PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

TÓPICOS DE ARITMÉTICA: O ALGORITMO DE EUCLIDES

por

Rafael da Silva Cortiano

Preprint PROFMAT 1 (2014) 12 de novembro, 2014

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Tópicos de Aritmética: o algoritmo de Euclides

Rafael da Silva Cortiano
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: rafael.cortiano@gmail.com

8 de Dezembro de 2014

Resumo

O presente trabalho é parte de uma coleção de atividades resolvidas, comentadas e complementares envolvendo conceitos de aritmética. Apresentamos uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, cujo objetivo é potencializar o interesse pelo estudo da Matemática. Por este motivo, buscamos atividades que despertem a motivação dos alunos e as descrevemos de maneira a auxiliar os professores em sua aplicação, com respostas, comentários e sugestões. A abordagem dos temas se faz com o uso recorrente de aspectos históricos, resolução de problemas, jogos e atividades recreativas.
Palavras-Chave: Aritmética - Resolução de problemas - Jogos

1 Introdução

O material a seguir é uma proposta de projeto para um curso de matemática extracurricular para alunos do Ensino Médio. Surgiu da percepção da necessidade de um atendimento diferenciado a alunos com algum interesse na disciplina, pois em nossas experiências podemos perceber que no dia a dia de uma sala de aula não é sempre possível dar atenção aos alunos com um maior interesse e habilidades em matemática. A consequência disso é um desperdício de possíveis talentos que são deixados a margem, em um sistema de ensino que geralmente oferece projetos extraclasse apenas de reforço escolar para sanar dificuldades, já que dificilmente temos algo no sentido de potencializar habilidades. Cabe ressaltar que a ideia não é selecionar apenas os melhores alunos para participar. O ideal é que seja aberto a todo aluno simpatizante da disciplina e que voluntariamente se inscreva no curso.

Os tópicos abordados são: paridade, divisão euclidiana e algoritmo de Euclides. Os temas são desenvolvidos inicialmente com um pouco de história sobre o protagonista principal do assunto. Em seguida são propostas atividades, que remetem à resolução de problemas, nos quais o aluno vai gradativamente chegando às conclusões. No texto, as atividades estão com respostas e comentários. A versão do aluno, sem respostas, é encontrada no anexo. Buscamos abordar os assuntos de maneira curiosa e lúdica com a intenção de despertar uma motivação para os tópicos mais delicados do trabalho e principalmente causar uma inquietação no sentido de buscar conhecimento matemático que vá além do que a escola oferece às turmas regulares.

Em vários momentos no texto, o professor encontrará sugestões de como organizar a aplicação das atividades em sala. Porém, é importante que haja uma preparação inicial no sentido de mesclar a proposta do texto com a habilidade e experiência do aplicador. Igualmente importante é a realização de uma leitura inicial do nível de conhecimento matemático da turma. Neste sentido e caso seja necessário, deve ser pensado um pré-curso no qual serão trabalhadas as arestas identificadas.

2 Metodologia

Procuramos uma apresentação da matemática de forma a valorizar a construção do conhecimento, diferente da forma clássica na qual se define novos conteúdos com auxílio dos assuntos anteriores, completando com exemplos e problemas que utilizam esses saberes, segundo Brousseau (1996, pg 36) sobre a maneira de ensino clássica

> "apaga completamente a história destes saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e das questões que provocaram o aparecimento dos conceitos fundamentais, a sua utilização para a colocação de novos problemas, a intrusão de técnicas e de questões resultantes dos progressos dos outros sectores, a rejeição de determinados pontos de vista, considerando falsos ou desadequados, e as numerosas querelas a seu respeito."

Buscamos coletar problemas e jogos que desenvolvessem o aspecto científico nos alunos, situações que envolvem habilidades de levantar hipóteses, conjecturar, intuir, testar e validar resultados, como Brousseau (1996, pg 38) descreve

> "uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos,

> teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc."

A respeito da escolha da aritmética, acreditamos que há conteúdo que não estão evidenciados nos parâmetros curriculares, porém podem ser abordados e relacionados com os que lá estão. A aritmética também é importante, pois segundo Gomes, (2008, pg 160)

> "A aritmética é invocada como o primeiro exemplo sensível da necessidade dos signos: conforme Condillac, não poderíamos fazer progressos algum no conhecimento dos números, se não imaginássemos nomes para todas as idéias que formamos pela multiplicação da idéia de unidade, que ele supõe já ter recenido um nome."

Escolhemos utilizar de alguns jogos, pois estes auxiliam no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, desperta um maior interesse, pode-se analisar os erros e elaborar estratégias para vencer, de acordo com Emerique (1999, pg 188)

> "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas"

Também de acordo com o aspecto cognitivo do jogo Paulo (1999, pg 190) diz

> "necessidade e possibilidade de construção de novos conhecimentos e procedimentos, de descobrir erros e de imaginar formas de superá-los, dentre outros desafios."

Utilizamos também a resolução de problemas, uma vez que propicia um ambiente em que o aluno é ser ativo no processo de ensino-aprendizagem e segundo Onuchic (1999, pg 204)

> "a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simuntanea de vários níveis de atividade."

3 O algoritmo de Euclides

3.1 Um pouco de história: Euclides

Em 306 a.C. o controle da parte egípcia do império de Alexandre, O Grande, estava nas mãos de Ptolomeu I. Esse governador voltou a sua atenção para esforços construtivos. Um de seus primeiros atos foi a construção de um instituto conhecido como museu. Como professores, ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles Euclides, de cuja vida sabe-se pouco. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado ao seu nome. Embora edições de sua principal obra, Os Elementos, frequentemente o identificassem como Euclides de Megara, e um retrato de frequentemente apareça em histórias da Matemática, trata-se de um erro de identidade. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com lógica, não se sentia mais atraído pela Matemática que seu mestre.

Nosso Euclides, em contraste, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado lá para ensinar Matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. Lendas associadas a Euclides o pintavam como um bondoso velho. Ptolomeu uma vez perguntou-lhe se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de Os Elementos, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.

Evidentemente Euclides não dava ênfase a aspectos práticos do assunto. Há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante "pois ele precisa ter lucro com o que aprende". Embora se tenham perdido mais da metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os Elementos (Stoicheia). Publicados por volta de 300 a.C. aí está contemplada a aritmética, a geometria e a álgebra. Muitos outros textos lhe são atribuídos. O trabalho de Euclides é tão vasto que alguns historiadores não acreditavam que fosse obra de um só homem.

Os trabalhos matemáticos que chegaram até nós foram inicialmente traduzidos para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias. Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente a sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Ao recolher tudo o que então conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstratas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo.

3.2 Atividades

Atividade 3.1 *Par ou ímpar maluco*

Essa atividade tem como objetivo propiciar ao professor um método lúdico para introduzir, em sala, a paridade dos números naturais e sua análise nas operações básicas: adição, subtração e multiplicação. O jogo aborda ainda um trabalho específico com restos de divisões entre dois números naturais e esse tema pode ser desenvolvido, sem tanto rigor, junto aos alunos. Com essa atividade espera-se que o aluno desenvolva uma análise mais formal sobre como proceder uma demonstração onde a análise de todos os casos possíveis é utilizada. Para a atividade vamos precisar da folha de questões que encontra-se no anexo.

Descrição da atividade: O professor deve separar os alunos em trios, onde um dos participantes iniciará o jogo como o mediador. Em seguida, o professor explicará o jogo: Cada um dos jogadores escolherá par ou ímpar e após, anotará, secretamente um número inteiro positivo a sua escolha, em uma folha de papel que será entregue ao mediador. O mediador se encarregará de multiplicar os números escolhidos e se o resultado for par, ganha o jogador que escolheu essa opção. Caso contrário ganhará o jogador que escolheu a opção ímpar. Após algumas rodadas é interessante observar junto a turma o que seriam números inteiros positivos e qual o motivo da ausência do número zero. Depois de jogarem por mais um tempo o professor deverá pedir aos alunos que respondam à questão um da folha de atividades da página 21.

Questão 3.1.1 *Existe uma estratégia que possibilite vencer sempre? Caso exista, qual seria?*

Resposta comentada: Sim, basta que o aluno escolha a opção par e anote um número par em sua ficha. Espera-se que os alunos percebam que se escolherem a opção par e anotar em seu papel um número par ele sempre vencerá, ou seja, o jogo não é justo, pois os participantes não possuem as mesmas chance de ganhar. Observado esse fato o professor deverá solicitar aos alunos que respondam à questão dois da folha de atividades da página 21 pois nela irão verificar matematicamente por que isto acontece.

Questão 3.1.2 *No conjunto dos inteiros positivos, um número par, pode ser representado como $2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Já um número ímpar pode ser representado como $2k-1$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Como o primeiro jogador escolheu a opção par e anotou em sua ficha um número par, temos que o outro jogador só poderá escolher um número par ou um número ímpar. Feitas essas considerações, pede-se:*

a. o produto entre dois números pares, ou seja $2n.2k$, com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

Resposta comentada: $2n.2k = 4nk = 2.(2nk)$, como $2nk \in \mathbb{N}^*$, temos que $2nk = r$. Portanto $2n.2k = 2.(2nk) = 2r$, ou seja a multiplicação de dois números pares resultará em um número par.

b. o produto de um número par por um número ímpar, ou seja $2n.(2k-1)$ com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

Resposta comentada: $2n.(2k-1) = 4nk - 2n = 2.(2nk-n)$, como $(2nk-n) \in \mathbb{N}^*$, temos que $(2nk-n) = r$. Portanto $2n.(2k-1) = 2.(2nk-n) = 2r$, ou seja a multiplicação resulta em um número par.

c. Com os resultados dos itens a e b o que podemos concluir?

Resposta comentada: Podemos concluir que nestes casos o resultado será sempre um número par, independente dos números escolhidos. Assim temos que se o jogador escolher par e anotar em sua folha um número par, será o vencedor.

Atividade 3.2 *Mudando um pouco as regras*

Os jogadores escolhem a opção par ou ímpar, mas ao invés de escrever qualquer número inteiro positivo para jogar, eles devem escolher somente os número inteiros positivos que não são divisíveis por três, por exemplo $2, 4, 5, 7, \ldots$, ou seja, os números que não são múltiplos de três. O modo de se obter o resultado também muda, pois após o mediador multiplicar os números escolhidos ele dividirá esse resultado por três e a análise da paridade será feita no resto desta divisão. Ou seja, quando o resto for par ganha o jogador que escolheu a opção par, caso contrário ganha o jogador que escolheu ímpar. Ao explicar essa mudança, o professor poderá abordar a questão de múltiplos de um número natural e a divisão por três, em especial utilizando o algoritmo de Euclides. Após algumas partidas o professor deverá solicitar que os alunos respondam à questão um da folha de atividades da página 21.

Questão 3.2.1 *Existe alguma estratégia que permita vencer sempre? Caso exista, qual é?*

Resposta comentada: Espera-se que os alunos fiquem inquietos com relação à obtenção dessa estratégia, pois de fato ela não existe, mas o professor deverá explorar esse fato ouvindo e testando possíveis maneiras sugeridas. Discutidas essas possibilidades espera-se que a turma esteja motivada a acompanhar a justificativa formal da ausência da estratégia. Para resolver essa nova situação temos que analisar o resto da divisão de um número natural por três. Neste instante é possível para o professor realizar algumas divisões por três com intuito de analisar o resto dessas divisões e concluir que para esse resto só existem três opções, o zero, o um ou o dois. Assim pode-se representar um número natural dividido por três na forma $3n + r$, com $n, r \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq 2$. Suponha que o número escolhido pelo primeiro jogador seja da forma $3n + r_0$, com $n, r_0 \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq r_0 \leq 2$, onde r_0 é o resto da divisão por três e que o outro número escolhido seja da forma $3k+r_1$, com $k, r_1 \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq r_1 \leq 2$ onde r_1 é o resto da divisão por três. Como a solução é obtida pela análise do resto da divisão da multiplicação dos números escolhidos por três, teremos que efetuar essa multiplicação. Assim temos,

$$(3n + r_0).(3k + r_1) = 9nk + 3nr_1 + 3kr_0 + r_1r_0 = 3(3nk + nr_1 + nr_0) + r_1r_0$$

e como $3nk + nr_1 + nr_0 \in \mathbb{N}^*$, temos que $3nk + nr_1 + nr_0 = u$. Portanto

$$(3n + r_0).(3k + r_1) = 3(3nk + nr_1 + nr_0) + r_1r_0 = 3u + r_1r_0$$

ou seja $r_1 r_0$ é o resto da divisão da multiplicação dos números escolhidos por três. Assim basta analisar os possíveis restos das divisões por três de cada um dos números escolhidos e multiplicar um pelo outro para obter o resto da divisão, da multiplicação desses números, por três. Logo iremos analisar todos os casos possíveis por meio de uma tabela. Lembrando que não é possivel para nenhum dos jogadores escolher números divisíveis por três, ou seja, não teremos o resto igual a zero para nenhum dos jogadores.

Restos do 1° jogador	Restos do 2° jogador	Multiplicação dos restos	Paridade
1	1	$1.1 = 1$	ímpar
1	2	$1.2 = 2$	par
2	1	$2.1 = 2$	par
2	2	$2.2 = 4 = 1$	ímpar

Neste momento cabe ao professor exemplificar essa situação com números escolhidos pelos alunos, principalmente a última linha da tabela onde a múltiplicação dos restos resulta em quatro. A última linha da tabela merece uma atenção especial, pois o número resultante (resto) será maior do que o divisor. Uma estratégia consiste em voltar à conclusão, feita acima, que nos permitiu a construção da tabela e lembrar que caso $r_1.r_0$ for maior que três, então ele pode ser escrito como um múltiplo de três, ou seja na forma $3y+r$, com $y \in \mathbb{N}^*$. Assim basta dividir o número obtido por três e analisar o resto. No caso o resto da divisão de 4 por 3 é o número 1.

Outra ideia é retirar quantos números três forem possíveis do resultado obtido e analisar o que "sobra". De fato $4 - 1.3 = 1$. Assim foi possível retirar uma vez o número três e ainda sobrou um. Analisando a tabela pode-se concluir que não existe uma estratégia vencedora, pois os participantes não possuem acesso ao número de seu adversário.

Podemos dizer que o jogo é justo, porque existem as mesmas chances de vencer para cada escolha. É importante que o professor teste e instigue os alunos a modificar o jogo de mais maneiras ou até a criar seus próprios jogos utilizando restos, divisibilidade e paridade. Por exemplo, será que o jogo, independente do divisor natural escolhido, é sempre justo? O professor deve estar ciente de que a solução proposta, especialmente após a modificação do jogo, constitui em uma análise de casos para determinar todos os restos possíveis da divisão analisada. Esse método é muito importante, pois pode ser utilizado em outras áreas além da aritmética, como por exemplo em análise combinatória. Por esse motivo é importante que os alunos entendam que essa solução é satisfatória para o problema.

Atividade 3.3 *Sexta-feira* 13

Essa atividade tem como objetivo mostrar de forma lúdica como a análise de restos de divisões entre dois números inteiros positivos pode ser aplicada nas mais diversas situações. Para esta atividade vamos precisar da folha de questões que encontra-se no anexo e um calendário por equipe.

Descrição da atividade: O problema a seguir é um tanto curioso e pode ser proposto aos alunos como um desafio. O professor deverá dividir a sala em grupos de quatro pessoas e para cada grupo deverá ser entregue um calendário, preferencialmente os calendários devem ser de anos diferentes.

Questão 3.3.1 *Qual é o número máximo de sexta-feiras treze que podem ocorrer num ano que não é bissexto? Neste caso, em que dia da semana cai o décimo dia do ano?*

É importante que o professor ressalte que o problema não define um ano específico, mas sim que seja um ano que não é bissexto. A seguir estudaremos o seguinte resultado.

Resultado 3.1 *Monte uma tabela especificando quantos dias possuem cada mês do ano. Em seguida determine quantos dias do mês de março se passaram até o dia* 11 *de março e quantos dias faltam para terminar o mês de março tendo como base o dia* 11 *de março.*

Tabela da quantidade de dias de cada mês	
Mês	Total de dias
Janeiro	31
Fevereiro	28 ou 29 se for ano bissexto
Março	31
Abril	30
Maio	31
Junho	30
Julho	31
Agosto	31
Setembro	30
Outubro	31
Novembro	30
Dezembro	31

Temos 11 dias do mês de março até o dia 11 desse mês e faltam 20 dias para acabar o mesmo mês tendo como base o dia 11 de março.

Comentário Resultado 3.1: É preciso saber quantos dias possuem cada mês no ano para que o problema seja respondido. Além disso, os alunos devem perceber que se falarmos do dia 11 de março, isso significa que se passaram 11 dias do mês de março e faltam 20 dias para acabar esse mês, pois março possui 31 dias. Após terem debatido e solucionado o problema o professor deve propor aos alunos que respondam ao Resultado dois da folha de atividades.

Resultado 3.2 *Sabendo que o dia 2 de março é uma quinta-feira determine quais outros dias do mês de março ocorrem em uma quinta-feira. Em seguida determine uma estratégia que permita determinar esssa situação sem usar o calendário.*

Comentário Resultado 3.2: Note que, se o dia 02 de março é uma quinta-feira, então dia 09 de março, dia 16 de março, dia 23 de março e 30 de março serão todos numa quinta-feira. Note que $9 = 2 + 7$, $16 = 9 + 7$, $23 = 16 + 7$, $30 = 23+7$. Portanto, basta somarmos sete ao dia escolhido para obter o próximo dia que será, por exemplo, uma quinta-feira. Esse processo é válido para qualquer dia da semana. Após, os alunos devem responder ao resultado três da folha de atividades.

Resultado 3.3 *Determine a diferença entre o dia 11 de março e o dia 11 de abril, ou seja, a quantidade de dias que existe entre 11 de março e 11 de abril inclusive.*

Comentário da Resultado 3.3: Entre os dias 11 de março e 11 de abril inclusive, temos 31 dias.

Primeiro: Escolhido o dia do mês, vamos determinar a diferença entre esse dia e o último dia do mês. Por exemplo, escolhido o dia 11 de março temos que a diferença entre essa data e o último dia do mês de março é igual a 20, pois $31 - 11 = 20$.

Segundo: Somamos a diferença obtida anteriormente ao dia escolhido e assim obteremos a diferença entre um determinado dia de um mês e esse mesmo dia do mês seguinte inclusive. Retomando, temos que a diferença entre 11 de março e 11 de abril é 31, pois $20 + 11 = 31$.

Após os resultados terem sido apresentados e discutidos em sala o professor pode orientar os alunos a responderem à questão dois da folha de atividades.

Questão 3.3.2 *Com base no resultado três, construa uma tabela que indique a diferença entre os dias 13 de cada mês.*

Resposta comentada: Conforme o resultado três, temos a tabela abaixo com a diferença entre os dias 13 de cada mês.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30

Após a construção da tabela o professor deve orientar os alunos a responderem a questão dois da folha de atividades.

Questão 3.3.3 *Utilizando o resultado 3.2 determine quais dias treze ocorrem num mesmo dia da semana.*

Resposta comentada: Aplicando o Resultado 3.2 na tabela um, temos que se dividirmos a diferença obtida por 7, teremos como saber se os dias 13 ocorrem no mesmo dia da semana. Assim temos a tabela.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2

Analisando o resto das divisões, temos que dia 13 de fevereiro e 13 de março ocorrem no mesmo dia da semana. É conveniente que os dias que ocorreram num mesmo dia da semana sejam na sexta-feira. Assim só resta saber se existe mais algum mês que possua o dia 13 na sexta-feira. Para isso o professor deve orientar os alunos a responderem a questão três.

Questão 3.3.4 *Construa uma tabela indicando a diferença entre os dias treze, tendo como base o dia* 13 *de fevereiro. Após, aplique o resultado* 3.2 *e verifique quais dias* 13 *caem no mesmo dia da semana que o dia* 13 *de fevereiro.*

Exemplo 3.1 *Basta analisar o resto da divisão da diferença entre o dia* 13 *de fevereiro e o dia* 13 *do mês que queremos. Assim, se queremos analisar o dia* 13 *de maio, basta somar* $28+31+30 = 89$ *e verificar o resto do número obtido na divisão por* 7 *utilizando-se do resultado* 3.2.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
-	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
-	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2

Pela tabela acima chegamos a conclusão de que existe mais uma sexta-feira 13, que ocorre no dia 13 de novembro. Logo temos num mesmo ano, não bissexto, um total de, no máximo, três sextas-feiras 13. Sabendo que o dia 13 de fevereiro ocorre em uma sexta-feira, temos condições de descobrir em qual dia da semana o décimo dia do ano ocorre. Para isso o grupo deverá responder à questão quatro.

Questão 3.3.5 *Se o dia* 13 *de fevereiro ocorre em uma sexta-feira, em que dia da semana ocorre o dia* 10 *de janeiro?*

Resposta comentada: Em um sábado. Basta voltarmos à tabela da página 10 e olharmos a primeira coluna. Se dia 13 ocorre numa sexta e o resto da divisão da diferença entre 13 de janeiro e 13 fevereiro é igual a 3, temos que o dia 13 de fevereiro, passou três dias da semana do dia 13 de janeiro, ou seja, o dia 13 de janeiro ocorre numa terça-feira. Logo, o dia 10 de janeiro, o décimo dia do ano, ocorre em um sábado.

Atividade 3.4 *O jogo de Euclides*

Descrição da atividade: São dois jogadores, cada um escolhe, secretamente, um número natural não nulo. Suponhamos que um jogador escolheu o número 31, e o outro, o número 7. Um dos jogadores é sorteado para iniciar o jogo. Ele receberá o número escolhido pelo colega e deverá subtrair do maior número, 31, um múltiplo não nulo do menor, ($n7 = 7, 14, 21$ ou 28) de modo que o resultado ainda seja positivo. O segundo jogador receberá o novo par de números $31 - n7$, 7 e repetirá o processo, subtraindo do maior número um múltplo do menor, e assim por diante. Ganhará o jogo quem obtiver primeiro o número 0 em um par.

Exemplo 3.2 *Vamos simular uma partida com os números mencionados na descrição do jogo, ou seja,* 31 *e* 7*.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo: $[24, 7]$, $[17, 7]$, $[10, 7]$, $[3, 7]$. Suponhamos que escolha $[10, 7]$. Neste caso, o segundo jogador só terá uma alternativa: $[3, 7]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador que poderá escolher $[3, 4]$ ou $[3, 1]$. Se jogar $[3, 4]$, o segundo jogador será obrigado a jogar $[3, 1]$ e, na jogada seguinte, o primeiro jogador jogará $[1, 0]$ e será o vencedor.

Exemplo 3.3 *Suponhamos que os números escolhidos tenham sido* 49 *e* 5*.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo: $[4, 5]$, $[9, 5]$, $[14, 5]$, $[19, 5]$, $[24, 5]$, $[29, 5]$, $[34, 5]$, $[39, 5]$, $[44, 5]$. Suponhamos que escolha $[4, 5]$. Neste caso, o segundo jogador poderá ter só uma alternativa $[4, 1]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador que jogará $[0, 1]$ e será o vencedor.

Exemplo 3.4 *Sejam* 50 *e* 8 *os números escolhidos.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo:

$$[2, 8], [10, 8], [18, 8], [26, 8], [34, 8], [42, 8]$$

Suponhamos que escolha $[10, 8]$. Neste caso, o segundo jogador só terá uma alternativa $[2, 8]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador, que escolherá $[2, 0]$ e será o vencedor.

Questão 3.4.1 *Nos exemplos um, dois e três os números iniciais são* 31 *e* 7*,* 49 *e* 5*,* 50 *e* 8*, as jogadas vencedoras são respectivamente,* $[1, 0], [0, 1]$ *e* $[2, 0]$*. Qual relação existe entre os números escolhidos e o número não nulo obtido na jogada vencedora?*

Resposta Comentada: O número não nulo é o máximo divisor comum dos números iniciais. O professor pode chamar a atenção dos alunos para este fato, que o jogo termina com o par $\{n, 0\}$, onde n é o maior divisor comum dos dois números escolhidos inicialmente. De fato, se denotarmos por a e b os números escolhidos e um número dividir a e b, este número também dividirá $a - mb$ e b. Reciprocamente, se um número dividir $a - mb$ e b, este número também dividirá a e b. Portanto, os divisores comuns de a e b e os $a - mb$ e b são os mesmos e, consequentemente,

$MDC(a,b) = MDC(a-mb,b) = \cdots = MDC(n,0) = n$. O nome do jogo, jogo de Euclides, também sugere observar o algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum de dois números:

	4	2	3
31	7	3	1
3	1	0	

Onde, em cada passagem, do maior número subtrai-se um múltiplo do menor (no jogo, esse múltiplo não é necessariamente o maior possível). Um resultado que enuncia exatamente parte da regra do jogo é o Lema de Euclides o qual enunciaremos e provaremos a seguir:

Lema 3.0.1 *Sejam $a, b, n \in N$ com $a < na < b$. Se existe $(a, b-na)$, então (a,b) existe, e $(a,b) = (a, b-na)$.*

Observação: (a,b) representa o MDC entre a e b.

Demonstração 3.1 *Seja $d = (a, b-na)$. Como $d|a$ e $d|(b-na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $b-na$ e portanto, $c|d$. Isso prova que $d = (a,b)$.*

Questão 3.4.2 *Curiosamente o primeiro jogador ganhou as três partidas. Suponha que ao invés das jogadas feitas na primeira rodada ele tivesse jogado os pares $[17,7]$ no primeiro exemplo, $[29,5]$ no segundo exemplo e $[34,8]$ no terceiro exemplo. Monte uma estratégia vencedora para o segundo jogador.*

Resposta comentada:

1° **Exemplo:** O primero jogador joga $[17,7]$. O segundo jogador tem as seguintes possibilidades: $[3,7]$ ou $[10,7]$. Suponha que ele escolha $[10,7]$. Será a vez, novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[3,7]$. Agora, o segundo jogador pode jogar: $[3,4]$ ou $[3,1]$. Suponha que ele escolha $[3,4]$. O primeiro jogador será obrigado a jogar $[3,1]$. O segundo jogador jogará $[0,1]$ e vencerá a partida.

2° **Exemplo:** O primeiro jogador joga $[29,5]$. O segundo tem as seguinte possibilidades: $[4,5]$,$[9,5]$,$[13,5]$, $[18,5]$, e $[24,5]$. Suponha que ele escolha $[4,5]$. Será a vez novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[4,1]$. O segundo jogará $[0,1]$ e vencerá a partida.

3° **Exemplo:** O primeiro jogador joga $[34,8]$. O segundo tem as seguintes possibilidades: $[2,8]$, $[10,8]$, $[18,8]$, $[26,8]$. Suponha que ele escolha $[10,8]$. Será a vez novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[2,8]$. O segundo jogador jogará $[2,0]$ e vencerá a partida.

Questão 3.4.3 *Nas partidas em que o primeiro jogador venceu, ele entregou para o adversário os seguintes pares:*

Exemplo 1: $[10, 7], [3, 4]$.
Exemplo 2: $[4, 5]$.
Exemplo 3: $[10, 8]$.
Por outro lado as jogadas do segundo jogador (perdedor) foram:
Exemplo 1: $[3, 7], [3, 1]$.
Exemplo 2: $[4, 1]$.
Exemplo 3: $[2, 8]$.

a. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do primeiro jogador (vencedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna:

Ex.1	[10,7]	1,428
Ex.1	[3,4]	1,333
Ex.2	[4,5]	1,25
Ex.3	[10,8]	1,25

b. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do segundo jogador (perdedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna.

Ex.1	[3,7]	2,333
Ex.1	[3,1]	3
Ex.2	[4,1]	4
Ex.3	[2,8]	4

c. Na questão dois criou-se uma estratégia para que o segundo jogador vencesse a partir de uma jogada diferente da proposta, nos exemplos, pelo primeiro jogador. Assim, monte duas tabelas, uma indicando na primeira coluna as jogadas propostas por você para o segundo jogador (vencedor) e a outra com as jogadas do primeiro jogador (perdedor). Assim como no exercício b. insira na terceira coluna o resultado aproximado da divisão do maior número do par jogado pelo menor.

Segundo jogador (vencedor):

Ex.1	[10,7]	1,428
Ex.1	[3,4]	1,333
Ex.2	[4,5]	1,25
Ex.3	[10,8]	1,25

Primeiro jogador (perdedor):

Ex.1	[17,7]	2,428
Ex.1	[3,7]	2,333
Ex.1	[3,1]	3
Ex.2	[29,5]	5,8
Ex.2	[4,1]	4
Ex.3	[34,8]	4,25
Ex.3	[2, 8]	4

d. Qual foi o maior resultado encontrado na divisão dos números dos pares das jogadas do vencedor?

Maior resultado: $1,428$.

e. Qual foi o menor resultado encontrado na divisão dos números dos pares das jogadas do perdedor?

Menor resultado: $2,333$.

Questões 3.4.2 **e** 3.4.3 **comentadas:** O professor deve instigar os alunos a perceberem que o fato de o resultado da divisão de um par vencedor, nos exemplos, ser sempre menor que $1,428$ não é uma coincidência, ou seja, existe uma estratégia para vencer o jogo. De fato, a escolha do par a ser jogado é uma estratégia para vencer o jogo. Se um jogador recebe um par $[a, b]$ com

$$\frac{a}{b} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

ele terá as condições necessárias para adotar a estratégia que lhe garante a vitória. A ideia é que os alunos estejam motivados a acompanhar e a entender a demonstração Matemática da validade da estratégia para qualquer par de números naturais escolhidos. Provaremos a afirmação a seguir. Considerações iniciais:

dado um par $[a, b]$, com $a > b$, os pares

$$[a-b, b], [a-2b, b], \cdots, [a-qb, b]$$

com $a - qb \geq 0$, chamam-se pares derivados de $[a, b]$. Assim, $[24, 7], [17, 7], [10, 7], [3, 7]$ são os pares derivados de $[31, 7]$. Se $a - qb \geq 0$ e $a - (q+1)b < 0$ $[a - qb, b]$ chama-se par derivado mínimo de $[31, 7]$.

Observe que, dentre todos os pares derivados de um par $[a, b]$, com $a > b$, os números do par derivado mínimo são b e o resto da divisão de a por b.

Se $[a - qb, b]$ for o par derivado mínimo, diremos que o par $[a - (q-1)b, b]$ é o par anterior ao par derivado mínimo.

Observe, mais uma vez, o exemplo: Dado o par $[31, 7]$, o primeiro jogador tem apenas duas opções significativas:

- ele escolhe o par derivado mínimo $[3, 7]$;

- ele escolhe o par anterior ao par derivado mínimo, isto é, $[10,7]$, obrigando o adversário a jogar $[3,7]$. Qualquer outra escolha daria estas mesmas duas opções ao adversário.

Analisando o caso geral: suponhamos que o primeiro jogador receba o par $[n,m]$ com $m<n$. Se $\frac{n}{m}$ for um número inteiro k, o primeiro jogador ganhará o jogo com a jogada $[n-km,m]=[0,m]$. Suponhamos então, $n=qm+r$, $0<r<m$. O jogador deverá optar pelo par derivado mínimo ou pelo par anterior a este, isto é, deverá optar entre:

$$[nm-qm,m]=[qm+r-qm,m]=[r,m],\ \text{ com } \ 0<r<m.$$

$$[n-(q-1)m,m]=[qm+r-qm+m,m]=[m+r,m]\ \text{ com } \ m<m+r$$

Como o adversário vai prosseguir, tirando de m um múltiplo de r ou tirando de $m+r$ um múltiplo de m, olhemos para as razões $\frac{m}{r}$ e $\frac{m+r}{m}$. Fazendo $\frac{m}{r}=x$, teremos

$$\frac{m+r}{m}=1+\frac{r}{m}=1+\frac{1}{x}.$$

Qual das razões, $x=\frac{m}{r}$ ou $1+\frac{1}{x}=\frac{m+r}{m}$ é vantajosa para o jogador?
Observamos, inicialmente, que as razões seriam iguais se

$$x=1+\frac{1}{x}$$

ou seja, se $x^2-x-1=0$, ou ainda, dado que $x>0$, se

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Este número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,618$, terá um papel importante na discussão. Vamos chamá-lo de r.

Demonstração 3.2 • $x<r\Rightarrow 1+\frac{1}{x}>r$

$$\begin{aligned}
x<r\Rightarrow \frac{1}{x} &> \frac{1}{r}\\
\Rightarrow 1+\frac{1}{x} &> 1+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\
&= 1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\\
&= \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}\\
&= \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
&= r
\end{aligned}$$

- $x > r \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} < r$

Demonstração 3.3

$$\begin{aligned}
x > r \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{r} & \\
\Rightarrow 1 + \frac{1}{x} &< 1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\
&= \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= r.
\end{aligned}$$

Refazemos, então, a pergunta: o primeiro jogador pode optar entre um par cuja razão é maior do que r, ou um par cuja razão é menor do que r. Qual é a melhor opção? A resposta se encontra no seguinte fato:

Se um jogador receber um par $[a, b]$ com $1 < \frac{a}{b} < r$, naquela jogada ele não poderá ganhar o jogo e terá como única opção o par $[a-b, b]$ com razão $\frac{b}{a-b} > r$.
De fato, se

$$1 < \frac{a}{b} < r$$

$\frac{a}{b}$ não é inteiro e $a - 2b$ é negativo.
Portanto, a única opção será $[a-b, b]$ e

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} &> \frac{1}{r-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} \\
&= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}} \\
&= \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = r
\end{aligned}$$

.

Desta forma, é sempre vantajoso para um jogador escolher aquele par cuja razão é menor do que r e passá-lo ao adversário. Este, na sua vez, não ganhará o jogo e será obrigado a devolver um par com razão maior do que r. Conclusão:
Se um jogador receber um par $[a, b]$ com $\frac{a}{b} > r$ ele terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória. Demonstração:

- se $\frac{a}{b} > r$, ou a é múltiplo de b e o jogador vencerá naquele lance ou ele terá duas opções: escolher o par derivado mínimo ou o anterior ao mínimo. Já vimos que ele deve escolher o par com razão menor do que r, o que impedirá a vitória do adversário no lance seguinte.

Portanto, o jogador que receber um par $[a, b]$ com $\frac{a}{b} > r$ poderá sempre impedir que seu adversário ganhe o jogo no lance seguinte. Como o jogo é finito (já que os sucessivos pares contêm números naturais cada vez menores), necessariamente haverá uma vez em que o jogador receberá um par $[a, b]$, com a múltiplo de b, o que lhe dará a vitória.

4 Problemas complementares

4.1 Problemas de Divisibilidade

1. Discuta a paridade

   a. da soma de dois números naturais.

   b. da diferença de dois números naturais.

   c. do produto de dois números naturais.

2. Quem possui mais chances de ganhar no par ou ímpar normal: quem escolhe par ou quem escolhe ímpar?

3. Seja n um número natural diferente de zero. Mostre que um, e apenas um, número de cada terna abaixo é divisível por 3.

   a. $n, n+1, n+2$

   b. $n, n+10, n+23$

   c. $n, n+2, n+4$

   Para o professor: Comente com os alunos que resolver o item "a"é o mesmo que afirmar que em três números naturais consecutivos um deles é sempre divisível por três. E o item "c"que dentre três números naturais pares ou ímpares consecutivos um deles será sempre divisível por três

4. Prove que $n^5 + 4n$ é divisível por 5 qualquer que seja o natural n.

5. Prove que $n^2 + 1$ não é divisível por 3 qualquer que seja o natural n.

6. Prove que $n^3 - n$ é divisível por 24 qualquer que seja o natural ímpar n. Dica: prove que o número dado é um múltiplo tanto de 3 quanto de 8.

5 Referências Bibliográficas

Referências

[1] BROUSSEAU,Guy. In: *Didática Matemáticas, direção de Jean Brun. Tradução: Maria José Figueiredo.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 35-113.

[2] EMERIQUE, Paulo S..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e - Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 185-198.

[3] ONUCHIC, Lourdes de la R..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

[4] GOMES, Maria Laura Magalhães.: *Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[5] Pitombeira, J. B.: *O jogo de Euclides.* Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1989.

[6] HEFEZ, Abramo.: *Elementos de Aritmética.* 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] BOYER, Carl B..: *História da matemática* 2. ed. Editora Edgard Blucher, LTDA.

[8] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Tradução: Valéria de Magalhães Iório.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] Roque ROQUE, Tatiana.: *História da Matemática.* Editora Zahar, 2012.

[10] STEWART, Ian.: *Almanaque das Curiosidades Matemáticas.* Editora Zahar, 2008.

[11] STEWART, Ian.: *Incríveis Passatempos Matemáticos.* Editora Zahar, 2010.

[12] GARDNER, Martin.: *Divertimentos matemáticos*/ tradução de Bruno Mazza. 3.ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

[13] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[14] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/515/2011_00411. _PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[15] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[16] Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm. Acesso em: 25/10/2014.

[17] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-paintings-br.html. Acesso em: 25/10/2014.

[18] Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[19] Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=373. Acesso em: 25/10/2014.

[20] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/558/2011. _00462_GISELI_DUARDO_MACIANO_CAMPOS.pdf?sequence=1. Acesso em: 25/10/2014.

[21] Disponível em: http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[22] Disponível em: http://legauss.blogspot.com.br/2009/06/o-general-e-o-teorema-chines-dos-restos.html. Acesso em: 25/10/2014.

[23] Disponível em: http://illuminations.nctm.org/lesson.aspx?id=655. Acesso em: 25/10/2014.

[24] Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/mt2012-08-34a.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[25] Disponível em: http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=19900. Acesso em: 25/10/2014.

Anexo

Atividade: Par ou ímpar maluco.

Questão 1: Existe uma estratégia que possibilite vencer sempre? Caso exista, qual seria essa estratégia?

Questão 2: No conjunto dos números inteiros positivos,um número par pode ser representado como $2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ já um número ímpar pode ser representado como $2k-1$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Como o primeiro jogador escolheu a opção par e anotou em sua ficha um número par, temos que o outro jogador só poderá escolher um número par ou um número ímpar. Feitas essas considerações, pede-se:

a. O produto entre dois números pares, ou seja $2n.2k$, com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

b. O produto de um número par por um número ímpar, ou seja $2n.(2k-1)$ com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

c. Com os resultados dos itens a e b o que podemos concluir?

Atividade 2: Mudando um pouco as regras.

Questão 1: Existe alguma estratégia que permita vencer sempre? Caso exista, qual seria essa estratégia?

Atividade Sexta-feira 13

Questão 1: Qual é o número máximo de sextas-feiras treze que podem ocorrer num ano que não é bissexto? Neste caso, em que dia da semana cai o décimo dia do ano?

Resultado 1: Monte uma tabela especificando quantos dias possuem cada mês do ano. Em seguida determine quantos dias do mês de março se passaram até o dia 11 do mesmo mês e quantos dias faltam para terminar esse mês tendo como base o dia 11 de março.

Tabela da quantidade de dias de cada mês	
Mês	Total de dias
Janeiro	
Fevereiro	
Março	
Abril	
Maio	
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	
Novembro	
Dezembro	

Resultado 2: Sabendo que o dia 2 de março é uma quinta-feira, determine quais outros dias do mês de março ocorrem em uma quinta-feira. Em seguida determine uma estratégia que permita determinar esssa situação sem usar o calendário.

Resultado 3: Determine a diferença entre o dia 11 de março e o dia 11 de abril, ou seja, a quantidade de dias que existe entre 11 de março e 11 de abril inclusive.

Questão 2: Com base no resultado três, construa uma tabela que indique a diferença entre os dias 13 de cada mês.

Questão 3: Utilizando o resultado dois determine quais dias 13 ocorrem num mesmo dia da semana.

Questão 4: Construa uma tabela indicando a diferença entre os dias 13, tendo como base o dia 13 de fevereiro. Após, aplique o resultado dois e verifique quais dias 13 caem no mesmo dia da semana que o dia 13 de fevereiro.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12

Questão 5: Se o dia 13 de fevereiro ocorre em uma sexta-feira em que dia da semana ocorre o dia 10 de janeiro?

Atividade: O jogo de Euclides

Questão 1: Nos exemplos 1, 2 e 3 os números iniciais são 31 e 7, 49 e 5, 50 e 8, as jogadas vencedoras são respectivamente, $[1, 0], [0, 1]$ e $[2, 0]$. Qual relação existe entre os números escolhidos e o número não nulo obtido na jogada vencedora? O número não nulo é o máximo divisor comum dos números iniciais.

Questão 2: Curiosamente o primeiro jogador ganhou as três partidas. Suponha que ao invés das jogadas feitas na primeira rodada ele tivesse jogado os pares $[17, 7]$ no primeiro exemplo, $[29, 5]$ no segundo exemplo e $[34, 8]$ no terceiro exemplo. Monte uma estratégia vencedora para o segundo jogador.

Questão 3: Nas partidas em que o primeiro jogador venceu ele entregou para o adversário os seguintes pares: Exemplo 1: $[10, 7], [3, 4]$.
Exemplo 2: $[4, 5]$.
Exemplo 3: $[10, 8]$.
Por outro lado as jogadas do segundo jogador (perdedor) foram:
Exemplo 1: $[3, 7], [3, 1]$.
Exemplo 2: $[4, 1]$.
Exemplo 3: $[2, 8]$.

a. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do primeiro jogador(vencedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna:

Ex.1	[10,7]	
Ex.1	[3,4]	
Ex.2	[4,5]	
Ex.3	[10,8]	

b. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do segundo jogado(perdedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna.

Ex.1	[3,7]	
Ex.1	[3,1]	
Ex.2	[4,1]	
Ex.3	[2,8]	

c. Na questão 2 você criou uma estratégia para que o segundo jogador vencesse a partir de uma jogada diferente da proposta nos exemplos pelo primeiro jogador. Monte duas tabelas, uma indicando na primeira coluna as jogadas propostas por você para o segundo jogador (vencedor) e a outra com as jogadas do primeiro jogador (perdedor). Assim como no exercício b. insira na terceira coluna o resultado aproximado da divisão do maior número do par jogado pelo menor.

Segundo jogador (vencedor):

Ex.1	[10,7]	
Ex.1	[3,4]	
Ex.2	[4,5]	
Ex.3	[10,8]	

Primeiro jogador (perdedor):

Ex.1	[17,7]	
Ex.1	[3,7]	
Ex.1	[3,1]	
Ex.2	[29,5]	
Ex.2	[4,1]	
Ex.3	[34,8]	
Ex.3	[2, 8]	

d. Qual foi o maior resultado encontrado na divisão dos número dos pares das jogadas do vencedor?

e. Qual foi o menor resultado encontrado na divisão dos número dos pares das jogadas do perdedor?