certo material, é possível obter a constante k, da mesma forma, conhecida a constante k, é possível determinar a “meia-vida” do material.

A atividade das substâncias radioativas é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo.

Segundo BASSANEZI[9]*:*

> *"Este fenômeno é devido a emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os principais experimentos de que resultaram tal compreensão foram realizados por Rutherford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie, no final do século passado e início deste, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante."*

Problema: Um isótopo radioativo tem "meia vida" de 16 dias. Desejamos obter 30 g ao final de 30 dias. Qual é a quantidade inicial de radioisótopos com que se deve começar a experiência?

Solução: Como a meia vida está dada em dias, o tempo deve ser medido em dias. Seja $N = N(t)$ a quantidade presente no instante t e $N(0) = N_0$ a quantidade inicial do isótopo radioativo.

Seja k uma constante, onde $k > 0$, conhecida como constante de desintegração, assim devemos utilizar o sinal negativo porque o número de átomos diminui com o passar do tempo, e, portanto $\frac{dN}{dt} < 0$.

Todas as vezes que uma lei afirma que a taxa de variação de uma quantidade $N(t)$ é proporcional a esta quantidade, estamos diante de uma equação diferencial da forma $\frac{dN}{dt} = -k.N$. Como $N(0) = N_0$, com $N_0 > 0$, escrevendo a equação em sua forma diferencial, temos o PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -kN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}.$$

Então,

$$\frac{dN}{dt} = -kN,$$

$$N(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(u)du} = N_0 e^{\int_0^t (-k)du} = N_o e^{-ku|_0^t},$$

$$N(t) = N_0 e^{(0-t)k} = N_0 e^{-kt}.$$

Utilizando os dados do problema, para $t = 16$, aplicado na equação obtida anteriormente, resultará:

---

[9] BASSANEZI, Rodney Carlos e Wilson Castro Ferreira Jr. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo: Harbra Ltda., 1988, p. 36

$$\frac{1}{2}\,N_0 = N_0 e^{-16k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-16k}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade:

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-16k}$, temos

$k = \frac{\ln(2)}{-16} = -0{,}043321698785.$

Desta forma, a equação que determina a quantidade de material radioativo, em qualquer instante, nas condições propostas, será:

$N(t) = N_0 \, . \, e^{-0{,}043321698785}.$

Como desejamos obter 30g de material ao final de 30 dias, devemos aplicar estes dados na expressão anterior, fazendo os cálculos, encontramos:

$30 = N_0 \, . \, e^{-0{,}043321698785\,.\,30},$

$30 = N_0 \, . \, e^{-1{,}299650963},$

$30 = N_0 \, . \, 0{,}272626933,$

$N_0 = \frac{30}{0{,}272626933},$

$N_0 \approx 110g$.

Assim, para as condições do problema, devemos partir de 110g do isótopo radioativo, cuja meia-vida é de 16 dias, para que ao final de 30 dias restem 30 gramas.

3.4 O crescimento de uma célula

Suponhamos que a massa m de uma célula seja função do tempo, ou seja, $m = m(t)$ e que $m_0 = m(0)$ seja a massa inicial no instante $t = 0$. Suponhamos ainda que o crescimento da célula seja determinado somente pela velocidade do metabolismo em seu interior.

Como o aumento do metabolismo depende da massa das moléculas em atividade, a razão de crescimento da massa celular é proporcional à sua massa presente em cada instante, o que em linguagem matemática se traduz por $\frac{dm}{dt} = k$, onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade, restringiremos ainda que $m < M$, tendo em vista que a célula ao atingir determinado tamanho se divide.

A solução geral da equação diferencial proposta é dada por:

$$m(t) = Ae^{kt} \tag{3.1}$$

com a condição inicial $m_0 = m(0)$, obtemos a solução particular:

$m(t) = m_0 e^{kt}$, com $m < M$. (3.2)

Desta forma, a célula tem um crescimento exponencial até se dividir, isto é, enquanto $m_0 e^{kt} < M$, implicando que $t < \frac{1}{k} \ln(\frac{M}{m_0})$.

Para esta situação, o conceito de crescimento específico é definido por:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = k \ (constante).$$

Assim, enquanto $\frac{dm}{dt}$ mede a velocidade de crescimento, k mede a velocidade de crescimento relativa à massa presente.

3.4.1 Exemplo de aplicação – Propagação de Epidemia

Transferindo o modelo de crescimento de uma célula para o modelo de propagação de uma epidemia, podemos obter um modelo simplificado para a propagação de uma doença, sendo x a população infectada com a doença e t o tempo de propagação, consideraremos as seguintes hipóteses:

(i) Uma fração x de uma determinada população tem uma doença infecciosa, então $S = (1 - x)$ não tem.

(ii) Os membros desta população podem se encontrar livremente e ao acaso.

(iii) A taxa de aumento de x é proporciona a x e a S.

Como consequência destas hipóteses, temos que o modelo dado será representado pela equação:

$\frac{dx}{dt} = kx(1 - x)$ (3.3)

em que $k > 0$ é a constante de propagação.

Resolvendo a equação diferencial ordinária (3.3), fazendo os cálculos, obteremos:

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - x)$$

$$kt = \int \frac{1}{x(1 - x)} \, dx$$

$$kt = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{1 - x} \, dx$$

$$kt = \ln x + \ln(1 - x) + c$$

$$kt = \ln x(1 - x) + c$$

$$e^{kt} = x(1 - x)\, e^{c}$$

$$x(1 - x) = Ce^{kt}, \qquad C = e^{-c}$$

$$x = \frac{Ce^{kt}}{1 - x}$$

$$x = \frac{1}{(1-x)e^{-kt}}.$$

Como a condição inicial é dada por $x(0) = x_0$, obtemos:

$$x = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x_0}\right)e^{-kt}}. \tag{3.4}$$

Que apresenta $x \to 1$, quando $t \to \infty$.

A expressão (3.4) indica que, mais cedo ou mais tarde, cada pessoa contrairá a doença, não importando quantas pessoas encontravam-se infectadas incialmente, exceto que a condição inicial x_0 seja igual a 0 (zero), o que implicaria $x = 0$ para todo t.

Observamos que o modelo é simples e não considera a possibilidade de que as pessoas infectadas possam ser isoladas e se recuperem da doença, voltando a ser sadias.

3.5 Juros Compostos e Inflação

MORGADO[10], descreve de forma didática a operação de empréstimo da Matemática Financeira:

> “A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal*), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada *juro.* A soma C + J é chamada de *montante* e será representada por M. A razão i = J/C, que é a taxa da operação é chamada de *taxa de juros.”*

[10] MORGADO, Augusto César. Progressões e Matemática Financeira. Augusto César Morgado, Eduardo Wagner, Sheila C. Zani. – 5ª. ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2001, p. 44.

Teorema: No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0(1+i)^n$.

Consideremos uma quantia C_o, aplicada a juros fixos, capitalizados continuamente.

Vamos chamar de $C(n)$ o capital gerado a partir daquela quantia inicial, depois de decorrido o tempo t, assim $C(n)$ é uma função crescente de t.

Notamos também que se $n < n'$, então o acréscimo $C(n+h) - C(n')$, experimentado pelo capital após o decurso de tempo h, a partir do momento n', é maior do que o rendimento $C(n+h) - C(t)$, depois de decorrido o mesmo tempo h, a partir do momento anterior n, pois o capital acumulado $C(n')$ sendo maior do que $C(n)$, deve produzir maior renda.

O modelo matemático conveniente para descrever a variação de um capital aplicado a juros fixos, em função do tempo, deve ser uma função crescente $C(n)$.

Utilizando a solução da EDO, da página 27, dada por $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(u)du}$, temos $a(u) = k$, logo $y(n) = y_0 e^{\int_{n_0}^{n} a(u)du} = y_0 e^{du|_{n_0}^{n}} = y_0 e^{k(n-n_0)}$, portanto, $y(n) = y_0 e^{k(n-n_0)}, -\infty < n < \infty$.

Com a nomenclatura inicial temos:

$C(n) = C_0 e^{k(n-n_0)}$, com $n_0 = 0$,

logo, $C(n) = C_0 e^{k(n-0)} \Rightarrow C(n) = C_0 e^{kn}$.

Agora, se $\frac{dC}{dn} = i.C$, sendo i a taxa de correção e $C(0) = C_0$ for o capital inicial, teremos:

$$C(n) = C_0(1+i)^n, \tag{3.5}$$

que é o modelo matemático aplicado para a obtenção do Montante $C(n)$ gerado pela aplicação de um capital inicial C_0, a uma taxa i, durante o período de tempo n.

Podemos concluir que aplicados a juros compostos, os montantes em função do tempo constituirão uma função exponencial.

3.5.1 Exemplo de Aplicação

MORGADO[11] propõe um problema de empréstimo com juros capitalizados, que tomamos como exemplo de aplicação, salientando que poderíamos ter escolhido um problema mais elaborado, porém preferimos a simplicidade, pois o objetivo é a modelagem do problema.

Problema: Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

Com os dados do problema, utilizando a expressão obtida em (3.5) temos: $C_3 = C_0(1+i)^3$.

Como $C_0 = 150$ e $i = 12\% = 0{,}12$, aplicando em (3.5) obtemos:

$C_3 = 150(1+0{,}12)^3$

$C_3 = 150(1{,}12)^3$

$C_3 \approx 210{,}74$ reais.

Assim, após um período de três meses, a dívida de Cristina será de R$ 210,74.

3.6 Cronologia do Carbono

Em 1950, o químico Willard Libby[12], inventou um método para determinar a idade de fósseis usando o carbono radioativo.

A teoria da cronologia do carbono baseia-se no fato de que o isótopo do carbono 14 é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio.

A razão entre a quantidade de C-14 para o carbono ordinário da atmosfera é uma constante e, como consequência, a proporção da quantidade de isótopo presente em todos os organismos é a mesma proporção da quantidade na atmosfera.

---

[11] Morgado, Augusto César. Progressões e matemática financeira/ Augusto César Morgado, Eduardo Wagner, Sheirla C. Zani – 5.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2001. p. 46.

[12] Willard Frank Libby (Grand Valley, 17 de Dezembro de 1908 – Los Angeles, 8 de setembro de 1980) foi um químico estadunidense. É reconhecido pela descoberta do método de datação conhecido por datação por radiocarbono (carbono-14), recebendo o prêmio Nobel de Química em 1960. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Willard_Frank_Libby, acesso em 10.03.2014.

Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa. Para determinarmos a idade de um fóssil, devemos buscar o teor de C-14 presente no organismo, assim será possível determinar quanto tempo se passou desde que o ser vivo morreu.

Desta forma, comparando a quantidade proporcional de C-14 presente em um fóssil com a razão constante na atmosfera, é possível obtermos uma razoável estimativa da idade do fóssil, pois o método se baseia no conhecimento da meia-vida do carbono radioativo C-14 que está na faixa de 5538 anos a 5598 anos, com uma média de 5568 anos, com erro para mais ou para menos de 30 anos.

Este método tem sido utilizado para obter a data aproximada de móveis de madeira em túmulos egípcios, o tecido de linho que envolvia os pergaminhos do Mar Morto e também o tecido do enigmático Sudário de Turim.

O Sudário de Turim ou Santo Sudário[13] é uma peça de linho que mostra a imagem de um homem que aparentemente sofreu de traumatismos físicos de maneira consistente com a crucificação. Está guardado na Catedral de Turim, na Itália, desde o século XIV. É uma peça raramente mostrada em público, sua última exposição ocorreu no ano de 2010, ocasião em que atraiu mais de cinquenta mil fiéis.

Chamando de $A(t)$ a massa de carbono radioativo C-14, após decorrido o período de tempo t, com $A(0) = A_0$ igual à massa inicial, utilizando a expressão diferencial da página 25, teremos:

$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(u)du}$, como $a(u) = k$, então:

$y(t) = y_0 e^{du|_{t_0}^{t}} = y_0 e^{k(t-t_0)}$ portanto,

$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, -\infty < t < \infty$.

A expressão final trocando y(t) por A(t) e considerando $t_0 = 0$ é dada por:

$$A(t) = A_0 e^{kt}. \qquad (3.6)$$

A figura a seguir ilustra o decrescimento da massa de núcleo de Carbono C-14 em função do tempo, em anos.

---

[13] Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Sud%C3%A1rio_de_Turim. Acesso em 10.03.2014.

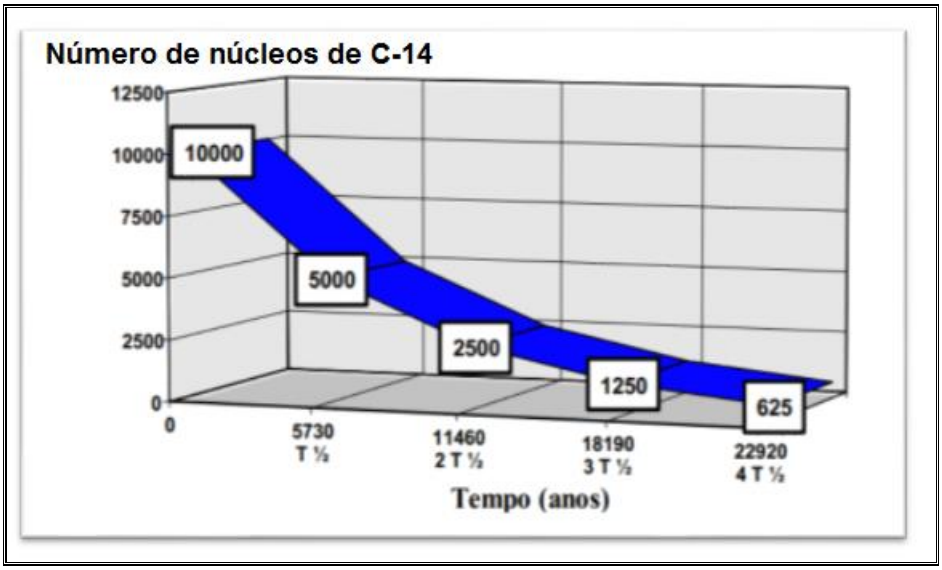

Figura 1."Decaimento do número de núcleos de Carbono 14 em função do tempo" Fonte: Disponível em http://www.iq.ufrgs.br. Acesso em 29/04/2014.

3.6.1 Exemplo de Aplicação

Vamos supor que um osso fossilizado contenha um centésimo da quantidade original do C-14, vamos também adotar que a meia-vida do C-14 seja de 5600 anos, para determinarmos sua idade aproximada, utilizando a expressão (3.6) obteremos:

$$A(t) = A_0 . e^{kt}$$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 . e^{k.5600}$$

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5600k}$$

$$5600k = -0{,}6931$$

$$k = -0{,}000123776.$$

Desta forma, substituindo o valor de k na equação anterior, temos:

$$A(t) = A_0 \, . \, e^{-0{,}000123776t}$$

$$\frac{1}{100} A_0 = A_0 \, . \, e^{-0{,}000123776t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = \ln e^{-0{,}000123776t}$$

$$-\,0{,}000123776\, t = -6{,}9077$$

$t \approx 55.808$ anos.

Vemos assim, utilizando a expressão exponencial, que a idade aproximada do osso fossilizado que contém um centésimo da quantidade original de Carbono é de 55.808 anos.

3.7 Absorção de Drogas

Saber como decai a concentração de uma droga no sangue de um paciente é um problema fundamental para a farmacologia, pois esse conhecimento permite o estabelecimento da dosagem a ser prescrita para ser inserida e o intervalo entre as aplicações.

Supondo que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração da droga na corrente sanguínea, obtemos a expressão:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \tag{3.7}$$

em que $k > 0$ é uma constante, encontrada experimentalmente.

Supondo que seja administrada ao paciente uma dose inicial y_0, que seja absorvida pelo sangue no mesmo instante $t = 0$, pois o tempo de absorção da droga pelo sangue é muito pequeno comparado com o tempo decorrido entre as aplicações de novas doses, a solução geral será dada por:

$$y = y_0 e^{-kt}. \tag{3.8}$$

Supondo ainda que depois de um tempo T, uma segunda dose de mesma quantidade y_0 seja novamente administrada, temos:

$y(T_-) = y_0\, e^{-kt}$ (quantidade de droga no sangue imediatamente antes da segunda dose), e

$y(T_+) = y_0 e^{-kt} + y_0$ (quantidade de droga no sangue imediatamente após a aplicação da segunda dose).

Portanto a expressão que fornece a quantidade de droga no instante $t \geq T$ é dada por:

$$y(t) = y_0(1 + e^{-kt})e^{-k(t-T)}. \tag{3.9}$$

Continuando o tratamento, com a injeção da quantidade y_0 ao final e cada intervalo de tempo igual a T, obtemos:

$$y(2T_-) = y_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} \quad \text{e} \quad y(2T_+) = y_0\,(1 + e^{-kT} + e^{-2kT}). \tag{3.10}$$

Logo:

$$y(2T_+) = y_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})e^{-k(t-2T)}, \text{ para } t \geq 2T. \tag{3.11}$$

Generalizando para a n-ésima aplicação, a quantidade de droga no sangue do paciente será:

$$y(nT_+) = y_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \cdots + e^{-nkT}), \quad n = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Observemos que $1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \cdots + e^{-nkT}$ é uma soma de Progressão Geométrica de $(n + 1)$ termos, com primeiro termo igual a 1 e razão e^{-kT}, resultando:

$$y(nT_+) = y_0 \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}. \tag{3.13}$$

Quando n cresce, $e^{-(n+1)kT} \to 0$ e portanto $y(nT_+)$ tende a $y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kT}}$ que é o nível de saturação da droga, representado pelo gráfico a seguir:

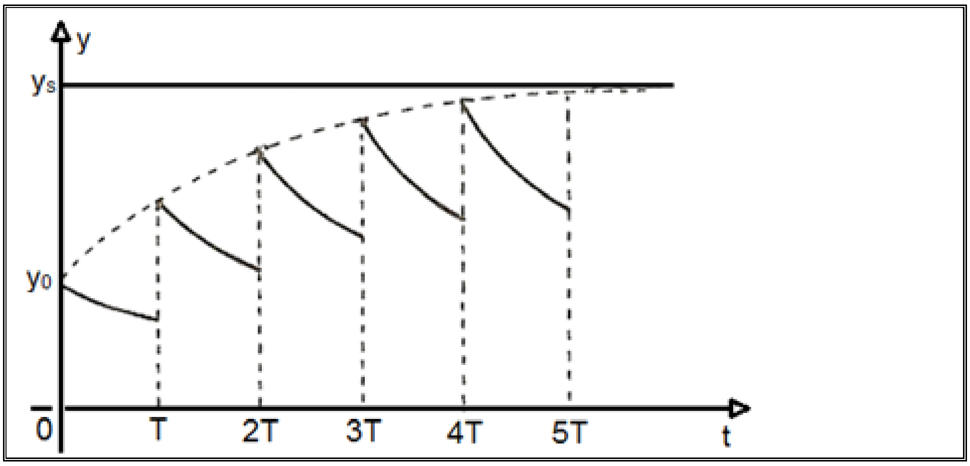

Figura 2. "Gráfico representativo da quantidade de drogas presente em um organismo em função do tempo de aplicação". Fonte: Bassanezi, Rodney Carlos. Equações Diferenciais com Aplicações. Rodney Carlos Bassanezzi, Wilson Castro Ferreira Jr. São Paulo: Harbra, 1988, p. 41.

Observando o gráfico notamos claramente que a cada intervalo de tempo T, a quantidade de droga no sangue do paciente, que decai de forma exponencial, aumenta a uma quantidade superior ao nível que existia no intervalo de tempo anterior e volta a decair, até a próxima administração da droga.

3.7.1 Exemplo de Aplicação

Problema apresentado na AV2 (segunda avaliação) da disciplina MA11, no ano de 2011, do programa PROFMAT[14].

---

[14] Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/, acesso em 15.03.2014.

(a) 24h após sua administração, a quantidade de uma droga no sangue reduz-se a 10% da quantidade inicial. Que percentagem resta 12h após a administração? Justifique sua resposta, admitindo que o decaimento da quantidade de droga no sangue é exponencial.

(b) Em quanto tempo a quantidade de droga no organismo se reduz a 50% da dose inicial?

(c) Se a droga for administrada em duas doses de 10 mg com um intervalo de 12h, qual é a quantidade presente no organismo após 24h da primeira dose?

Resolução:

(a) Seja $y(t)$ a quantidade de droga presente no sangue do paciente no período de tempo t e y_0 a quantidade inicial, como também seja $\frac{dy}{dt} = 10\% = \frac{1}{10}$ a taxa de variação da concentração da droga na corrente sanguínea.

Nestas condições $y = y_0 \,.\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{24}}$ é a expressão matemática que dará a quantidade da droga presente no organismo após o intervalo t do tempo em horas.

Aplicando a equação para $t = 12h$, obtemos:

$y(12) = y_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{12}{24}}$,

$y(12) = y_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$y(12) = y_0 \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$y(12) = y_0 . 0{,}317$,

$y(12) \approx 31{,}7\%\ de\ y_0$.

Após 12h há aproximadamente 31,7% do valor inicial da droga presente no sangue do paciente.

Resolução (b):

Seja $y(t) = 50\% \,. y_0$, então $y(t) = \frac{1}{2}\, y_0$, logo:

$\frac{1}{2}\, y_0 = y_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{24}}$,

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{24}}$.

Aplicando logaritmos em ambos os lados da igualdade, temos:

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{24}}$.

Aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos:

$\log(1) - \log(2) = \frac{t}{24}(\log 1 - \log 10)$,

$0 - \log(2) = \frac{t}{24}(0 - 1)$,

$\log(2) = \frac{t}{24}$,

$t = 24 . \log(2)$,

$t \approx 7{,}22$ horas.

Assim, teremos 50% da dose inicial presente no organismo em 7,22 horas.

Resolução (c):

Sabendo que $y_0 = 10$ corresponde a quantidade de droga na primeira dose e $\frac{10}{\sqrt{10}}$ corresponde a quantidade de droga após 12 horas, segue:

$y(12) = 10 + \frac{10}{\sqrt{10}} = 10.(1 + \frac{1}{\sqrt{10}})$.

Então para $y(24) = \frac{10(1+\frac{1}{\sqrt{10}})}{\sqrt{10}} = 10\,(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10})$ e assim:

$y(24) = \frac{10}{\sqrt{10}} + 1 = \sqrt{10} + 1$,

$y(24) \approx 3{,}16 + 1$,

$y(24) \approx 4{,}16$ mg.

Concluímos que após a administração de duas doses, com intervalo de 12 horas, a quantidade da mesma presente no organismo será aproximadamente igual a 4,16 mg.

3.8 Resfriamento de um corpo – Difusão de calor

De acordo com a Lei empírica de Newton do resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura de um corpo e do meio que o rodeia, denominada de temperatura ambiente, assim, como um corpo não possui nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T, tende àquela do meio que o cerca T_a, verificado experimentalmente que quanto maior for o valor de $|T - T_a|$ mais rápida será a variação de $T(t)$.

Escrevendo em termos matemáticos:

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_a), \qquad (3.14)$$

em que $k > 0$ se $T > T_a$ então $\frac{dT}{dt} < 0$ e se $T < T_a$ então $\frac{dT}{dt} > 0$, conforme a figura a seguir:

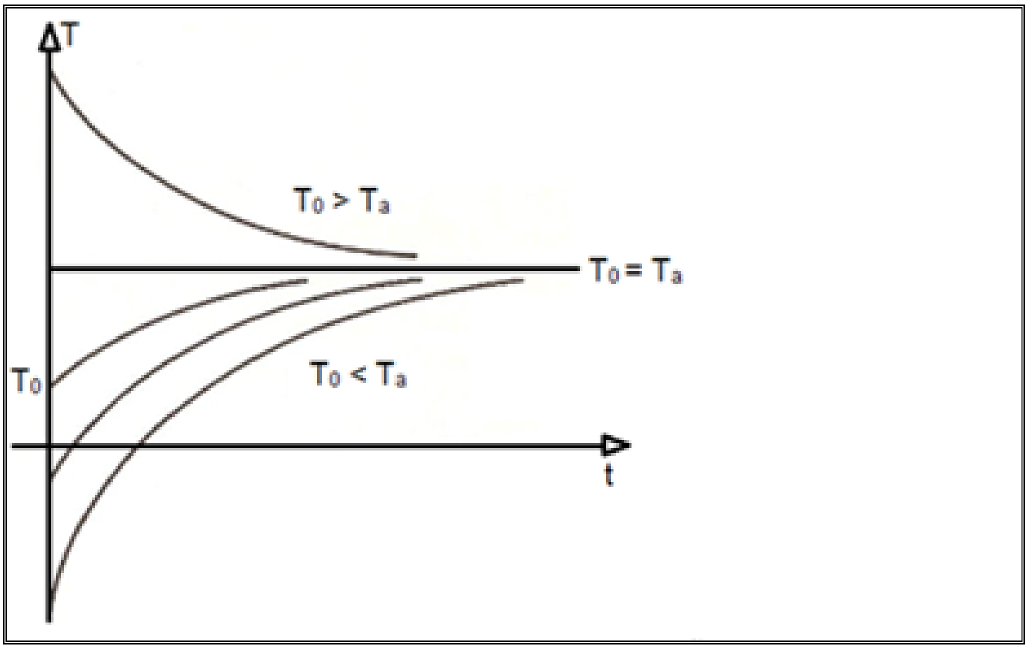

Figura 3. "Gráfico representativo da variação de temperatura de um corpo exposto à temperatura do ambiente". Fonte: Bassanezi, Rodney Carlos. Equações Diferenciais com Aplicações. Rodney Carlos Bassanezi e Wilson Castro Ferreira Jr. São Paulo: Harbra, 1988, p. 43.

Observando que $T = T_a$ é a solução de (3.14), que significa que se a temperatura de um corpo for igual à temperatura ambiente, então ela não sofrerá variação.

A solução geral da equação (3.14) é dada por:

$$T(t) = k.e^{-\alpha t} + T_a , \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Para $T(0) = T_0$ obtemos $k = (T_0 - T_a)e^{-\alpha t} + T_a$, desta forma,

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-\alpha t} + T_a. \qquad (3.15)$$

Neste modelo matemático, a temperatura do corpo só atinge a temperatura T_a do ambiente no limite em que $t \to +\infty$, mas na realidade a temperatura ambiente é atingida num tempo finito.

3.8.1 Exemplo de Aplicação

Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega 2 horas depois da chamada, examina o cadáver. Uma hora depois o detetive prende a secretária [1]. Por que ?

Solução: A temperatura do escritório era de 20ºC. Quando a polícia chegou, mediu a temperatura do corpo achando 35ºC; uma hora depois, mediu novamente obtendo 34,2ºC. Supondo que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a 36,5ºC, temos:

$T(0) = 36{,}5 \; e \; T(t^*) = 35$,

em que t^* é o tempo decorrido desde o instante da morte.

Assim, $T(t^* + 1) = 34{,}2$ é a temperatura da vítima uma hora depois que a polícia chegou ao local.

A equação de resfriamento para este caso é dada por:

$T(t) = (36{,}5 - 20)e^{-\alpha t} + 20$,

$35 = 16{,}5\, e^{-\alpha t^*} + 2 \;\rightarrow\; \frac{15}{16{,}5} = e^{-\alpha t^*}$ (i)

$34{,}2 = 16{,}5\, e^{-\alpha(t^*+1)} + 20 \;\rightarrow \frac{14{,}2}{16{,}5} = e^{-\alpha(t^*+1)}$ (ii)

Resolvendo o sistema formado por (i) e (ii), dividindo membro a membro as equações, obtemos:

$\frac{15}{14{,}2} = \frac{1}{e^{-\alpha}}$, que implica $e^{\alpha} = 1{,}056338$, onde $\alpha = 0{,}05481$ portanto o tempo $t^* = \frac{-\ln\left(\frac{15}{16{,}5}\right)}{\alpha} \approx 1{,}73898\; h$.

Concluímos que o assassinato ocorreu 1 hora, 44 minutos e 20 segundos antes da polícia chegar, assim quando a secretária telefonou, seu chefe ainda estava vivo.

3.9 Dinâmica Populacional

O responsável pela primeira tentativa de estimar o crescimento populacional mundial foi o economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus, em seu trabalho “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society”, que foi publicado em 1798, utilizando um modelo que estabelecia que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em uma progressão aritmética.

Seu trabalho e seus alertas serviram para refrear o desvairado otimismo econômico de sua época.

O modelo Malthusiano não se revelou eficiente para países desenvolvidos, porém seu pensamento influenciou o pensamento econômico durante muito tempo.

Seu modelo falha ao prever crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não representa a realidade.

Segundo BASSANEZI[15]:

> Malthus sustentava que a população cresceria até o limite de subsistência e, então, devido à fome, à guerra, às condições sanitárias, à miséria, não aumentaria. De fato, estes fatores citados – além de outros, como precárias situações de moradia e poluição ambiental – afetam de modo sistemático o crescimento populacional. Para Malthus, estas "condições" funcionariam como "mecanismo" ativado para manter em um nível aceitável."

A lei de Malthus serve para fazermos estimativas a curto prazo em países de terceiro mundo, sendo também apropriada para algumas populações de microrganismos em período limitado de tempo.

Para traduzir sua lei em termos de equações torna-se necessário que estabeleçamos o que se segue:

Seja $P = P(t)$ a população total de determinado país num instante t, no intervalo de tempo Δt, a Lei de Malthus supõe que os nascimentos e mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo de tempo, ou seja:

$número\ de\ nascimentos = \alpha P(t)\Delta t$ e $número\ de\ mortes = \beta P(t)\Delta t$,

em que α é o coeficiente de natalidade e β é o coeficiente de mortalidade.

Desta forma:

$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t$,

---

[15] BASSANEZI, Rodney Carlos e Wilson Castro Ferreira Jr. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo: HARBRA Ltda., 1988, p.49

$\Delta P = (\alpha - \beta)P(t).\Delta t,$

$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t).$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos a equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P. \qquad (3.16)$$

Vemos que a taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante.

Desta forma, a solução de (3.16) será:

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t} \quad , \ P(0) = P_0. \qquad (3.17)$$

Se $\alpha = \beta$, indica que os índices de natalidade e mortalidade são coincidentes, então $P(t) = P_0$ e a população não varia, se $\alpha > \beta$, o índice de natalidade é maior do que o índice de mortalidade, assim a população cresce exponencialmente, já se $\alpha < \beta$ a população diminui e tende a extinção à medida que t cresce.

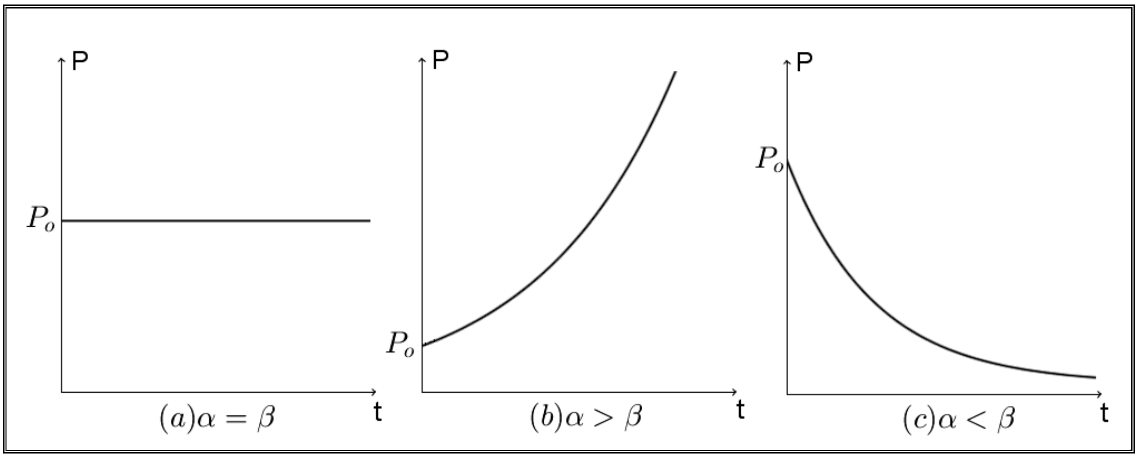

Figura 4. "Gráficos de variações populacionais em função do tempo". Elaborados pela Autora.

3.9.1 Exemplo de Aplicação

O problema seguinte foi apresentado na AV2 (segunda avaliação) da disciplina de MA11 do programa PROFMAT[16], do ano de 2012.

[16] BASSANEZI, Rodney Carlos e Wilson Castro Ferreira Jr. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo: HARBRA Ltda., 1988, p.49

Problema: A população de uma cultura de bactérias, num ambiente controlado, é estimada pela área que ocupa sobre uma superfície plana e tem taxa de crescimento diária proporcional a seu tamanho. Se, decorridos 20 dias, a população duplicou, então em quanto tempo ela ficou 50% maior ? Escolha a resposta certa e justifique sua opção.

(a) Antes de 10 dias;

(b) Ao completar 10 dias;

(c) Após 10 dias.

Resolução:

Seja $P(t)$ a população de bactérias no intervalo de tempo t e $P(0) = P_0$ a população inicial da cultura de bactérias.

Utilizando o modelo malthusiano

$P(t) = P_0 . a^t$ sendo a : taxa de variação da população.

Com os dados do problema encontramos:

$2 . P_0 = P_0 . a^{20}$,

$a = \sqrt[20]{2}$.

Para $P(10)$ temos:

$P(10) = P_0 . \left(\sqrt[20]{2}\right)^{10} = P_0 . \sqrt{2}$,

$P(10) \approx 1{,}4 . P_0$.

Como $P(10) < 1{,}5$ concluímos que a população ficou 50% maior em mais do que 10 dias e a alternativa correta é (c).

4 EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS – REFERENCIAL TEÓRICO

> *"Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, não tem medo e nunca se arrepende".*
> *LEONARDO DA VINCI (1452-1519)*

Vimos nos capítulos anteriores que o crescimento exponencial se caracteriza pelo fato de que a variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor, assim nesta seção serão abordados aspectos teóricos relacionados com as funções exponenciais e logarítmicas, tendo em vista o caráter de inversão existente entre ambas, como também as propriedades características destas funções, o que faz com que a utilização de uma ou de outra na resolução de problemas, após decidido que estes são os modelos adequados, sejam buscadas como instrumental do cálculo.

Segundo LIMA[17], os logaritmos:

> *"...foram criadas no início do século 17, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, com vistas à elaboração de tabelas de navegação."*

Alega ainda o autor que as propriedades práticas da função logarítmica e de sua inversa a função exponencial, permitem reduzir operações aritméticas a operações mais simples efetuadas com logaritmos e estas foram utilizadas através dos tempos, superadas apenas recentemente pelo uso das calculadoras eletrônicas.

Desta forma, a abordagem da caracterização das funções logarítmicas e exponenciais se faz necessária, como também as propriedades matemáticas inerentes às funções, para a descrição das grandezas cujas taxas de variação sejam, em cada instante, proporcionais aos valores das grandezas naquele exato instante.

Neste capítulo, para a definição de ambas as funções, seguiremos as orientações de LIMA[18], para quem: "*é mais simples definir primeiro os logaritmos e, a partir destes, a exponencial".*

---

[17] LIMA, Elon Lages. Meu professor de Matemática e outras histórias. Elon Lages de Lima. – 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. p. 28

[18] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; v.1. 12.ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.p.345.

Esclarecemos que abordaremos a construção do conceito de função exponencial a partir da função logarítmica, pois é desta forma que nos foi apresentado e desenvolvido o estudo, na disciplina de Números e Funções Reais – MA11.

Importante salientar que toda a pesquisa para elaboração do presente texto se deu com a utilização de textos indicados no programa PROFMAT, desta forma, embora não haja aqui a apresentação de uma forma inusitada de ensinar, há uma nova abordagem, para muitos desconhecida, que merece ser acolhida.

4.1 Função Logarítmica

Veremos neste tópico que a definição de logaritmo a partir de integral, ou em outras palavras, como área, libera a intuição geométrica, facilitando a percepção e a demonstração de várias desigualdades. Embora não seja compreensível para alunos de Ensino Médio, devido à necessidade de se trabalhar alguns tópicos de Cálculo, fato este que dependerá do Currículo Escolar, este não apresenta dificuldades para o leitor que possua conhecimento elementar sobre o assunto. Não queremos aqui preconizar que o estudo da função logarítmica deva ser feito a partir de integrais para alunos que cursam o Ensino Médio, principalmente pelo fato que o ensino de Integrais já não faz parte do currículo oficial de ensino de matemática na Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo; porém julgamos importante apresentá-lo sob esta abordagem, devido seu apelo geométrico.

4.1.1 – Definição de Função Logarítmica

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Definimos a função real log: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo para cada $x > 0$,

$$log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

O número $log(x)$ é chamado de logaritmo natural *de* x ou simplesmente *logaritmo de x,* observando que $log(x)$ não está definido para $x \leq 0$ [17].

Recordando a convenção sobre os extremos do intervalo de integração:

$$\int_a^a f = 0 \; e \; \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Temos $\log(1) = 0 \;\; e \;\; \log x < 0$ quando $0 < x < 1$.

É evidente que se $x > 1$, $\log(x) > 0$ pois é a integral da função positiva 1/t no intervalo [1, x].

Segue da definição que log: $\mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente e, por conseguinte, derivável com $(\log(\mathrm{x}))' = \frac{1}{x}$; $(\log(\mathrm{x}))'' = -\frac{1}{x^2}$, e assim por diante [17].

Temos que a função *log(x)* é infinitamente derivável, isto é, o $\log(\mathrm{x}) \in \mathbb{C}^{\infty}$, sendo que log(x) é definido como a área da região hachurada sob a curva ilustrada na figura a seguir:

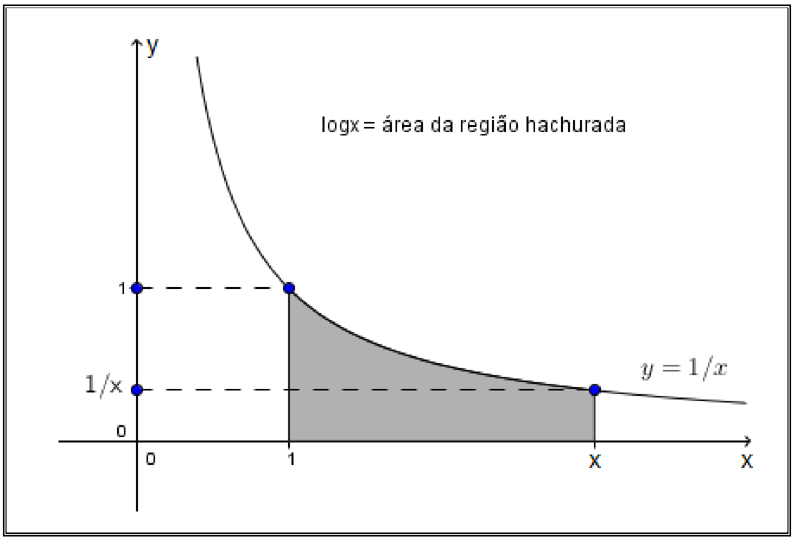

Figura 5. "Gráfico da área da região sob a curva da função $y = \frac{1}{x}$". Elaborado pela Autora.

Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais. No gráfico anterior, a região é limitada pelas retas verticais $x = 1$ e $x = x$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole $\mathcal{H}$. A região em destaque é indicada pelo símbolo $\mathcal{H}_1^x$.

Observando a curva descrita por $y = 1/x$ e a área da região hachurada, percebemos que quando $x > 1$, $\log(x)$ corresponde à área da "faixa de hipérbole" $\mathcal{H}_1^x = \{(x, y) \in R^2; 1 \leq x \leq x, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ e quando $0 < x < 1$, $\log(x)$ é a área da faixa $\mathcal{H}_x^1$ com o sinal trocado.

O Teorema 1 a seguir mostra a propriedade dos logaritmos de transformar o logaritmo do produto de dois fatores em soma dos logaritmos dos fatores. Esta propriedade é importante para a simplificação de cálculos e também na aplicação em resolução de problemas.

Teorema 1: Sejam x, y números positivos. Temos $\log(x\,.\,y) = \log(x) + \log(y)$.

Demonstração: Temos $\log(xy) = \int_1^{xy}\frac{dt}{t} = \int_1^{x}\frac{dt}{t} + \int_x^{xy}\frac{dt}{t} = \log(x) + \int_x^{xy}\frac{dt}{t}$.

Mostraremos que $\int_x^{xy}\frac{dt}{t} = \log(y)$, observando que quando s varia de 1 a y, o produto xs varia de x a xy.

A mudança de variável $t = xs, dt = xds$ nos fornece:

$$\int_x^{xy}\frac{dt}{t} = \int_1^{y}\frac{xds}{sx} = \int_1^{y}\frac{ds}{s} = \log(y),$$

demonstrando o teorema.

O Corolário a seguir mostra que o logaritmo de uma potência de expoente racional pode ser transformada em produto deste número racional pelo logaritmo da base da potência.

Corolário 1. Seja $\mathrm{x} > 0$. Para todo número racional r, temos que:

$\log(x^r) = r.\log(x)$.

De fato, consideremos $n \in \mathbb{N}$, segue que $\log(x^n) = n\,.\log(x)$.

Como $x^n.x^{-n} = 1$, temos:

$0 = \log(1) = \log(x^n\,.\,x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n.\log(x) + \log(x^{-n})$, portanto $-n.\log(x) = \log(x^{-n})$.

Para o caso de $r \in \mathbb{Q}$, temos $r = p/q$, com p e q inteiros. Por definição, temos $(x^{\frac{p}{q}})^q = x^p$. Então $\log(x^p) = p.\log(x)$ e também $\log\left[\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = q.\log(x^{\frac{p}{q}})$,

Segue que $\log\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,.\log(x)$, demonstrando o corolário.

É importante neste momento rever o conceito de função contínua para a caracterização da função logaritmica e também da função exponencial.

Definição 1: Uma função $\mathrm{f}\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, tomando x suficientemente próximo de a . Dizemos que $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in \mathrm{X}$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ e $|\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta$ impliquem $|\mathrm{f(x)} - \mathrm{f(a)}| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; x \in X$, $|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em termos de intervalos: dado qualquer intervalo aberto J contendo $f(a)$, existe um intervalo I, contendo a, tal que $f(I \cap J) \subset J$. Quando desejado, podemos tomar o conjunto $J = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0,$ e I = $(a - \delta, a + \delta)$ com $\delta > 0$.

Diremos que f: $X \to \mathbb{R}$ é contínua, quando f for contínua em todos os pontos de X.

Se $X,\ Y$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, um ***homeomorfismo*** $f\!: X \to Y$ é uma função contínua, bijetiva, cuja inversa $f^{-1}\!: Y \to X$ também é uma função contínua.

A monotonicidade de uma função contínua será demonstrada no teorema a seguir, nos fazendo concluir que para verificar a monotonicidade de uma função em um intervalo dado, basta verificar a sua monotonicidade em cada subintervalo limitado e fechado contido no intervalo dado [17].

Teorema 2. Seja $\mathrm{f}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida num intervalo I**.** Então f é monótona, sua imagem $\mathrm{J} = \mathrm{f(I)}$ é um intervalo e sua inversa, $\mathrm{f}^{-1}: \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração. De fato, para concluir que f é monótona, basta verificar sua monotonicidade em cada subintervalo limitado e fechado $[a, b] \subset I$. Admitindo que $I = [a, b]$ e ainda que $f(a) \neq f(b)$.

Com o Corolário 2, a seguir, verificaremos que uma função contínua em um dado intervalo dos números reais é um intervalo. Para tanto utilizaremos o Teorema do Valor Médio [17].

Corolário 2. Seja $\mathrm{f}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo I. Então $\mathrm{f(I)}$ é um intervalo.

De fato, seja $\alpha = \min\limits_{x \in I} f(x)$ e $\beta = \max\limits_{x \in I} f(x)$. Podemos afirmar que $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β. Seja y com $\alpha < y < \beta$, deve existir $x \in I$

tal que $y = f(x)$. De fato, pela definição de conjunto ilimitado, no caso de α ou β serem infinitos, existem $a, b \in I$ tais que $f(a) < y < f(b)$.

Pelo Teorema o Valor Intermediário, existe um ponto x, entre a e b, tal que $f(x) = y$.

Um homeomorfismo é uma função entre dois subconjuntos da reta real, de modo que seja contínua e bijetiva; logo possui inversa que também é contínua. A definição é muito importante para a topologia, como também para o presente estudo, pois veremos que as funções logaritmica e exponencial são um homeomorfismo.

Corolário 3. A função log: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.

De fato, dado que a função logaritmica é contínua e crescente (logo é injetiva), pelo Teorema 2, a inversa de logaritmo é contínua no intervalo onde for definida. Logo, resta mostrar que a função logaritmica é sobrejetiva.

A imagem da função logaritmica é um intervalo (pelo Teorema 2 deste capítulo), devemos provar que $\lim_{n \to \infty} \log(x) = +\infty$.

Se considerarmos $2^{-n}, \ n \in \mathbb{N}$, obtemos o outro limite.

Este corolário afirma que todo número real y é logaritmo de um único número real $x > 0$ e ainda que a correspondência $y \to x$ é contínua.

Relembrando o Teorema 1, concluímos que a função logaritmo é um isomorfismo contínuo do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$ sobre o grupo aditivo $\mathbb{R}$, como também o seu isomorfismo inverso é contínuo.

Esta bijetividade da função logarítmica implica particularmente na existência de um número real positivo cujo logaritmo é igual a 1.

Este número é indicado pelo símbolo **e**, sendo chamado de “base” dos logaritmos naturais. Desta forma, sua definição de igualdade é a seguinte:

$$\log(\boldsymbol{e}) = 1.$$

O logaritmo que tem por base o número irracional e, o qual é definido como: $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818 \ldots$, é chamado de Logaritmo Neperiano ou Logaritmo Natural, cuja notação é dada por $log_e(N) = \ln(N)$.

4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

A matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.
STEPHEN HAWKING

Neste tópico, definiremos a função exponencial como a inversa do logaritmo e provaremos que as propriedades inerentes aos logaritmos também são característicos da função exponencial, considerando a linha de pensamento do tópico anterior, ou seja, que a função exponencial é um isomorfismo de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.

A função exponencial nos é apresentada por LIMA[19], como uma bijeção crescente.

O Teorema 3 a seguir aborda a propriedade que possui a função exponencial de ser infinitamente diferenciável e ainda a importante propriedade de transformar somas em produtos.

Definição: Existe $\boldsymbol{f(x)}$ tal que $\boldsymbol{f'(x) = log(x)}$, ou seja, a *função exponencial* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$é a inversa da função logaritmo. Assim, por definição [17]:

$$\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow \mathbf{log}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}.$$

Em particular, $\mathbf{exp}(\mathbf{log}(\boldsymbol{y})) = \;\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{log}[\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{x}$.

As propriedades do logaritmo nos dão imediatamente o Teorema 3 abaixo:

Teorema 3. A função exponencial é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. Ela é infinitamente diferenciável, com $(\exp(x))' = \exp(x)$. Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer, vale $\exp(x + y) = \exp(x) . \exp(y)$. Para todo r racional temos $\exp(r) = e^r$.

Demonstração. A função $exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ foi definida como a inversa do logaritmo, que é uma bijeção crescente, assim ela também goza destas propriedades (Teorema 2 deste capítulo).

---

[19] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; v.1. 12.ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. p. 348

Pela regra da derivação da função inversa, temos para todo $x \in \mathbb{R}$, com $\exp(x) = y$, que $(\exp)'(x) = \frac{1}{(\log)'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x)$. Assim a derivada da função exponencial é a própria função exponencial [17].

Queremos provar agora que $\exp(x + y) = \exp(x) \, .\exp(y)$. Para isso, tomemos $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$. Então $x = \log(x')$, $y = \log(y')$.

Aplicando as propriedades estudadas, temos que:

$\exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = x'.y' = \exp(x)\,.\exp\,(y)$.

Por analogia, se r é racional, o Teorema 1 (Corolário 1) nos fornece $\exp(r.x) = \exp(r.\log(x')) = \exp[\log(x')^r] = \ (x')^r = [\exp(x)]^r$.

A igualdade $\log(\boldsymbol{e}) \ = 1$ nos dá $\exp(1) = \boldsymbol{e}$. Fazendo-se $x = 1$ na relação acima, obtemos $\exp(r) = \ \boldsymbol{e}^r$ para todo $r \ \in \ \mathbb{Q}$.

Verificando o limite de $\exp(x)$ encontramos $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = \ +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \, -\infty} \exp(x) = 0$. Estes limites são análogos aos limites da função logaritmo.

A igualdade $\exp(r) = \ \boldsymbol{e}^r$ quando r é racional e a relação $\exp(x + y) = \exp(x)\,.\exp(y)$ indica que $\exp(x)$ se comporta como uma potência de base e com expoente x, assim podemos escrever:

$$\exp(x) = \ e^x,$$

dando significado a uma potência de base e com qualquer expoente real.

Geometricamente, $y = \ e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole $\mathcal{H}_1^y$ tenha área x [20].

O gráfico a seguir, nos mostra com clareza a faixa da hipérbole correspondente à área x, quando temos variação da abscissa de 1 a e^x.

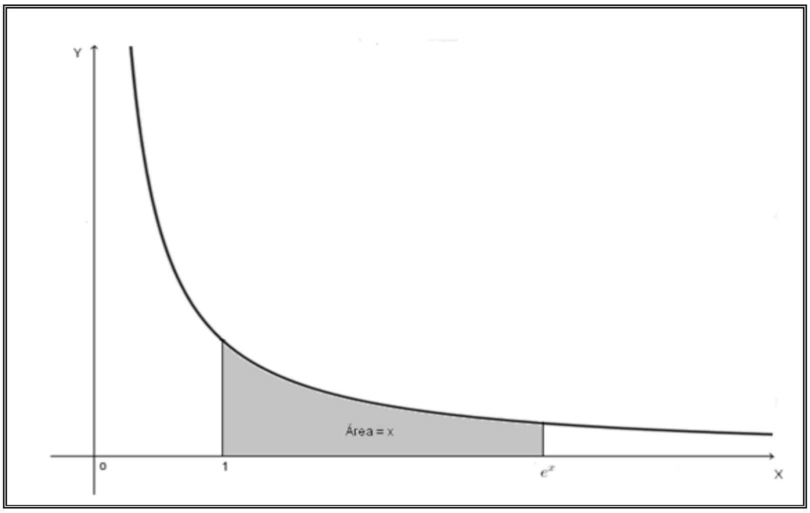

Figura 6. "Gráfico da área da faixa da hipérbole com variação da abscissa de 1 a e^x". Elaborado pela Autora.

A nova notação nos dá então, $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$, $e^0 = 1$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ e ainda $e^{\log(x)} = x$.

Na figura a seguir, que mostra os gráficos de $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log(x) = \ln(x)$, podemos verificar que as funções são inversas e seus gráficos são simétricos em relação à reta $h(x) = x$.

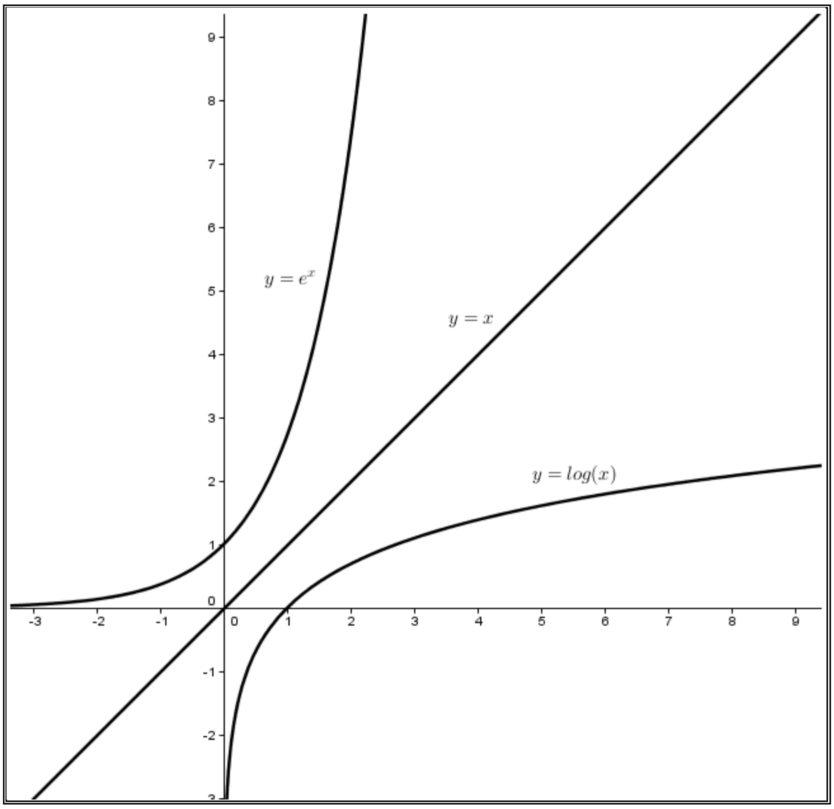

Figura 7. "Simetria gráfica das funções exponencial e logarítmica em relação à reta $y = x$".Elaborada pela Autora.

Analisando o crescimento das funções, podemos concluir que embora a função e^x e a função $\log(x)$ tendam para $+\infty$ quando $x \to +\infty$, a função exponencial cresce muito rapidamente, ao passo que a função logarítmica tem um crescimento mais lento.

A seguir veremos que o limite de logaritmo de um certo número real, divido por este mesmo número, quando a variável tende para o infinito, é zero. Para a prova utilizaremos novamente o Teorema do Valor Médio. O teorema é muito importante, pois a partir dele concluiremos que o logaritmo de um número real é menor do que o próprio número.

Teorema 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{log\,(x)}{x} = 0.$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x > 1$, existe c, com $1 < c < x$ e $\log(x) = \log(x) - \log(1) = \frac{1}{c}\,(x-1).$

Portanto, $\log(x) < x$ para todo $x > 1$. Particularmente, para $x > 1$ vem $0 < \log(x^{1/2}) < x^{1/2}$.

Como $\log(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\log(x)$, se elevarmos ao quadrado a última desigualdade, obteremos $0 < \frac{(logx)^2}{4} < x$, de onde se conclui que $0 < \frac{\log(x)}{x} < \frac{4}{\log(x)}$ para todo $x > 1$, então concluímos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$, então o logaritmo de um número é menor do que o próprio número.

Na sequência, pelo Corolário 4 que apresentaremos, veremos que o limite do produto de um número por seu logaritmo, quando o número tende à zero é zero, o que nos permitirá concluir que sendo um número muito pequeno, seu logaritmo também o será [17].

Corolário 4. $\lim\limits_{x\to0}[x\,.\,log\,(x)] = 0.$

De fato, fazendo $x = \frac{1}{y}$ temos:

$$\lim_{x\to0}[x\,.\log(x)] = \lim_{y\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y} = \lim_{y\to\infty}\left[-\frac{\log(y)}{y}\right] = 0.$$

Vale destacar que se c e k são constantes reais, a função $f(x) = c\,.\,e^{kx}$ terá como derivada $f'(x) = k.c\,.\,e^{kx}$, ou seja, a função exponencial possui uma derivada que é proporcional a ela própria, o que é muito importante nas aplicações desta função.

Teorema 5. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{k}.\mathrm{f}(\mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$. Se, para $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$, temos $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{c}$, então $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{c}e^{\mathrm{k}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}$.

Demonstração. Seja φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi\,(x) = f(x).\,e^{-k(x-\,x_0)}$. Determinando sua derivada pela regra da cadeia, temos $\varphi'(x) = f'(x).\,e^{-k(x-\,x_0)} - k.f(x).\,e^{-k(x-\,x_0)} = 0$, logo φ é uma constante. Como $\varphi\,(x_0) = c$, segue que $\varphi(x) = c$ para todo x, o que demonstra o teorema.

4.2.1 Potências de expoente Natural

Ao trabalharmos em sala de aula a função exponencial, é necessário fazer um trabalho preliminar com a definição e as propriedades de potências com expoentes racionais, que os alunos do Ensino Médio aprendem durante o nono ano do Ensino Fundamental.

Nós professores devemos ter o cuidado de definir as potências a partir dos expoentes naturais e a seguir os inteiros, por fim os racionais, sempre verificando a propriedade fundamental das potências, ou seja: $a^m\,.\,a^n = a^{m+n}$.

Para o desenvolvimento deste tópico, nos basearemos nas lições de Elon Lages de Lima[20].

Começaremos definindo uma potência a partir de uma base a real e positiva, e um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n é o produto de n fatores iguais a base a.

Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, temos $a^1 = a$.

Para a^{n+1} temos $a^{n+1} = a^n\,.\,a^1 = a\,.\,a^n$.

Já para quaisquer $m,\ n \in \mathbb{N}$, temos $a^m\,.\,a^n = a^{m+n}$, pois em ambos os membros desta igualdade temos o mesmo produto de $m + n$ fatores iguais, desta forma, fica definido que em produto de potências de mesma base, esta é

[20] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio – volume 1 –Elon Lages de Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado – 9.ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006. p.192-197

conservada, e os expoentes são somados, seguindo então que para $m_1, m_2, \dots, m_k$, vale: $a^{m_1} . a^{m_2} . \dots . a^{m_k} = a^{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$.

O caso particular de $m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ nos dará $(a^m)^k = a^{mk}$, significando que quando a base da potência é uma potência, devemos conservar a base da potência e multiplicar seus expoentes.

Além disso, se tivermos $a > 1$, podemos multiplicar ambos os lados da igualdade por a^n e fazendo as contas: $a . a^n > 1 . a^n$, então $a^{n+1} > a^n$, desta forma, podemos escrever:

$a > 1 \Rightarrow a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots$

Mas, se $0 < a < 1$, multiplicando os membros da desigualdade por a^n encontraremos: $0. a^n < a . a^n < 1 . a^n \Rightarrow 0 < a^{n+1} < a^n$, ou seja,

$a > a^1 > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$

Das expressões acima, concluímos que a sequência cujo n-ésimo termo é a^n será crescente quando $a > 1$ e será decrescente quando $0 < a < 1$.

Se tivermos $a = 1$, a sequência será constante, pois neste caso: $1, 1^2, 1^3, \dots, 1^n, 1^{n+1}, \dots$ e a mesma terá todos os termos iguais a 1.

O teorema 6, a seguir, nos mostra que a sequência das potências de a^n é ilimitada superiormente, desta forma concluiremos que o limite de $a^n \to \infty$ quando $a > 1$, já o teorema 7 nos mostra que quando $0 < a < 1$, a sequência das potências de a^n tem limite tendendo a zero.

Teorema 6. Se $\mathrm{a} > 1$, a sequência formada pelas potências a^{n} com $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, ou seja, nenhum número real c, por maior que seja, é superior a todas as potências de a^{n}, assim $\mathrm{a}^{\mathrm{n}} > c$.

Demonstração. Seja $a = 1 + d,\ d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, podemos escrever que $a^n > 1 + nd$, logo tomando $n > (c-1)/d$, temos:

$a^n > 1 + \frac{(c-1)}{d} . d \Rightarrow 1 + nd > c$, assim provamos que $a^n > c$.

Podemos exprimir então que $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$, significando que a^n tende para o infinito quando n cresce indefinidamente [17].

Teorema 7. Se $0 < a < 1$, a sequência formada pelas potências de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva, ou seja, dado um número real $c > 0$, por menor que seja, existe sempre um expoente $n \in \mathbb{N}$, que $a^n < c$.

Demonstração. De fato, se $0 < a < 1$, a sequência de potências $a, a^2, a^3, ...$ decrescem abaixo de qualquer cota positiva, assim, se fixarmos $c > 0$ qualquer, por menor que seja, sempre é possível encontrar um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < c$. Desta forma, vamos escrever $b = 1/a$, teremos então $b > 1$, desta forma, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > 1/c$, em outras palavras temos $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$, então $a^n < c$.

Com este resultado, podemos concluir que $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$ se $0 < a < 1$.

4.2.2 Potências de expoente Inteiro

Vamos discutir o significado da potência a^n quando $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, o expoente é um número inteiro.

Definiremos a potência a^0 com a igualdade $a^0 . a^1 = a^{0+1} = a$, desta forma a^0 só pode ser definido como $a^0 = 1$.

Por conseguinte, pensemos em um número $n \in \mathbb{Z}$, tal que tenhamos $a^{-n} . a^n = a^0 = 1$, desta forma $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pois $\frac{1}{a^n} . a^n = 1$.

O conceito de potência de um número real $a > 0$, admite expoentes inteiros quaisquer, preservando a igualdade $a^m . a^n = a^{m+n}$ é possível quando $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Seja a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a^n$ com $n \in \mathbb{Z}$, que verifica a igualdade fundamental $f(m + n) = f(m) + f(n)$, e é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Em particular segue que se $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, encontramos $a^{-n} < 1 < a^n$, mas se $0 < a < 1$, então $a^n < 1 < a^{-n}$ pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

Da propriedade $a^m . a^n = a^{m+n}$ segue que $(a^m)^n = a^{m.n}$ quando $m, n \in \mathbb{Z}$.

4.2.3 Potência de expoente Racional

Seja a potência a^r, com $r = m/n$ sendo um número racional, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, de forma que seja válida a propriedade $a^r . a^s = a^{r+s}$. Da igualdade resulta que para $r = m/n$:

$(a^r)^n = a^r . a^r . \dots . a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m$.

Concluímos que a^r é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m.

Este número será $\sqrt[n]{a^m}$, desta forma podemos escrever a potência a^r quando $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Definição. Um conjunto X chama-se *enumerável* quando é finito ou existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Embora as potências de a^r sejam encontradas no conjunto dos números reais, a função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(r) = a^r$ não é sobrejetiva, tendo em vista que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável e o mesmo deve acontecer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, mas o conjunto $\mathbb{R}^+$ não é enumerável, assim deve existir algum $r \in \mathbb{Q}$, tal que $f(r) = a^r$ não pertença ao conjunto dos racionais.

A esse respeito LIMA[21] ilustra com o seguinte exemplo:

> *"Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$, ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m se escreve como 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não é dessa forma. Logo o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \rightarrow 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$".*

As potências de expoentes racionais deixam lacunas na imagem da função sobrejetiva, mas as potências de a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda a parte do conjunto dos números reais positivos, contanto que $a \neq 1$, desta forma, segue o Lema a seguir.

[21] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais/ Elon Lages de Lima. Rio de Janeiro: SBM, 2013., p. 178

Lema 1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$**.**

Demonstração. De fato, dado $0 < \alpha < \beta$, devemos encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha < a^r < \beta$. Sem perda de generalidade e por simplicidade, vamos supor $a > 1$ e $\alpha > 1$. Sabendo que as potências de expoente natural crescem acima de qualquer cota prefixada, queremos obter números naturais M e n de maneira que $\alpha < \beta < a^M$ e $1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$.

Daí decorrendo sucessivamente que $1 < a^{1/n} < \frac{\beta - \alpha}{a^M}$ e ainda que $0 < a^M\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$.

Logo, $\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$.

Em consequência, concluímos que as potências $a^0\ b = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos, de comprimento menor do que $\beta - \alpha$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, algum destes extremos está contido em $[\alpha, \beta]$.

4.2.4 Definição e Gráficos da Função Exponencial

A definição que daremos a seguir segue os moldes da lição apresentada na disciplina de MA11, presente na obra "Números e Funções Reais"[22], utilizada como texto de estudos em toda rede PROFMAT.

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base *a*, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada por $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

$i)$ $a^x . a^y = a^{x+y}$;

$ii)$ $a^1 = a$;

$iii)$ $x < y \rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e

$x < y \rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apresenta a propriedade i) então ela não pode ser identicamente nula, isto é, $f(x + y) = f(x).f(y)$ não pode resultar em zero, de fato, se existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ teremos para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0).f(x - x_0) = 0\,.f(x - x_0) = 0,$$

[22] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais/ Elon Lages de Lima. Rio de Janeiro: SBM, 2013. *p. 179.*

logo a função f será identicamente nula.

Mas se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é identicamente nula e tem a propriedade i), então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, senão vejamos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) . f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f(\frac{x}{2})\right]^2 > 0.$$

Considerando o contradomínio de f como $\mathbb{R}^+$, então a função f será sobrejetiva.

De fato, se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ possui as propriedades i) e ii) então para todo $n \in \mathbb{N}$ encontramos:

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1). f(1). \ldots . f(1) = a. a. \ldots . a = a^n.$$

Também para todo número racional $r = m/n$ com $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $f(r) = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto para $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(r + s) = f(r). f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$, temos que $f(r) = a^r$ se apresenta como única função capaz de atender tal propriedade.

Ainda temos que a função exponencial deve ser crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Quando x é irracional, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ possui as propriedades $i), ii)$ e iii), desta forma o valor de $f(x)$ quando x é irracional será dado por $f(x) = \lim f(r_n)$ onde (r_n) é uma sequência de números irracionais, crescente ou decrescente, tais que $\lim r_n = x$.

Escrevendo $f(x) = a^x$, onde $f(1) = a$, e tomando a expressão decimal $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ temos $a^r = \lim a^{r_n}$, em que $r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$.

A função exponencial apresenta também as seguintes propriedades:

iv) A função $\mathrm{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\mathrm{f(x)} = \mathrm{a^x}$ é ilimitada superiormente.

De fato, para provarmos iv), todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ contém os valores de $f(x) = a^x$, pois fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$, existe alguma potência a^x, com $x \in \mathbb{Q}$.

Como as potências de expoente natural de números que são maiores que 1, crescem acima de qualquer cota prefixada, temos que $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Mas se $0 < a < 1$ então a^x tornar-se-á muito grande quando $x < 0$ tiver valor absoluto muito grande.

v) A função exponencial é contínua.

Podemos justificar a afirmativa tomando $x_0 \in \mathbb{R}$ e tornando a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto seja desejado, tomando para isso, x próximo de x_0, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Suponhamos que $a > 1$ e $h > 0$. Dado um $\mathcal{E} > 0$, queremos mostrar que escolhendo um h pequeno, teremos $a^h < 1 + \mathcal{E}$.

Pela desigualdade de Bernoulli, $(1 + \mathcal{E})^n > 1 + n\mathcal{E}$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > (a - 1)/\mathcal{E}$, teremos $n\mathcal{E} > a - 1$, desta forma teremos $a < 1 + n\mathcal{E}$, em consequência, por Bernoulli, $a < (1 + \mathcal{E})^n$, então $a^{1/n} < 1 + \mathcal{E}$. Em resumo, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $a^{1/n} < 1 + \mathcal{E}$, ou seja, $1 < a^h < a^{1/n} < 1 + \mathcal{E}$.

Escrevemos $\lim_{h \to 0} a^h = 1$, ou seja, 1 é o limite de a^h quando h tende a zero.

Para caracterizar a continuidade da função exponencial, devemos fixar $x_0 \in \mathbb{R}$, tomando $h = x - x_0$, desta forma teremos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$. Assim, quando x se aproxima de x_0, vemos h tender a 0, a^h tender a 1 e $a^h - 1$ tender a zero. Como a^{x_0} está fixo por não depender de h, termos o $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, logo fica caracterizada a continuidade da função exponencial.

vi) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$ é sobrejetiva.

A afirmação significa que todo número real positivo é uma potência de a, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.

Para a prova, devemos escolher para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, dentro do intervalo $\left(b - \frac{1}{n},\ b + \frac{1}{n}\right)$, de tal forma que $|b - a^n| < 1/n$, e assim teremos $\lim_{x \to x_o} a^{r_n} = b$. Como exemplo, escolhemos as potências de a^{r_n} em sucessão:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Fixando $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$, a monotonicidade da função a^x assegura que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$.

Vemos que (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por s.

Nesse ponto LIMA[23] esclarece que:

> *"A completeza de $\mathbb{R}$ garante que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \to x_0} r_n = b$."*

E continua em suas lições[24]:

> *"Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é $f(x + y) = f(x).f(y)$.*
> *(A injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre da sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então*
> *$x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$)".*

Em resumo, com relação aos limites da função exponencial, podemos dizer que:

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$,

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$,

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$ e

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$.

Construindo o gráfico da função $f(x) = a^x$, para os casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$, notamos a variação das curvas exponenciais que representam as funções.

[23] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais/ Elon Lages de Lima. Rio de Janeiro: SBM, 2013., p. 182
[24] Idem. p.182

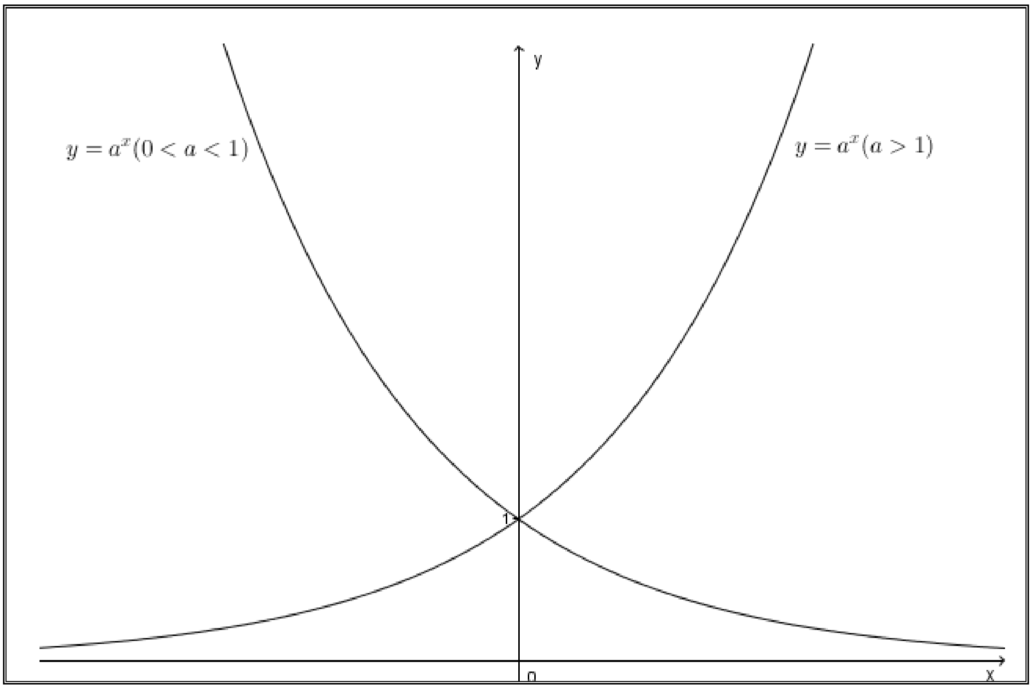

Figura 8. "Gráfico das curvas exponenciais de crescimento e decrescimento". Elaborado pela Autora.

A curva exponencial apresenta crescimento lento quando $a > 1$ e x é negativo, porém apresenta crescimento acelerado à medida que x cresce. Já, se $0 < a < 1$, a curva apresenta decrescimento acelerado para x negativo e o crescimento vai se tornando lento à medida que o crescimento de x tende para infinito.

Analisemos agora os gráficos dos membros da família de funções $f(x) = a^x$, para vários valores de a, observando suas particularidades.

A comparação das curvas nos permitirá concluir que, para valores de $a > 1$, quanto maior for este valor, mais a curva se aproximará do eixo das ordenadas, porém para valores $0 < a < 1$, quanto mais próximo de 1 estiver o valor de a , mais a curva se distanciará do eixo das ordenadas.

Além disso, se $a = 1$, temos uma reta que representa a função constante, paralela ao eixo das abcissas.

Vejamos a família de curvas no gráfico a seguir, com as conclusões sobre o seu comportamento.

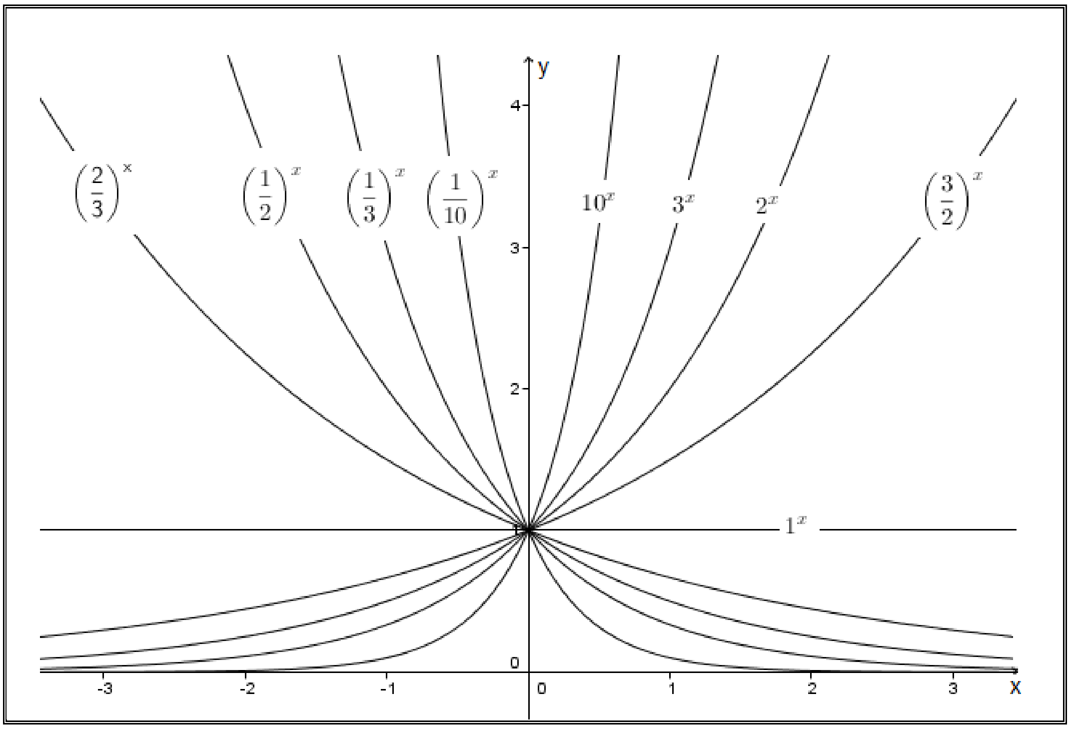

Figura 9."Família de curvas exponenciais". Elaborado pela Autora.

Observando a família de curvas exponenciais, podemos perceber que todas elas passam pelo ponto $(0, 1)$, correspondente a $a^0 = 1$.

Ainda percebemos que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior, se $x > 0$ e decresce mais rapidamente à medida que a fica menor, para $x > 0$.

Outra percepção que podemos verificar pela análise das curvas é que existem três tipos de função exponencial. Se $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente, se $a = 1$ ela é constante e se $a > 1$ ela é crescente.

Além disso, sabendo que $(1/a)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ os gráficos de $f(x) = (1/a)^x$ são reflexões dos gráficos de $f(x) = a^x$ em torno do eixo y.

4.2.5 Caracterização da Função Exponencial

A caracterização da função exponencial pode ser estabelecida de acordo com o Teorema 8, a seguir, formado por três afirmações equivalentes, que serão demonstradas por implicações.

Teorema 8. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes.

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para mostrar que (1) ⇒ (2), devemos observar que a hipótese (1) mostra que para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ que $f(rx) = f(x)^r$. De fato, como $nr = m$, podemos escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Fazendo $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para concluir, suponhamos que f seja crescente, desta forma $1 = f(0) < f(1) = a$. Vamos admitir, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x) < a^x$, então pelo Lema 1 desta seção, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < f(r) < a^x$. Sendo a função f crescente com $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado temos $a^r < a^x \Rightarrow r < x$, o que é uma contradição, desta forma temos a prova de (1) ⇒ (2).

Mostremos agora que (2) ⇒ (3). Tomemos $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$. Assim $f(x).f(y) = a^x.a^y = a^{x+y} = f(x+y)$. Desta forma, temos $f(x+y) = f(x).f(y)$, ficando provada a implicação.

Por fim, mostremos que (3) ⇒ (1). Para isso, tomemos $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) = f(x) = a^n$, com $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$.

Fazendo $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = a^x + a^x + \cdots + a^x = n.a^x = n.f(x) = f(nx) = f(x)^n$.

4.2.6 Funções do Tipo Exponencial

As funções do tipo exponencial são todas aquelas da forma $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas. Se pusermos $a > 1$, a função será crescente e se pusermos $0 < a < 1$, a função será decrescente.

Teorema 9. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, uma função monótona injetiva (ou seja, crescente ou decrescente), tal que para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/h$ dependa apenas de h, mas não de x. Se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, temos $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. De fato, a hipótese equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independente de x. Substituindo $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$ em que $b = g(0)$, obtemos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e com $f(0) = 1$. Logo, fazendo $x = 0$ na relação $\varphi(h)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. A função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue pelo Teorema 8 desta seção, que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$.

4.2.7 Função Exponencial de base e.

O número e está definido no Corolário 3 da Seção 4.1.1, como o único número real positivo cuja área da faixa da hipérbole $\mathcal{H}_1^e$ é igual a 1, como também vimos que ele é o limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende a infinito.

A função exponencial $x \mapsto e^x$, de base e pode ser definida como $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, ou geometricamente, pois $y = e^x$ é o único número real positivo tal que a área da faixa da hipérbole $\mathcal{H}_1^y$ é igual a x.

Segundo LIMA[25], matemáticos e cientistas preferem utilizar as funções do tipo exponencial na forma $f(x) = b \,.\, e^{\alpha x}$, senão vejamos:

> "Matemáticos e cientistas que se utilizam da Matemática preferem geralmente escrever as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \,.\, e^{\alpha x}$, com base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento de f."

[25] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio – volume 1/Elon Lages de Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.p. 228.

O quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nos dá a taxa de crescimento de uma função f no intervalo $[x, x+h]$, por definição.

No caso da função do tipo exponencial, ou seja, $f(x) = b\,.\,e^{\alpha x}$, teremos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = be^{\alpha x}\,.\,\frac{e^{\alpha h}-1}{h} = f(x)\,.\,\frac{e^{\alpha h}-1}{h}.$$

A taxa instantânea de crescimento de f no ponto x é representada ela derivada da função f no ponto x ao limite da taxa $[f(x+h) - f(x)]/h$ para ínfimos valores de h. É representada por $f'(x)$ e geometricamente corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x.

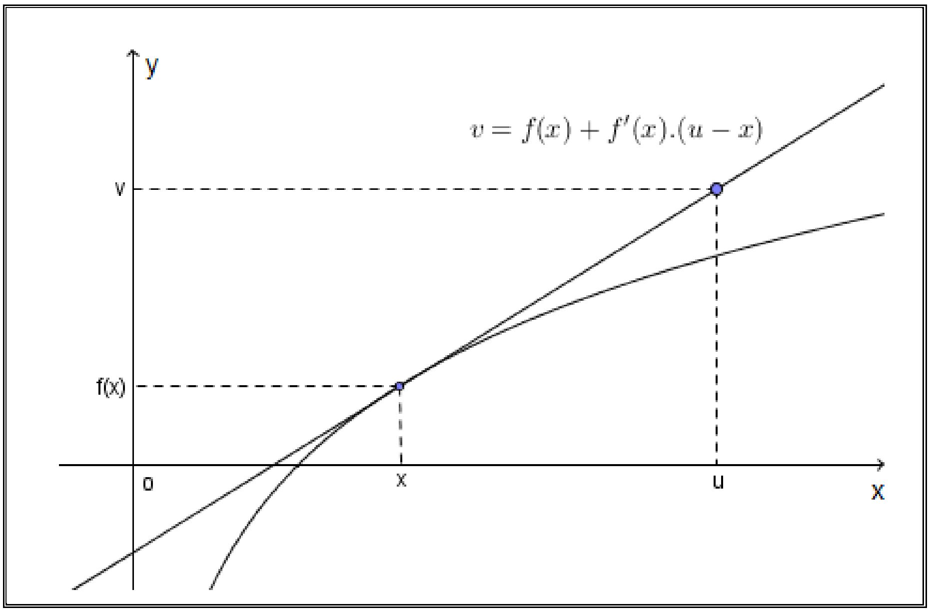

Figura 10. "Gráfico da taxa instantânea de crescimento representada pela derivada da função f no ponto x". Elaborado pela Autora.

A tendência da variação de f a partir do ponto x é representada pelo sinal e o valor da derivada $f'(x)$. Se tivermos $f'(x) > 0$ então $f(x+h) > f(x)$ para ínfimos valores de h, porém se $f(x+h) < f(x)$ para h ínfimo, então $f'(x) < 0$.

Vamos mostrar que a derivada da função $f(x) = b\,.\,e^{\alpha x}$ é igual a $\alpha\,.\,f(x)$, ou seja, a taxa instantânea de crescimento de uma função do tipo exponencial é proporcional ao valor da função naquele ponto, sendo o coeficiente α o fator de proporcionalidade.

Para calcular a derivada de $f(x) = b\,.\,e^{\alpha x}$, vamos mostrar que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Lembrando que a faixa da hipérbole $\mathcal{H}_1^{e^h}$ tem área igual à h e está compreendida entre o retângulo de área $(e^h - 1)/e^h$ e outro de área $e^h - 1$ teremos:

$$\frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1. \tag{4.1}$$

que pode ser observado no gráfico a seguir, em que supomos, sem perda de generalidade, que $h > 0$.

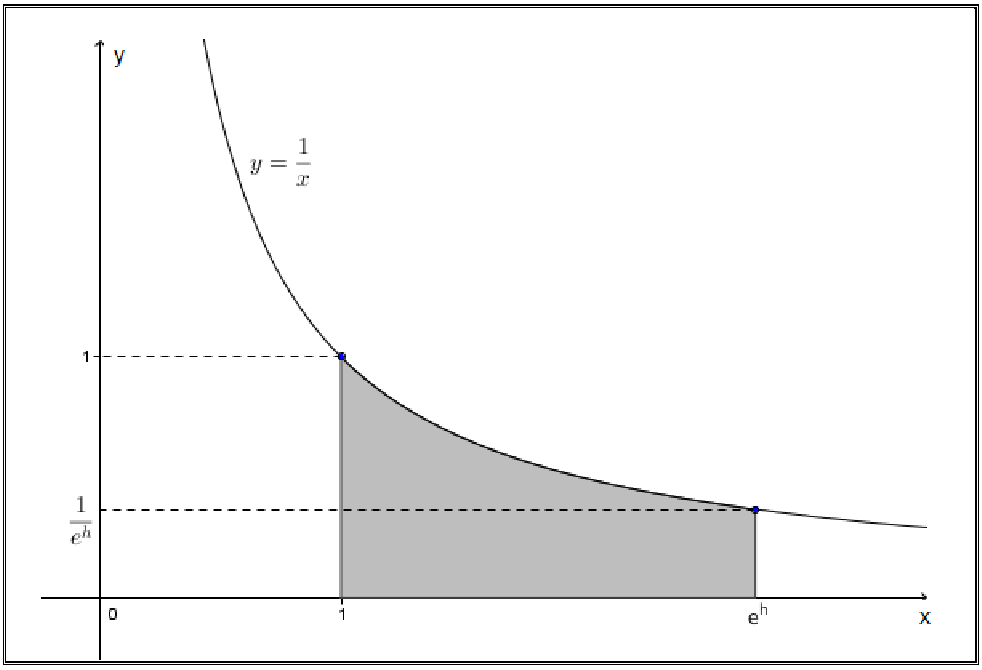

Figura 11. "Gráfico da área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com $1 \leq x \leq e^h$" . Elaborado pela Autora.

Dividindo (4.1) por $e^h - 1$, teremos:

$$\frac{1}{e^h} < \frac{e}{e^h - 1} < 1 \text{ para todo } h > 0. \tag{4.2}$$

De (4.2) podemos concluir que quando $h \to 0$, temos e^h tendendo a 1. Segue que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Podemos verificar que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$.

E ainda que $\lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{x}}{h} = e^{\alpha x} \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \, . \, e^{\alpha x} \, . \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$.

Fazendo $k = \alpha h$, teremos $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$, concluímos então que $\lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{x}}{h} = \alpha \, . \, e^{\alpha x} \, . \lim_{h \to 0} \frac{e^{k} - 1}{k} = \alpha \, . \, e^{\alpha x}$.

Vemos assim que a derivada da função $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha \, . \, f(x)$, significando que $f'(x)$ é proporcional à $f(x)$ com α sendo igual à constante de proporcionalidade.

Após este estudo detalhado do embasamento teórico para o estudo das funções exponenciais, passaremos a expor aplicações em formas de atividades que foram trabalhadas com os alunos do Ensino Médio, especificamente com os que cursam a primeira e a terceira série do Ensino Médio.

5 VIVÊNCIA EM SALA DE AULA

> *"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real" (Lobachevscky).*

O conhecimento matemático é essencial para podermos olhar o mundo a nossa volta e compreendê-lo, e ainda podermos interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, estas são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos [28].

É importante que o cidadão tenha habilidades para ler e interpretar criticamente as informações apresentadas de diferentes formas, provenientes dos diversos meios de comunicação, que possa ainda tomar decisões baseadas em constatações matemáticas e ainda que possa interagir com as tecnologias de forma capaz.

ZABALA[26] propõem que a educação perpassa por três dimensões: conceitual, procedimental e atitudinal.

A dimensão conceitual diz respeito ao que devemos saber, assim é constituída pelo conjunto de conceitos e definições relacionadas aos saberes. Para alcançar a aprendizagem destes saberes, os alunos deverão desenvolver competências como compreender, refletir, relacionar, analisar, comparar, dentre outras.

Já a dimensão procedimental relaciona-se com o como devemos fazer. É constituída por um conjunto de ações ordenadas e com um fim específico, dirigidas para a realização de um objetivo. Envolve aquilo que se aprende a fazer fazendo.

A dimensão atitudinal está relacionada com a inserção social do aluno no exercício da cidadania. É certo que não é simples avaliar o aluno, na medida em que se misturam componentes cognitivos, afetivos e de conduta. Mas experiências em grupos, devidamente organizadas, permitem a mobilização dos

[26] ZABALA, Antonio. *A prática Educativa – Como ensinar/* Antonio Zabala. São Paulo: Artmed, 1988.

alunos para vivenciarem valores como respeito, responsabilidade, cooperação e honestidade, praticando um exercício de alteridade.

A construção do conhecimento é um processo interior do sujeito da aprendizagem, estimulado por condições exteriores criadas pelo professor, que nada mais é do que um catalisador do processo de aprendizagem.

Desta forma, proporcionar condições para que os alunos vivenciem as três dimensões da aprendizagem é tarefa árdua e não muito fácil, porém possível de se alcançar quando se mesclam diferentes situações, estratégias, tecnologias, debates, enfim situações didáticas que nem sempre ocorrem em conjunto, mas que formam um conjunto de experiências com resultados positivos.

As atividades aqui apresentadas objetivam explorar o conteúdo de função exponencial de forma contextualizada, de forma a acessar a motivação do aluno, para alcançar a aprendizagem de conceitos, desenvolvendo atitudes positivas, que reflitam em um protagonismo social.

As atividades aqui relatadas foram desenvolvidas com alunos da Rede Pública de Ensino da Escola Estadual João Brembatti Calvoso de Andradina, pertencente à Diretoria de Ensino de Andradina (SP), com alunos que cursam o primeiro e terceiro ano do Ensino Médio. Não foram desenvolvidas com alunos que cursam o segundo ano do Ensino Médio em razão de que o estudo das funções exponenciais e logarítmicas não fazem parte do currículo oficial para esta série.

Preliminarmente, tanto com as turmas de 1º. ano quanto com as turmas de 3º. ano, fizemos uma revisão de propriedades de potências com expoentes racionais, assunto que faz parte do currículo do nono ano do Ensino Fundamental, pois este conhecimento é requisito necessário para o estudo da função exponencial. Para a revisão expusemos as propriedades das potências, de acordo com o item 4.2.1, e a seguir aplicamos uma série de exercícios de sistematização, em que os alunos deveriam calcular valores de potências, aplicar propriedades inerentes às potências e a seguir simplificar expressões aplicando estas propriedades. Estas atividades se desenvolveram em aproximadamente quatro aulas de 50 minutos cada uma.

A seguir aplicamos atividades de estudo da função exponencial, tanto quanto relacionada a crescimento, quanto relacionada a decaimento.

Nossa pretensão, após o desenvolvimento das atividades aqui relacionadas, é a de que os alunos do Ensino Médio consigam associar fenômenos do cotidiano e da natureza, aos crescimentos e decaimentos exponenciais, verificando sua aplicação em todas as situações em que a variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor, em cada instante.

Procuramos explorar no desenvolvimento das atividades a utilização de calculadoras e o software computacional GeoGebra, para que os alunos se apropriem de tecnologias em suas aprendizagens. Após o desenvolvimento das atividades que neste trabalho estão sugeridas, propusemos uma série de problemas de funções exponenciais, para aplicação dos conhecimentos e sistematização de procedimentos, cujos resultados relataremos nas conclusões.

5.1 Sugestões de atividades

Relataremos a seguir algumas atividades desenvolvidas com alunos da Escola Estadual João Brembatti Calvoso de Andradina.

Como o assunto a ser tratado é relativo ao estudo de função exponencial, com análise de seu crescimento e decrescimento, procuramos não apenas mostrar os fatos aos alunos, mas sim mostrar os processos de aplicação da função exponencial, para que os alunos compreendessem em quais situações as mesmas lidavam com o modelo matemático adequado.

Somos conscientes que muitos alunos não vão para a escola porque estão afoitos por aprender sobre funções matemáticas, alguns alunos apresentam muita resistência na aprendizagem, desta forma decidimos submetê-los a situações que lhes permitissem interagirem entre si, praticando em grupos, dialogando sobre conclusões e resultados, observando imagens de gráficos e fazendo cálculos, para que a abordagem explorasse diferentes ferramentas; pois acreditamos que a interação seria positiva em termos de envolver todo o grupo de alunos.

Observamos que embora alguns alunos apresentem dificuldades na aprendizagem da matemática, esta dificuldade não os impede de praticar as atividades propostas. A compreensão da ideia é mais importante do que a pratica de cálculos no momento da resolução dos problemas para estes alunos.

Muitos alunos aprendem funções com a ideia de que uma “coisa” varia em função de outra, mas não com a ideia de que certas características permanecem constantes, no caso, os problemas de crescimento e decrescimento exponencial podem ser modelados quando se compreende ser este o modelo adequado, para tanto devem compreender que a taxa de crescimento ou de decrescimento exponencial é proporcional à quantidade existente no exato instante do estudo.

Relataremos algumas das atividades que foram desenvolvidas em sala de aula, esperando que sirvam como sugestões aos leitores interessados em dinamizar a aprendizagem da função exponencial, nos colocando à disposição para sugestões de melhorias e aperfeiçoamento das mesmas.

Algumas das sugestões de atividades utilizam o software GeoGebra, assim expomos a seguir, uma explicação sobre o mesmo.

5.1.1 – O Software GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License.

O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente.

Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Permite inserir funções e alterar objetos dinamicamente após sua construção finalizada. Também é possível inserir equações e coordenadas, sendo assim possível lidar com números, pontos vetores, derivar e integrar funções, obter comandos para encontrar raízes e pontos extremos de funções.

Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX.

Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

Vem se tornando uma importante ferramenta para o ensino de matemática e devido sua distribuição livre, pode ser instalado nos computadores das Escolas Públicas, destinados à aprendizagem dos alunos, como também pode ser instalado em computadores pessoais, tanto de alunos como de professores, facilitando o desenvolvimento e a prática de atividades matemáticas.

5.1.2 Atividades

A seguir relataremos cinco atividades para o ensino de Função Exponencial, utilizando variados recursos didáticos.

Atividade nº.1 – Construção e comparação de gráficos de função linear, quadrática e exponencial

Esta atividade é uma modificação da referência da professora Sylvia Mandel proposta na RPM nº. 62 [24].

Conhecimentos prévios: localização de pontos em malha quadriculada, obtenção do valor da função por meio de cálculos numéricos, resolução de equações.

Material: papel milimetrado, software GeoGebra.

Público alvo: alunos do 1º. Ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 5 (cinco) aulas de 50 minutos cada.

Objetivo: Construção e comparação de gráficos de funções linear, quadrática e exponencial, desenvolver a habilidade de utilizar o software GeoGebra.

Apresentação da atividade: Texto [24]: “Os impactos ambientais aumentaram muito a partir do séc. XVIII, como consequência da revolução industrial e do avanço das tecnologias de exploração e transformação da natureza. Além disso, houve um crescimento exponencial da população do planeta, composto de pobres em sua maioria".

Desenvolvimento: Acolhendo a atividade proposta pela professora Sylvia Mandel, sugerimos aos alunos que imaginassem um casal com dois filhos, que cada filho tem dois filhos, cada um desses dois filhos também tem dois filhos, e assim sucessivamente.

Pedimos que montassem tabelas para as funções $y = 2x$, $y = x^2$ e $y = 2^x$ e $y = (0{,}5)^x$.

Sugerimos o intervalo de variação de x como sendo $0 \leq x \leq 10$.

Os alunos montaram tabelas para auxiliarem a organizar os seus cálculos e a seguir construíram os gráficos das funções pedidas. De fato, assim como narra a professora Sylvia Mandel, houve necessidade de se adaptar uma escala para que pudessem estabelecer comparações entre as curvas que representam as funções dadas, assim, concluíram que para o intervalo de variação de x dado, a expressão exponencial apresentava um crescimento muito mais acelerado.

Na sequência os alunos foram levados à sala de informática da Unidade Escolar, para utilizarem o software GeoGebra, que foi anteriormente instalado em todos os computadores disponíveis.

Foram a seguir agrupados em grupos de três alunos, para manusearem livremente o software, utilizando os botões de comando da barra de ferramentas.

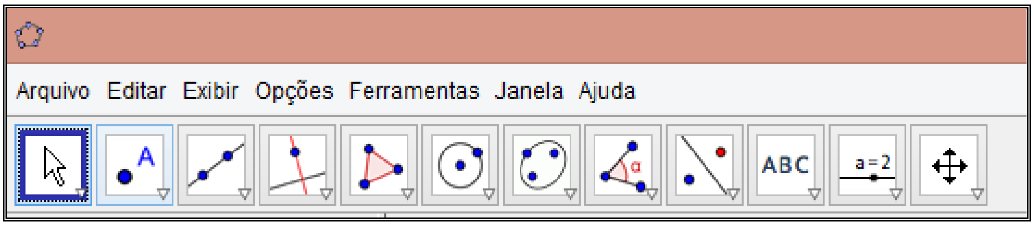

Figura 12. "Botões de comandos do software GeoGebra". Elaborado pela Autora

Após o manuseio livre e brincadeiras na formação de figuras produzidas livremente, sem qualquer convenção, passamos aos alunos comandos direcionados para a formação do conhecimento e desenvolvimento da habilidade de construir gráficos com utilização desta tecnologia.

Orientamos os grupos de alunos a criarem no computador uma pasta para guardar os gráficos obtidos no desenvolvimento das atividades. Também ensinamos os alunos a utilizarem a ferramenta de captura da área de trabalho e a ferramenta Paint, cujos ícones de atalho se encontravam na barra de ferramentas, conforme a figura seguinte.

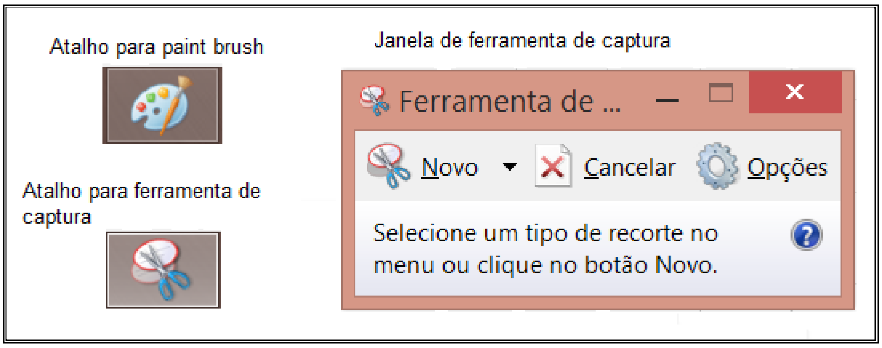

Figura 13. "Botões de comandos do Microsoft Word utilizados para copiar e transferir imagens". Elaborado pela Autora.

No desenvolvimento das atividades, convencionamos que trabalharíamos com $x \geq 0$, isto porque para valores $x < 0$, a situação problema proposta não tem sentido.

Também orientamos os alunos para que alterassem o campo de visualização do software, com o comando exibir malha, para que pudessem comparar os gráficos que produziram em sala de aula com os gráficos obtidos no desenvolvimento das atividades, conforme a imagem que se segue:

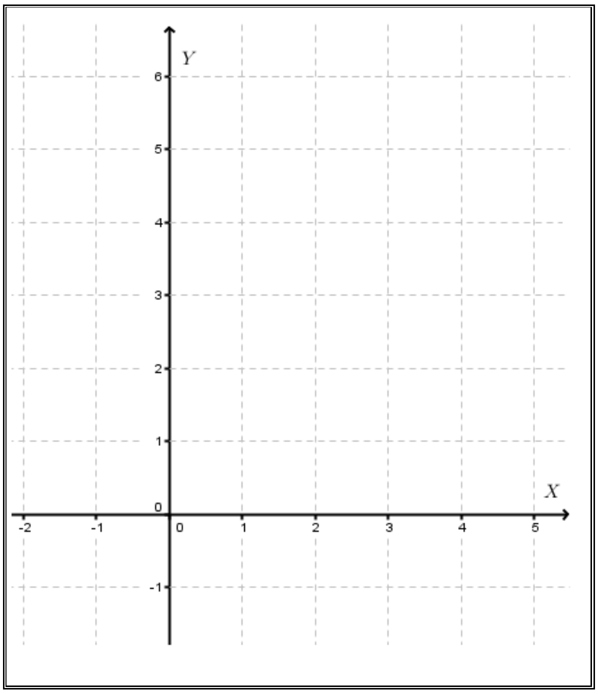

Figura 14."Sistema de eixos cartesianos com malha quadriculada". Elaborado pela Autora.

Orientações para a atividade:

1. Digite na caixa de entrada a expressão $y = 2x$, pressione a tecla "enter" do computador e observe a figura obtida na área da janela de visualização. Os alunos, obedecendo aos comandos, obtiveram a seguinte reta.

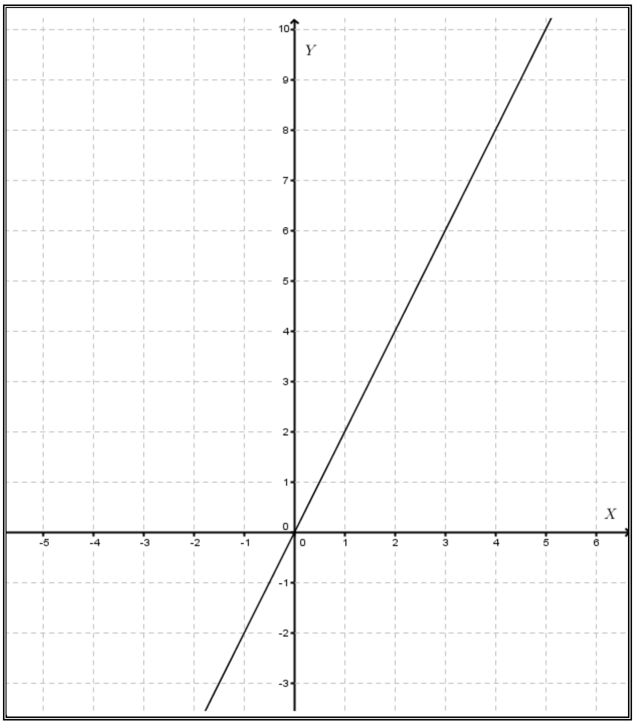

Figura 15. "Gráfico da função $y = 2x$ " . Elaborado pela Autora.

2. Digite na caixa de entrada a expressão $y = x$^2, observando a curva obtida. Os alunos encontram a parábola que representa a função quadrática e neste caso lembramos que deveríamos observar apenas a curva para a variação de x imposta anteriormente, ou seja, que $x \geq 0$. Deveríamos recortar a imagem. Instruímos a utilizarem a ferramenta de captura para recortar o gráfico, colando-o no "paint", para salvar o arquivo numa pasta de gráficos que foi criada por cada grupo, conforme imagens a seguir.

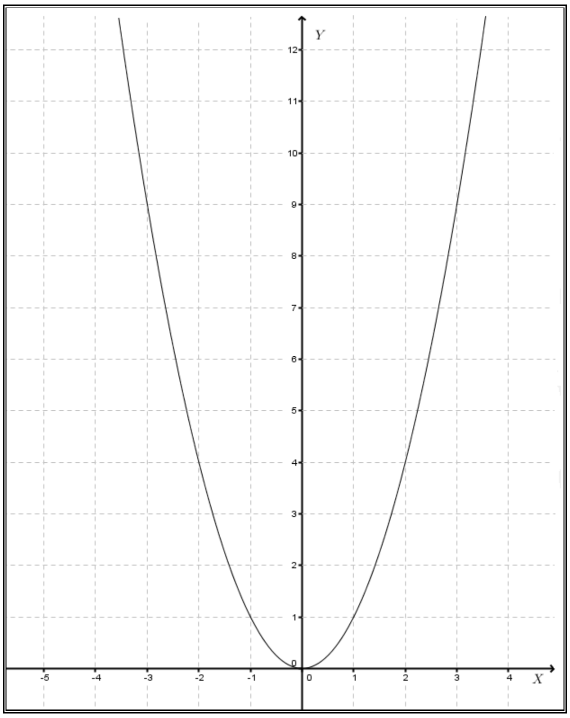

Figura 16. "Gráfico da função $y = x^2$ " *. Elaborado pela Autora.*

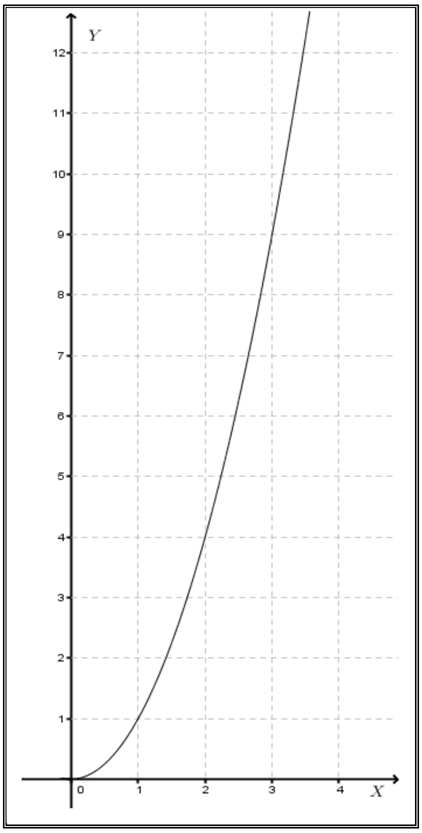

Figura 17. "Gráfico da função $y = x^2,\ x \geq 0$", *Elaborado pela Autora.*

3. Digite na caixa de entrada a expressão $y = 2\hat{}x$, e observe a curva obtida. Com este comando os alunos encontraram a seguinte curva exponencial:

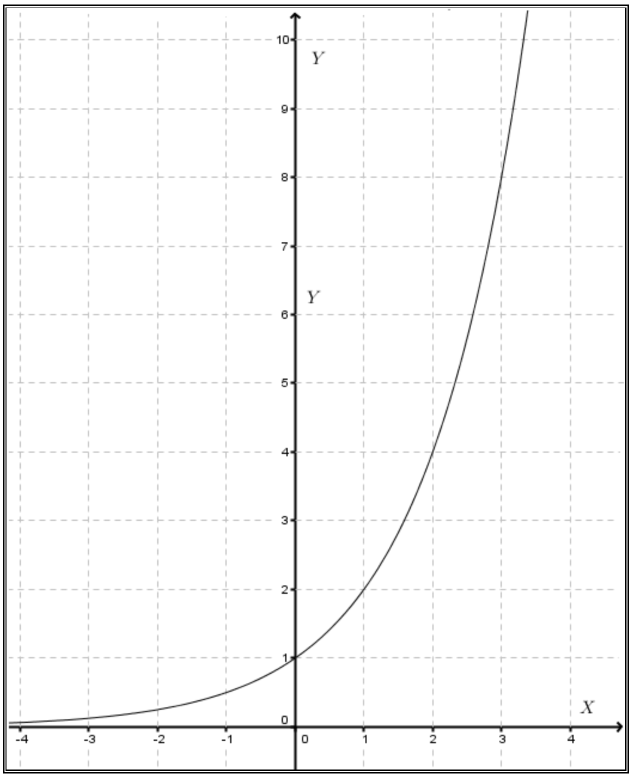

Figura 18. "Gráfico da função $y = 2^x$ ". Elaborado pela Autora.

Mais uma vez os alunos foram orientados a observarem a curva para $x \geq 0$, conforme os dados iniciais do problema.

4. Digite na caixa de entrada a expressão $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Seguindo o comando os alunos observaram a seguinte curva exponencial decrescente.

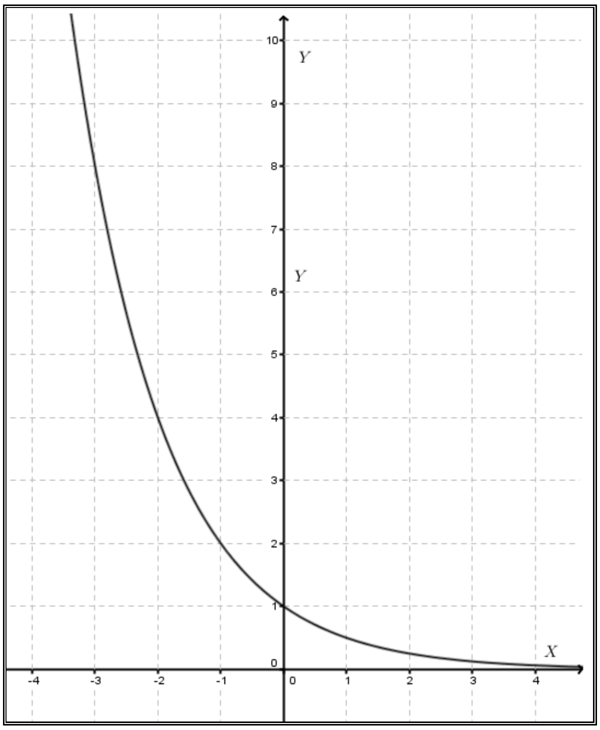

Figura 19. "Gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ". Elaborado pela Autora.

5. Digite na caixa de entrada, uma de cada vez, as quatro expressões das atividades anteriores e observem o comportamento das curvas.

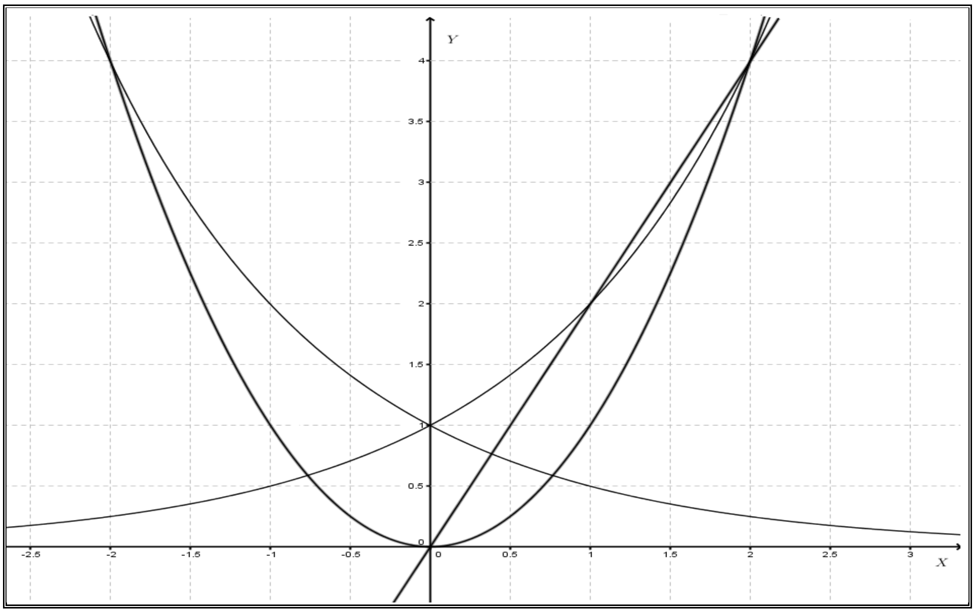

Figura 20. " Comparação gráfica das funções $y = 2x, y = x^2, y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ". Elaborado pela Autora.

6. Para estabelecer comparação quanto ao crescimento das funções, solicitamos que plotassem os gráficos das funções $y = 2^x$, $y = x^2$ e $y = x$, no mesmo sistema de coordenadas, analisando o comportamento dos gráficos para $x \geq 0$. A figura que obtiverem mostrou claramente que o crescimento da função exponencial é mais acelerado do que as demais funções. Vejamos o gráfico a seguir.

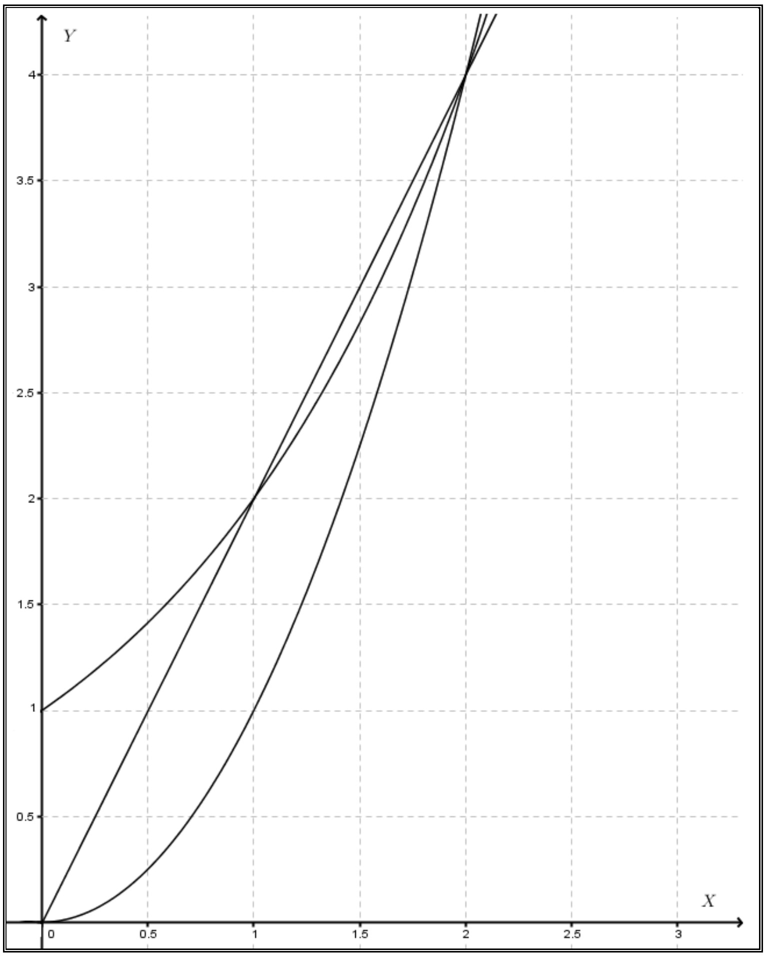

Figura 21. "Comparação gráfica das funções $y = 2x, y = x^2$ e $y = 2^x$ para $x \geq 0$". Elaborado pela Autora.

Para melhor ilustrar as comparações entre as curvas acima, solicitamos que os alunos utilizassem cores distintas para melhor identificar cada gráfico.

Ao obterem as três curvas plotadas em um mesmo sistema de eixos, a primeira observação é que existem pontos que são comuns às mesmas, pontos estes facilmente identificáveis no gráfico. Desafiamos os alunos a determinarem algebricamente estes pontos comuns, considerando $x \geq 0$:

a) $2x = x^2$.

Organizando esta expressão, perceberam que tratava-se de uma equação do segundo grau, incompleta. Solicitamos que resolvessem para encontrar as soluções para as quais as duas curvas apresentavam valores iguais. Assim,

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2) = 0.$$

Temos: $x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ao comparar os resultados obtidos, perceberam que de fato, a reta $y = 2x$ e a parábola $y = x^2$ apresentavam dois pontos em comum, que orientamos a chamá-los de A e B, solicitando que encontrassem o valor da coordenada y dos pontos, que foram facilmente encontrados por substituição, assim $A = (0, 0)$ e $B = (2, 4)$.

b) $2x = 2^x$

A expressão apresentada exigiu um pouco mais dos alunos, que se saíram por tentativa, montando uma tabela de valores, encontrando $x = 1$ e $x = 2$. Novamente encontraram o valor da coordenada y, percebendo que o ponto $B = (2,4)$ era solução da resolução anterior. O outro ponto encontrado foi $C = (1, 2)$.

c) $x^2 = 2^x$

Novamente a expressão encontrada apresentou um grau de dificuldade superado pela utilização dos cálculos com tabelas de valores numéricos e comparação. Desta forma, perceberam que para $x = 2$, ambas as funções apresentavam o mesmo valor, e o ponto $B = (2, 4)$ já era conhecido. Solicitamos que marcassem nos gráficos os pontos nas interseções das curvas.

Ao final, a plotagem das funções ficou bem definida, com a localização dos pontos comuns às funções, conforme a imagem a seguir.

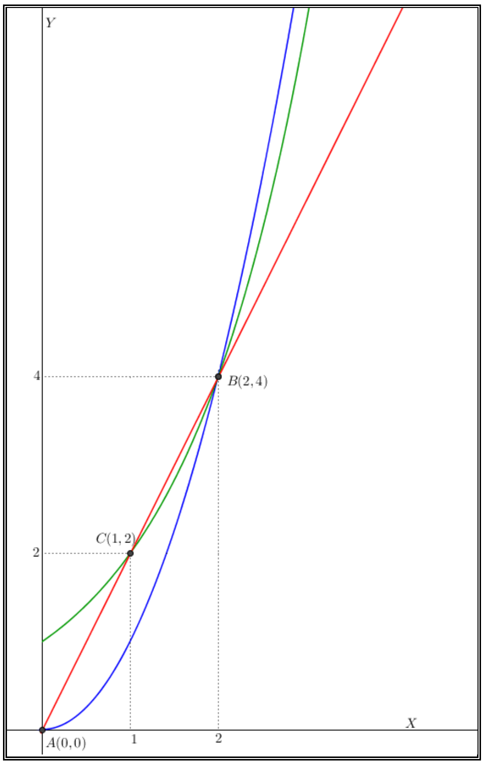

Figura 22. "Gráfico para observação dos pontos em comum das funções $y = 2x, y = x^2$ e $y = 2^x$". Elaborada pela Autora.

Avaliação da atividade

Após o desenvolvimento desta sequência de construção de gráficos, ficou claro para os alunos que o gráfico da função exponencial cresce mais rapidamente do que as demais e que existem pontos em comum às curvas, pontos estes determinados geometricamente e/ou algebricamente, através de resolução de equações ou com o artifício de atribuição de valores para a variável x realizando alguns cálculos numéricos.

A avaliação dos alunos se deu através da observação de sua atitude durante o desenvolvimento da atividade, da apresentação de cada grupo dos gráficos plotados e da explanação sobre "o que aprendi" com esta atividade.

Com relação à utilização do software GeoGebra temos a dizer que o resultado foi satisfatório e gratificante, pois os alunos apresentam muita facilidade para aprender a manusear instrumentos computacionais.

Com relação à apresentação dos grupos, concluímos que a atividade alcançou seu objetivo que era fazer com que os alunos associassem cada um dos gráficos de reta e curvas com a expressão matemática adequada, concluir que o crescimento exponencial é maior do que nas demais funções e ainda concluir que a função exponencial representa situações de crescimento quando sua base $a > 1$ e situações de decaimento, quando $0 < a < 1$.

Atividade nº.2 – Análise do comportamento da família das curvas exponenciais.

Conhecimentos prévios: Utilização do GeoGebra.

Material: software GeoGebra.

Público alvo: alunos do 1º. Ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivo: Comparação da curva exponencial, dependendo dos valores atribuídos à base da função.

Apresentação da atividade: A função exponencial é uma bijeção crescente de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, tal que para $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = a^{x}$.

Desenvolvimento: Os alunos foram orientados a construírem os gráficos da função exponencial, utilizando o software GeoGebra, para os seguintes valores de a: $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 5$ e 10. O resultado obtido está representado na imagem a seguir:

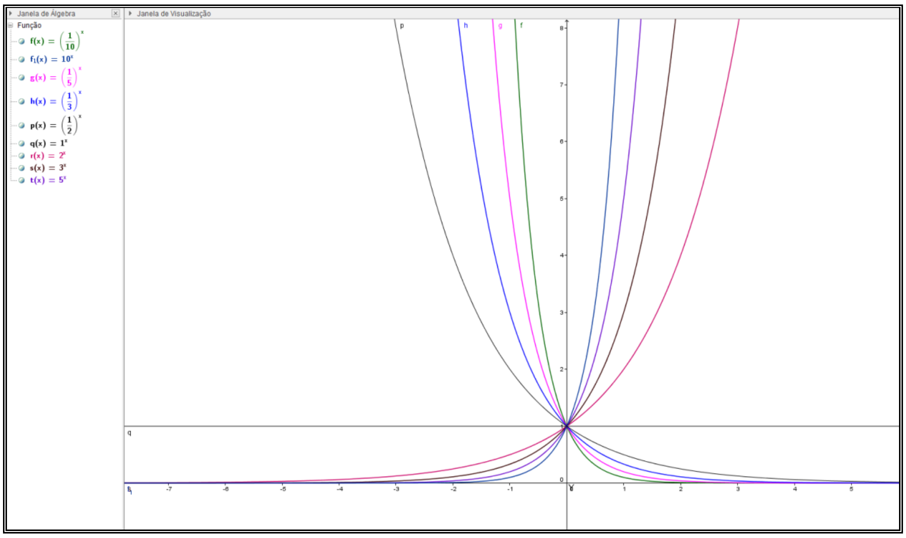

Figura 23. "Gráfico da família de curvas exponenciais no GeoGebra". Elaborado pela Autora

Os alunos foram orientados a observar a família de curvas na janela de visualização, comparando com a expressão exponencial na janela de álgebra, para, a seguir, responderem os seguintes questionamentos:

1) O que você observa com relação ao comportamento das curvas quando $0 < a < 1$?
2) O que você observa com relação ao comportamento da curva quando $a = 1$? Como é chamada a função obtida se $f(x) = 1^x$?
3) O que você observa com relação ao comportamento das curvas quando $a > 1$?
4) Observando a família de curvas quando $a > 1$, o que acontece com a proximidade das curvas à medida que aumentamos o valor de a ?
5) Existe algum ponto comum à família de curvas exponenciais ? Qual é esse ponto ? Como você explica a existência deste ponto ?

Avaliação: O resultado para esta atividade foi positivo com total aproveitamento por parte dos alunos, que com facilidade conseguiram responder corretamente aos questionamentos realizados. Desta forma, tornou-se simples falar em comportamento da curva exponencial dependendo da variação da base da potência, em crescimento e decaimento exponencial.

Atividade nº.3 – Variação da função exponencial.

Conhecimentos prévios: Utilização do GeoGebra, conhecimento de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$, conhecimento das características de progressões aritméticas e geométricas.

Material: software GeoGebra, calculadoras.

Público alvo: alunos do 1º. Ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivo: Ao final da atividade o aluno deverá concluir, ao observar a tabela, que qualquer que seja a função exponencial f, se x_n é uma progressão aritmética, então $f(x_n)$ será uma progressão geométrica cuja razão é o número obtido por $\frac{f(x_n+\Delta x)}{f(x_n)}$ e também que a taxa de variação relativa $\frac{\Delta y}{y}$, com $y \neq 0$, não depende de x, mas apenas de Δx.

Apresentação da atividade: O estudo do comportamento variacional das funções exponenciais é realizado, num primeiro momento, no cenário numérico. A atividade procura destacar a relação existente entre uma progressão aritmética, no domínio de uma função exponencial f e a sequência formada pelas imagens $f(x_n)$ dos elementos dessa progressão. A atividade foi realizada em dois momentos. Primeiramente solicitamos aos alunos que construíssem no GeoGebra o gráfico da função $y = 2^x$, como ilustra a figura a seguir.

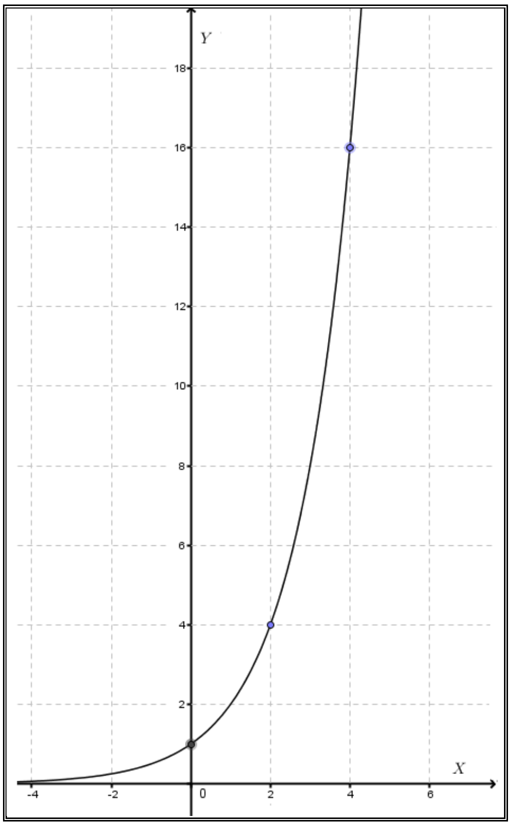

Figura 24. "Gráfico da função $y = 2^x$". Elaborado pela Autora"

A seguir, instruímos os alunos a construírem uma tabela com cinco colunas, nela colocando os valores de x_n, $f(x_n)$, Δx, $f(x_n + \Delta x)$ e $\frac{f(x_n + \Delta x)}{f(x_n)}$, como indica a tabela a seguir.

x_n	$f(x_n)$	Δx	$f(x_n + \Delta x)$	$\frac{f(x_n + \Delta x)}{f(x_n)}$
0	1	1	2	2
1	2	1	4	2
2	4	1	8	2
3	8	1	16	2
4	16	1	32	2
5	32	1	64	2
6	64	1	128	2
7	128	1	256	2
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
x_n	2^n	1	2^{n+1}	2

Tabela 1. "Variação da função exponencial". Elaborada pela Autora.

Com os cálculos, os alunos verificaram que a razão entre a variação do valor da função para o valor de x acrescido da própria variação de x e o valor que a função assumia para aquele determinado valor era constante.

Também perceberam que a sequência dos valores de $f(x_n + \Delta x)$ era formada por potências de base 2.

Solicitamos que os alunos nos explicassem o motivo da razão ser sempre igual a 2. Em resposta, obtivemos que a divisão de 2^{n+1}por 2^n, sempre resultará 2, independentemente do valor de n.

A seguir, solicitamos que montassem uma nova tabela com três colunas, nelas colocando os valores x_n, $f(x_n)$ e $\frac{\Delta y}{y}$, mostradas a seguir.

x_n	$f(x_n)$	$\frac{\Delta y}{y}$
0	1	1
1	2	1
2	4	1
3	8	1
4	16	1
5	32	1
6	64	1

Tabela 2. "Invariância da função exponencial". Elaborada pela Autora.

Avaliação: Após o desenvolvimento dos cálculos, os alunos mostraram-se bastante curiosos com o fato de que apesar do crescimento da função ser muito rápido, ou seja, sua variação ser exponencial, a razão na terceira coluna, em ambas as situações, era invariante, assim mantinha-se constante. Perguntamos aos alunos se a taxa de variação relativa $\frac{\Delta y}{y}$ da função exponencial dependia de x ou de Δx. Após discussões, chegaram à conclusão que a taxa relativa não dependia de x e sim de Δx. Desta vez não houve um número significativo de respostas. Percebemos que alunos com habilidade matemática apresentaram o raciocínio correto. Desta forma, pudemos realizar com o grupo a seguinte formalização:

(Caracterização 1) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética x_1, x_2, ... , x_n, ... numa progressão geométrica $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,..., $y_n = f(x_n)$, ... Se pusermos $k = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, temos que $y = f(x) = k.a^x$ para $x \in \mathbb{R}$.

(Caracterização 2) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para quaisquer x e $\Delta x \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$ dependa apenas de Δx e não de x. Então se pusermos $k = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, teremos $y = f(x) = k\,.\,a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Atividade nº. 4 – Limite de $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{x}}$.

Conhecimentos prévios: juros compostos, fatorial.

Material: calculadora científica.

Público alvo: alunos do 3º. Ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivo: Ao final desta atividade, os alunos deverão perceber que a expressão $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se estabiliza próxima do número $2{,}71828$, para números arbitrariamente grandes de x. Sabemos que esta questão não é tão simples como parece e só foi totalmente respondida com o estudo de convergências de séries do Cálculo. Porém intuitivamente, os alunos deverão compreender que o número e (número de Euler), muito utilizado em problemas exponenciais que são resolvidos pela função $y = e^x$, apesar de irracional, possui uma origem razoavelmente fácil de ser compreendida.

Apresentação da atividade: Como a expressão relacionada à matemática financeira (juros compostos) está associada aos exponenciais e logaritmos, sugerimos aos alunos que considerassem a expressão $M = C\,.\,(1+i)^t$, que calcula o montante de uma aplicação, de um capital C a juros compostos, durante um tempo de aplicação t, a uma taxa i. Esta fórmula pode variar de acordo com as condições do problema, desta forma sugerimos que utilizassem $C = 1$, $i = 1/x$ e $t = x$, com $x \neq 0$. Com as condições dadas, chegaram à expressão $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, solicitemos então que tentassem obter o valor aproximado da expressão. Foram orientados a montarem uma tabela, colocando na primeira coluna valores de x correspondentes a potências de base 10 e na segunda coluna o valor encontrado quando se calcula $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Sugerimos que se sentassem em duplas, mas ao final, grupos pequenos, reunidos por afinidades foram formados. Após a realização dos cálculos, chegaram a resultados semelhantes aos que estão na tabela que se segue.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2,59374...
100	2,70481...
1.000	2,71692...
10.000	2,71815
100.000	2,71827...
1.000.000	2,71828...
10.000.000	2,71828...

Tabela 3. Limite $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *Elaborada pela Autora.*

Questionamos se os valores encontrados eram divergentes ou se apresentavam tendência a ficar estáveis à medida que os valores de x aumentavam. Afirmaram que havia tendência a se estabilizarem próximos a $2{,}71828\ldots$.

Avaliação: Após o desenvolvimento da atividade, os alunos indagaram porque havia tendência de estabilização dos cálculos próximos ao valor encontrado. Explicamos a eles que esta tendência de estabilização é chamada no cálculo de limite e que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots = e$, o número de Euler. Ato contínuo, solicitamos que efetuassem o cálculo do resultado numérico da expressão para verificar se o valor encontrado correspondia a 2,71828... . Como no Estado de São Paulo, limites e derivadas não fazem parte do currículo oficial, explicamos aos alunos que este assunto poderia vir a ser estudado por aqueles que optassem pela área de Exatas.

Após o desenvolvimento da atividade, propusemos alguns problemas de matemática financeira, para sistematização de procedimentos na aplicação da fórmula característica.

Atividade nº. 5 - Decaimento Radioativo.

Esta atividade foi baseada na referência [23].

Conhecimentos prévios: conceito de função exponencial, cálculos com logaritmos.

Material: calculadora científica.

Público alvo: alunos do 3º. Ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 (duas) aulas de 50 minutos cada.

Objetivo: Ao final da atividade o aluno deverá compreender que problemas que abordam situações em que a taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta quantidade, devem ser resolvidas com o modelo exponencial.

Apresentação da atividade: Texto sobre um fragmento de papiro [23].

Texto: "Cientistas descobriram que um fragmento de papiro continha 74% da massa de Carbono 14 (C-14) que ele conteria se tivesse sido fabricado nos dias de hoje, com matéria prima similar àquela utilizada pelos antigos. Estime a idade do papiro, sabendo que a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos $\pm$ 40 anos" [23].

Após apresentar o texto perguntamos aos alunos: onde a matemática se encaixa nestas ciências?

Afirmamos aos alunos que era necessário compreender a ideia de crescimento e decrescimento exponencial, para poder resolver o problema proposto.

Explicamos que existem inúmeras situações, tanto na matemática como nas ciências, nas quais a taxa de crescimento de uma função é proporcional ao valor da própria função, desta forma, se a função cresce, a taxa de crescimento cresce proporcionalmente, e esse processo, repetido o tempo todo, produz um crescimento exponencial.

Afirmamos que podemos escrever a quantidade y em função do tempo t da seguinte forma: $y = f(t)$. Depois fizemos mais uma indagação: "Como expressar uma taxa de crescimento que é proporcional ao valor da própria função?".

A seguir apresentamos as formas que o Cálculo utiliza para esta expressão:

$f'(t) = k.f(t)$ ou $\frac{dy}{dt} = k.y$ ou $\dot{y} = k.y$.

Na sequência apresentamos a seguinte definição:

Definição 1: Chamamos equação diferencial a uma equação que tem variáveis que são uma função (y) e sua derivada (y'). Essa equação é conhecida como lei de crescimento natural (se $k > 0$) ou lei de decaimento natural (se $k < 0$). É uma lei comum na natureza porque descreve, por exemplo, o crescimento de bactérias ou o decaimento radioativo.

Explicamos que a taxa de decaimento radioativo é proporcional à massa, ou seja, quanto mais massa, maior é a taxa de decaimento; quanto menos massa, menor a taxa de decaimento.

Explicamos também que em cálculo se aprende que a derivada da função $y = e^t$ é $y' = e^t$.

Propusemos a encontrar a solução para a equação diferencial apresentada. De fato, temos que,

$y = f(t) = C\,.\,e^{k.t}$ logo $\dot{y} = f'(t) = \frac{dy}{dt} = [C.e^{k.t}]'$.

Verificando que C é constante e aplicando a regra da cadeia de derivação, encontramos:

$[C\,.\,e^{k.t}] = C[e^{k.t}] = C\,.\,e^{k.t}.k \rightarrow k.(C.e^{k.t}) \rightarrow k.f(t)$.

Portanto,

$(y = f(t) = C.e^{k.t}) \Rightarrow (\frac{dy}{dt} = k.f(t))$.

Faltava verificar qual o valor da função quando $t = 0$, pois com este valor determinaríamos em que ponto a função interceptava o eixo Y.

Calculando o valor de $f(0)$:

$f(0) = C\,.\,e^{k.o} = C\,.1 = C$.

Então C é o valor da função $y = f(t)$ quando $t = 0$.

Reescrevendo a equação diferencial:

$$(y = f(t) = f(0).e^{k.t}) \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = k.f(t).$$

Como temos uma relação de equivalência, a relação antecedente e a consequente podem trocar de lugar, pois uma não existe sem a outra, então:

$$(y = f(t) = f(0).e^{k.t} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dt} = k.f(t)\right).$$

Assim, a função $y = C.e^{k.t}$ é a única solução possível da equação diferencial.

Como consequência, se $k > 0$, temos $\frac{dy}{dt} > 0$ e a função cresce exponencialmente, agora se $k < 0$, temos $\frac{dy}{dt} < 0$ e a função decai exponencialmente.

É o caso do decaimento de uma massa m de substância radioativa em função do tempo t.

Se tivermos $C = m_0$, podemos escrever: $m(t) = m_0 . e^{kt}$ $, k < 0$.

Explicamos que os cientistas normalmente mencionam $m(t)$ como uma porcentagem de m_0 e em seguida citam a meia-vida da substância em questão.

Definimos o que é meia-vida de uma substância.

Definição 2: Meia-vida é o tempo necessário para que a massa m_0 decaia à metade.

Para o carbono 14, o valor da meia-vida, independente de m_0 é constante. Assim, o tempo necessário para que a massa inicial m_0 decaia a metade pode ser calculado da seguinte forma:

$\frac{m_0}{2} = m_0.e^{k.t} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{k.t}$, então:

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k.t \rightarrow \ln(1) - \ln(2) = k.t \rightarrow -\ln(2) = k.t$, logo

$t = \frac{-\ln(2)}{k}$ e $k = \frac{-\ln(2)}{t}$.

Pedimos aos alunos que observassem que t não dependia de m_0.

No desenvolvimento da atividade surgiu a pergunta: “como o Carbono 14 vai para no organismo dos seres vivos ?”

Como a pergunta já era esperada, apresentamos aos alunos o seguinte texto [23]:

“O planeta terra é banhado por radiações cósmicas que ocorrem durante todo o tempo. Estas radiações, na parte superior da atmosfera, convertem nitrogênio no isótopo radioativo de carbono, o Carbono 14. Este, em pouco tempo é absorvido pelas plantas, e a partir daí, entra na cadeia alimentar de forma que os animais que se alimentam de plantas absorvem sua cota de Carbono 14, e os animais que se alimentam destes animais, também se alimentam desta cota, e assim por diante. Quando morre, o organismo apresenta um uma cota de Carbono 14, que começa a decair sem reposição. Para saber quando um organismo morreu, o cientista precisa estimar que quantidade de Carbono 14 ele possuía ao morrer e quanto tem agora".

Voltando ao problema inicial, o fragmento de papiro, comparado com materiais atuais, tem 74% de Carbono 14, logo temos $m_0 = 100\% = 1$ e $m = 74\% = 0{,}74$.

Utilizando a expressão exponencial com os dados do problema, encontramos:

$$0{,}74 = 1.e^{k.t},$$

como $\ln(e) = 1$ temos:

$$\ln(0{,}74) = k.t \Longrightarrow t = \frac{\ln(0{,}74)}{k}.$$

Mas $\frac{-\ln(2)}{5770} \leq k \leq \frac{-\ln(2)}{5690}$, então:

$$\frac{\ln(0{,}74)}{\frac{-\ln(2)}{5690}} \leq t \leq \frac{\ln(0{,}74)}{\frac{-\ln(2)}{5770}} \Longrightarrow \quad \frac{5690\,.\,\ln(0{,}74)}{-\ln(2)} \leq t \leq \frac{5770\,.\,\ln(0{,}74)}{-\ln(2)}.$$

Utilizando a calculadora científica para fazer as contas, encontramos: $2472 \leq t \leq 2506.$

Eis a resposta: o fragmento de papiro foi produzido entre 2506 e 2472 anos atrás.

Para a generalização da expressão exponencial para o decaimento radioativo, sendo $p(t)$ a porcentagem da massa m da substância:

$p(t) = exp\left(\frac{-\ln(2)}{5730}\ .t\right)$ com $\exp(t) = e^{t}$, então:

$p(t) = \left[e^{-\ln(2)}\right]^{\frac{-t}{5730}} = (2)^{\frac{-t}{5730}}$, cujo gráfico é o seguinte:

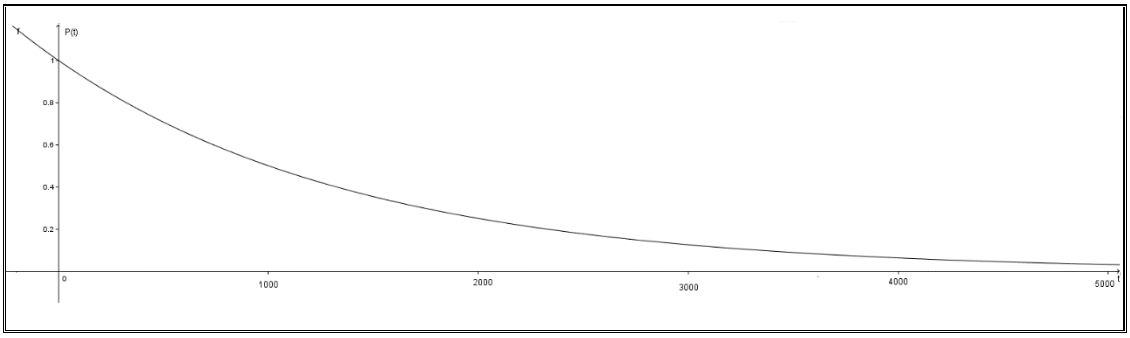

Figura 25. “Gráfico do decaimento radioativo de massa de Carbono”. Elaborado pela Autora.

Como podemos observar, temos uma P.A. no eixo P que se transforma em uma $P.G.$ no eixo t, característica da função exponencial.

Após o desenvolvimento desta atividade, propusemos uma lista com problemas, para que os alunos resolvessem, aplicando os conhecimentos obtidos com esta atividade.

Avaliação: A aplicação do problema despertou nos alunos muita curiosidade sobre o tema. Sugerimos a seguinte pesquisa: “O que Goiânia (Brasil) e Chernobyl (Ucrânia) possuem em comum ?”. Na aula seguinte, muitos trouxeram informações sobre os dois acidentes nucleares, falamos de tratamentos realizados às vítimas de Goiânia e que posteriormente foram aplicadas às vítimas de Chernobyl que vieram se tratar em Goiânia. Falamos de Geografia (localização dos dois pontos afetados por acidentes atômicos), da excelência da medicina brasileira no tratamento das vítimas, dos elementos químicos que emitem radiações, enfim, ao final, um aluno nos confessou: “nunca mais me esquecerei desta aula professora!”. Desta forma, concluímos que a abordagem foi positiva, pois alcançou a contextualização esperada no ensino da matemática, a interdisciplinaridade e a aprendizagem de matemática. Após os debates, propusemos alguns problemas abordando o crescimento e o decaimento exponencial para serem resolvidos pelos alunos, a fim de aplicarem os conhecimentos obtidos com a atividade.

6 CONCLUSÕES

A utilização de variados recursos didáticos em sala de aula é o grande desafio da atualidade para professores da Rede Pública de Ensino, especialmente para professores de Matemática.

As experiências práticas exigem do professor, além do domínio das tecnologias, muita leitura e muito conhecimento teórico.

As aulas devem ser preparadas não só com objetivo de propiciar a aprendizagem dos conceitos, mas também de propiciar o desenvolvimento de práticas e posturas que lhe permitam interagir com tecnologias e utilizar seus conhecimentos em seu desenvolvimento como cidadão.

Os alunos são testados em provas externas, dentre elas a principal é o ENEM, que abre aos alunos as portas das Universidades. Desta forma, propiciar aos alunos da Rede Pública, condições para ser bem sucedido é desafio cotidiano dos professores conscientes de sua atuação na rede de ensino.

Nos dias de hoje, além dos desafios do ensinar e aprender, nós professores convivemos com diversos problemas sociais que os alunos trazem consigo, além do desinteresse pela aprendizagem, como se a escola fosse apenas uma tarefa a ser cumprida.

Modificar esta forma de pensar e agir dos alunos é o grande paradigma dos professores, que pretendem fazer a diferença na formação destes alunos.

Para o desenvolvimento deste trabalho, nos propusemos ao trabalho árduo, porém gratificante, de estudar e pesquisar sobre o tema Crescimento e Decaimento Exponencial. O aprofundamento da aprendizagem começou a partir do Mestrado PROFMAT, com o estudo das disciplinas de Números e Funções Reais (MA11), posteriormente com pesquisas nos livros e textos sugeridos pelo programa.

Durante o desenvolvimento do presente trabalho, nos aprofundamos sobre o estudo da função exponencial, o que nos permitiu maior segurança em sala de aula; mas também aprendemos a consultar textos de professores conceituados e a produzir um texto, que poderá servir para outros professores.

Para o desenvolvimento das atividades a que nos propusemos, contamos com o apoio da equipe escolar, pois é necessária uma série de protocolos para utilização da sala de informática, como: agendamento prévio, instalação do software GeoGebra nas máquinas; além da cooperação dos alunos, pois sem eles, as atividades a que nos propusemos, ficariam sem sentido.

Uma das dificuldades encontradas na pesquisa foi encontrar atividades a serem utilizadas em sala de aula, para aliar a aprendizagem com a contextualização e a interdisciplinaridade.

Antes de aplicar as atividades em sala de aula tivemos o cuidado de fazê-las nós mesmos, para verificar o que poderia não dar certo. Este cuidado foi importante para a prática em sala de aula.

Os livros didáticos abordam o tema sob a forma de apresentação de situação problema e aplicação de fórmulas já prontas para resolvê-los.

O desenvolvimento das atividades com o software GeoGebra foi satisfatório em nossa análise, pois os alunos aprenderam muito durante o processo, mesmo os que apresentavam dificuldades com a Matemática. Compreendemos que muitos alunos apresentam dificuldades com cálculos e utilização de fórmulas, porém as atividades práticas permitiram que os mesmos compreendessem o conceito, associassem a função exponencial às curvas de crescimento ou decaimento dependendo do valor da base e acima de tudo, verificassem que em determinadas situações problema, o modelo exponencial era o mais adequado para a resolução.

A análise que fazemos deste trabalho é gratificante, pudemos aprender e aprendendo pudemos ensinar. Ser professor não é exercitar a tarefa contínua de estudar. Há que se ter coragem, paciência e muitos estudos.

Deixamos aqui o exemplo de um caminho, esperamos influenciar mais professores a compartilharem suas experiências, a fim de alcançarmos o sucesso de nossos alunos.

Esperamos nos aperfeiçoar a cada instante, pois a nossa ação em sala de aula propicia aos alunos a vontade de evoluir e a capacidade de pensar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. *Equações diferenciais com aplicações*/ Rodney Carlos Bassanezi, Wilson Castro Ferreira Jr. São Paulo: Harbra Ltda, 1988.

[2] ________________________ . *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia/ Rodney Carlos Bassanezi. 3ª ed., 3ª reimpressão. – São Paulo Contexto, 2011.

[3] BRASIL. *Ensino Médio Inovador.* Brasília: MEC/SEB, 2009.

[4] BRASIL. *Exame Nacional do Ensino Médio ENEM.* Disponível em http://portal.inep.gov.br.

[5] BRASIL. Programa de Financiamento Estudantil FIES. *Disponível em http://sisfiesportal.mec.gov.br.*

[6] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio.* Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

[7] BRASIL. *Programa Universidade para todos PROUNI.* Disponível em http://prouniportal.mec.gov.br.

[8] BRASIL. *Sistema de Seleção Unificada (SISU).* Disponível em http://sisu.mec.gov.br.

[9] BRAUN, Martin. *Equações diferenciais e suas aplicações/* Martin Braun; trad. por Anna Amália Feijó Barroso – Rio de Janeiro: Campus, 1979.

[10] BOYER, Carl B. *História da matemática*/ Carl B. Boyer; prefácio de Isaac Asimov revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

[11] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.

[12] ____________________. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2002.

[13] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contextos e aplicações*/ Luiz Roberto Dante. 1ª. ed. 3.v. São Paulo: Ática, 2010.

[14] IEZZI, Gelson. *Matemática: ciência e aplicações*, 3 : ensino médio/ Gelson Iezzi...[et al.]. 6ª. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

[15] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com Geometria Analítica*. Louis Leithold, tradução Cyro Carvalho Patarra. v. 2ª. 3ª ed.- São Paulo: Harbra Ltda. 1994.

[16] LIMA, Elon Lages. *A matemática do ensino médio* – volume 1/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 9ª ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

[17] _____________. *Curso de Análise*; v.1. 12ª. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

[18] ______________. *Meu professor de matemática e outras histórias*/ Elon Lages Lima. 5ª. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[19] ______________. *Logaritmos*/Elon Lages de Lima. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[20] ______________. *Números e funções reais*. Coleção PROFMAT. 1ª. ed. Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: SBM 2013.

[21] MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. *Pesquisa em Educação Matemática*: Concepções & Perspectivas. BICUDO, Maria Aparecida V. (org.). São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[22] MORGADO, Augusto César. *Progressões e Matemática Financeira*/ Augusto César Morgado, Eduardo Wagner, Sheila C. Zani. 5ª. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[23] *Revista Cálculo.* Ano 3 – número 35 – Dezembro de 2013. São Paulo: Ed. Segmento, 2013.

[24] *Revista do professor de matemática* nº. 62, 1º quadrimestre de 2007. São Paulo: SBM 2007.

[25] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar matemática*/Joamir Roberto de Souza. 1ª. ed. – São Paulo: FTD, 2010. (Coleção novo olhar; v. 1).

[26] STEWART, James. *Cálculo, volume I*/ James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. – São Pulo: Cengage Learning, 2013.

[27] _____________. *Cálculo, volume II*/ James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. – São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[28] ZABALA, Antonio. *A prática educativa – como ensinar/* Antonio Zabala. – São Paulo: Artmed, 1988.

APÊNDICE 1 - LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

APÊNDICE 2 – LISTA DE TABELAS