UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Desigualdades Aritméticas e Geométricas: Teoremas e Problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

LUIZ GOMES DA CUNHA NETO
Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristovão, 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cunha Neto, Luiz Gomes da.
C972d Desigualdades aritméticas e geométricas: teoremas e problemas / Luiz Gomes da Cunha Neto; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2014.
65 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2014.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Aritmética. 3. Geometria. 4. Ensino médio. 5. Ensino superior. 6. . I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título

CDU 514

PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Desigualdades Aritméticas e Geométricas: Teoremas e problemas

por

Luiz Gomes da Cunha Neto

Aprovada pela Banca Examinadora:

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador

Evilson S Vieira

Prof. Evilson da Silva Vieira - UFS
Primeiro Examinador

José Hélio Barbosa Júnior

Prof. José Hélio Barbosa Júnior - IFSE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Outubro de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão, Tel. (00 55 79) 2105-6887 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

AGRADECIMENTOS

À Deus, em primeiro lugar, por estar sempre presente em minha vida e ter me abençoado com saúde e disposição para chegar até aqui.

A minha esposa Priscilla, sei que a caminhada não foi fácil, mas sempre pude contar com o seu apoio, incentivo e compreensão em todos os momentos.

A todos os meus familiares, irmãos, tios, primos e amigos. Agradeço também a minha mãe Norah Maria Dias Gomes da Cunha, a minha amada avó Eunice Dias Gomes da Cunha, ao meu pai Jaime Cabral Neto e meu avô Luiz Gomes da Cunha, mesmo vocês não estando aqui, em muitos momentos senti vocês ao meu lado.

Agradeço ao meu orientador, Prof.º Dr.º Almir Rogério Silva Santos, profissional que me direcionou durante todo o curso, sempre colocando seus posicionamentos com sabedoria.

Agradeço ao Prof.º Sérgio Dantas, Diretor do Colégio Módulo, por ceder gentilmente os espaços do seu estabelecimento para o nosso grupo de estudos. Agradeço também ao Prof.º Paulo Mesquita e ao amigo Luís Anselmo Vasconcelos por todo o apoio dado durante esta caminhada.

Aos colegas da turma 2012, pelo companheirismo durante o curso, em destaque para o grupo de estudo formado por Flávio Teijeira, Francisco Silva de Azevedo (Chicão) e Marcone Borges, cujos interesses nesse projeto foram inestimáveis. Em especial ao amigo, Chicão, tive a honra de ter sido seu aluno e hoje concluímos juntos o mestrado.

Aos professores da Universidade Federal de Sergipe, em especial, ao Departamento de Matemática, que forneceram as condições necessárias para nossa aprendizagem.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar esta dissertação.

DEDICÁTORIA

A minha amada esposa Priscilla Ferreira Santos da Cunha

Obstáculos são aquelas coisas medonhas que você vê quando tira os olhos de seu objetivo.

Henry Ford

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas Desigualdades Aritméticas e Geométricas que podem ser utilizadas no ensino médio ou ensino universitário. O presente trabalho visa contribuir com uma pequena parcela das Desigualdades Matemáticas, contemplando a importância deste tema na resolução de um grande número de problemas. Entendemos que as Desigualdade Aritméticas e Geométricas são temas de grande relevância e importância dentro do ensino de matemática. A melhor maneira de aprender sobre matemática é fazer matemática, então a melhor maneira de aprender sobre as desigualdades matemáticas é faze-las. Neste trabalho apresentamos algumas desigualdades, que entendemos serem fundamentais para o estudo do tema, e as utilizamos na resolução diversos problemas.

Palavras-chaves: Desigualdades Aritméticas, Desigualdades Geométricas , Ensino de Matemática e Problemas.

Abstract

This work presents some Arithmetic and Geometric Inequalities which can be used in high school and college education. The present work aims to help with a small part of the Mathematical Inequalities, contemplating the importance of this topic to solve a large number of problems. We understand that the Arithmetic and Geometric Inequalities are topics of great relevance and importance in the teaching of mathematics. The best way to learn about mathematics is to do mathematics, so the best way to learn about the mathematical inequalities is to do them. We present some inequalities in this work that we understand to be fundamental to the studies of this topic and we have used them to solve a large number of problems.

Keywords: Arithmetical Inequalities, Geometrical Inequalities, Mathematics Teaching and Problems.

Lista de Figuras

Introdução

A matemática sempre esteve presente no dia a dia do homem, desde os tempos mais remotos, quando vivia como nômades, vivendo apenas da caça e da pesca já utilizava a Matemática. Os conhecimentos matemáticos estão em constante crescimento, uma vez que a Matemática vem sendo desenvolvida pelo homem em função das suas necessidades.

Há muitos séculos um dos problemas mais desafiadores de toda a matemática foi obter os valores mínimos e máximos para áreas (de regiões planas) e volumes (de sólidos). Alguns problemas simples, como por exemplo, encontrar o retângulo de perímetro constante que limita a maior área, podem ser resolvidos com matemática elementar. Esse tipo de problema nos leva a vários outros problemas cujas soluções baseiam-se no estudo de desigualdades algébricas e geométricas, como por exemplo, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Durante o ensino regular, certamente o aluno terá poucas oportunidades de ter contato com problemas envolvendo desigualdades e otimização. Se pensamos em desigualdades no ensino regular, podemos incluir desigualdades algébricas elementares, que ajudam na resolução de diversos problemas, como por exemplo as desigualdades das médias. Já as desigualdades geométricas, além da desigualdade triangular que é de fundamental importância quando se fala de triângulos, podemos citar também a desigualdade de Erdos-Mordell, que podem ser facilmente compreendidas e ajudam no pensar matemático.

As Olimpíadas de Matemática têm como objetivo principal a busca por novos talentos e é uma competição intelectual, utilizando para isto problemas desafiadores que exigem do aluno a sua capacidade criativa na resolução dos mesmos. Para que os alunos consigam resolver boa parte das questões propostas nas olimpíadas é de suma importância o conhecimento de algumas desigualdades algébricas e geométricas. Em geral, se não houver uma preparação específica, uma boa parte do alunado não se sente atraído em participar desse tipo de competição.

O ponto principal do trabalho é apresentar ao leitor algumas desigualdades algébricas e geométricas, umas mais conhecidas do que outras, a fim de que sirva como ponto de partida ao estudo do tema. O trabalho foi organizado em três capítulos. O primeiro capítulo é dedicado a apresentar definições básicas e as desigualdades algébricas. Para algumas dessas desigualdades, além da prova, apresentamos alguns exemplos simples que podem ser facilmente entendidos por alunos do ensino básico. No segundo capítulo destacamos as desigualdades geométricas. E no terceiro capítulo abordaremos a Desigualdade Isoperimétrica, a qual afirma que o círculo é a curva plana que limita a maior área entre todas as curvas de mesmo perímetro. Inicialmente abordaremos os aspectos históricos com a Lenda de Dido, para então demonstrá-la no caso em que a curva é diferenciável. A escolha de tal demonstração deve-se ao fato de já existir um Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT que trata da demonstração da Desigualdade Isoperimétrica no caso geral, ver [23].

Capítulo 1

Desigualdades Aritméticas

Para iniciarmos o trabalho abordaremos algumas desigualdades matemáticas envolvendo números reais. No conjunto dos números reais as desigualdades estabelecem uma relação de ordem entre dois ou mais elementos. Esta relação é representada pelos símbolos $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, cada um dos quais possui o seu significado. De maneira geral pode-se utilizar o símbolo $\neq$, que representa a diferença, sem a importância com a ordem.

1.1 Definições e Propriedades Básicas

Vamos começar com uma propriedade básica dos números reais. Por serem afirmações bem conhecidas iremos utilizá-la ao longo do texto sem comentários.

Propriedade 1.1.1. *Dados os números reais a e b, valem as seguintes propriedades:*

1. *Exatamente uma das afirmações é verdadeira:*

   a) a é positivo;

   b) a é negativo;

   c) a é zero.

2. *Se a e b são positivos, então $a + b$ e $a \cdot b$ são positivos.*

Definição 1.1.1. *Dados dois números reais a e b, dizemos que, $a > b$ (ou de forma equivalente $b < a$) se, e somente se existe um número real positivo h tal que $a = b + h$. Dizemos que $a \geqslant b$ (ou de forma equivalente $b \leqslant a$) se, e somente se, existe um numero real não negativo h tal que $a = b + h$.*

1. $a > b$, lê-se: a é maior do que b;

2. $a < b$, lê-se: a é menor do que b;

3. $a \geqslant b$, lê-se: a é maior do que ou igual a b;

4. $a \leqslant b$, lê-se: a é menor do que ou igual a b.

As quatro declarações simbólicas acima são chamadas de desigualdade. Geometricamente vemos que $a > b$ significa que a está à direita de b na reta real.

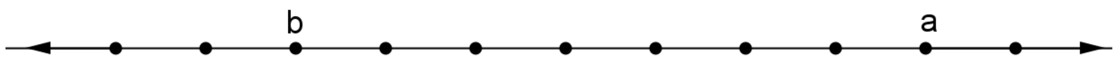

Figura 1.1: Reta Numérica

Resulta da Propriedade 1.1.1 e da Definição 1.1.1 que dado qualquer par de números reais a e b, exatamente uma das seguintes declarações é verdadeira: $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

A seguir iremos apresentar algumas propriedades básicas, porém importantes, que são a base para provar várias desigualdades.

Propriedade 1.1.2. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x \geqslant y$ e $y \geqslant z$ então $x \geqslant z$.*

Demonstração. Se $x \geqslant y$ e $y \geqslant z$, então existem números reais não negativos h_1 e h_2 tais que

$$x = y + h_1 \tag{1.1}$$

e

$$y = z + h_2. \tag{1.2}$$

Adicionando as igualdades (1.1) e (1.2), obtemos

$$x + y = (y + h_1) + (z + h_2),$$

isto é $x = z + (h_1 + h_2)$. Daí, obtemos que

$$x \geqslant z.$$

□

Propriedade 1.1.3. *Sejam $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Se $x \geqslant y$ e $a \geqslant b$ então $x + a \geqslant y + b$.*

Propriedade 1.1.4. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x \geqslant y$ então $x + z \geqslant y + z$.*

Propriedade 1.1.5. *Se $x \geqslant y$ e $a \geqslant b$ então $xa \geqslant yb$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ e $a, b \in \mathbb{R}_+$.*

Propriedade 1.1.6. *Se $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geqslant 0$. Vale a igualdade se, e somente se $x = 0$.*

Propriedade 1.1.7. *De modo geral, para $A_i \in \mathbb{R}_+$ e $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ tem-se $A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + ... + A_nx_n^2 \geqslant 0$ com igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.*

Dentre as propriedades acima demonstramos apenas uma e as demais demonstrações são deixadas para o leitor por serem simples consequências da definição. As propriedades acima são uma excelente ferramenta para provar desigualdades, pode-se, particularmente falar da importância da Propriedade 1.1.6, que pode ser utilizada em muitos casos. Vamos ilustrar este fato apresentando alguns exemplos.

Exemplo 1.1.2. *Prove que, dados números reais positivos a e b, então a desigualdade $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ é válida. Além disso, vale a igualdade se e somente se $a = b$.*

Solução:
Como $(a-b)^2 \geqslant 0$, temos que

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2 \cdot a \cdot b,$$

e como $ab > 0$, se dividirmos por $a \cdot b$, obtemos a desigualdade desejada. E a igualdade ocorre se e somente se $a - b = 0$, i.e. $a = b$.

Exemplo 1.1.3. ***(Desigualdade de Nesbitt)*** *Sejam a, b, c números reais positivos. Prove a desigualdade*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Além disso, vale a igualdade se e somente se $a = b = c$.

Solução: De acordo com o Exemplo 1.1.2, temos que

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geqslant 2+2+2 = 6. \tag{1.3}$$

Vamos reescrever a desigualdade (1.3) da seguinte forma

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+b}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+a}\right) + \left(\frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c}\right) \geqslant 6 \tag{1.4}$$

i.e.

$$\left(\frac{2a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{2c}{a+b} + 1\right) + \left(\frac{2b}{a+c} + 1\right) \geqslant 6. \tag{1.5}$$

Então temos

$$\left(\frac{a}{b+c}\right) + \left(\frac{c}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{a+c}\right) \geqslant \frac{3}{2}$$

que é a desigualdade desejada.

Se esta última desigualdade é igualdade, então (1.3) é igualdade, o que implica do Exemplo 1.1.2 que $a + b = b + c = a + c$, ou seja, $a = b = c$.

Daremos outra prova desta desigualdade no Exemplo 1.5.4.

1.2 Desigualdade Triangular para Números Reais

A desigualdade triangular, que é talvez uma das mais importantes desigualdades da matemática, tem origem na geometria euclidiana e refere-se ao resultado que afirma que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados. No texto clássico Os Elementos, de Euclides, este resultado é a Proposição 20 do Livro I.

No conjunto dos números reais, chamamos de desigualdade triangular, em analogia ao caso da geometria plana, a seguinte propriedade para números reais.

Proposição 1.2.1. *Sejam a e b dois números reais quaisquer, então*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| .$$

Demonstração. Se $a+b > 0$, então $|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$. Caso contrário, se $a+b<0$, então $|a+b| = -a-b \leqslant |a|+|b|$. □

Corolário 1.2.2. *As seguintes desigualdades valem para quaisquer números reais a e b*

$$|a-b| \leq |a| + |b| \tag{1.6}$$

$$|a-b| \geq ||a| - |b|| . \tag{1.7}$$

Demonstração. Note que

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

o que implica a desigualdade (1.6).

Para (1.7), temos

$$|a| = |b+(a-b)| \leqslant |b| + |a-b|$$

o que implica que

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|.$$

Trocando a por b na última desigualdade obtemos

$$|b| - |a| \leqslant |a-b|.$$

Daí, obtemos (1.7). □

1.3 Desigualdade das Médias

Primeiramente vamos definir cada uma das médias. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Definimos as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática como

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$
$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$
$$M_q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$
respectivamente.

A desigualdade das médias podem ser encontradas em vários livros textos, como por exemplo em [19]. Aqui vamos dar uma outra demonstração que pode ser encontrada em [22]. Inicialmente iremos demonstrar a desigualdade para apenas dois e três números reais e na Seção 1.7 demonstraremos para o caso geral.

1.3.1 Desigualdade das Médias para dois números reais

Teorema 1.3.1. *Sejam a e $b \in \mathbb{R}_+$. Então*

$$M_q \geqslant M_a \geqslant M_g \geqslant M_h.$$

As igualdades ocorrem se e somente se $a = b$

Demonstração. Provaremos primeiro que $M_q \geqslant M_a$. Para a e $b \in \mathbb{R}_+$ temos que

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2 \cdot a \cdot b$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2\right) \geqslant a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2\right) \geqslant (a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Assim $M_q \geqslant M_a$, com a igualdade se, e somente se,$a - b = 0$, i.e. $a = b$.

Além disso, para a e $b \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a \cdot b} \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}.$$

Assim $M_a \geqslant M_g$, com a igualdade se, e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, i.e. $a = b$.

E para finalizar vamos mostrar que $M_g \geqslant M_h$.

Temos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 &\geqslant 0\\
\Leftrightarrow a+b &\geqslant 2\sqrt{a\cdot b}\\
\Leftrightarrow 1 &\geqslant \frac{2\sqrt{a\cdot b}}{a+b}\\
\Leftrightarrow \sqrt{a\cdot b} &\geqslant \frac{2ab}{a+b}\\
\Leftrightarrow \sqrt{ab} &\geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.
\end{aligned}$$

Assim $M_g \geqslant M_q$, com a igualdade se, e somente se, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, i.e. $a=b$.
Com isso está provado que

$$M_q \geqslant M_a \geqslant M_q \geqslant M_h.$$

□

Exemplo 1.3.2. *Se a, b e c são os lados de um triângulo prove que:*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3\cdot a\cdot b\cdot c \tag{1.8}$$

Solução

Seja $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ e $z=a+b-c$. Como são lados de um triângulo, então x, y e z são números positivos pela desigualdade triangular para triângulos. Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{x\cdot y}, \tag{1.9}$$

$$\frac{x+z}{2}\geqslant\sqrt{x\cdot z}, \tag{1.10}$$

$$\frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{y\cdot z}. \tag{1.11}$$

Multiplicando as três desigualdades (1.9), (1.10) e (1.11) obtemos

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{x+z}{2}\geqslant x\cdot y\cdot z.$$

Substituindo por $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ e $z=a+b-c$, obtemos que

$$a\cdot b\cdot c\geqslant (b+c-a)\cdot(c+a-b)\cdot(a+b-c)\,.$$

Desenvolvendo o segundo membro da desigualdade obtemos

$$a\cdot b\cdot c\geqslant -a^3-a^2b+a^2c-ab^2-b^3+b^2c+ac^2+bc^2-c^3+2a^2b+2ab^2-2abc,$$

simplificando obtemos

$$a \cdot b \cdot c \geqslant -a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 - b^3 + b^2c + ac^2 + bc^2 - c^3 - 2abc,$$

donde fatorando obtemos

$$a \cdot b \cdot c \geqslant a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) - 2 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

E está provado que

$$3 \cdot a \cdot b \cdot c \geqslant a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c).$$

Como a igualdade é valida em (1.9), (1.10) e (1.11) quando $x = y$, $x = z$ e $y = z$, então temos que a igualdade é válida apenas se $a = b = c$.

1.3.2 Desigualdade das Médias para três números reais

Antes de demonstramos a desigualdade das médias para três números positivos, iremos demonstrar um teorema auxiliar.

Teorema 1.3.3. *Sejam $x_1, ..., x_n$ números positivos. Se $x_1....x_n = 1$, então*

$$x_1 + ... + x_n \geqslant n.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, todos os números são iguais a 1.

Demonstração. Demonstraremos utilizando o método de indução matemática.

Primeiramente vamos mostrar que é válido para $n = 2$, ou seja, demonstraremos que se

$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

então

$$x_1 + x_2 \geqslant 2.$$

Para isso vamos analisar dois casos em separado.

1. Se $x_1 = x_2 = 1$ então não temos nada a demonstrar, visto que $x_1 + x_2 = 2$.

2. Se nenhum dos números é igual a 1, então podemos supor que $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$, visto que o produto é igual a 1. Da igualdade

   $$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 - 1$$

   deduzimos que

   $$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1). \tag{1.12}$$

   E tendo em conta que $x_1 \cdot x_2 = 1$, obtemos

   $$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

   E finalmente como $x_1 < 1 < x_2$, então $(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$, o que implica que $x_1 + x_2 > 2$.

Supomos agora que o teorema é válido para para qualquer conjunto de k números positivos, isto é, suponhamos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geqslant k$$

é verdade sempre que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k = 1.$$

Vamos mostrar que a desigualdade será válida para $k+1$ números positivos, ou seja, demonstraremos que a desigualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$$

é válida sempre que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$, onde $x_i \in \mathbb{R}_+$. Note que do fato que o produto é igual a 1 temos que analisar dois casos:

1. Quando todos os fatores são iguais a 1. Daí, a soma dos mesmo é igual a $k+1$, e não temos nada a demonstrar.

2. Quando existe pelo menos um fator diferente de 1. Neste caso, entre os fatores do produto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1}$, temos números maiores e números menores que um, visto que se todos os fatores fossem menores ou maiores que um, então o produto também seria menor que um ou maior que um, respectivamente. Podemos supor, por exemplo, $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$. Temos

   $$(x_1 \cdot x_{k+1}) \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k = 1$$

   e fazendo $y_1 = x_1 \cdot x_{k+1}$ obtemos

   $$y_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k = 1. \tag{1.13}$$

   Visto que (1.13) é o produto de k números positivos, resulta da hipótese de indução que a soma dos mesmos não é menor que k, ou seja,

   $$y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geqslant k.$$

   Daí,

   $$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1,$$

   $$(y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1.$$

   Note que

   $$k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + x_{k+1} - x_1.x_{k+1} + x_1 - 1 = (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1).$$

   E visto que $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$, temos $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ e por consequência

   $$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geqslant (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1.$$

Note que se algum dos números é diferente de 1, então a desigualdade será estrita. Logo, a desigualdade só pode ser igualdade se e somente se todos os números são iguais a 1.

□

Visto que já foi demonstrado um teorema auxiliar, iremos demonstrar agora a desigualdade das médias para três números positivos.

Teorema 1.3.4. *Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}_+$. Então*

$$M_q \geqslant M_a \geqslant M_g \geqslant M_h.$$

As igualdades ocorrem se e somente se $a = b = c$.

Demonstração. Provaremos primeiro que $M_q \geqslant M_a$. Para a, b e $c \in \mathbb{R}_+$ temos que

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab, \tag{1.14}$$

$$(a-c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + c^2 \geqslant 2ac, \tag{1.15}$$

$$(b-c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geqslant 2bc. \tag{1.16}$$

Adicionando as desigualdades (1.14), (1.15) e (1.16) obtemos

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geqslant 2ab + 2ac + 2bc, \tag{1.17}$$

e adicionando aos dois membros $(a^2 + b^2 + c^2)$, temos

$$3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geqslant (a + b + c)^2.$$

Dividindo ambos os membros por 9 e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, obtém-se

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

Segue de (1.14), (1.15) e (1.16) que igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Provaremos agora que $M_a \geqslant M_g$.

Seja $M_g^3 = a \cdot b \cdot c$, dividindo por M_g^3 obtém-se

$$\frac{a}{M_g} \cdot \frac{b}{M_g} \cdot \frac{c}{M_g} = 1.$$

Pelo Teorema 1.3.3 temos que

$$\frac{a}{M_g} + \frac{b}{M_g} + \frac{c}{M_g} \geqslant 3.$$

Daí
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant M_g = \sqrt[3]{abc}.$$

Segue do Teorema 1.3.3 que a igualdade ocorre se e somente se $a = b = c$.

Provaremos agora que $M_g \geqslant M_h$.

Para isso basta fazermos em $\frac{a_1+b_1+c_1}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1b_1c_1}$, $a_1 = \frac{1}{a}, b_1 = \frac{1}{b}$ e $c_1 = \frac{1}{c}$ assim obtemos
$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$
donde
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$
o que é equivalente a
$$\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

□

Daremos agora dois exemplos de como utilizar as desigualdades entre as médias para provar outras desigualdades.

Exemplo 1.3.5. *Sejam x, y e $z \in \mathbb{R}_+$ tais que $x + y + z = 1$. Prove que*
$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geqslant 2.$$

Solução Temos pela desigualdade das médias que
$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geqslant 2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{xz}{y} = 2\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}\right)\right)$$
$$\geqslant 2\left(\sqrt{y^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{z^2}\right) = 2\,(x+y+z) = 2.$$
A igualdade ocorre se, e somente se $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Exemplo 1.3.6. *Dados a, b e c números reais positivos, e sabendo que $a^2+b^2+c^2 = 3$. Prove que*
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solução Utilizando a desigualdade das médias aritmética e harmônica, para $x_1 = 1 + ab$, $x_2 = 1 + bc$ e $x_3 = 1 + ac$, tem-se que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}$$

o que implica que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{9}{3+ab+bc+ac}.$$

E por (1.17) obtemos

$$\frac{9}{3+ab+bc+ac} \geqslant \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}.$$

Daí

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

1.4 Desigualdade de Bernoulli

Teorema 1.4.1. *Sejam x_i, $i = 1, 2, ..., n$, números reais com o mesmo sinal, e maiores que -1, então temos*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) ... (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n. \tag{1.18}$$

Demonstração. Provaremos esta desigualdade por indução. Para $n = 1$ temos que $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$. Suponha que para algum $n = k$, e números reais arbitrários com $x_i > -1, i = 1, 2, ..., k$, com os mesmos sinais, a inequação (1.18) é verdadeira, i.e.

$$(1 + x_1)(1 + x_2) ... (1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + ... + x_k \tag{1.19}$$

Para $n = k + 1$, e números reais arbitrários com $x_i > -1, i = 1, 2, ..., k + 1$, com os mesmos sinais, temos

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k) \cdot x_{k+1} \geqslant 0. \tag{1.20}$$

Daí, como $x_{k+1} > -1$, obtemos

$$\begin{aligned}&(1 + x_1)(1 + x_2) ... (1 + x_k)(1 + x_{k+1})\\ \overset{(1.18)}{\geqslant}\ &(1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)(1 + x_{k+1}) = 1 + x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}\\ &+ (x_1 + x_2 + ... + x_k) \cdot x_{k+1} \overset{(1.20)}{\geqslant} 1 + x_1 + x_2 + ... + x_{k+1},\end{aligned}$$

i.e. a desigualdade (1.18) vale para $n = k + 1$, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 1.4.2. ***(Desigualdade de Bernoulli)*** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $x > -1$ temos que*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.4.1, para $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$, obtemos o resultado desejado. □

Corolário 1.4.3. *Sejam $x > -1$, e $r \in \mathbb{Q}$. Temos*

1) Para o caso onde $0 < r < 1$ é válida a desigualdade

$$(1+x)^r \leqslant 1 + xr.$$

2) Para o caso onde $r > 1$ é válida a desigualdade

$$(1+x)^r \geqslant 1 + xr.$$

Demonstração. Demonstraremos separadamente para cada um dos casos acima.

1) Inicialmente note que se $r = 1$, então não temos nada a demonstrar. Então podemos supor que $0 < r < 1$. Seja $r = \frac{p}{q}$ com $mdc\,(p,q) = 1$. E obviamente $p < q$, já que $0 < r < 1$.

   Sejam $a_1 = a_2 = ... = a_p = 1 + x$ e $a_{p+1} = a_{p+2} = ... = a_q = 1$.

   Note que $(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p}$.

   Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que

$$\sqrt[q]{(1+x)^p} = \sqrt[q]{(1+x)...(1+x).1...1} = \sqrt[q]{a_1 a_2 ... a_p a_{p+1} ... a_q}$$

$$\leq \frac{a_1 + ... + a_p + a_{p+1} + ... + a_q}{q} = \frac{(1+x) + ... + (1+x) + 1 + ... + 1}{q} = \frac{q + px}{q}$$

$$= 1 + \frac{p}{q}x = 1 + rx.$$

   Donde obtemos que

$$(1+x)^r \leqslant 1 + xr.$$

2) Inicialmente note que se $r = 1$, então não temos nada a demonstrar. Então podemos supor que $r > 1$. Seja $r = \frac{p}{q}$ com $mdc\,(p,q) = 1$. E obviamente $p > q$, já que $r > 1$.

   Sejam $a_1 = a_2 = ... = a_q = 1 + rx$ e $a_{q+1} = a_{q+2} = ... = a_p = 1$.

   É claro que se $1 + rx \leqslant 0$, então a desigualdade é trivialmente satisfeita já que $(1+x)^r > 0$. Então vamos supor $1 + rx > 0$ e como $M_a \geqslant M_g$, temos

$$1 + x = \frac{px + p}{p} = \frac{q + rqx + p - q}{p} = \frac{q\,(1 + rx) + p - q}{p}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + ... + a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + ... + a_p}{p} \geqslant \sqrt[p]{a_1 a_2 ... a_q a_{q+1} ... a_p}$$

$$= \sqrt[p]{(1+xr)^q} = (1+rx)^{\frac{q}{p}},$$

donde obtemos facilmente $(1+x)^r \geqslant 1 + rx$.

□

Note que na demonstração do último corolário fizemos uso da desigualdade das médias no caso geral, a qual somente demonstraremos na Seção 1.6.

Corolário 1.4.4. *Sejam $x > -1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1) Se $0 < \alpha < 1$, então

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + x\alpha.$$

2) Se $\alpha > 1$, então

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + x\alpha.$$

Demonstração. Seja $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ uma sucessão de números racionais que tem α como limite, com a particularidade de que $0 < r_n < 1$. Do Corolário 1.4.3 temos que

$$(1+x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x$$

com $x \geqslant -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Como já demonstramos para o caso em que o expoente é racional, deduzimos que

$$(1+x)^\alpha = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \leqslant \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

Seja $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ uma sucessão de números racionais que tem α como limite, com a particularidade de que $r_n > 1$. Do Corolário 1.4.3 temos que

$$(1+x)^{r_n} \geqslant 1 + r_n x$$

com $x \geqslant -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Como já demonstramos para o caso em que o expoente é racional, deduzimos que

$$(1+x)^\alpha = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \geqslant \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

□

Daremos a seguir outra demonstração da Desigualdade de Bernoulli para o caso geral quando o expoente é um número real positivo qualquer. Porém, admitimos que o leitor conhece o conceito de derivadas e suas propriedades.

Teorema 1.4.5. *Sejam $x > -1$, e $r \in \mathbb{R}_+$. Temos*

1) Para o caso onde $0 < r < 1$ *é válida a desigualdade*

$$(1+x)^r \leqslant 1 + xr.$$

2) Para o caso onde $r > 1$ *é válida a desigualdade*

$$(1+x)^r \geqslant 1 + xr.$$

Demonstração. Considere a função f para $x > -1$ dada por

$$f(x) = r\ln(1+x) - \ln(1+rx)$$

cuja derivada é

$$f'(x) = \frac{r}{1+x} - \frac{r}{1+rx} = \frac{r\left[1+rx-(1+x)\right]}{(1+x)(1+rx)} = \frac{r(r-1)x}{(1+x)(1+rx)}. \tag{1.21}$$

Vamos provar os dois casos acima.

1) Seja $0 < r < 1$. Neste caso, note que $-1 < r - 1 < 0$ e $x > -1$. Analisando a expressão (1.21), temos

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para} \quad -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ f'(x) < 0 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

Pelo teste da derivada primeira f assume o valor máximo quando $x = 0$. Assim $f(x) \leqslant f(0) = 0$ então $r\ln(1+x) - \ln(1+rx) \leqslant 0$, o que implica que

$$\ln(1+x)^r \leqslant \ln(1+rx).$$

Como a função logarítmica é crescente temos que

$$(1+x)^r \leqslant 1 + rx.$$

2) Para o caso $r > 1$ analisamos novamente a expressão (1.21) obtemos

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para} \quad -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

Pelo teste da derivada primeira f assume o valor mínimo quando $x = 0$. Assim $f(x) \geqslant f(0) = 0$ então $r\ln(1+x) - \ln(1+rx) \geqslant 0$, ou seja $\ln(1+x)^r \geqslant \ln(1+rx)$, donde obtemos

$$(1+x)^r \geqslant 1 + rx.$$

$\square$

Exemplo 1.4.6. *Demonstrar que para* $-1 < \alpha < 0$ *temos*

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leqslant n^{\alpha} \leqslant \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \tag{1.22}$$

Solução Visto que $0 < \alpha + 1 < 1$, temos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \leqslant 1 + \frac{\alpha+1}{n}$$

e

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \leqslant 1 - \frac{\alpha+1}{n}.$$

Multiplicando as desigualdades acima por $n^{\alpha+1}$, obtemos

$$(n+1)^{\alpha+1} \leqslant n^{\alpha+1} + (\alpha+1)\, n^{\alpha}$$

e

$$(n-1)^{\alpha+1} \leqslant n^{\alpha+1} - (\alpha+1)\, n^{\alpha}.$$

Donde é fácil deduzirmos a desigualdade (1.22).

Exemplo 1.4.7. *Sejam* x, y *números reais positivos. Prove a desigualdade*

$$x^y + y^x \geqslant 1.$$

Solução Vamos mostrar que, para números reais $a, b \in (0,1)$, temos

$$a^b \geqslant \frac{a}{a+b-ab}.$$

Pela desigualdade de Bernoulli temos $(1+x)^r \leqslant 1 + rx$ quando $r < 1$ e como $a, b \in (0,1)$ temos que $a^{1-b} = (1 + a - 1)^{1-b}$. Fazendo $x = a - 1$ obtemos

$$a^{1-b} = (1 + a - 1)^{1-b} \leqslant 1 + (a-1)(1-b) = a + b - ab,$$

i.e.

$$a^b \geqslant \frac{a}{a+b-ab}.$$

Se $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$, então a desigualdade dada é trivialmente verdadeira. Então vamos supor que $x, y \in (0,1)$. Pela desigualdade anterior temos

$$x^y + y^x \geqslant \frac{x}{x+y-xy} + \frac{y}{x+y-xy} = \frac{x+y}{x+y-xy} > \frac{x+y}{x+y} = 1.$$

1.5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Definição 1.5.1. *Dizemos que uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea com coeficiente de homogeneidade k, se para um t arbitrário, com $t \in \mathbb{R}$, temos*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Exemplo 1.5.2. *A função $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x+y}$ é homogênea com coeficiente de homogeneidade 1, visto que*

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx + ty} = t\frac{x^2 + y^2}{2x + y}.$$

Dizemos que a desigualdade $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant g(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea se a função $h(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea.

Teorema 1.5.3. *(Teorema de Cauchy-Schwarz) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Temos que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

i.e.

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2.$$

A igualdade ocorre se e somente se existe algum número real λ tal que $a_i = \lambda b_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

Demonstração. A desigualdade é equivalente a

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \geqslant |a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n|. \tag{1.23}$$

Façamos $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ e $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$. Se $A = 0$, temos $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, daí a desigualdade (1.23) segue de imediato.
Então vamos assumir que A e B são positivos.

Note que (1.23) é homogênea com coeficiente de homogeneidade 1. Desta forma se multiplicamos (1.23) por $A^{-1}B^{-1}$ e fazemos $x_i = A^{-1}a_i$ e $y_i = B^{-1}b_i$, obtemos que (1.23) é equivalente a

$$|x_1y_1 + ... + x_ny_n| \leqslant 1,$$

sempre que

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = y_1^2 + ... + y_n^2 = 1.$$

Utilizando a desigualdade triangular e a desigualdade entre as médias quadrática e geométrica para dois números reais temos

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n| \leqslant |x_1y_1| + |x_2y_2| + ... + |x_ny_n| \leqslant$$

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\frac{x_2^2+y_2^2}{2}+...+\frac{x_n^2+y_n^2}{2}$$
$$=\frac{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)+(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)}{2}=1.$$

Note que vale a igualdade se, e somente se, $x_i = y_i$ para todo i, ou seja, $a_iA^{-1} = b_iB^{-1}$ para todo i.

□

Uma das demonstrações mais conhecidas para a Desigualdade de Cauchy-Schwarz consiste em considerar o polinômio do segundo grau em t, $f(t) = (a_n - b_nt)^2$ que é sempre não negativo. Assim, seu discriminante é não positivo.

Exemplo 1.5.4. *Sejam a, b e $c > 0$. Prove a* ***Desigualdade de Nesbitt***

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Solução Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $a_1 = \sqrt{b+c}$, $a_2 = \sqrt{c+a}$, $a_3 = \sqrt{a+b}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{b+c}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{c+a}}$ e $b_3 = \frac{1}{\sqrt{a+b}}$, obtemos

$$((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant(1+1+1)^2=9.$$

i.e.

$$2\,(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9$$
$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

A igualdade ocorre se existe λ tal que $a_i = \lambda b_i$, para todo $i = 1, 2, 3$, ou seja, $b + c = c + a = a + b = \lambda$. Logo, $a = b = c$.

1.6 Desigualdade das Médias para n Números

Na Seção 1.24 discutimos as desigualdades das médias de duas e três variáveis. E nesta iremos mostrar o caso geral para n números.

Teorema 1.6.1. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Então*

$$M_q \geqslant M_a \geqslant M_g \geqslant M_h.$$

Vale a igualdade se, e somente se, $a_1 = ... = a_n$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $M_a \geqslant M_g$, i.e.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}. \tag{1.24}$$

Façamos

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} \text{ para } i = 1, 2, 3, .., n. \tag{1.25}$$

Note que cada $x_i > 0$ e vale a igualdade $x_1 ... x_n = 1$. Então a desigualdade (1.24) é equivalente a

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} \geqslant n,$$

i.e.

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n, \text{ com } x_1 x_2 ... x_n = 1 \tag{1.26}$$

com igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$, que segue do Teorema 1.3.3.
Vamos mostrar agora que a $M_g \geqslant M_h$, ou seja,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Pela desigualdade $M_a \geqslant M_g$ seque que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geqslant n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} ... \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}},$$

i.e. temos

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}},$$

e claramente ocorre a igualdade se, e somente se $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n}$, ou seja $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Vamos mostrar agora que $M_q \geqslant M_a$, ou seja,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Vamos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as seqüências $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(1, 1, ..., 1)$. Portanto, temos

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(1^2 + 1^2 + ... + 1^2\right) \geqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$$

$$\Leftrightarrow n\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right) \geqslant (a_1 +_2 + ... + a_n)^2,$$

e dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por n^2 obtemos

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 +_2 + ... + a_n}{n}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Com a igualdade ocorrendo, se e somente se $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

$\square$

Exemplo 1.6.2. *Seja a, b, c e $d \in \mathbb{R}_+$ com $abcd = 1$. Prove a desigualdade*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10.$$

Solução Como $M_a \geqslant M_g$ temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10 \sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd}.$$

Note que $10 \sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd} = 10 \sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 1$ pois $abcd = 1$. Daí,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10.$$

A igualdade ocorre apenas quando $a = b = c = d = 1$.

Exemplo 1.6.3. *Seja a, b, c e $d \in \mathbb{R}_+$. Prove a desigualdade*

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 \geqslant abcd\,(ab + bc + cd + da)\,.$$

Solução: Note que

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 =$$

$$\frac{1}{6}\left[\left(2a^6 + 2b^6 + c^6 + d^6\right) + \left(2b^6 + 2c^6 + d^6 + a^6\right) + \left(2c^6 + 2d^6 + a^6 + b^6\right) + \left(2d^6 + 2a^6 + b^6 + c^6\right)\right].$$

Utilizando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para cada uma das parcelas do segundo membro da igualdade acima obtemos

$$\frac{2a^6 + 2b^6 + c^6 + d^6}{6} = \frac{a^6 + a^6 + b^6 + b^6 + c^6 + d^6}{6} \geqslant \sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^6d^6} = a^2b^2cd. \quad (1.27)$$

De modo similar obtemos

$$\frac{2b^6 + 2c^6 + d^6 + a^6}{6} \geqslant \sqrt[6]{b^{12}c^{12}d^6a^6} = b^2c^2da, \quad (1.28)$$

$$\frac{2c^6 + 2d^6 + a^6 + b^6}{6} \geqslant \sqrt[6]{c^{12}d^{12}a^6b^6} = c^2d^2ab \quad (1.29)$$

e

$$\frac{2d^6 + 2a^6 + b^6 + c^6}{6} \geqslant \sqrt[6]{d^{12}a^{12}b^6c^6} = d^2a^2bc. \quad (1.30)$$

Adiconando as desigualdades (1.27), (1.28), (1.29) e (1.30), obtemos

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 \geqslant a^2b^2cd + b^2c^2da + c^2d^2ab + d^2a^2bc = abcd\,(ab + bc + cd + da)\,.$$

1.7 Desigualdade de Jensen

O objetivo desta seção é mostrar um dos resultados mais importantes quando se fala de desigualdades, que é amplamente utilizado nas provas de diversas desigualdades, que é a desigualdade de Jensen. Esta desigualdade é sobre as chamadas funções convexas. Primeiramente vamos apresentar algumas definições e resultados cujas provas fogem do objetivo deste trabalho. Desta forma, apresentaremos estes resultados sem prova.

Definição 1.7.1. *Dizemos que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, é convexa, se para qualquer $x,\ y\in[a,b]$ e qualquer $\alpha\in(0,1)$ temos*

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y). \tag{1.31}$$

Se em (1.31), temos a desigualdade estrita então dizemos que f é estritamente convexa. Dizemos que uma função f é côncava se $-f$ é convexa.

Daremos um critério para verificar se uma dada função é convexa. Para sua demonstração ver [19].

Teorema 1.7.2. *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ duas vezes derivável. A função f é convexa em (a,b) se e só se para cada $x\in(a,b)$ temos que $f''(x)\geqslant 0$. Se $f''(x)>0$ para cada $x\in(a,b)$, então f é estritamente convexa em (a,b).*

Exemplo 1.7.3. *A função $f(x)=x^n$ é convexa em $\mathbb{R}$ para n par. Também $f(x)=x^n$ é, para n ímpar, convexa em $\mathbb{R}_+$, e é côncava em $\mathbb{R}_-$. A função $f(x)=\sin x$ em $(\pi,2\pi)$ é convexa, mas em $(0,\pi)$ é côncava.*

Teorema 1.7.4. ***(Desigualdade de Jensen)*** *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função convexa. Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in(0,1)$ tais que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$. Então, para quaisquer $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ temos*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i),$$

i.e.

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n) \tag{1.32}$$

Demonstração. Vamos provar a desigualdade (1.32) por indução matemática.

É fácil ver que para $n=1$ a desigualdade (1.32) é verdadeira, visto que $\alpha_1=1$.

Se $n=2$, então (1.32) é verdadeira devido a definição de função convexa. Suponha que para algum $n=k$, e quaisquer números reais $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$ tais que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ e quaisquer $x_1,x_2,...,x_k\in(a,b)$, temos

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_kx_k)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_kf(x_k). \tag{1.33}$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+1} \in (0,1)$ tais que $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1} = 1$ e $x_1, x_2, ..., x_k \in (a,b)$. Daí

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$

$$= (1-\alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k\right) + \alpha_{k+1}x_{k+1}. \qquad (1.34)$$

Faça

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k = y_{k+1}.$$

Em seguida, uma vez que $x_1, x_2, ..., x_k \in (a,b)$ deduzimos que

$$y_{k+1} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k$$

$$< \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}b + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}b + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}b$$

$$< \frac{b}{1-\alpha_{k+1}}(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k) = \frac{b}{1-\alpha_{k+1}}(1-\alpha_{k+1}) = b.$$

Do mesmo modo deduzimos que $y_{k+1} > a$. Assim $y_{k+1} \in (a,b)$. E de acordo com a Definição 1.7.1 e por (1.34) obtemos

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1}x_{k+1})$$

$$= f((1-\alpha_{k+1})y_{k+1} + \alpha_{k+1}x_{k+1}) \leqslant (1-\alpha_{k+1})f(y_{k+1}) + \alpha_{k+1}f(x_{k+1}). \qquad (1.35)$$

Pela hipótese de indução e desde que

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} = 1$$

obtemos

$$f(y_{k+1}) = f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k\right)$$

$$\leqslant \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}f(x_1) + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}f(x_2) + ... + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}f(x_k). \qquad (1.36)$$

Finalmente, de acordo com (1.35) e (1.36) deduzimos

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{k+1}x_{k+1}) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_{k+1}f(x_{k+1}).$$

Assim, pelo princípio da indução matemática, (1.32) é válida para qualquer inteiro positivo n, qualquer que seja $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$, e para valores arbitrários de $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$. $\square$

Observação 1.7.1. *Se f é estritamente convexa, então a igualdade na desigualdade de Jensen ocorre somente para $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Se a função $f(x)$ é côncava, temos,*

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n\right) \geqslant \alpha_1 f\left(x_1\right) + \alpha_2 f\left(x_2\right) + ... + \alpha_n f\left(x_n\right)$$

Exemplo 1.7.5. *Dado um $\triangle ABC$, mostre que*

$$\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

E mostre quando a igualdade é válida.

Solução: Seja $f(x) = \sin x$. Note que $f''(x) = -\sin x < 0$ em $(0, \pi)$, o que implica que f é côncava. Além disso, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$. Assim,

$$\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = f\left(\widehat{A}\right) + f\left(\widehat{B}\right) + \left(\widehat{C}\right) \leqslant 3 \cdot f\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3}\right) = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A igualdade é válida apenas quando $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$, isto é quando o triângulo é equilátero.

Exemplo 1.7.6. *Sejam a, b e $c > 0$ com $a + b + c = 1$. Determine o menor valor de*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Solução: Note que $0 < a, b, c < 1$. Seja $f\left(x\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ definida em $I = (0, 1)$, então f é estritamente convexa em I porque a sua segunda derivada

$$f''\left(x\right) = 90\left(x + \frac{1}{x}\right)^{8}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{2} + 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^{9}\left(\frac{2}{x^3}\right)$$

é positiva em todo o intervalo.

Pela desigualdade de Jensen temos que

$$\frac{10^{10}}{3^9} = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) \leqslant f\left(a\right) + f\left(b\right) + f\left(c\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Então o mínimo é de $\frac{10^{10}}{3^9}$ e é obtido quando $a = b = c = \frac{1}{3}$.

1.8 Desigualdade de Young

Nesta seção vamos apresentar a desigualdade de Young, que recebe esse nome devido ao matemático William Henry Young. Esta desigualdade será utilizada para demonstrar duas desigualdades importantes na matemática, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Minkowski.

Teorema 1.8.1. *Seja $a, b > 0$ e $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $a^p = b^q$.

Demonstração. Para $f(x) = e^x$ temos $f'(x) = f''(x) = e^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim, $f(x)$ é convexa em $\mathbb{R}$. Faça $x = p \ln a$ e $y = q \ln b$. Pela desigualdade de Jensen

$$f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p} f(x) + \frac{1}{q} f(y) \Leftrightarrow e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leqslant \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln a + \ln b} \leqslant \frac{e^{p \ln a}}{p} + \frac{e^{q \ln b}}{q} \Leftrightarrow e^{\ln ab} \leqslant \frac{e^{\ln a^p}}{p} + \frac{e^{\ln b^q}}{q} \Leftrightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Com a igualdade ocorrendo, se e somente se $x = y$, i.e. $a^p = b^q$.

□

1.9 Desigualdade de Hölder

Teorema 1.9.1. *Seja $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, números reais positivos e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Com a igualdade, se e somente se $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$.

Demonstração. Pela desigualdade de Young obtemos

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)}. \tag{1.37}$$

Adicionando as desigualdades (1.37), para $i = 1, 2, ..., n$, obtemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Obviamente a igualdade ocorre quando $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}$. □

Exemplo 1.9.2. *Sejam* x, y *e* $z > 0$.*Prove a desigualdade*

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+y)(z+x)}} \leqslant 1. \quad (1.38)$$

Solução: Pela Desigualdade de Hölder para $n = 2$ e $p = q = 2$ e fazendo $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $b_1 = \sqrt{z}$ e $b_2 = \sqrt{x}$ obtemos

$$\sqrt{(x+y)(x+z)} = \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right) \cdot \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)$$

$$\geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{xz} + \sqrt{xy},$$

donde obtemos

$$\sqrt{(x+y)(x+z)} \geqslant \sqrt{xz} + \sqrt{xy} = \sqrt{x}\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

Isto é

$$\frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}.$$

Assim, segue que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leqslant \frac{x}{x+\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}. \quad (1.39)$$

De modo similar obtemos que

$$\frac{y}{y+\sqrt{(z+y)(x+y)}} \leqslant \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}. \quad (1.40)$$

e

$$\frac{z}{z+\sqrt{(z+y)(x+z)}} \leqslant \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}. \quad (1.41)$$

Adicionando as desigualdades (1.39), (1.40) e (1.41) obtemos a desigualdade (1.38). Se ocorre a igualdade em (1.38), então as desigualdades (1.39), (1.40) e (1.41) são na verdade igualdades. Logo, pela Desigualdade de Holder, segue que

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+y)(z+x)}} \leqslant 1.$$

Se a igualdade ocorre em (1.38), então temos igualdades em (1.39), (1.40) e (1.41), o que implica pela Desigualdade de Holder que $\frac{x}{y} = \frac{z}{x}$, $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$, $\frac{z}{x} = \frac{y}{z}$, respectivamente. Sabendo que são números positivos, resolvemos este sistema de equações e obtemos $x = y = z$.

1.10 Desigualdade de Minkowski

Teorema 1.10.1. *Seja $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ números reais positivos e $p > 1$, temos*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Para $p > 1$, escolhemos $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, isto é, $q = \frac{p}{p-1}$.

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

i.e. obtém-se

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Exemplo 1.10.2. *Seja $p \geqslant 1$ um número real arbitrário. Prove que, para qualquer inteiro positivo n temos*

$$1^p + 2^p + ... + n^p \geqslant n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Solução: Seja $p \geqslant 1$. Faça $x_1 = 1, x_2 = 2, ..., x_n = n$ e $y_1 = n, y_2 = n-1, ..., y_n = 1$. Note que $x_i + y_i = n+1$.

Pela desigualdade de Minkowski temos

$$((1+n)^p + (1+n)^p + ... + (1+n)^p)^{\frac{1}{p}} = ((x_1+y_1)^p + ... + (x_n+y_n)^p)^{1/p}$$

$$\leqslant (x_1^p + ... + x_n^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p + ... + y_n^p)^{1/p} = 2\left(1^p + 2^p + ... + n^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é

$$n\left(1+n\right)^p \leqslant 2^p\left(1^p + 2^p + ... + n^p\right).$$

Daí,

$$1^p + 2^p + ... + n^p \geqslant n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^p.$$

A igualdade ocorre quando $n = 1$.

Capítulo 2

Desigualdades Geométricas

Neste capítulo falaremos das desigualdades geométricas, abordaremos desde as bem conhecidas às menos famosas, mas não menos interessantes.

As Desigualdades Geométricas são tão antigas quanto a própria geometria. O Livro 1 de Os Elementos (Euclides) contém diversos resultados sobre desigualdades entre os lados e os ângulos de um triângulo, como por exemplo a Proposição XX: "A soma de dois lados é maior do que o terceiro".

2.1 Ângulo Externo de um Triângulo

Teorema 2.1.1. *Um ângulo exterior de um triângulo é maior que um ângulo interior não adjacente a ele.*

Demonstração. Dado o $\triangle ABC$ abaixo, pelo ponto médio de $\overline{BC}$ traça-se o segmento $\overline{AA'}$ tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MA'}$. Temos que $\overline{CM} \equiv \overline{MB}$, e $C\widehat{M}A \equiv A'\widehat{M}B$ por serem opostos pelo vértice.

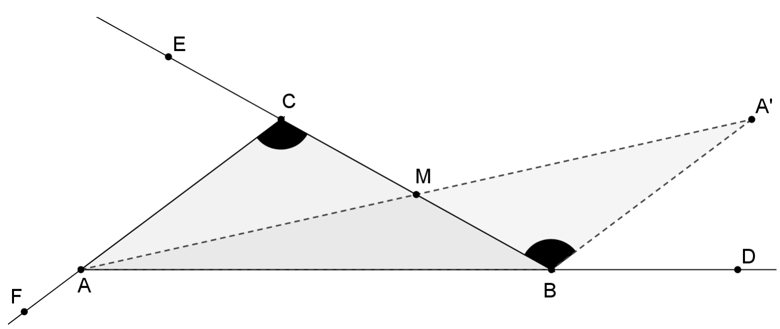

Figura 2.1: Ângulo Externo maior que ângulo interno não adjacente

Pode-se com isso concluir que $\triangle CMA \equiv \triangle BMA'$ pelo caso LAL (Lado - Ângulo - Lado). Daí concluímos que $m(\widehat{C}) \equiv m(M\widehat{B}A')$.

Podemos ainda concluir que

$$m(C\widehat{B}D) \equiv m(M\widehat{B}A') + m(A'\widehat{B}D).$$

Com isso conclui-se que

$$m(C\widehat{B}D) > m(M\widehat{B}A').$$

E como

$$m(\widehat{C}) = m(M\widehat{B}A'),$$

pode-se, finalmente concluir que

$$m(C\widehat{B}D) > m(\widehat{C}).$$

De forma análoga mostra-se as outras desigualdades entre os ângulos.

□

Observação 2.1.1. *Esta desigualdade segue imediatamente do fato que a medida do ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo não adjacentes a ele. Porém, a demonstração usou apenas congruência de triângulos cuja prova é independente deste fato.*

2.2 Desigualdade Triangular

O principal objetivo desta seção é provar que, em todo triângulo, os comprimentos dos lados guardam uma certa relação, mas para isso começamos estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos. Vamos mostrar que o maior lado de um triângulo é aquele oposto ao maior ângulo. Para isto faremos uso do fato que a a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes.

Proposição 2.2.1. *Seja o $\triangle ABC$ tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.*

Demonstração. Como $\widehat{B} > \widehat{C}$, podemos traçar uma semirreta intersectando o segmento $\overline{AB}$ no ponto P tal que $C\widehat{B}P = \frac{(\widehat{B}-\widehat{C})}{2}$. Daí, como a soma das medidas de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo não adjacente a ele, segue que

$$A\widehat{P}B = C\widehat{B}P + B\widehat{C}P = \frac{\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right)}{2} + \widehat{C} = \frac{\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)}{2}.$$

Mas como

$$A\widehat{B}P = \widehat{B} - \frac{\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right)}{2} = \frac{\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)}{2},$$

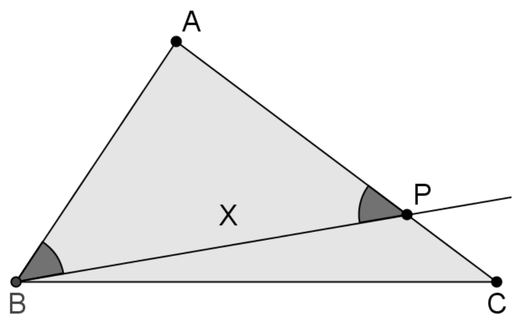

Figura 2.2: Ordem dos lados e ângulos de um triângulo

seque que o $\triangle ABP$ é isósceles de base $\overline{BP}$. Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}.$$

$\square$

A proposição a seguir é conhecida como a **Desigualdade Triangular**.

Proposição 2.2.2. *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração. Seja o $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, veja Figura 2.3. Mostraremos que $a < b + c$, e a prova de $b < a + c$ e $c < a + b$ segue de maneira análoga.

Marque o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

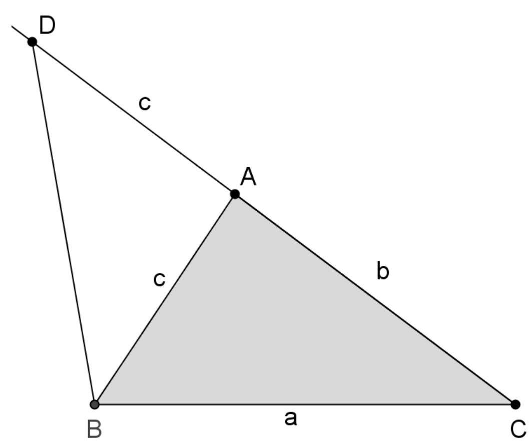

Figura 2.3: A Desigualdade Triangular

Temos que

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$$

Pela Proposição 2.2.1 é suficiente mostrarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$. Mas desde que $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, temos

$$B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

□

Exemplo 2.2.3. *Se P é um ponto no interior de um $\triangle ABC$ então $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.*

Demonstração. Prolonguemos o segmento de reta $\overline{BP}$ até que a mesma encontre o lado $\overline{AC}$ no ponto Q, veja a Figura 2.4. E aplicando a desigualdade triangular sucessivamente aos triângulos CPQ e ABQ, obtém-se

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{PB} + \left(\overline{PQ} + \overline{CQ}\right) = \overline{BQ} + \overline{CQ} < \left(\overline{AB} + \overline{AQ}\right) + \overline{CQ} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

□

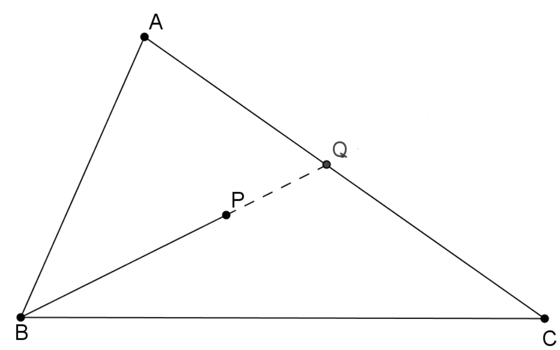

Figura 2.4: Consequências da Desigualdade Triangular

Exemplo 2.2.4. *Quatro cidades rurais, A, B, C e D, estão situadas geograficamente formando um quadrilátero convexo. Deseja-se constuir uma central de distribuição de energia para as quatro cidades de modo que a soma total das distâncias da central a cada uma das quatro cidades seja a mínima possível. Qual a localização desta central?*

Resolução:

Mostraremos que a central de energia deverá ser colocada no ponto O de intersecção das diagonais do polígono $ABCD$. Para isso vamos considerar um ponto P, diferente de O. Pela desigualdade triangular obtemos que

$$\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{AC} < \overline{PA} + \overline{PC}$$

e também

$$\overline{OB} + \overline{OD} = \overline{BD} < \overline{PB} + \overline{PD},$$

donde seque que

$$\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} + \overline{OD} < \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PD}.$$

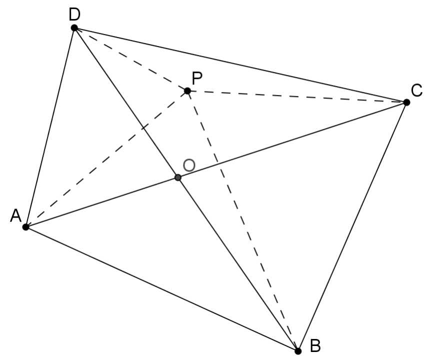

Figura 2.5: Aplicação da Desigualdade Triangular

2.3 Desigualdade de Euler

Primeiramente lembraremos algumas definições.

Definição 2.3.1. ***Incentro*** **-** *É a intersecção das bissetrizes internas de um triângulo (ver figura 2.6).*

Definição 2.3.2. ***Circuncentro*** **-** *É a intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo (ver figura 2.7).*

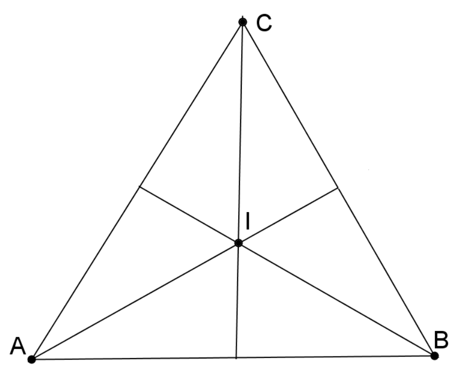

Figura 2.6: Incentro do triângulo

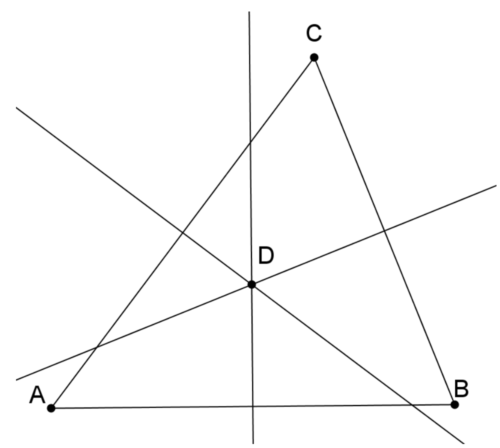

Figura 2.7: Circuncentro do triângulo

É fácil ver, utilizando congruência de triângulos, que o incentro é equidistante dos lados do triângulo, desta forma o incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo. Da mesma forma, o circuncentro é equidistante aos vértices do triângulo, logo ele é o centro da circunferência circunscrita.

Lema 2.3.3. *Considere um $\triangle ABC$ e I o seu incentro. O centro da circunferência circunscrita ao $\triangle BCI$ é o ponto médio do arco BC como indicado na Figura 2.6.*

Demonstração. Nesta demonstração faremos uso do fato que todo ângulo inscrito em um círculo que subentende o mesmo arco são congruentes. Daí, obtemos que a bissetriz do $\widehat{A}$ divide o arco BC em duas partes congruentes, portanto passa pelo ponto D, veja figura 2.6. Além disso, como D pertence a mediatriz do $\overline{BC}$, já que esta também divide o arco BC em duas partes congruentes, obtemos que $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$, pois todo ponto pertencente a mediatriz é equidistante dos extremos do segmento. Resta mostrar que $\overline{ID} \equiv \overline{CD}$. Para isto, observe que

$$B\widehat{C}D \equiv B\widehat{A}D = \frac{\widehat{A}}{2} \text{ e } A\widehat{D}C = \widehat{B}$$

pois são ângulo inscritos no círculo que subentendem o mesmo arco. Daí, como $I\widehat{C}B = \frac{\widehat{C}}{2}$, obtemos

$$180^\circ = \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = A\widehat{D}C+D\widehat{I}C+I\widehat{C}D = I\widehat{D}C+D\widehat{I}C+I\widehat{C}B+B\widehat{C}D = \widehat{B}+D\widehat{I}C+\frac{\widehat{C}}{2}+\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Assim, $D\widehat{I}C = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$. Logo o $\triangle CDI$ é isósceles de base IC, ou seja, $\overline{ID} \equiv \overline{CD}$. Portanto, D é o centro da circunferência circunscrita ao $\triangle BIC$. □

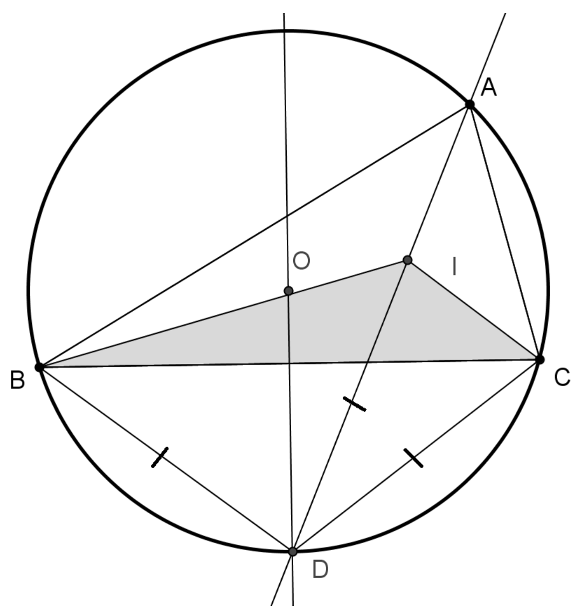

Figura 2.8: D ponto médio de BC

Teorema 2.3.4. *Dado o $\triangle ABC$, denotemos por O o circuncentro, I o incentro, R o raio da circunferência circunscrita e r o raio da circunferência inscrita. Então*

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

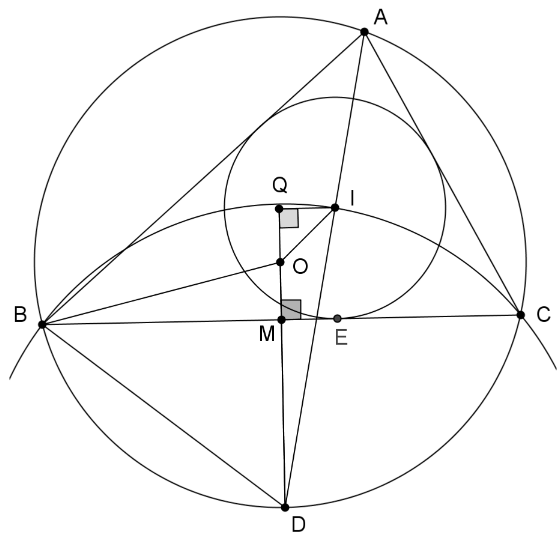

Figura 2.9: Desigualdade de Euler

Demonstração. Considere a Figura 2.7, onde I é o incentro do $\triangle ABC$ e D é o ponto médio do arco BC, que pelo Lema 2.3.3 é o centro da circunferência circunscrita ao $\triangle BCI$. . Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$ e seja Q a projeção ortogonal de I no raio OD. E considerando os triângulos retângulos OQI, DIQ, OBM e BDM, obtemos respectivamente, $\overline{OI}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QI}^2$, $\overline{DI}^2 = \overline{QI}^2 + \overline{QD}^2$, $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2$ e $\overline{BD}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MD}^2$.

Temos

$$\begin{gathered}
\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{DI}^2 - \overline{OI}^2 \\
= \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{BM}^2 - \overline{MD}^2 + \overline{QI}^2 + \overline{QD}^2 - \overline{OQ}^2 - \overline{QI}^2 \\
= \overline{OM}^2 - \overline{MD}^2 + \overline{DQ}^2 - \overline{QO}^2 \\
= \left(\overline{MO} + \overline{DM}\right)\left(\overline{MO} - \overline{DM}\right) + \left(\overline{DQ} + \overline{QO}\right)\left(\overline{DQ} - \overline{QO}\right) \\
= \overline{DO}\left(\overline{MO} - \overline{MD} + \overline{DQ} + \overline{OQ}\right) = 2 \cdot \overline{DO} \cdot \overline{MQ}.
\end{gathered}$$

Construindo por I uma perpendicular a $\overline{BC}$ obtemos o ponto E. No quadrilátero $IEMQ$ temos $\widehat{M} = \widehat{Q} = \widehat{E} = 90°$, daí $\widehat{I} = 90°$. Portanto, $IEMQ$ é um retângulo e $\overline{MQ} \equiv \overline{IE}$. Logo $\overline{MQ} = r$ e

$$\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2 = R\left(2\overline{MQ}\right) = 2Rr.$$

Portanto

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

$\square$

Como $\overline{OI}$ é a distância entre dois pontos temos que $\overline{OI} \geqslant 0$. Assim obtemos que $R^2 - 2Rr \geqslant 0$ e como consequência do último teorema obtemos a seguinte desigualdade, a qual daremos uma outra demonstração.

Teorema 2.3.5. ***(Desigualdade de Euler)*** *Considerando a notação do Teorema 2.3.4 obtemos $R \geqslant 2r$. Além disso, $R = 2r$ se e só se o triângulo é equilátero.*

Demonstração. Vamos utilizar as seguintes fórmulas de área

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

onde p é o semiperímetro, dado por $p = \frac{a+b+c}{2}$, e a,b e c são os lado do triângulo.

$$A = pr$$

e

$$A = \frac{abc}{4R},$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [18] e [17].

Faça

$$x = a + b - c, \tag{2.1}$$

$$y = b + c - a, \tag{2.2}$$

e

$$z = a + c - b. \tag{2.3}$$

De (2.1),(2.2) e (2.3) obtemos que $2a = x+z$, $2b = x+y$, e $2c = y+z$. Note que pela desigualdade das médias temos que $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, $x + z \geqslant 2\sqrt{xz}$ e $y + z \geqslant 2\sqrt{yz}$. Multiplicando membro a membro estas três desigualdades, obtemos

$$(x+z)(y+z)(x+y) \geqslant 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 2\sqrt{yz} = 8xyz. \tag{2.4}$$

Daí, substituindo em (2.4), as equações (2.1), (2.2) e (2.3), obtemos

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc. \tag{2.5}$$

Porém, de (2.5) temos

$$(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \leqslant abc \Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abc.$$

Daí temos que

$$\frac{8A^2}{p} \leqslant 4R \cdot A \Leftrightarrow 2A \leqslant pR.$$

Como $A = pr$, então $pR \geqslant 2pr$, ou seja,

$$R \geqslant 2r.$$

$\square$

2.4 Desigualdade de Leibniz

Antes de falarmos da Desigualdade de Leibniz precisamos falar do Teorema de Stewart.

O Teorema de Stewart fala de uma relação entre o tamanho dos lados de um triângulo e o tamanho de uma ceviana do triângulo (uma ceviana é qualquer segmento que une um vértice de um triângulo ao lado oposto). O nome é uma homenagem ao matemático escocês Matthew Stewart que publicou o Teorema em 1746.

Teorema 2.4.1. ***(Teorema de Stewart)*** *Sejam a, b e c os lados de um triângulo. Seja d uma ceviana do lado a. Se a ceviana divide o lado a em dois segmentos de tamanho m e n (ver Figura 2.8), então*

$$b^2n + c^2m = a(d^2 + mn).$$

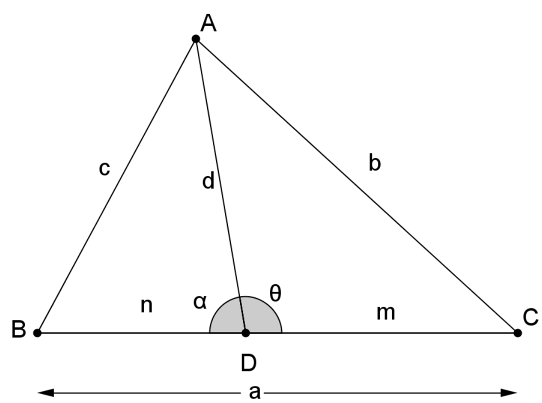

Figura 2.10: Teorema de Stewart

Demonstração. Iremos demonstrar o teorema utilizando a lei dos cossenos. Seja θ o ângulo entre m e d e α o ângulo entre n e d. Note que α é o suplemento de θ e com isso podemos afirmar que $\cos\alpha = -\cos\theta$. Pela Lei dos Cossenos obtemos

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2dm\cos\theta \tag{2.6}$$

e também que

$$c^2 = n^2 + d^2 - 2dn\cos\alpha \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por m, e (2.7) por n, e adicionando as duas equações obtemos

$$b^2n + c^2m = nm^2 + n^2m + d^2m + d^2n. \tag{2.8}$$

Fatorando (2.8) obtemos

$$b^2n + c^2m = a\left(d^2 + mn\right). \tag{2.9}$$

□

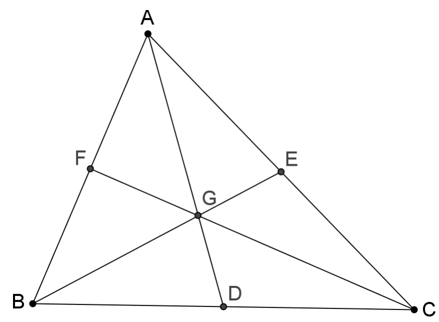

Figura 2.11: Baricentro do triângulo

Definição 2.4.2. ***Baricentro*** **-** *é a intersecção das medianas de um triângulo (ver figura 2.11).*

Teorema 2.4.3. *Dado um $\triangle ABC$ com lados de comprimento a, b e c, e com circuncentro O, baricentro G e raio da circunferência circunscrita R, temos que*

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Demonstração. Vamos utilizar o Teorema de Stewart.

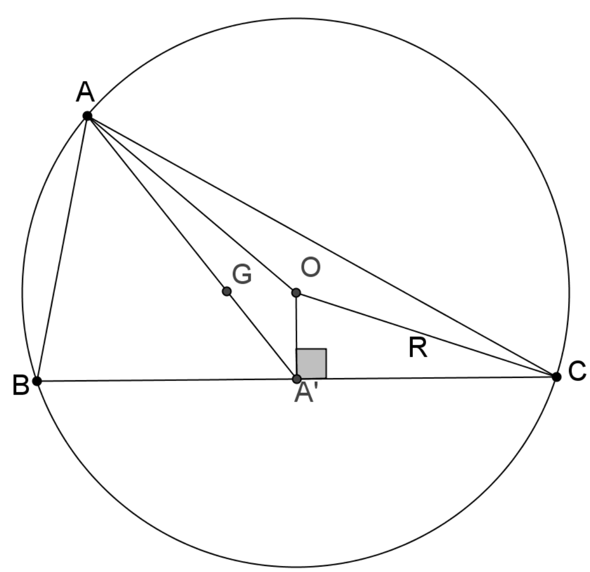

Figura 2.12: Teorema de Leibniz

Aplicando o Teorema de Stewart no $\triangle OAA'$ para encontrar o comprimento de OG, onde A' é o ponto médio de BC, obtemos

$$\overline{AA'}\left(\overline{OG}^2 + \overline{AG}\cdot\overline{GA'}\right) = \overline{A'O}^2\cdot\overline{AG} + \overline{AO}^2\cdot\overline{GA'}.$$

Como $\overline{AO} = R$, $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$, e $\overline{GA}' = \frac{1}{3}\overline{AA'}$, então, obtemos

$$\overline{OG}^2 + \frac{2}{9}\left(\overline{AA'}\right)^2 = \overline{A'O}^2 \cdot \frac{2}{3} + R^2 \cdot \frac{1}{3}.$$

Fazendo em (2.9), $d = \overline{AA'}$ e $n = m = \frac{a}{2}$ obtemos $\frac{b^2 a}{2} + \frac{c^2 a}{2} = a\left(\left(\overline{AA'}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right)$ donde obtemos

$$\left(\overline{AA'}\right)^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle A'OC$ e fazendo $\overline{A'C} = \frac{a}{2}$ obtemos $\left(\overline{A'O}\right)^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Daí,

$$\overline{OG}^2 = \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot R^2 - \frac{2}{9}\left(\frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}\right)$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{18}$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

□

Uma conseqüência do último teorema é a seguinte desigualdade.

Teorema 2.4.4. ***(Desigualdade de Leibniz)*** *Seja $\triangle ABC$ com comprimento dos lados a, b e c, e raio da circunferência circunscrita igual a R. Então temos que*

$$9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

A igualdade ocorre quando o triângulo é equilátero.

Demonstração. Sabemos que $OG \geqslant 0$, e a igualdade ocorre quando o triângulo é equilátero. Daí,

$$R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow R^2 \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

$$\Rightarrow 9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

□

Exemplo 2.4.5. *Em todo $\triangle ABC$ de lados de medidas a, b e c temos que*

$$4\sqrt{3} \cdot A_{ABC} \leqslant \frac{9abc}{a + b + c}.$$

Solução: Sabendo que $4R{\cdot}A_{ABC} = abc$, onde R é o raio da circunferência circunscrita, temos as seguintes equivalências

$$9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{16 \cdot A^2_{ABC}} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \Leftrightarrow 4 \cdot A_{ABC} \leqslant \frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$a + b + c \leqslant \sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Daí seque que

$$4\sqrt{3} \cdot A_{ABC} \leqslant \frac{9abc}{a + b + c}.$$

2.5 A Desigualdade de Erdös-Mordell

A Desigualdade de Erdos-Mordel (1913-1996) foi proposta pelo matemático Paul Erdos em 1935 e demonstrada no mesmo ano por Louis Mordell (1888-1972) na revista American Mathematical Monthly, problema número 3740. Logo após surgiram várias soluções e alguns artigos sobre a desigualdade, cada uma usando variadas técnicas como: trigonometria (Louis J. Mordell e P.F. Barrow), desigualdades angulares e semelhanças (Leon Bankoff), teorema de Ptolomeu (André Avez e Hojoo Lee), áreas de polígonos (V. Komornik).

Primeiro vamos demonstrar um lema cuja Desigualdade de Erdös-Mordell sairá como consequência da desigualdade entre as médias.

Lema 2.5.1. *Seja O um ponto arbitrário do interior ou pertencente a um dos lados do $\triangle ABC$. Sejam p, q e r a distância de O aos lados do triângulo. Então vale as três desigualdades $ax \geq br + cq$, $by \geqslant ar + cp$ e $cz \geqslant aq + bp$.*

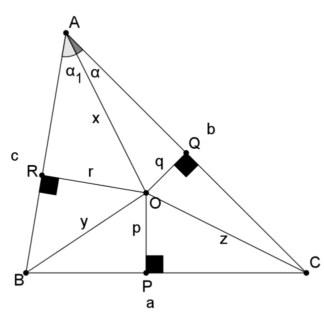

Figura 2.13: $\triangle ABC$

Uma das igualdades ocorre se e somente se o triângulo é isósceles com a base correspondente.

Demonstração. Para provarmos o Lema 2.5.1. Vamos construir três triângulos semelhantes. Considere o $\triangle A'B'C'$ semelhante ao triângulo $\triangle ABC$ com razão de semelhança x. Considere também os triângulos $\triangle A'B'D$ e $\triangle A'C'E$ semelhantes aos triângulos $\triangle OAR$ e $\triangle OAQ$ com razões de semelhança c e b, respectivamente.

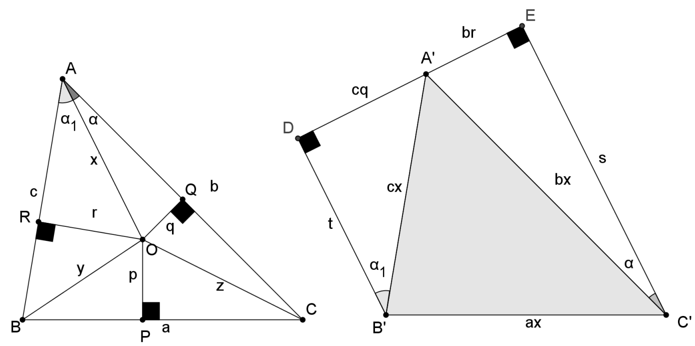

Figura 2.14: Teorema de Erdös-Mordell

Como $D\widehat{A'}E = D\widehat{A'}B' + B'\widehat{A'}C' + C'\widehat{A'}E$, $D\widehat{A'}B' = 90° - \alpha_1$, $B'\widehat{A'}C' = \alpha_1 + \alpha$ e $C'\widehat{A'}E = 90° - \alpha$, obtemos que $D\widehat{A'}E = 90° - \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha + 90° - \alpha = 180°$. Portanto $DEC'B'$ é um trapézio retângulo e assim obtemos que

$$ax \geqslant br + cq.$$

Observe que pela Figura 2.14 obtemos que a igualdade ocorre se e somente se o triângulo é isósceles com base BC.

De modo análogo, pelas figuras 2.14 e 2.15, obtemos

$$cz \geqslant aq + bp$$

e

$$by \geqslant ar + cp.$$

□

Teorema 2.5.2. ***(Teorema de Erdös-Mordell)*** *Seja O um ponto arbitrário no interior ou pertencente aos lados do $\triangle ABC$. Se p_a, p_b, p_c são as distâncias aos lados do triângulo BC, AC e AB, respectivamente. Então temos*

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \geqslant 2 \cdot (p_a + p_b + p_c).$$

Com igualdade se e somente se O for o circuncentro do $\triangle ABC$ equilátero.

Demonstração. Na figura 2.17 temos o triângulo de Erdös-Mordell. Para facilitar a demonstração faremos $\overline{AO} = x$, $\overline{OB} = y$, $\overline{OC} = z$, $\overline{OP} = p$, $\overline{OQ} = q$ e $\overline{OR} = r$

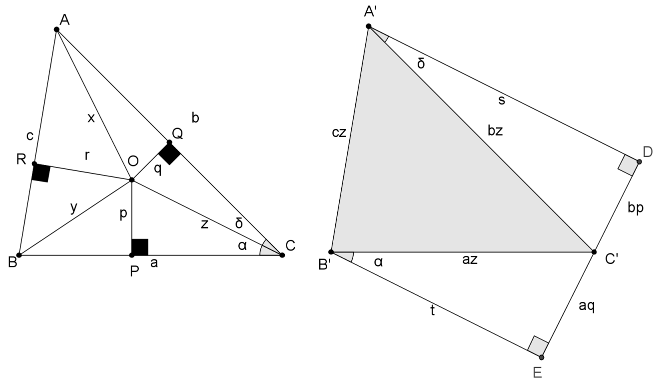

Figura 2.15: Teorema de Erdös-Mordell

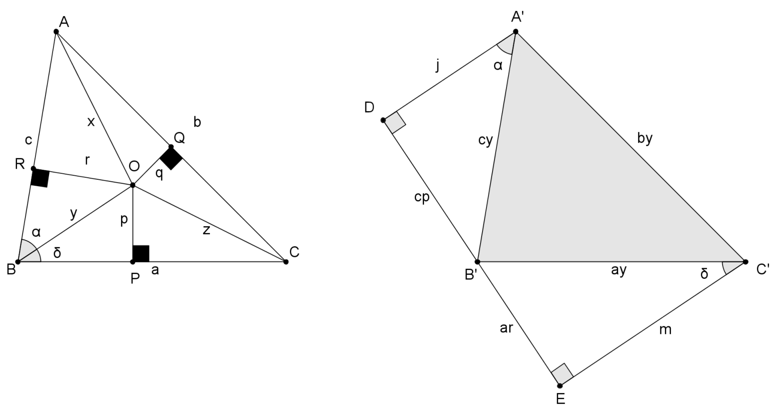

Figura 2.16: Teorema de Erdös-Mordell

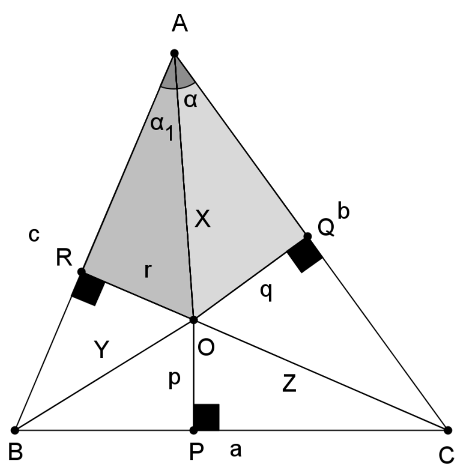

Figura 2.17: Teorema de Erdös-Mordell

Então a desigualdade pode ser reescrita como

$$x + y + z \geqslant 2\,(p + q + r)\,.$$

Pelo Lema 2.5.1 temos que

$$x \geqslant \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q, \tag{2.10}$$

$$y \geqslant \frac{a}{b}r + \frac{c}{b}p \tag{2.11}$$

e

$$z \geqslant \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p. \tag{2.12}$$

E adicionado as desigualdades (2.10), (2.11) e (2.12) obtemos

$$x+y+z \geqslant \frac{b}{a}r+\frac{c}{a}q+\frac{a}{b}r+\frac{c}{b}p+\frac{a}{c}q+\frac{b}{c}p = r\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+q\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+p\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right). \tag{2.13}$$

Pelo exemplo 1.1.2 temos que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, para quaisquer dois números positivos a e b. Daí,

$$x + y + z \geqslant 2\left(p + q + r\right).$$

As três desigualdades no Lema 2.5.1 são igualdades se, e somente se, O é o ortocentro do $\triangle ABC$. Isso decorre da observação que o trapézio na Figura 2.16 é um retângulo, visto que $\alpha + A\widehat{B}C = 90°$ e $\alpha_1 + B\widehat{C}A = 90°$. $\square$

Exemplo 2.5.3. ***(IMO, 1991)*** *Sendo P um ponto pertencente ao $\triangle ABC$. Prove que, pelo menos, um dos ângulos $P\widehat{A}B, P\widehat{B}C, P\widehat{C}A$ é inferior ou igual a $30°$.*

Solução: Sejam A_1, B_1 e C_1, as projeções de P sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Pelo Teorema de Erdös-Mordell obtemos

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geqslant 2\left(\overline{PA_1} + \overline{PB_1} + \overline{PC_1}\right).$$

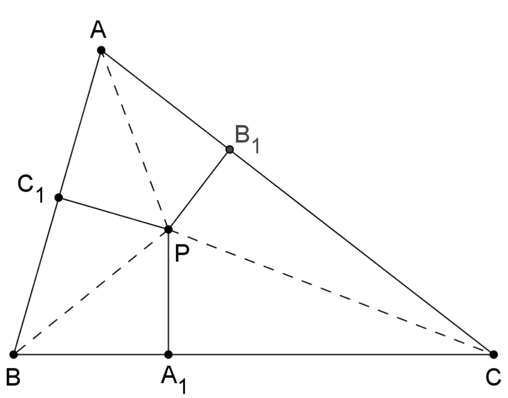

Figura 2.18: Aplicação do Teorema de Erdös-Mordell

Assim, pelo menos uma das seguintes desigualdades abaixo será satisfeita.

$$\overline{PA} \geqslant 2\overline{PC_1},$$

$$\overline{PB} \geqslant 2\overline{PA_1},$$

ou

$$\overline{PC} \geqslant 2\overline{PB_1}.$$

Se, por exemplo, $\overline{PA} \geqslant 2\overline{PC1}$, podemos deduzir que $\frac{1}{2} \geqslant \frac{\overline{PC_1}}{\overline{PA}} = \sin P\widehat{A}B$. Daí, $P\widehat{A}B \leqslant 30°$ ou $P\widehat{A}B \geqslant 150°$. Mas, se $P\widehat{A}B \geqslant 150°$, então $P\widehat{B}C < 30°$ e, assim, em ambos os casos, o resultado segue.

2.6 Desigualdade de Ptolomeu

Teorema 2.6.1. ***(Teorema de Ptolomeu)*** *Dado um quadrilátero $ABCD$ inscritível, temos que*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

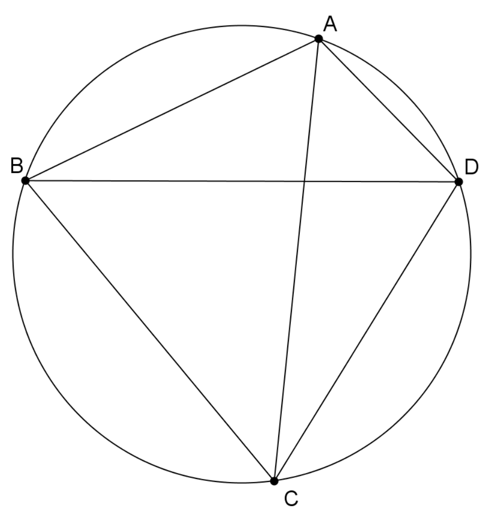

Figura 2.19: Teorema de Ptolomeu

Demonstração. No $\triangle ABD$ temos que

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \widehat{A}. \tag{2.14}$$

E ainda no $\triangle BCD$ temos que

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos \widehat{C}. \tag{2.15}$$

Visto que $\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A}$, a igualdade (2.15) pode ser reescrita como

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos \widehat{A}. \tag{2.16}$$

Isolando $2\cos \widehat{A}$ em (2.14) e substituindo em (2.16) obtemos

$$\left(\overline{BD}\right)^2 = \left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{CD}\right)^2 + \left(\frac{\left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AD}\right)^2 - \left(\overline{BD}\right)^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}\right) \overline{BC} \cdot \overline{CD},$$

donde fatorando obtemos

$$\left(\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{AD}\right) \overline{BD}^2 = \left(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2\right) \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \left(\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2\right) \overline{AB} \cdot \overline{AD}. \tag{2.17}$$

Isto implica

$$\overline{BD}^2 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{AD}} \left(\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}\right). \tag{2.18}$$

Analogamente, pela lei dos cossenos aplicada ao $\triangle ABC$ e ao $\triangle ADC$, obtemos

$$\overline{AC}^2 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \left(\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}\right). \tag{2.19}$$

Multiplicando (2.18) por (2.19) obtemos

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

□

Teorema 2.6.2. ***(Desigualdade de Ptolomeu)*** *Dado um $\triangle ABC$ e um ponto P qualquer, temos*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{BC} \cdot \overline{AP} \geqslant \overline{AC} \cdot \overline{BP}.$$

A igualdade ocorre se e somente se o quadrilátero $ABCP$ é inscritível.

Demonstração. Por P trace perpendiculares aos lados BC, AC e AB, intersectando estes lados nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Trace os segmentos de reta A_1C_1, A_1B_1 e B_1C_1. O quadrilátero AB_1PC_1 é inscritível visto que $A\widehat{C_1}P + A\widehat{B_1}P = 90° + 90° = 180°$, com AP um diâmetro da circunferência circunscrita. Temos ainda que $C_1\widehat{P}B_1 = 180° - B_1\widehat{A}C_1 = \widehat{A}$.

Aplicando a Lei dos Senos no $\triangle PB_1C_1$ temos que

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\sin \widehat{A}} = \overline{AP}.$$

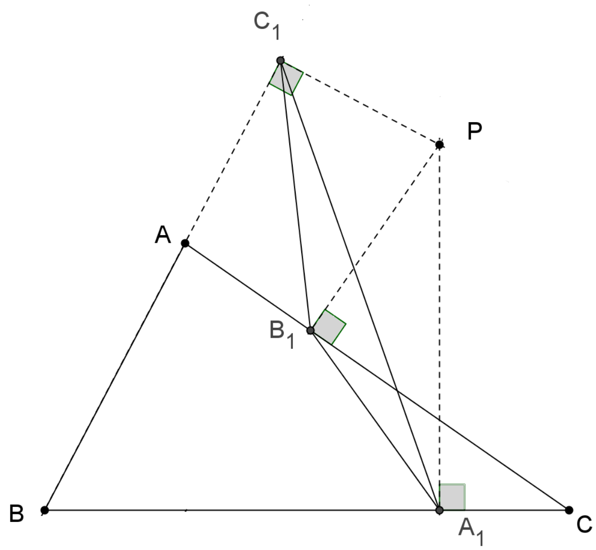

Figura 2.20: Desigualdade de Ptolomeu

E como $\sin \widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{2R}$, então

$$\overline{B_1C_1} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AP}}{2R}.$$

Analogamente, temos que

$$\overline{A_1C_1} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BP}}{2R}$$

e

$$\overline{A_1B_1} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CP}}{2R}.$$

Como a menor distância entre dois pontos é em linha reta então

$$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} \geqslant \overline{A_1C_1}$$

i.e.

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CP}}{2R} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AP}}{2R} \geqslant \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BP}}{2R}$$

donde obtemos

$$\overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{BC} \cdot \overline{AP} \geqslant \overline{AC} \cdot \overline{BP}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{A_1C_1}$, ou seja, se e somente se os pontos A_1, B_1 e C_1 estão alinhados e o ponto P pertence ao circuncírculo do $\triangle ABC$. Assim, o quadrilátero $ABCP$ é inscritível e a Desigualdade de Ptolomeu transforma-se no Teorema de Ptolomeu.

$\square$

2.7 A Desigualdade de Weitzenböck

Esta desigualdade geométrica foi descoberta por Roland Weitzenböck, nascido em Kremsmünster, Áustria no dia 26 de maio de 1885 e faleceu em 24 de julho de 1955. Foi um matemático austríaco que desenvolveu trabalhos em geometria diferencial.

Teorema 2.7.1. *Para qualquer triângulo de lados a, b e c e área S tem-se*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S. \tag{2.20}$$

Esta prova surgiu na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 1961. A demonstração baseia-se na desigualdade triangular, e na desigualdade das médias aritmética e geométrica e utiliza a fórmula de Heron.

Demonstração. Pela desigualdade triangular sabemos que $a+b-c > 0$, $a+c-b > 0$, e $b+c-a > 0$. Assim, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{a+b-c+a+c-b+b+c-a}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

donde segue que

$$(a+b+c)^3 \geq 27(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a). \tag{2.21}$$

Por outro lado, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ (a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + c^2 \geq 2ac \\ (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc \end{cases} \tag{2.22}$$

Adicionando as desigualdades (2.22) membro a membro, obtemos

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \tag{2.23}$$

e adicionando $(a^2 + b^2 + c^2)$ aos dois membros da desigualdade (2.23), temos que

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc),$$

onde obtemos

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant \sqrt{(a+b+c)^4}.$$

Daí obtemos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}. \tag{2.24}$$

De (2.21) e (2.24), segue que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \quad \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3 \cdot 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3 \cdot 16p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

□

2.8 A Desigualdade Isoperimétrica

A desigualdade isoperimétrica nos diz que a área de qualquer região no plano delimitada por uma curva com um comprimento fixo nunca pode exceder a área de um círculo de mesmo comprimento. Além disso, se uma região tem área igual a região limitada por círculo de comprimento igual a curva que limita a região, então esta região deve ser a região limitada pelo círculo. A desigualdade isoperimétrica pode ser enunciada de forma precisa de dois modos equivalentes. Vejamos:

Teorema 2.8.1. *Entre todas as formas planas limitadas por curvas de mesmo perímetro, o círculo é o que possui a maior área.*

Teorema 2.8.2. *Entre todas as formas planas com a mesma área, o círculo é a que possui o menor perímetro.*

Teorema 2.8.3. *Os Teoremas 2.8.1 e 2.8.2 são equivalentes.*

Demonstração. Suponha que o Teorema 2.8.2 é falso e o Teorema 2.8.1 é verdadeiro. Então existe um dado círculo C e existe uma figura F tal que o círculo C limita uma área igual a área de F, porém a curva que limita F tem comprimento menor que o comprimento de C. Seja C' um círculo de comprimento igual a curva que limita F. Logo, C' é um círculo de mesmo comprimento que a curva que limita F e área menor que F. Isto contradiz o Teorema 2.8.1. Logo, se o Teorema 2.8.1 é verdadeiro, então o Teorema 2.8.2 é também verdadeiro.
De modo análogo mostra-se que 2.8.2 implica em 2.8.1. □

Capítulo 3

O Problema Isoperimétrico

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.0.4 (Desigualdade Isoperímetrica)**.** *Toda curva fechada de comprimento l engloba uma área menor ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$, além disso, este valor é alcançado apenas para o círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$*

No primeiro momento abordaremos alguns aspectos históricos do problema isoperimétrico. Veremos que de certo modo esta desigualdade já era conhecida por antigas civilizações. A demonstração que apresentaremos aqui é para o caso quando a curva é regular. Para o caso geral ver [1] e [6].

3.1 Aspectos Históricos e a Lenda de Dido

O problema isoperimétrico aparece em escritos gregos, embora a solução do problema fosse aceito, não é conhecida desta época nenhuma demonstração formal para o fato de que a circunferência é a curva que maximiza a área para um perímetro fixo.

A origem desse problema dá-se, segundo a mitologia Romana, a Princesa Dido (também conhecida como Elisa) filha do Rei Mutto de Tiro, cidade Fenícia, e mulher de Sigueu, também conhecido por Acerbas. Depois que seu marido foi morto pelo Príncipe Pigmaleão, que era irmão de Dido, ela refugiou-se na costa do Mediterrâneo, mais precisamente no Norte da África. E, ao chegar lá, dirigiu-se ao Rei Jarbas para solicitar que o mesmo vendesse certa quantidade de terra, quantidade essa que a Rainha Dido pudesse cercar com o couro de um Touro.

A rainha Dido escolheu terras ao longo do mar, pois ela não precisaria usar fitas ao longo da costa. Ao estender o couro em forma de um semicírculo, obteve a máxima área possível de terra. Desse modo, ela estabeleceu uma nova cidade, a cidade de Cartago (atualmente a Tunísia), por volta do século I a.C. Deste mesmo período dá-se a apresentação da Lenda de Dido, presente no épico Eneida do poeta Virgílio, ilustrando que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo atrás, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus. A cidade de Cartago seria futuramente a rival de Roma. Reza ainda a lenda que, como Cartago prosperou bastante, Jarbas pediu-a em casamento. Para fugir a esse assédio, a então Rainha Dido suicidou-se na frente de seu povo.

O trecho do canto I da obra de Virgílio, no qual se evidencia o problema, é **"Mercam solo (do feito o alcunham Birsa) - Quanto um coiro taurino abranja em tiras."**

Figura 3.1: Dido e Enéias - Séc VI d.C

Figura 3.2: Povo de Dido cortando o couro para fundação de Cartago

Entretanto as referências históricas para a solução do problema não ficam apenas no campo da literatura. Durante a idade média era comum a construção de muros de proteção para as cidades.

Ao observar alguns mapas da Idade Média, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular, o motivo para esse fato é que como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa e utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material.

Abaixo apresentamos os mapas das cidades de Paris - França, Colônia - Alemanha e Braga – Portugal, que tinha formatos circulares (Braga) ou semicirculares (Paris e Colônia), quando as cidades eram banhadas por rios.

Figura 3.3: Paris - França

Figura 3.4: Colônia - Alemanha

Figura 3.5: Braga - Portugal

3.2 A Desigualdade Isoperimétrica

Dentro da geometria diferencial, os seus fundamentos partem do estudo de propriedades locais de curvas e superfícies, ou seja, do comportamento da curva ou da superfície nas proximidades de um ponto. Para este estudo, os métodos utilizados são os métodos do cálculo diferencial. Neste contexto, curvas e superfícies são definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. Antes de enunciar o teorema principal, segue algumas definições básicas.

Definição 3.2.1. *Uma curva diferenciavel plana parametrizada é uma aplicação diferenciavel* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *onde* $I \subset R$ *é um intervalo aberto. A imagem de* $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ *é chamada de traço da curva* α.

Definição 3.2.2. *Seja* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *uma curva diferenciavel plana e* P *uma partição* $a = t_0, t_1, t_2, ..., t_n = b$ *de* $[a, b]$. *Então, o comprimento de uma curva* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *diferenciável é definido como*

$$\int_a^b |\alpha'(t)|dt.$$

Definição 3.2.3. *Uma curva diferenciavel parametrizada* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *é regular se* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$. *Dizemos simplesmente que* α *é uma curva regular.*

Definição 3.2.4. *Uma curva plana fechada é uma curva regular* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha^{(i)}(a) = \alpha^{(i)}(b)$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Diz-se que* α *é uma curva simples se* α *não possui outras intersecções, isto é, se* α *é injetiva em* (a, b).

Definição 3.2.5. ***(Região simplesmente conexa)*** *- Uma região* R *é dita simplesmente conexa se qualquer curva simples fechada contida em* R *pode ser continuamente reduzida a um ponto, permanecendo em* R. *Uma região simplesmente conexa é aquela que não possui buracos.*

Definição 3.2.6. ***(Região Multiplamente conexa)*** *- Uma região é multiplamente conexa se não é simplesmente conexa.*

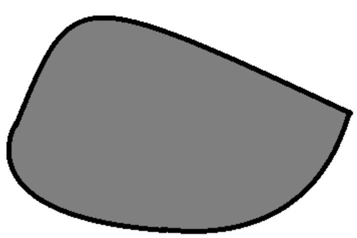

Figura 3.6: Região Simplesmente Conexa

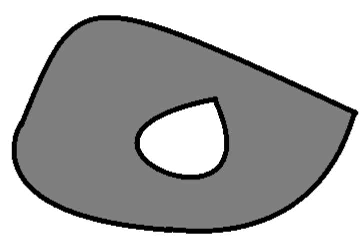

Figura 3.7: Região Multiplamente Conexa

Teorema 3.2.7. ***(Teorema de Green)*** *Sejam P e Q duas funções C^{∞} de duas variáveis x e y definidas em uma região simplesmente conexa R do plano. Então*

$$\iint_R \left(\frac{\partial P}{x} + \frac{\partial Q}{y}\right) dxdy = \oint_C Pdy - Qdx,$$

onde C é a fronteira de R.

Teorema 3.2.8. ***(Desigualdade Isoperimétrica)*** *Seja C o traço de uma curva plana regular, fechada e simples de comprimento l, e seja A a área da região limitada por C. Então*

$$l^2 \geqslant 4\pi A.$$

Com a igualdade ocorrendo se e somente se C é um círculo.

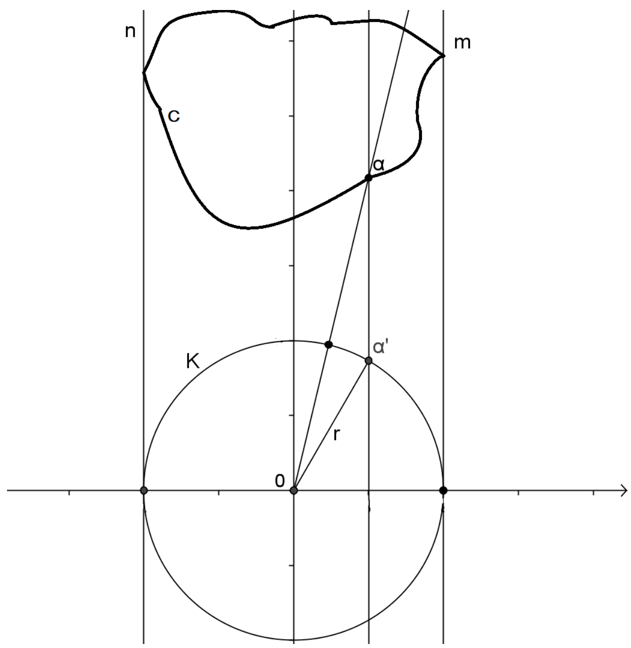

Figura 3.8: Desigualdade Isoperimétrica

Demonstração. Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização de C por comprimento de arco. Assim temos que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e $|\alpha'(s)| = 1$.

Sejam m e n duas retas tais que intersectem C e C esteja na região limitada por elas, veja a figura 3.8. Parametrize o círculo K tangente as retas m e n como $\beta(s) = (x(s), \beta_2(s))$, onde $\beta_2(s) = -\sqrt{r^2 - x(s)^2}$ se $0 \leqslant s \leqslant s_0$ e $\beta_2(s) = \sqrt{r^2 - x(s)^2}$ se $s_0 \leqslant s \leqslant l$, aqui r é a metade da distância entre m e n. Note que $\beta(0) = \beta(l)$. Então, pelo Teorema 3.2.7 temos que

$$A = \iint_R dxdy = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dxdy = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left(x\left(t\right) y'\left(t\right) - y\left(t\right) x'\left(t\right)\right) dt.$$

Note que, como $x(0) = x(l)$ e $y(0) = y(l)$, segue por integração por partes que

$$\int_0^l x(t)y'(t)dt = [x(t)y(t)]_0^l - \int_0^1 x(t)y'(t)dt.$$

Daí,

$$A = \int_C xdy = -\int_C ydx.$$

Da mesma forma, para o círculo K, temos que

$$\pi r^2 = -\int_0^l \beta_2\left(s\right) x'\left(s\right) ds.$$

Assim

$$A + \pi r^2 = \int_0^l \left(x\left(s\right) y'\left(s\right) - \beta_2\left(s\right) x'\left(s\right)\right) ds \leqslant \int_0^l \left|xy' - \beta_2 x'\right| ds =$$

$$\int_0^l \sqrt{\left(xy' - \beta_2 x'\right)^2} ds = \int_0^l \sqrt{x^2 \left(y'\right)^2 - 2xy'\beta_2 x' + \beta_2^2 \left(x'\right)^2} ds \leqslant \int_0^l \sqrt{\left(x^2 + \beta_2^2\right)\left(\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2\right)} ds$$

$$= \int_0^l \sqrt{x^2 + \beta_2^2} ds = \int_0^l \left|\beta\left(s\right)\right| ds = \int_0^l r ds = rl.$$

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\sqrt{A\pi r^2} \leqslant \frac{A + \pi r^2}{2} \leqslant \frac{rl}{2}.$$

E isto implica em

$$A\pi r^2 \leqslant \frac{r^2 l^2}{4},$$

isto é

$$l^2 \geqslant 4\pi A.$$

Supondo que $l^2 = 4\pi A$, obtemos que todas as desigualdades obtidas acima são na verdade igualdades. Em particular

$$\sqrt{A\pi r^2} = \frac{A + \pi r^2}{2} = \frac{rl}{2}.$$

Pela desigualdade das médias, temos $A = \pi r^2$ e assim $l = 2\pi r$.

Além disso, como

$$\int_0^l \sqrt{(xy' - \beta_2 x')^2} dt = \int_0^l r dt$$

e os integrandos são positivos, obtemos que

$$\langle (x, \beta_2), (y', -x') \rangle^2 = (xy' - \beta_2 x')^2 = r^2.$$

Porém, como $|(x, \beta_2)| = r$ e $|(y', -x')| = 1$ obtemos

$$\langle (x, \beta_2), (y', -x') \rangle = |(x, \beta_2)| \, |(y', -x')| \cos\theta = r\cos\theta = \pm r.$$

Assim, $\cos\theta = \pm 1$ o que implica que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Portanto, (x, β_2) e $(y', -x')$ são paralelos. Então

$$(x, \beta_2) = \pm r\,(y', -x').$$

Assim temos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left\{\begin{array}{l} x = \pm r y' \\ \beta_2 = \mp r x' \\ (x')^2 + (y')^2 = 1 \end{array}\right. . \tag{3.1}$$

Vamos resolver esta EDO para os sinais $(+, -)$, pois para $(-, +)$ segue de forma análoga.

De $|(x, \beta_2)| = r$ obtemos $\beta_2^2 = r^2 - x^2$, o que implica da segunda equação de (3.1) que

$$r\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Daí, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \pm \int \frac{dt}{r}$$

e assim

$$\arcsin\frac{x}{r} = \frac{s}{r} + d$$

o que implica em $x(s) = r\sin\left(\frac{s}{r} + d\right)$.
Como $x(s) = r\sin\left(\frac{s}{r} + d\right)$ e $(x')^2 + (y')^2 = 1$, então

$$y(s) = \mp r\cos\left(\frac{s}{r} + d\right).$$

Donde obtemos, a menos de um sinal, que

$$\alpha(s) = \left(r\sin\left(\frac{s}{r} + d\right), r\cos\left(\frac{s}{r} + d\right)\right).$$

Logo, C é um círculo.

$\square$

3.3 Aplicação da Desigualdade Isoperimétrica

Entre todos os quadriláteros no plano cujos lados medem a, b, c e d, qual limita a maior área? A resposta é o quadrilátero cíclico, ou seja, aquele inscritível em algum círculo.

A prova que demos para a Desigualdade Isoperimétrica foi para curvas diferenciáveis. Porém, a desigualdade serve para qualquer curva fechada simples. Aqui utilizaremos o caso geral.

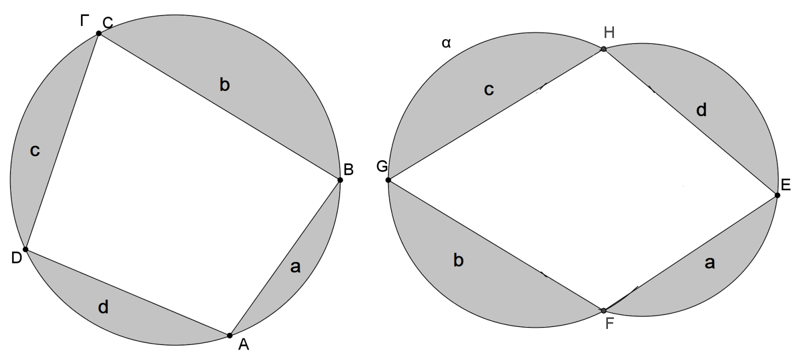

Figura 3.9: Aplicação da Desigualdade Isoperimétrica

Considere o quadrilátero $ABCD$ inscrito no círculo Γ, onde os lados medem $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = d$. Considere um outro quadrilátero $EFGH$ cujos lados também medem $\overline{EF} = a$, $\overline{FG} = b$, $\overline{GH} = c$ e $\overline{HE} = d$. Construa sobre o lado EF um arco de círculo congruente ao arco sobre AB, parte hachurada da figura. Faça o mesmo para os outros lados do quadrilátero $EFGH$. Desta forma, obtemos uma curva α fechada simples de mesmo comprimento do círculo Γ. Pela Desigualdade Isoperimétrica obtemos que a área limitada por Γ é maior que a área limitada por α. Como as correspondentes áreas hachuradas da figura 3.9 possuem a mesma área, obtemos que a área do quadrilátero $ABCD$ é maior que a área do quadrilátero $EFGH$.

Bibliografia

[1] Limberger,Roberto, *Abordagens do problema isoperimétrico*. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, ano 2011.

[2] Sousa, C. R. A. *Duas demonstrações da desigualdade isoperimetrica*, UFMG, Belo Horizonte, (2006).

[3] Stewart, James. *Cálculo*. Vol 1, 5o ed. São Paulo: Tomson, (2006).

[4] Lima, E.L. ; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. SBM, (2012).

[5] Virgilio, P. Eneida. Tradução de Manoel Odorico Mendes. eBooksBrasil.com, Clássicos Jakson, Vol 3, (1854).

[6] Moreira, C. G. T. de A.; Saldanha, N. C. *A desigualdade isoperimetrica*, Matemática Universitária No 15, 13-19, (1993).

[7] Muniz Neto, Antonio Caminha; *Tópicos de Matematica Elementar - Geometria Euclidiana Plana*, editora SBM,ano 2012.

[8] Oliveira, Krerley Irraciel Martins, *Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções*, editora SBM, ano 2010.

[9] <http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore250.htm>. Acesso em 30 jan. 2014.

[10] <http://www.math.utah.edi/ treiberg/isoperin/isop>. Acesso em 20 fev. 2014.

[11] Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N. e Yaglom, I. M. *The USSR Olympiad Problem Book. Dover*. Toronto, 1993.

[12] Korovkin, P. P. *Lecciones Populares de Matemáticas - Desigualdades*, editoral MIR, ano 1976.

[13] Rousseau, C. e Lozansky, E. Winning *Solutions*, editora Springer-Verlag, ano 1996.

[14] Barbosa, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, ano 2012.

[15] Lima, Elon Lages, *Análise Real, Volume 1*. SBM, ano 2012.

[16] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau, *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Plana, Volume 9*. Editora Atual, ano 1993.

[17] <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/o_triangulo.pdf>. Acesso em 25 maio. 2014.

[18] Barbosa, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, ano 2006.

[19] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. Sociedade Brasileira de Matemática, ano 2012.

[20] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César, *Médias e Princípio das Gavetas II*. Profmat, ano 2012.

[21] Caminha, Antonio; *Curso de Álgebra - Nível 3*. Pólos Olímpicos de Treinamento, ano 2012.

[22] Cvetkovski, Zdravko; *Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems*. editora Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ano 2012.

[23] Silva, Charleson Clivandir de Araujo; *A Desigualdade Isoperimétrica*. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal da Paraíba, ano 2013.

[24] Alsina, Claudi e Nelsen, Roger B; *A Visual Proof of the Erdös-Mordell Inequality*.