UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Geometria Espacial Métrica: Uma Abordagem com Conceitos Básicos, Aplicações e Reflexões

HEREDE NORÕES BOTELHO

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

Campina Grande - PB
Novembro/2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Geometria Espacial Métrica: Uma Abordagem com Conceitos Básicos, Aplicações e Reflexões

por

HEREDE NORÕES BOTELHO †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

B748g Botelho, Herede Norões.

Geometria espacial métrica [manuscrito] : uma abordagem com conceitos básicos, aplicações e reflexões / Herede Norões Botelho. - 2014.

97 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Geometria espacial. 2. Comprimentos. 3. Áreas. 4. Volumes. 5. Situações Práticas. I. Título.

21. ed. CDD 516

Geometria Espacial Métrica: Uma Abordagem com Conceitos Básicos, Aplicações e Reflexões

por

HEREDE NORÕES BOTELHO

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Jefferson Abrantes dos Santos

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Aldo trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB
Orientadora

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

novembro/2014

Aos vivos

A natureza das coisas

Se avexe não
Amanhã pode acontecer tudo
Inclusive nada
Se avexe não
A lagarta rasteja até o dia
Em que cria asas
Se avexe não
Que a burrinha da felicidade
Nunca se atrasa
Se avexe não
Amanhã ela para na porta
Da sua casa

Se avexe não
Toda caminhada começa
No primeiro passo
A natureza não tem pressa
Segue seu compasso
Inexoravelmente chega lá
Se avexe não
Observe quem vai subindo a ladeira
Seja princesa ou seja lavandeira
Pra ir mais alto vai ter que suar

Accioly Neto

Agradecimentos

A Deus Por ter me guiado na tua palavra até aqui; por ter me dado inteligência suficiente para saber ser filho, esposo, pai, professor e aluno; por ter me feito entender que o curso de Matemática é também uma oportunidade de mostrar o tamanho do Seu poder; por ter me honrado com uma Pós-Graduação.

Aos meus pais Vicente e Francilda, por terem me oportunizado a ser um professor.

A Thayse, minha esposa, pelo apoio, pelo incentivo, pela compreensão, pelo amor...

A Maria Julia, minha filha, pela sua fortaleza inocente.

Aos Colegas de Turma, pelo estudo, cumplicidade e união.

Aos Amigos Salomão Almeida, Stanley Borges e José de Brito Silva, pela a ajuda e atenção dedicadas para comigo, no tocante às minhas dúvidas.

Aos Idealizadores do PROFMAT, pelo belíssimo projeto de apoio substancial ao ensino da matemática no nosso País.

Aos Professores, pelo apoio incondicional aos mestrandos ao longo de toda a caminhada.

À Professora Luciana, pela sua amizade, dedicação e paciência em me ajudar a concluir esta dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e à Capes, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e pela concessão da bolsa.

Sem vocês este trabalho não seria realizado. Muito Obrigado.

Resumo

O trabalho apresenta uma proposta de ensino de Geometria Espacial Métrica através de uma sequência didática: Conceitos, Aplicações e Reflexões. Ao longo de todo o trabalho serão usados como referências questões do ENEM bem como de acesso ao PROFMAT, com suas respectivas resoluções. A sequência proposta, tem o intuito de apresentar o conteúdo de forma que proporcione ao leitor um melhor entendimento dos cálculos que envolvem as medidas das dimensões, áreas e volumes dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio. Será também apresentado um capítulo com situações práticas envolvendo o conteúdo em questão, bem como alguns aprofundamentos e curiosidades, que nem sempre são apresentados nos livros didáticos.

Palavras Chaves: Sólidos Geométricos, Comprimentos, Áreas, Volumes e Situações Práticas.

Abstract

The work presents an educational proposal of Metric Spatial Geometry through a didactic sequence: concepts, application and thoughts. Throughout the work, it will be used as reference, ENEM (National Exam of High School) questions, as well as questions of access to PROFMAT (Professional Master's Course in Mathematics) and their respective solutions. The proposed sequence is intended to present the subject, so that it provides the reader a better understanding of calculations which involve dimension measurement, area and volume of main geometric solids studied in High School. It will also be presented a chapter with practical situations involving the subject, and deepening and curiosities, which are not always presented in didactic books.

Keywords: Geometric Solids, Lengths, Areas, Volumes, Practical Situations.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

"A análise dos livros-texto para o ensino da Matemática na Escola Média deve levar em conta, acima de tudo, sua adequação às três componentes básicas desse ensino, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação."

O trecho acima citado, foi retirado da obra Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, LIMA, Elon Lages. Et al [8], em que são analisadas doze coleções de livros de Matemática mais adotados nas escolas brasileiras. Tais análises foram motivadoras da construção desse Trabalho de Conclusão de Curso - TCC.

Observa-se que, em boa parte dos livros didáticos do Ensino Médio, os capítulos destinados a Geometria Espacial Métrica omitem alguns conceitos importantes como o de volume, sendo este conceito, juntamente com o conceito de área, o de maior relevância, no que diz respeito ao assunto em questão.

No livro Manual de Redação Matemática do Professor Daniel Cordeiro de Morais Filho 1a edição, p.15 [11], o autor cita algumas frases que representam descuidos na hora de definir algo, e uma delas, extraída de um compêndio de preparação para o antigo Exame de Admissão, publicado em 1947, que exprime perfeitamente uma definição vaga de retas perpendiculares diz:

"Reta perpendicular: é a linha que encontra outra, sem pender para um lado nem para outro"

É importante notar que a frase encontra-se em um material não atual, mas a definição de retas perpendiculares é bem mais antiga do que a data do mesmo, ou seja, mostra com isso que é necessário uma boa escrita, uma boa definição para coisas que são primárias e importantíssimas no estudo da geometria desde sempre, para dar consistência aquilo que está sendo lido e dessa forma evitar equívocos.

"Alguns problemas de Geometria podem ser resolvidos com ... tesoura, cola e xerox! Em uma prova, talvez estes não sejam instrumentos mais adequados; então vamos recortar, colar, ampliar e reduzir no papel mesmo e tentar enxergar o que realmente acontece sem realmente fazermos essas operações". SHINE, Carlos Yuzo [13].

A colocação acima é extremamente pertinente, pois normalmente em uma prova os instrumentos permitidos para a mesma são canetas esferográficas, lápis grafite, borracha, régua e compasso. No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) só é permitido ao aluno o uso de caneta esferográfica de tinta preta, logo, torna-se indispensável ao mesmo ter uma visão cada vez mais apurada das situações práticas abordadas nas questões, tendo em vista o espaço mínimo dado para os rascunhos (as resoluções).

O trabalho se preocupa em deixar o leitor bem seguro sobre o que está lendo, no sentido de que o mesmo seja capaz de, independente de ter recursos mais sofisticados ou os mais básicos, conseguir compreender e resolver as situações que venha a enfrentar. A proposta é trabalhar com o mais simples possível, não condenando obviamente quando estiverem disponíveis o uso de outros recursos como materiais concretos ou softwares.

1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral, coletar um material com boas definições ou conceitos, esboços de construções dos principais sólidos geométricos para um melhor entendimento das relações de medidas de comprimentos, áreas e volumes, seguidos sempre de aplicações. As aplicações são na sua maioria retiradas das últimas provas do novo ENEM ou das provas de acesso ao PROFMAT. Sendo assim um material voltado não apenas para alunos da segunda série do ensino médio, mas também para professores e pessoas interessadas pelo assunto.

Um dos diferenciais deste trabalho, é que as questões apresentadas como aplicações ao longo dos capítulos, apresentam propostas de entendimentos de raciocínios recorrentes nas provas do ENEM, como por exemplo o uso da proporção para solucionar certos problemas. Um outro diferencial é a aplicabilidade da Geometria Espacial no cotidiano sob forma de situações práticas e uma proposta de atividade de campo.

É fundamental que o leitor perceba que a proposta do material é incentivá-lo a acreditar que essa sequência: **Conceituação, Manipulação e Aplicação**, levará a um entendimento mais fácil e coerente dos cálculos abordados em cada situação apresentada.

1.2 Objetivos específicos

- Propor definições dos principais sólidos geométricos que, imediatamente, oriente as construções destes sólidos, tendo em vista que, a dificuldade dos alunos está, muitas vezes, na transição da definição para construção;

- Levar o leitor a compreender as relações geométrica-algébricas que ocorrem entre as medidas dos sólidos estudados;

- Sugerir alguns exercícios, situações problemas do cotidiano de interesse do aluno e do professor, para que os mesmos sintam-se interessados pelo material aqui apresentado.

- Mostrar a partir das aplicações que alguns raciocínios matemáticos, associados ao conteúdo em questão, estão mais frequentes nas provas do ENEM e dessa forma, chamar a atenção para tais raciocínios.
- Propor atividades práticas, em sala de aula e em campo, para que o conhecimento adquirido possa ser explorado e assimilado com mais convicção e de forma prazerosa.

1.3 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Capítulo 1, que é esta introdução. O Capítulo 2, que apresenta as definições dos seguintes sólidos: cilindro, prisma, cone, pirâmide e esfera; seus respectivos volumes usando como ferramentas para uma melhor compreensão o Princípio de Cavalieri. Um esboço de cada sólido é apresentado a partir das suas definições para que seja feita uma associação direta entre o abstrato e o concreto (conceito e visualização), seguidos sempre de aplicações sob forma de exercícios. O Capítulo 3, mostra as relações de comprimento, áreas e planificações dos sólidos apresentados no capítulo 2, com algumas aplicações. O Capítulo 4, traz um pouco da geometria espacial métrica no cotidiano, como por exemplo: propagandas, embalagens sob forma de latas cilíndricas, e no cálculo do volume de um objeto qualquer, sendo todos esses seguidos por aplicações; este capítulo ainda apresenta uma proposta de atividade prática. No Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros. Por fim, estão as Conclusões, Referências e Apêndice.

1.4 Materiais utilizados

Para realizar as construções dos sólidos geométricos apresentados neste trabalho, o aluno ou professor, necessitará apenas de lápis ou canetas com escrita de cores diversas, régua e compasso.

1.5 Recomendações metodológicas

Recomendamos que este material seja aplicado pelo professor em sala de aula do ensino médio, em geral na segunda série, para alunos que tenham conhecimentos de Geometria Plana, Geometria Espacial de Posição e Trigonometria. As questões apresentadas ao longo dos Capítulos 2 e 3, bem como, no Apêndice A tem como intuito mostrar ao aluno a abordagem feita pelo ENEM (e pelo PROFMAT) com relação ao assunto apresentado nesse trabalho, dessa forma, convencendo-o que a proposta apresentada é interessante para ele.

É um material que deve ser trabalhado ao longo de todo um semestre letivo, com uma carga horária semanal de duas horas aula.

Outras sugestões serão feitas ao longo do trabalho.

1.6 Motivo da escolha

Devido a enorme frequência do conteúdo nas provas do ENEM (e vestibulares em geral) e da dificuldade que o estudante apresenta na compreensão e visualização em um plano bidimensional de algo que é tridimensional, senti-me motivado e desafiado a escrever esse trabalho.

Além disso, é imperativa a busca por mudanças que gerem melhoria na qualidade da educação do nosso país, e o PROFMAT vem assumindo e proporcionando, de forma gradativa, tal mudança na área de matemática.

Com a exigência na condução do mestrado em cada polo, os trabalhos de conclusão de curso estão comprovando que os educadores estão engajados em melhorar substancialmente o seu conhecimento e a produzir materiais que venham a contribuir para o crescimento na qualidade do ensino da matemática.

Segue abaixo algumas sugestões para uma leitura complementar desse trabalho, dessas contribuições já publicadas (disponíveis) no site do PROFMAT http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/134 [15]:

- BRITO [3], O Uso de Softwares no Ensino de Geometria Espacial Posicional.
- DA FONTE [5], Médias, desigualdades e problemas de otimização.
- DA SILVA [6], Uma Proposta Para o Ensino de Geometria Espacial Métrica no Ensino Médio.
- FANELLI [7], Alternativas Para o Ensino de Geometria Espacial.
- MARINATTO [10], Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides.
- SILVA [14], A desigualdade Isoperimétrica.

Capítulo 2

Sólidos geométricos usuais: definições, cálculo de volumes e aplicações

Neste capítulo será proposto que a partir do entendimento do cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo e do Princípio de Cavalieri, é possível compreender as relações que representam os volumes dos sólidos simples. Na maioria dos livros, esta ferramenta é apenas citada, porém, sem as devidas justificativas.

2.1 Conceito de volume e o Princípio de Cavalieri

É importante antes, mesmo que intuitivamente apresentar a ideia de volume.

- **Volume**: De forma intuitiva, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para representar tal quantidade de espaço através de um número, devemos compará-la com uma unidade; o resultado dessa comparação será chamado de volume. Consideremos um cubo como unidade básica de volume, logo a unidade de volume do cubo de aresta 1 é igual a 1. Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o metro (m), então a unidade correspondente de volume será chamada de metro cúbico (m^3) (LIMA, Elon Lages. Et al)[9].

Princípio de Cavalieri

Um resultado essencial para a compreensão de volume é o Princípio de Cavalieri, cuja demonstração exige um conhecimento além do ensino médio. Utilizaremos este princípio de forma axiomática. O princípio de Cavalieri pode ser assim entendido:

Suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em um plano horizontal α e que planos paralelos a α (como exemplo, tomamos α') cortem ambos segundo seções de mesma área para cada corte dado (S = S'). O Princípio de Cavalieri afirma que o volume do sólidos A é igual ao volume do sólido B.

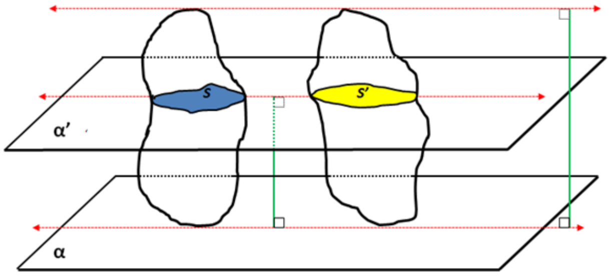

Figura 2.1: Princípio de Cavalieri.

Suponha agora que os dois sólidos sejam fatiados com mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, e que a cada duas fatias correspondentes, feitas pelo mesmo corte, possuirão secções de mesma área, por consequência terão, aproximadamente, mesmo volume. A aproximação será cada vez maior quanto mais fina forem as fatias. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos possuem volumes iguais.

Observação. 2.1 *As seções realizadas pelos planos paralelos à α, são denominadas seções transversais.*

Axioma 2.1 (Princípio de Cavalieri) *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.*

Outros Axiomas importantes para a compreensão do cálculo do volume do paralelepípedo são os seguintes:

Axioma 2.2 *Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas superfícies (de suas "cascas"), então o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.*

Axioma 2.3 *Se um sólido (maior) contém outro (menor) em seu interior, então o volume do sólido maior é maior que o volume do sólido menor.*

2.2 O paralelepípedo retângulo

Para estabelecer métodos para o cálculo de volumes de sólidos, tomemos como referência o paralelepípedo retângulo. O paralelepípedo retângulo é um poliedro formado por 6 faces retangulares. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

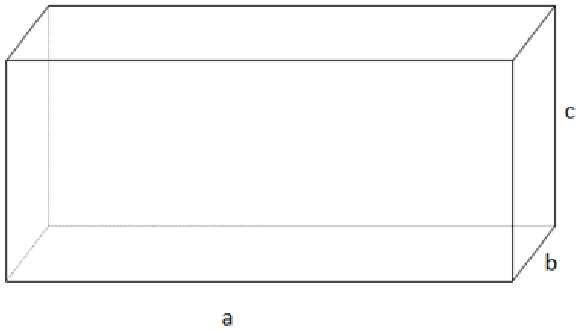

Figura 2.2: Paralelepípedo retângulo.

O volume do paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c fica aqui representado por V(a, b, c), e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo em que o comprimento, a largura e a altura medem 1, então $V(1,1,1) = 1$.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se conservarmos, constantes a largura e o comprimento e se multiplicarmos a altura por um número natural k, o volume também ficará multiplicado por k.

Note:

$$V(k.a,b,c) = k.V(a,b,c)$$

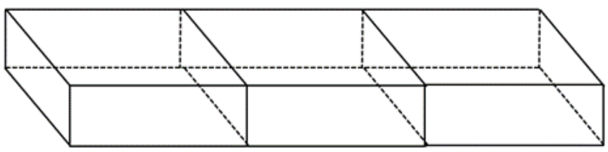

Figura 2.3: Volume do paralelepípedo retângulo.

A Figura 2.3 mostra três paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais, logo, o volume total é 3 vezes maior que o volume de um deles.

O resultado acima, constatado para números naturais pode se estender aos números reais positivos. De fato, vejamos inicialmente que

$$V(k \cdot a,b,c) = k \cdot V(a,b,c), \tag{2.1}$$

com b e c fixados e $k \in \mathbb{Q}_+$, Seja

$$k = \frac{1}{q},$$

com q, $k \in \mathbb{Z}_+$ Fragmentando o segmento a em q vezes do tamanho $\dfrac{a}{q}$, temos:

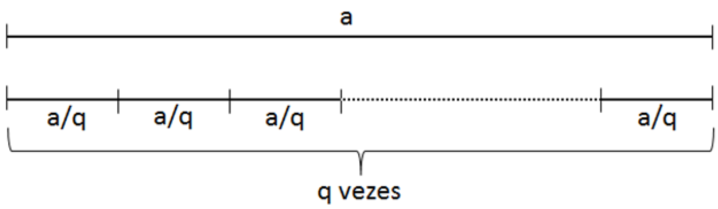

Figura 2.4: Fragmentando a em q vezes.

Daí,

$$V(a,b,c) = q \cdot V(a/q,b,c) \Rightarrow V(a/q,b,c) = \frac{1}{q} \cdot V(a,b,c).$$

Para $k = \frac{p}{q}$, com p, $q \in \mathbb{Z}_+$. Fragmentando o segmento $a \cdot \frac{p}{q}$ em p vezes do tamanho $\dfrac{a}{q}$, temos:

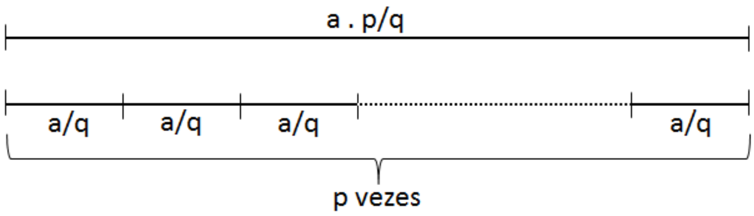

Figura 2.5: Fragmentando $a \cdot \frac{p}{q}$ em p vezes vezes do tamanho a/q.

Daí,

$$V(p/q \cdot a,b,c) = p \cdot V(1/q \cdot a,b,c) = p \cdot \frac{1}{q} \cdot V(a,b,c) = \frac{p}{q} \cdot V(a,b,c).$$

Portanto, a igualdade (2.1) fica justificada.

Para um k, real e positivo qualquer. Suponha por contradição que

$$V(k \cdot a,b,c) \neq k \cdot V(a,b,c)$$

sem perda de generalidade, suponha que

$$V(k \cdot a,b,c) < k \cdot V(a,b,c),$$

ou seja

$$\frac{V(k\cdot a,b,c)}{V(a,b,c)}<k.$$

Sabendo que entre dois números reais distintos sempre existe um número da forma $\frac{p}{q}$, temos a desigualdade a seguir:

$$\frac{V(k.a,b,c)}{V(a,b,c)}<\frac{p}{q}<k.$$

Donde segue-se que

$$V(k\cdot a,b,c)<\frac{p}{q}V(a,b,c)=V((p/q)\cdot a,b,c) \quad\Rightarrow\quad V(k\cdot a,b,c)<V(a\cdot(p/q),b,c).$$

Por outro lado

$$\frac{p}{q}<k \quad\Rightarrow\quad a\cdot\frac{p}{q}<a.k$$

Portanto,

$$V\left(a.\frac{p}{q},b,c\right)\leq \mathrm{V}(a.k,b,c).$$

Isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
V(a,b,c) &= V(a\cdot 1,b,c)\\
&= a\cdot V(1,b,c)=a.V(1,b\cdot 1,c)\\
&= a\cdot b\cdot V(1,1,c)=a.b.V(1,1,c\cdot 1)=a\cdot b\cdot c\cdot V(1,1,1)\\
&= a\cdot b\cdot c\cdot 1\\
&= a\cdot b\cdot c
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Com isso, podemos concluir que, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. De um modo particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, nomearemos essa face de base e a terceira dimensão, c, de altura. Como a área da base é dada pelo produto $a\cdot b$, pois é retangular por definição, em geral diremos que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura, ou seja

(Volume do paralelepípedo) = (área da base) x (altura), ou simplesmente

$$V=A_B\cdot h$$

.

2.3 Cilindros e prismas: definições

Definição 2.1 (Cilindro) *Seja uma região plana B denominada base do cilindro, apoiada sobre um plano horizontal* α.

O cilindro fica determinado por sua base B e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal α, chamado de geratriz do cilindro da seguinte forma: por cada ponto $P \in B$, levantamos um segmento de reta paralelo a g, e do mesmo comprimento que, g. O cilindro C, de base B e geratriz g, fica definido como a reunião desses segmentos erguidos.

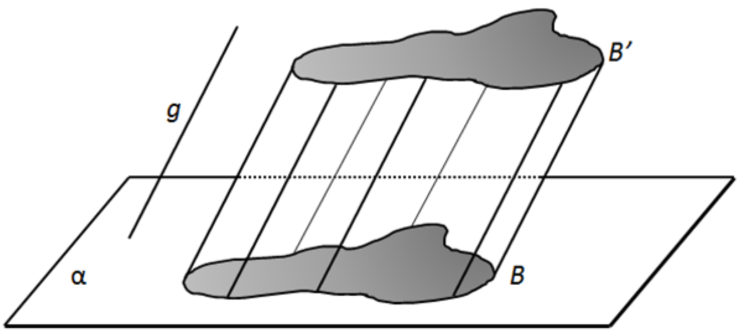

Figura 2.6: Cilindro 1.

Note que, como todos os segmentos paralelos a g possuem o mesmo comprimento e uma das extremidades pertencentes ao plano α, é correto afirmar que existe um plano α', paralelo a α que contém, B', sendo B' determinado pelas outras extremidades dos segmentos paralelos a g. A distância entre esses planos que contém B e B' (bases do cilindro) é considerada a altura do cilindro (h).

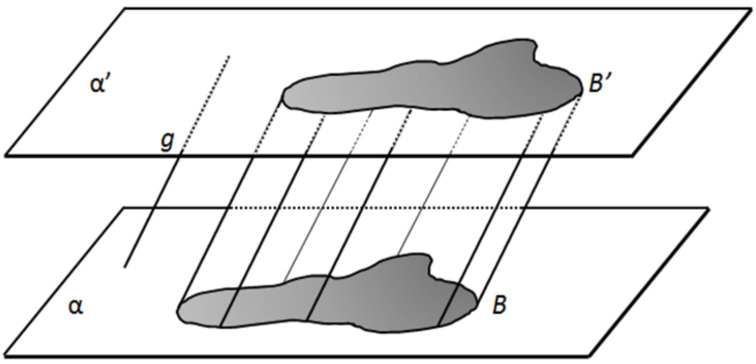

Figura 2.7: Cilindro 2.

α é paralelo a α', B está contido em α e B' está contido em α'.

Observe que a definição de cilindro enunciada anteriormente inclui, como caso particular, a possibilidade da base B ser um polígono. Quando isso ocorre, o sólido C limita-se por faces planas e denomina-se **prisma.**

Definição 2.2 (Prisma) *é um cilindro cuja base é um polígono.*

Observação. 2.2 *O paralelepípedo é um caso particular de prisma, sendo que qualquer de suas faces pode ser considerada como base.*

Classificação dos Cilindros

Cilindro Reto: quando a geratriz do cilindro é perpendicular ao plano que contém a base, o mesmo é denominado de *cilindro reto*; caso a base seja um polígono, tem-se um *prisma reto*.

No ensino médio, limita-se o estudo de cilindro aos que possuem bases circulares, sendo esses denominados cilindros circulares. É esse que no momento estará em foco nesse material, pois será compatível com o conhecimento e necessidade do aluno no nível de escolaridade em questão.

Cilindro Equilátero: é todo cilindro circular reto em que a geratriz é igual ao diâmetro da base.

Cilindro Oblíquo: o cilindro que não é reto é denominado oblíquo (o mesmo se aplica ao prisma).

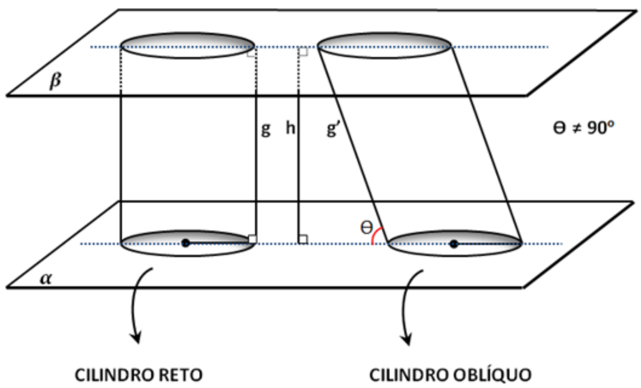

Figura 2.8: Tipos de cilindro.

A rotação de 360º de um retângulo em torno de um dos seus lados, gera um cilindro circular reto (cilindro de revolução)

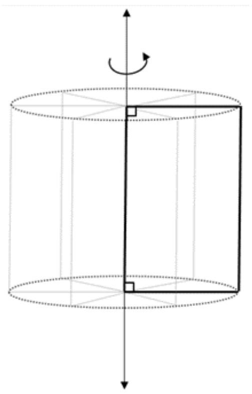

Figura 2.9: Cilindro de revolução.

2.3.1 Cilindros e prismas: cálculo de volumes

Fazendo o uso do Princípio de Cavalieri, fica mais confortável agora, justificar os volumes dos cilindros e dos prismas, bem como os demais sólidos simples, caso tenha interesse e/ou necessidade.

Por definição, os cilindros e os prismas são sólidos geométricos em que, qualquer seção feita no mesmo, por um plano paralelo à base, apresentará para tal seção uma figura plana congruente à base.

Suponhamos na Figura 2.10, o plano α' é paralelo ao plano α que contém as bases do cilindro e do paralelepípedo. O corte feito por α' determinou no cilindro e no paralelepípedo figuras planas congruentes às suas bases, isto é, com mesmas áreas. $A_1 = A$ e $A_2 = A$. Por conveniência, foi tomado para a figura, um paralelepípedo retângulo cuja base possui área igual a do cilindro, denominadas de A. Como $A_1 = A = A_2$, e fazendo uso do Princípio de Cavalieri, temos que

(volume do paralelepípedo) = (área da base)·(altura) = (Volume do Cilindro).

Daí, vem:

(Volume do cilindro) = (área da base)·(altura)

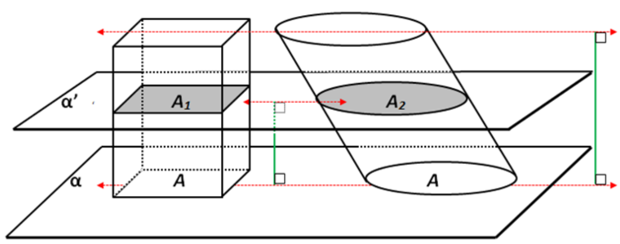

Figura 2.10: Volume do cilindro.

O mesmo se aplica ao prisma, ficando assim determinado o seu volume por

(Volume do Prisma) = (área da base) x (altura)

2.4 Cones e pirâmides: definições

Definição 2.3 (Cone) *Seja uma região plana B contida em um plano horizontal α. Seja V um ponto (chamado de vértice do cone) não pertencente à α. Define-se como um cone K, de base B, ao conjunto dos segmentos de retas com extremidades no ponto V e nos pontos de B. A distância do vértice V ao plano α, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de V sobre α, chama-se altura do cone (na Figura 2.11, é o segmento VH).*

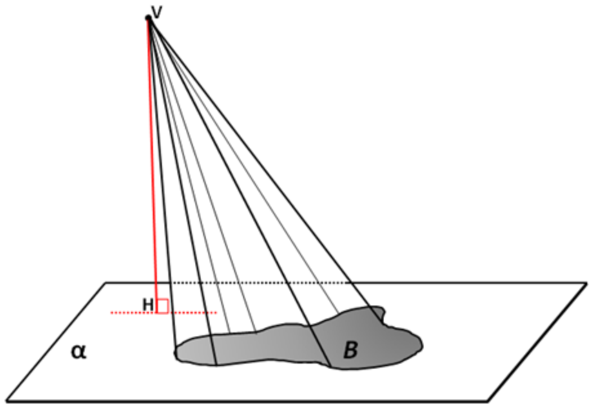

Figura 2.11: Cone.

Para este trabalho serão considerados para efeito de relações apenas os cones cujas bases são círculos ou simplesmente cones circulares, pois do mesmo modo do estudo do cilindro, é a base de interesse e compatibilidade com a necessidade do nível de escolaridade do aluno, salva a exceção de está trabalhando com o caso particular a seguir.

Observe que a definição de cone enunciada anteriormente inclui, como caso particular, a possibilidade da base B ser um polígono. Quando isso ocorre, o sólido K limita-se por faces planas e denomina-se por **pirâmide**.

Definição 2.4 (Pirâmide:) *é um cone cujas bases são polígonos (por consequência, suas faces laterais são triangulares).*

Casos Particulares de Pirâmides

Definição 2.5 *É chamado de tetraedro, toda pirâmide cuja base é um triângulo.*

Definição 2.6 *Tetraedro regular é todo tetraedro formado por quatro triângulos equiláteros.*

Classificação dos cones:

Dizemos que o cone é reto sempre que a projeção ortogonal do seu vértice sobre o plano que contém a base, coincide com o centro da base.

Um cone é chamado de cone oblíquo, quando o mesmo não é reto.

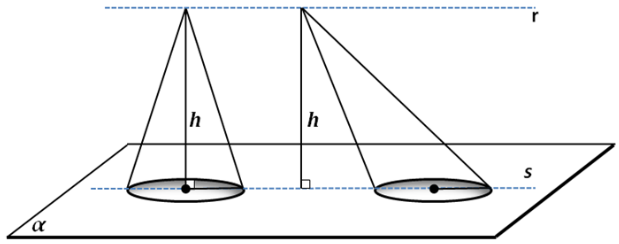

Figura 2.12: Classificação dos cones.

Quando no cone reto, a geratriz é igual ao diâmetro da base ($g = 2r$), o denominamos de cone equilátero.

Relação Importante Para o Cone Reto:

Observando a figura 2.13, o triângulo VOA é retângulo. Fazendo uso do Teorema de Pitágoras

$$g^2 = h^2 + r^2$$

em que: g = geratriz, h = altura e r = raio da base.

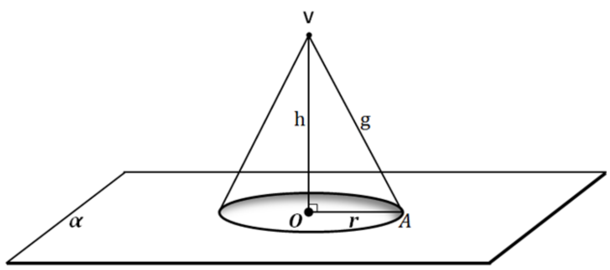

Figura 2.13: Relação para o cone reto.

A rotação de 360^0 de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos, gera um cone circular reto (*cone de revolução*):

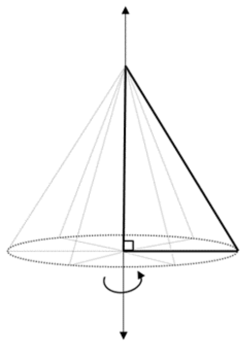

Figura 2.14: Cone de revolução.

2.4.1 Pirâmides e cones: cálculo de volumes

Para encontrar o volume de uma pirâmide, é importante ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume da mesma não se altera.

A Figura 2.15 mostra uma pirâmide de base triangular ABC (por conveniência, pois é mais simples de desenhar), contida no plano horizontal α, de vértice V e altura H. Um plano α' paralelo à α, distando h do vértice V, determinou nessa pirâmide uma secção DEF.

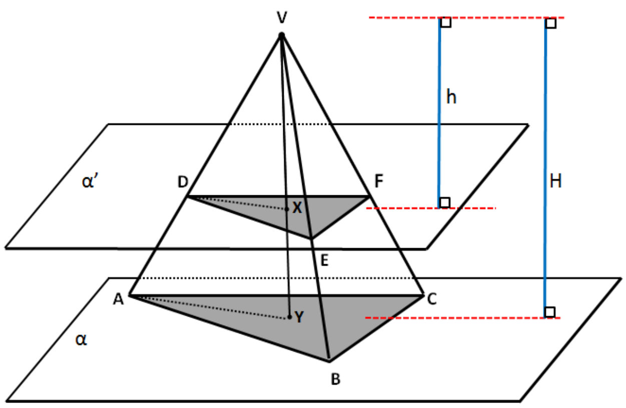

Figura 2.15: Relação entre sólidos semelhantes.

Definição 2.7 *Duas figuras* F_1 *e* F_2 *são semelhantes se existem uma função biunívoca* $\rho : F_1 \to F_2$ *e uma constante* $k > 0$ *tal que*

$$\frac{\overline{X_1X_2}}{\overline{\rho(X_1)\rho(X_2)}} = k.$$

Para quaisquer $x_1, X_2 \in F_1$.

Observação. 2.3 *É possível justificar que para figuras semelhantes planas a razão entre suas áreas é k^2, e para figuras semelhantes espaciais a razão entre seus volumes é k^3.*

Existem dois fatos importantes com relação à Figura 2.15:

Afirmação 2.4 *A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\dfrac{h}{H}$.*

Podemos observar que, por paralelismo, os seguintes casos de semelhança do tipo ângulo-ângulo são verificados:

$$\Delta DEF \sim \Delta ABC, \Delta VDE \sim \Delta VAB \;\; e \;\; \Delta VDX \sim \Delta VAX$$

Além disso, todos apresentam a mesma razão de semelhança, a saber

$$k = \frac{VY}{VX} = \frac{H}{h}.$$

Afirmação 2.5 *A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança*

Observe inicialmente o caso de triângulos

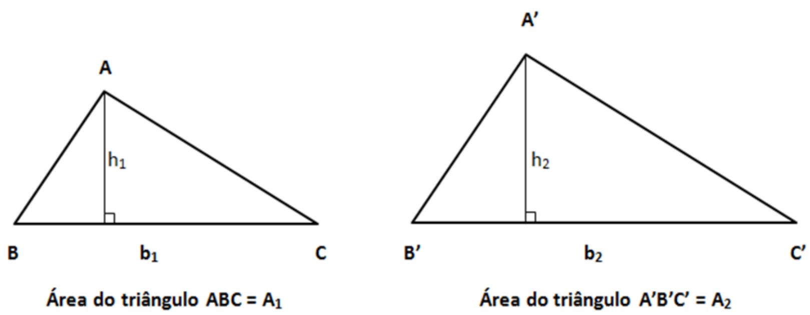

Figura 2.16: Semelhança de triângulos.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \Rightarrow \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k,$$

daí

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b_1 h_1}{\frac{1}{2} \cdot b_2 h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2.$$

Portanto

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2.$$

Para generalizar, dois polígonos semelhantes quaisquer sempre podem ser particionados em triângulos semelhantes como mostra a Figura 2.17

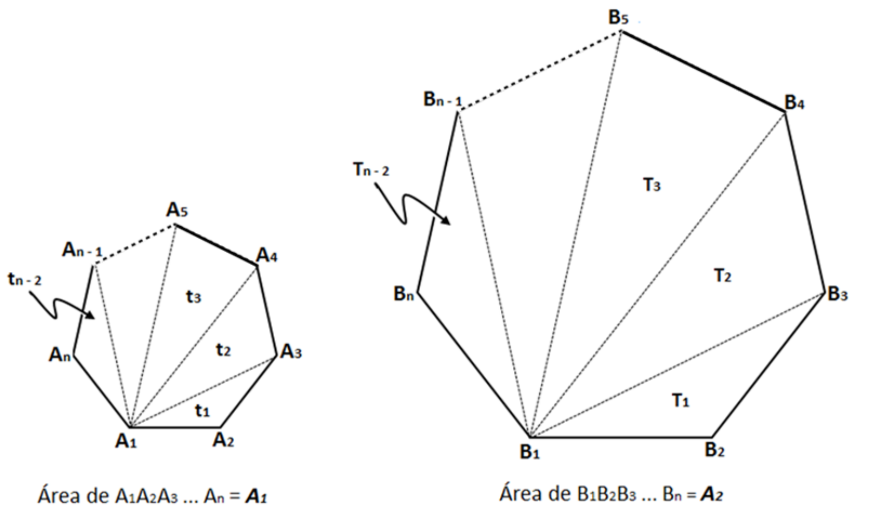

Figura 2.17: Polígonos semelhantes.

Foi mostrado no item anterior que:

$$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \quad \Rightarrow \quad t_i = k^2 T_i, \quad para \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n-2.$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{A_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2}} &= \frac{k^2 T_1 + k^2 T_2 + K^2 T_3 + \cdots + k^2 T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2}} \\ &= k^2 \cdot \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-2}} \\ &= k^2.\end{aligned}$$

A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale:

A razão entre duas áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Com relação aos dois fatos importantes apresentados e justificados anteriormente, segue um terceiro, que nos garante: *Se duas figuras são semelhantes na razão k, então a razão entre suas áreas é k^2 e a razão entre seus volumes é k^3.*

Teorema 2.6 *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.*

Demonstração A Figura 2.18 mostra duas pirâmides de mesma base ABC (podendo ser qualquer outra, tomada a base triangular, mais uma vez por conveniência do desenho), vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano α' paralelo à α, e com distância h dos vértices das pirâmides, gerou seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

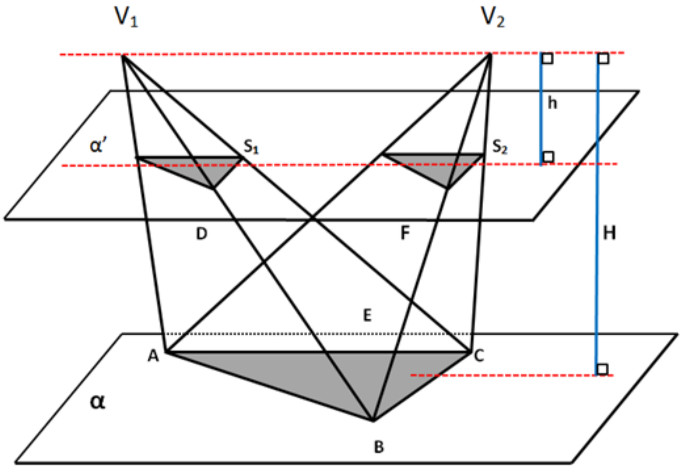

Figura 2.18: Pirâmides com mesma base e mesma altura.

Pela Afirmação 2.4, na Figura 2.16 são semelhantes os triângulos ABC e a seção S_1, bem como ABC e a seção S_2. Chamando a área da base ABC de A, a área da seção S_1 de A_1 e a área da secção de A_2, segue-se da Afirmação 2.5 que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

o que implica

$$A_1 = A_2.$$

As seções feitas por α' independente da altura, sempre vai gerar

$$A_1 = A_2.$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume.

Seja $ABCB'$ um tetraedro qualquer e considere o prisma de base ABC com a mesma altura do tetraedro. Observe que na Figura 2.19, após duas secções feitas no prisma, o mesmo ficará dividido de forma conveniente em três pirâmides: a própria $ABCB'(1)$, $A'B'C'A(2)$ e $ACC'B'(3)$. Note que as pirâmides $ABCB'$ e $A'B'C'A$ possuem bases congruentes ($ABC \equiv A'B'C'$) e alturas iguais ($BB' = AA'$), logo pelo teorema anterior, possuem o mesmo volume ($V_1 = V_2$).

Note ainda que as pirâmides $ACC'B'$ e $AA'B'C'$ possuem as bases ACC' e $AA'C'$ congruentes e, como a altura, a partir do vértice B' é igual para as duas, elas possuem o mesmo volume $(V_3 = V_2)$. Por consequência, tem-se que o volume do prisma foi dividido em três pirâmides de bases triangulares com volumes iguais $(V_1 = V_2 = V_3)$, logo, o volume de cada pirâmide é dada por um terço do volume do prisma.

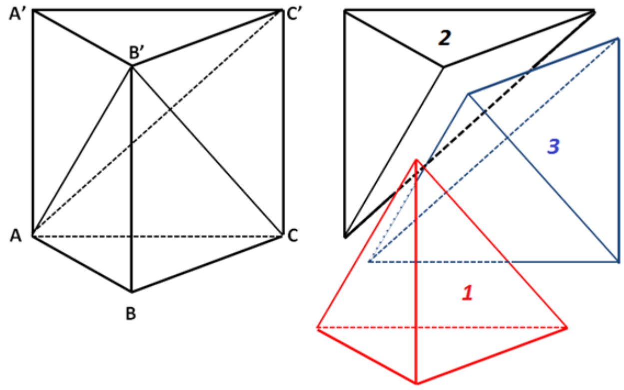

Figura 2.19: Volume da pirâmide de base triangular.

Para generalizar, basta imaginar que qualquer pirâmide, independente da base, pode ser dividida em pirâmides de bases triangulares, em que esses triângulos dessas bases estão justapostos por meio de diagonais. As novas pirâmides serão formadas por cada triângulo dessa fragmentação da base original e pelo vértice da mesma.

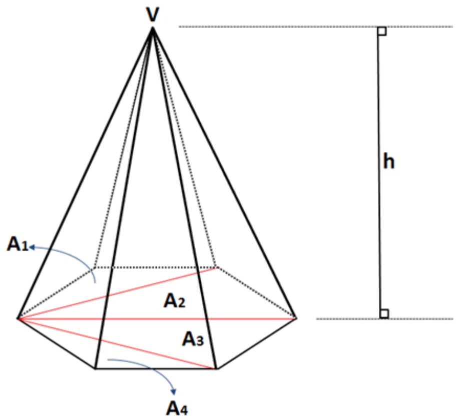

Figura 2.20: Volume da pirâmide de uma base poligonal qualquer.

Na Figura 2.20 , a pirâmide de base hexagonal de altura h, vai ter sua base, chamada de A, fragmentada em quatro triângulos de áreas A_1, A_2, A_3 e A_4, ou seja,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Como visto anteriormente, o volume de um tetraedro é dado por um terço do produto da área da base pela altura.
Considerando V_n, o volume do tetraedro de base A_n e altura h, tem-se:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h, \\ V_2 &= \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h, \\ V_3 &= \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot h, \\ V_4 &= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h. \end{aligned}$$

Considerando V o volume da pirâmide de base hexagonal, vem

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \\ &= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot h. \end{aligned}$$

De modo análogo, para um pirâmide de base com número de lados n, basta tomar

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

O volume do cone é encontrado recorrendo ao Princípio de Cavalieri. Basta tomar um cone e uma pirâmide correspondente a ele, ou seja com áreas de bases congruentes e alturas iguais e considerar um plano qualquer α' paralelo ao plano α que contém as bases.

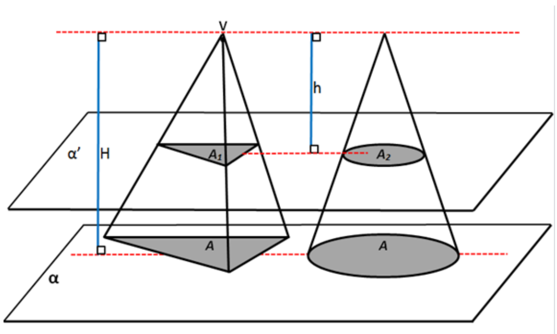

Figura 2.21: Volume do cone.

A razão de semelhança será a mesma para os dois sólidos, por consequência tem-se

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

o que implica

$$A_1 = A_2.$$

Daí conclui-se que o volume do cone é igual ao volume da pirâmide, logo:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h.$$

Na Figura 2.21 o plano α' dividiu o cone em dois sólidos, um é o cone menor, semelhante ao cone original e um outro é denominado *tronco de cone*.

2.5 Esfera

Definição 2.8 (Esfera) *Sejam um ponto O e um segmento de reta de medida R. A esfera de centro O e raio R, é conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R.*

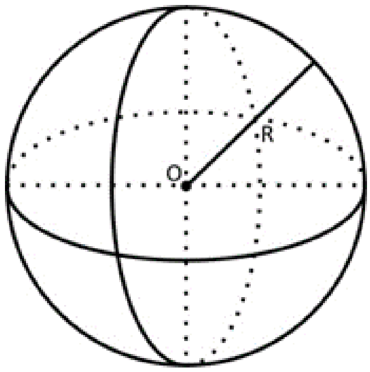

Figura 2.22: Esfera.

A rotação de 360^o de um semicírculo em torno do seu diâmetro, gera uma esfera:

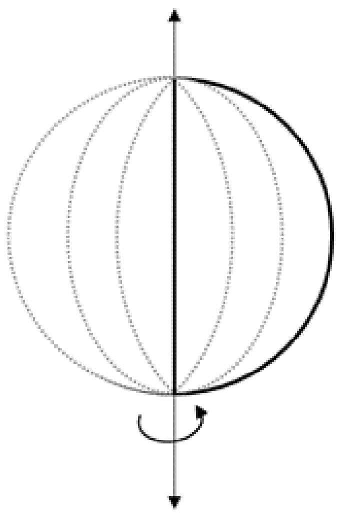

Figura 2.23: Esfera rotação de semicírculo.

2.5.1 Esfera: cálculo de volume

Para determinar o volume de uma esfera de raio R, imagine um outro sólido de tal forma que os dois estejam apoiados num mesmo plano horizontal α, e que as seções obtidas em ambos, feitas por planos paralelos ao plano de apoio, possuam a mesma área. Usando o Princípio de Cavalieri, conclui-se que os sólidos possuem o mesmo volume.

A figura escolhida, de forma conveniente, foi um cilindro em que a altura é igual ao diâmetro da base (cilindro equilátero), excluindo dois cones iguais no seu interior, de tal forma que as bases dos cones coincidam com as bases do cilindro e a altura de cada cone seja a metade da altura do cilindro (R). Por fim, que o raio do cilindro e o raio da esfera sejam iguais.

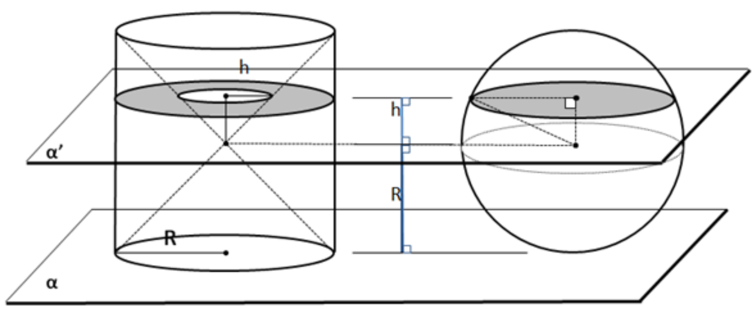

Figura 2.24: Volume da esfera.

Observe que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro, é um círculo de área $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$.

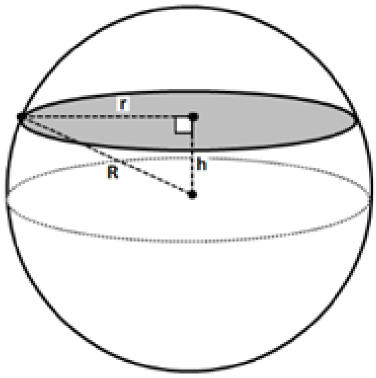

Figura 2.25: Seção esférica.

Note que as seções realizadas no cilindro, feitas a uma distância h do centro, sempre geram um círculo no cone de raio também h, sendo assim a área da seção no cilindro é igual a $\pi R^2 - \pi h^2$, exatamente a mesma área de secção gerada na esfera.

O volume da esfera e o volume do sólido obtido pela diferença do cilindro e dos dois cones (denominado clepsidra) são iguais, logo:

$$\begin{aligned} V_{Esfera} &= V_{Cilindro} - 2 \cdot V_{Cone} \\ &= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.6 Curiosidade

Uma sequência didática invertida

Como apresentado no trabalho, o prisma é um caso particular do cilindro e a pirâmide é um caso particular do cone. Por qual motivo, os livros didáticos nos faz acreditar que o cilindro é um caso particular do prisma e o cone é um caso particular da pirâmide? Na verdade, a inversão, é provavelmente por conta do nível de estudo e conhecimento exigido, pois a área de uma região plana qualquer não é fácil de calcular sem recursos mais avançados do Cálculo, limitando aqui, as bases circulares para os cilindros e cones, enquanto que os prismas e pirâmides gozam de uma diversidade maior de polígonos que representem suas bases, logo, os que apresentam um caso mais geral na visão do estudante de Ensino Médio, são os Prismas e as Pirâmides.

2.7 Análise de algumas questões propostas no ENEM.

Esta seção, tem como propósito, analisar formas de resolver algumas questões envolvendo conceitos e volumes de sólidos geométricos propostas pelo ENEM cujos raciocínios matemáticos são recorrentes. O mesmo apresenta tais questões com seus respectivos enunciados, gabaritos, resoluções e comentários.

2.7.1 O uso dos conceitos ou definições adequados, visualizações de rotações, dispensando o uso de cálculos

É importante que o professor mostre ao seu aluno a quantidade de questões que tem acontecido na prova do ENEM de modo a não necessidade de cálculos, para que o mesmo valorize sempre a questão conceitual e de visualização.

Aplicação 2.7 *ENEM-2010.1 - A siderúrgica "Metal Nobre"produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.*

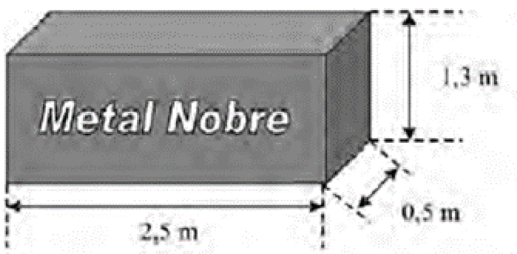

Figura 2.26: Paralelepípedo metal nobre.

O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

a) massa.

b) volume.

c) superfície.

d) capacidade.

e) comprimento.

Resposta: LETRA B.

Comentário:A questão exigiu apenas o conceito de volume de um paralelepípedo, não tendo necessidade de cálculo. Lembrando ainda que o volume representa o que um corpo (um sólido) ocupa no espaço, e a capacidade, o quanto ele é capaz de armazenar em seu interior.

Aplicação 2.8 *ENEM - 2011 - A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.*

Figura 2.27: Sombrinha.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

$a)$ pirâmide..

$b)$ semiesfera.

$c)$ cilindro.

$d)$ tronco de cone.

$e)$ cone.

Resposta: LETRA E.

Comentário: Questão que dispensa cálculo, exige apenas conhecimento da definição de cone.

Ver também as questões de Aplicações A1 e A2 nos Anexos.

2.7.2 Proporção entre volumes

Fica como sugestão que nessas situações apresentadas aqui neste item, notar o quão grande e importante é essa ideia de proporcionalidade.

Aplicação 2.9 *ENEM - 2010.1 - Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos também cilíndricos.*

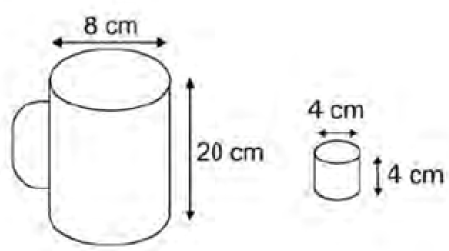

Figura 2.28: Leiteira copinho.

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo

Resposta: LETRA A.

Resolução: Considere o volume do copinho igual a v e o volume da leiteira igual a V. Fazendo uma relação entre os volumes, tem-se:

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20}{\pi \cdot 2^2 \cdot 4} = 20,$$

ou seja $V = 20v$.
Comentário: Razão entre volumes de sólidos (relação do tipo: quantas vezes o menor cabe no maior).

Aplicação 2.10 *ENEM - 2010.2 - Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:*

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

Figura 2.29: Água do planeta em esferas.

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares + ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

a) $\frac{1}{343}$.

b) $\frac{1}{49}$.

c) $\frac{1}{7}$.

d) $\frac{29}{136}$.

e) $\frac{136}{206}$.

Resposta: LETRA A.

Resolução: Duas esferas são sempre semelhantes, logo a razão de semelhança, dados os diâmetros é de

$$k = \frac{58}{406} = \frac{1}{7}.$$

A razão entre seus volumes é k^3, logo,

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}.$$

Comentário: *Questão que envolve semelhança entre sólidos, logo pode ser evitada a busca pela fórmula de volumes, desde que seja conhecida a razão entre dois segmentos correspondentes desses sólidos semelhantes.*

Ver também as questões de Aplicações A3, A4 e A5 nos Anexos.

2.7.3 Diferença de volumes

Uma outra situação comum é a extração parcial de um sólido interno a outro, fazendo assim com que a subtração entre eles represente o raciocínio correto desejado.

Aplicação 2.11 *ENEM - 2013 - Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de* $1m$ *de profundidade e volume igual a* $12\ m^3$*, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura.*

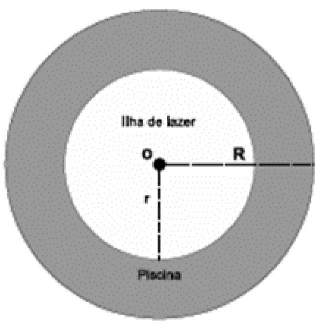

Figura 2.30: Coroa circular.

O raio da ilha de Iazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado a água na piscina tenha um volume de, no mínimo, $4m^3$*. Considere* 3 *como valor aproximado para* π*. Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de*

$a)$ $1,6$.

$b)$ $1,7$.

$c)$ $2,0$.

$d)$ $3,0$.

$e)$ $3,8$.

Resposta: LETRA A.

Resolução:

$$V_{inicialdapiscina} = 12m^3 \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 h = 12m^3 \quad \Rightarrow \quad 3R^2 \cdot 1m = 12m^3 \quad \Rightarrow \quad R = 2m$$

$$V_{novapiscina} = 4m^3 \quad \Rightarrow \quad \pi(R^2 - r^2)h = 4m^3 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \Rightarrow \quad r \cong 1,6.$$

Comentário: A questão exigiu conhecimento sobre volume de cilindro; e posteriormente perceber que o desejado é obtido pela diferença entre volume de dois cilindros.

Aplicação 2.12 *ENEM - 2010.1 - Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede* 12 *cm e a do cubo menor, que é interno, mede* 8 *cm.*

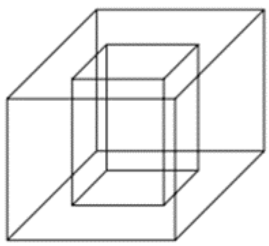

Figura 2.31: Porta-lápis cúbico.

O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

$a)$ $12cm^3$.

$b)$ $64cm^3$.

$c)$ $96cm^3$.

$d)$ $1216cm^3$.

$e)$ $728cm^3$.

Resposta: LETRA D.

Resolução:

$$\begin{aligned}
V_{madeira} &= V_{cubomaior} - V_{cubomenor} \\
&= 12^3 - 8^3 \\
&= 1728 - 512 \\
&= 1216.
\end{aligned}$$

Portanto $V_{madeira} = 1216cm^3$.

Comentário: A questão exigiu conhecimento sobre volume de cubo; e posteriormente perceber que o desejado é o cálculo da diferença entre volume de dois cubos.

Ver também as questões de Aplicações A6 e A7 nos Anexos.

2.7.4 Relação entre volumes

A relevância desse tópico diz respeito a comparação entre volumes de sólidos com formas iguais ou diferente. (é a ideia de "quantos desse tipo cabem nesse outro?").

Aplicação 2.13 *ENEM - 2010.1 - Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a*

$a)$ $15cm$.

$b)$ $6cm$.

$c)$ $12cm$.

$d)$ $24cm$.

$e)$ $25cm$.

Resposta: LETRA B.

Resolução: Denotemos por P o volume do paralelepípedo, e por C o volume do cubo de aresta a. Do enunciado temos que

$$C = P, \quad \text{daí segue que } a^3 = 3cm \cdot 18cm \cdot 4cm$$

logo,

$$a^3 = (3^3 \cdot 2^3)cm^3.$$

Portanto

$$a = 6cm.$$

Comentário: Uma relação entre volumes de sólidos muitas vezes dará uma noção melhor daquela capacidade que está sendo exposta na situação. Por exemplo: as vezes se fala da capacidade de uma caixa d'água ou de um reservatório para armazenar certo produto, e o estudante nem sempre consegue assimilar se é grande ou pequena tal capacidade. Ao comparar com algo mais palpável, ou pelo menos algo mais simples de se enxergar, como um copo, uma bacia, um balde, uma garrafa, etc, fica mais fácil a compreensão do que está sendo exposto. Mais uma vez, aparece aí a ideia inicial de volume, apresentada no início do capítulo 2.

Aplicação 2.14 *ENEM - 2010.1 - Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.*

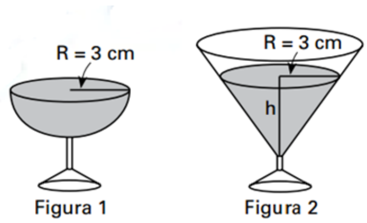

Figura 2.32: Taças para champanhe.

Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad e \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocada na outra taça, em centímetros, é de

$a)$ 1,33.

$b)$ 6,00.

$c)$ $12,00.$

$d)$ $56,52.$

$e)$ $113,04.$

Resposta: LETRA B.

Resolução: Como foi exigido que os volumes fossem iguais, tem-se:

$$V_{esfera} = V_{cone} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi 3^3 = \frac{1}{3}\pi 3^2 h \quad \Rightarrow \quad h = 6cm.$$

Comentário: A questão envolve comparação entre sólidos com formas diferentes porém com o mesmo volume.

Capítulo 3

Planificações, relações de comprimentos e de áreas de sólidos geométricos com algumas aplicações

Este capítulo tem por objetivo apresentar sugestões de cálculos de áreas, relações de comprimentos, e uma proposta de visualização de planificação para alguns sólidos geométricos, com o propósito de melhorar a visão daquilo que se deseja encontrar ou calcular.

Como no capítulo anterior, existe antes de se fazerem cálculos, uma necessidade conceitual de compreender

- Comprimento: (Axiomas sobre Medições de Segmentos) A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes. O número a que se refere este axioma é chamado de distância entre os pontos ou é referido como o comprimento do segmento determinado pelos dois pontos. (Está implícito no enunciado do axioma, a escolha de uma unidade de medida) (BARBOSA[1]).

- Área: Intuitivamente, a área de uma região do plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado (MUNIZ NETO[12]).

  Observação. 3.1 *: Em geral dizemos "a área de um quadrado"quando deveríamos dizer "a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado". [1]*

- Planificação de um sólido: Quando uma superfície puder ser gerada pelo movimento de uma linha reta denomina-se **REGRADA**, caso contrário diz-se que é CURVA. Quando uma superfície regrada pode ser "desenrolada"para um plano, sem provocar "pregas"ou "rasgos"diz-se que a superfície é **PLANIFICÁVEL**; apenas superfícies regradas são planificáveis, embora nem todas sejam.

3.1 Área da base: cilindros, cones, prismas e pirâmides

Denomina-se por Área da Base (será aqui representada por AB), a área que compõem a base dos sólidos. Como já citado e justificado no capítulo anterior, para o estudo dos cilindros e dos cones, o trabalho restringe-se aos de bases circulares, por consequência, para o cálculo dessas bases, deve-se utilizar a área de um círculo. Considerando que tal círculo possua um raio r, vem, $AB = \pi r^2$. Para prismas ou pirâmides, a área de cada base será calculada de acordo com a forma do polígono que a define, não podendo assim ser generalizada. Por exemplo: se a questão trata sobre um prisma (ou uma pirâmide) de base hexagonal regular, deve-se utilizar a área de um hexágono regular.

3.2 Área lateral: cilindros, cones, prismas e pirâmides

Denomina-se por Área Lateral (será aqui representada por A_L), a área que reveste lateralmente o sólido. Para uma melhor compreensão de como calcular essa área, é conveniente fazer a planificação da mesma, para que fique mais clara a sua visualização. Serão feitas aqui, algumas dessas planificações:

3.2.1 Planificação lateral de um cilindro reto

A planificação da área lateral de um cilindro reto, é dada por um retângulo, cuja base é o perímetro da base do cilindro e a altura, é a altura do cilindro.

$$\text{Área Lateral} = \text{Área do Retângulo} = \text{base} \cdot \text{altura} = 2\pi rh.$$

Ou seja,

$$A_L = 2\pi rh.$$

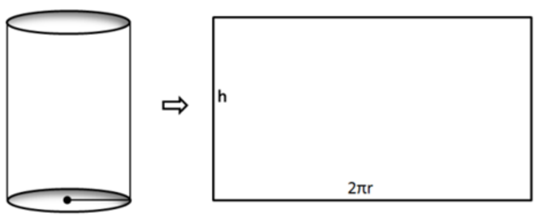

Figura 3.1: Lateral do cilindro.

3.2.2 Planificação lateral de um cone reto

A planificação da área lateral de um cone reto, é dada por um setor circular, em que o raio do setor R é a geratriz do cone g e o comprimento determinado pelo ângulo central do setor é o perímetro da base do cone.
Fazendo uma regra de três simples, tem-se que:
O ângulo de 360^o (do círculo todo), determina um comprimento $2\pi R = 2\pi g$ que por sua vez limita uma área igual a $\pi R^2 = \pi g^2$. Do mesmo modo que o ângulo central α, gerado pelo setor, determina na circunferência um comprimento $2\pi r$ cuja área limitada pelo mesmo corresponde a área lateral desejada.

Daí vem,

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{\pi R^2 \cdot 2\pi r}{2 \cdot \pi R} \\ &= R\pi r \\ &= \pi r g. \end{aligned}$$

Portanto

$$A_L = \pi r g.$$

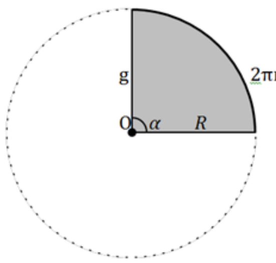

Figura 3.2: Lateral de um cone planificada.

3.2.3 Planificação lateral de um prisma reto e a área lateral de uma pirâmide regular

A área lateral de um prisma de n lados é formada por n paralelogramos (faces laterais). No caso particular de um prisma reto, esses paralelogramos são retângulos. No caso ainda mais específico de ser um prisma reto, e com base regular (prisma regular), esses retângulos são todos iguais. Daí, pode-se escrever a área lateral do prisma de n lados da seguinte forma:

$$A_L = A_{F_1} + A_{F_2} + \cdots + A_{F_n}.$$

Onde A_{F_i}, com $1 \leq i \leq n$ e $n \geq 3$, representa a área de cada retângulo que reveste lateralmente o prisma.

- **Planificação de um prisma reto de base triangular** (A_B)

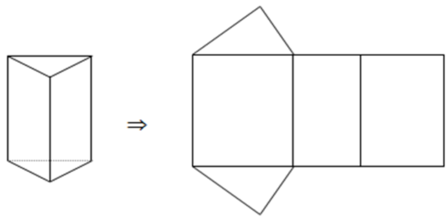

Figura 3.3: Prisma área total planificada.

Veja a seguir, a planificação da área lateral

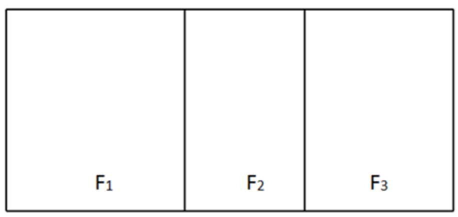

Figura 3.4: Prisma planificação da área lateral.

$$A_L = A_{F_1} + A_{F_2} + A_{F_3}.$$

De um modo geral, para um prisma com n faces laterais, a área lateral é representada por:

$$A_L = A_{F_1} + A_{F_2} + \cdots + A_{F_n}.$$

Observação. 3.2 *Para os prismas regulares, as faces laterais são todas iguais, logo*

$$A_{F_1} = A_{F_2} = \cdots = A_{F_n} = A_F.$$

Por consequência, a área lateral é representada por:

$$\begin{aligned} A_L &= A_{F_1} + A_{F_2} + \cdots + A_{F_n} \\ &= A_F + A_F + \cdots + A_F \\ &= n \cdot A_F \end{aligned}$$

Observação. 3.3 *De modo análogo ao prisma, aplica-se o mesmo para as pirâmides, sendo as faces laterais das pirâmides, dadas por triângulos.*

3.2.4 Análise de uma pirâmide regular

Para melhor compreensão da análise sugerida na subseção, antes é importante visualizar uma pirâmide e suas partes.

Partes da Pirâmide: Vejamos a pirâmide quadrangular regular

- $ABCD = base.$
- $V =$ vértice da pirâmide.
- $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD}\ e\ \overline{DA} =$ arestas das bases.
- $\overline{VA},\ \overline{VB},\ \overline{VC}\ e\ \overline{VD} =$ arestas laterais.
- $VAB,\ VBC,\ VCA$ e $VDA =$ faces laterais.

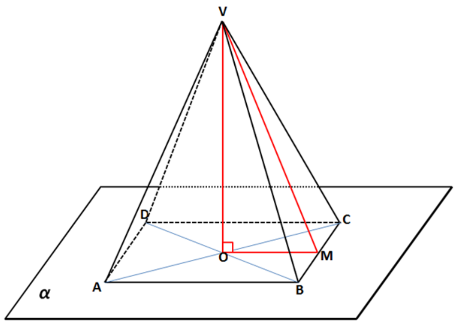

Figura 3.5: Pirâmide regular.

O triângulo VOM é retângulo em O, logo:

$$\overline{VM}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OM}^2$$

Em que:

$$\begin{aligned} \overline{VM} &= \text{apótema da pirâmide } (altura\ da\ face\ VBC) \\ \overline{VO} &= altura\ da\ \text{pirâmide} \\ \overline{OM} &= \text{apótema } da\ base. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definição 3.1 *Pirâmide regular é toda pirâmide cuja base é um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.*

Características de uma pirâmide regular:

- A projeção ortogonal do vértice sobre o plano que contém a base, coincide com o centro da base.
- As arestas laterais são congruentes, bem como são congruentes e isósceles os triângulos que determinam a área lateral.
- O apótema da pirâmide, é o segmento de reta com extremidades no vértice da pirâmide e no ponto médio de uma das aresta da base; coincide com a altura de uma face lateral.

3.3 Área total: cilindros, cones, prismas e pirâmides

Denomina-se por Área Total (será aqui representada por A_T), a soma de todas as áreas apresentadas pelo sólido.

Mais uma vez fica como sugestão, verificar se o sólido é planificável. Em caso afirmativo, verifique em quais figuras planas o mesmo será subdividido, calcule as áreas dessas figuras e depois some todas elas. Com isso estará obtendo a área total do sólido. Nas Seções 3.1 e 3.2 já foram mostradas as ideias do que seriam os cálculos das áreas das bases e das áreas laterais dos cilindros, cones, prismas e pirâmides. Essas áreas mostradas nessas seções são suficientes para que se encontre a área total. É muito comum encontrar nos livros didáticos, por exemplo para um cilindro, uma fórmula pronta para sua área total. Os mesmos, em geral, apresentam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2 \cdot A_B \\ &= 2\pi rh + 2\pi \cdot \pi \cdot r^2 \\ &= 2\pi r \cdot (h + r). \end{aligned} \tag{3.2}$$

A última relação apresentada, muitas vezes aparece até em destaque, mas aí encontra-se um risco: O estudante decora a fórmula como se a mesma fosse soberana, e ele coloca em cheque o que aprendeu quando a situação envolve um copo com a forma cilíndrica, sem tampa e de forma inocente faz o uso da mesma, nessa situação apresentada. Óbvio que errará, pois a fórmula pronta foi definida para duas bases e o copo apresenta uma única base. Essa situação se repete quando se fala no revestimento de uma piscina na forma de um prisma... Mesmo erro! Planifique e visualize o que de fato precisa ser calculado.

3.4 Paralelepípedo e cubo: casos particulares do prisma

3.4.1 Paralelepípedo retângulo

Já visto e definido no Capítulo 2, o intuito aqui para o paralelepípedo retângulo é mostrar o cálculo da diagonal e da área total, bem como uma relação envolvendo as mesmas.

Seja o paralelepípedo $ABCDEFGH$ a seguir:

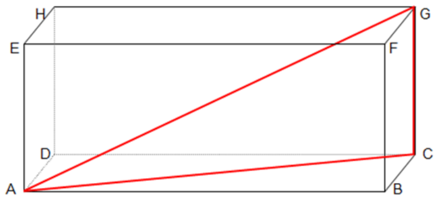

Figura 3.6: Diagonal do paralelepípedo.

O triângulo ABC formado na face $ABCD$ (base) é retângulo em B, daí, vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

Definição 3.2 (Diagonal) *Segmento de reta que passa pelo centro do paralelepípedo e com extremidades coincidindo com vértices pertencentes à faces opostas.*

O segmento $\overline{AG}$ representa uma das diagonais do paralelepípedo, e o triângulo ACG também é retângulo (desse vez em C), logo:

$$\begin{aligned} \overline{AG}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto,

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2}.$$

Considerando as dimensões $\overline{AG} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CG} = c$ e a diagonal $\overline{AG} = d$, reescrevendo a relação acima, temos:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

- **Área Total:**

$$A_T = 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc,$$

logo

$$A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc).$$

Relação Importante:

Pouco se percebe que a relação a seguir é proveniente de um produto notável, sendo a mesma esquecida pelos livros didáticos.

Desenvolvendo $(a+b+c)^2$, vamos obter a relação:

$$
\begin{aligned}
[a+(b+c)]^2 &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 \\
&= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Daí, podemos observar que

- $(a+b+c)$ = soma das dimensões do paralelepípedo.
- $a^2+b^2+c^2 = d^2 =$(medida da diagonal do paralelepípedo)^2.
- $2ab+2ac+2bc = A_T =$ (área total do paralelepípedo).

Veja um problema proposto que estava em um livro didático (BUCCHI) [4] (sendo que o mesmo não apresentava a relação acima):

Um paralelepípedo retângulo, cuja soma das medidas das três dimensões é $12cm$, tem uma diagonal medindo $5\sqrt{2}$. Calcule a área total desse paralelogramo.

Usando a relação, vem:

$$(a+b+c)^2 = d^2 + A_T$$

Daí

$$(12cm)^2 = (5\sqrt{2}cm)^2 + A_T.$$

Portanto,

$$A_T = (144-50)cm^2 \quad \Rightarrow \quad A_T = 94cm^2.$$

3.4.2 Cubo (hexaedro regular)

Considerando um cubo, como um caso específico de um paralelepípedo em que $a=b=c$, suas relações serão encontradas de forma análoga.

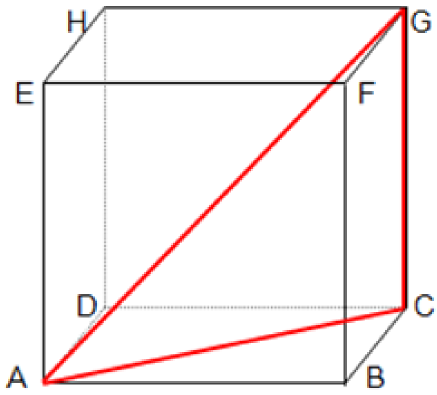

Figura 3.7: Diagonal do cubo.

Assumindo

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CG} = a,$$

Com o mesmo raciocínio da Subseção 3.4.1, vem:

- Diagonal do cubo: $d = a\sqrt{3}$.
- Área Total: $A_T = 6 \cdot a^2$.

A seguir, uma possível planificação para um cubo de aresta a.

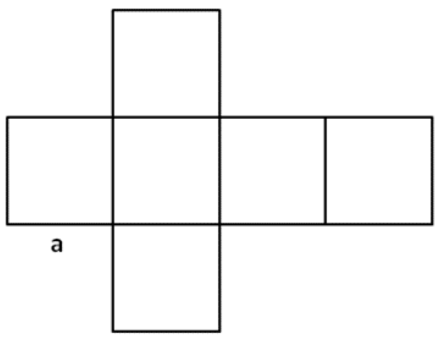

Figura 3.8: Planificação do cubo.

3.5 Área da superfície esférica

Esta seção traz uma ideia do cálculo de uma superfície esférica, tendo em vista que poucos livros didáticos discutem tal relação (entendamos aqui como superfície esférica, o conjunto dos pontos do espaço que mantém uma mesma distância R de um ponto dado, sendo R o raio da esfera).

Justificativa da fórmula da área da superfície de uma esfera. Imaginemos uma esfera inscrita em um poliedro com muitas faces, todas tangentes à esfera. O poliedro pode ser visto como a união de pirâmides, cada uma com base coincidindo com uma das faces do poliedro e o vértice coincidindo com o centro da esfera.

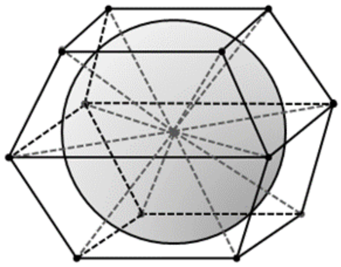

Figura 3.9: Superfície esférica.

Supondo o poliedro com n faces, temos n pirâmides de alturas iguais ao raio da esfera, R. Sejam $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ as áreas das bases das pirâmides e V_n o volume do poliedro.

Temos:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \frac{1}{3}A_3R + \cdots + \frac{1}{3}A_nR \\ &= \frac{R}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n). \end{aligned}$$

Para n muito grande, V_n é aproximadamente igual ao volume V da esfera e a soma $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ tende à área A da superfície esférica (aumentando cada vez mais o n, as aproximações ficam cada vez melhores). Com n "tendendo a infinito", teremos a igualdade

$$V = \frac{R}{3}A.$$

Uma vez que justificada no capítulo anterior a fórmula do volume, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, conclui-se que:

$$A = \frac{3}{R}V = \frac{3}{R}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2.$$

Portanto

$$A = 4\pi R^2.$$

3.6 Curiosidade

Uma visualização das planificações laterais de um cilindro oblíquo e de um cone oblíquo.

Em geral não encontramos de forma fácil algo sobre a planificação lateral de um cilindro ou de um cone oblíquo, pois não é de simples compreensão, e os recursos utilizados são sofisticados, fugindo assim a proposta do trabalho aqui apresentado.

Fica como uma ideia de tais planificações as figuras abaixo, para que a partir das mesmas, seja possível notar que é inviável uma análise mais detalhada sobre o assunto.

- A planificação do cilindro oblíquo pode fazer-se por meio da aproximação da sua superfície à de um prisma, e a planificação do cone oblíquo pode fazer-se meio da aproximação da sua superfície à de uma pirâmide. O resultado é tanto melhor quanto mais refinada for a aproximação. [16]

Planificação da Superfície Lateral de um Cilindro Oblíquo

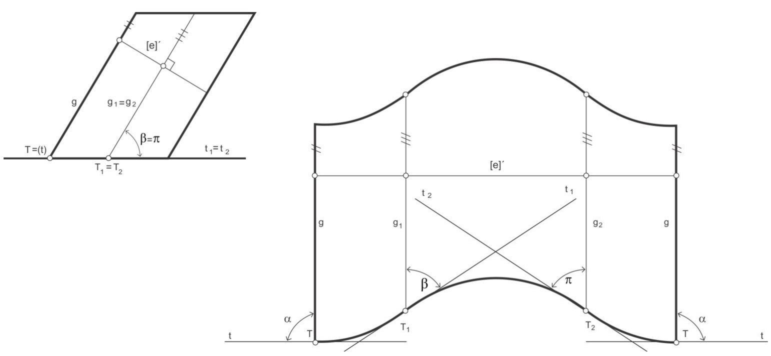

Figura 3.10: Planificação cilindro oblíquo.

Planificação da Superfície Lateral de um Cone Oblíquo

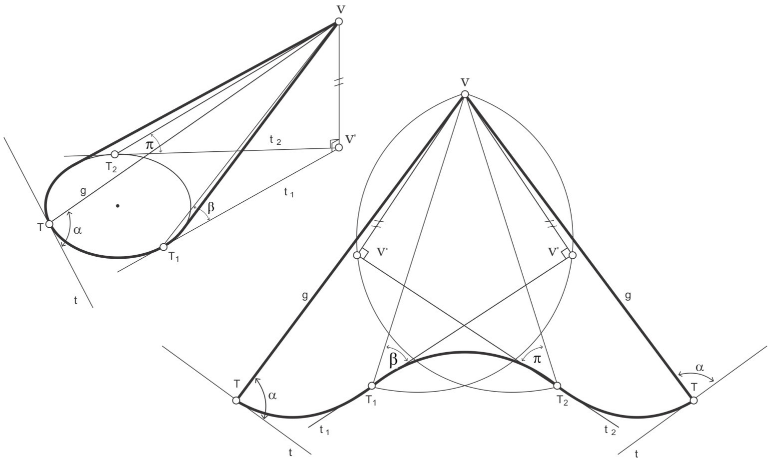

Figura 3.11: Planificação cone oblíquo.

3.7 Análise de algumas questões propostas no ENEM: conceitos, planificações, relações trigonométricas e projeções ortogonais

Nesta seção, apresentaremos algumas das questões do ENEM que possuem raciocínios matemáticos recorrentes ao longo das suas edições e tem como objetivo chamar a atenção, assim como no capítulo anterior, para as situações envolvendo a parte conceitual. Outras situações apresentadas aqui são as visualizações de planificações, o uso da trigonometria e as projeções ortogonais. As questões contemplam o enunciado, o gabarito, a resolução e o comentário.

3.7.1 O uso dos conceitos adequados associados a visualização, dispensando o uso de cálculos

O uso dos conceitos adequados associados a visualização, dispensando o uso de cálculos.

Aplicação 3.1 *ENEM - 2012 - Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.*

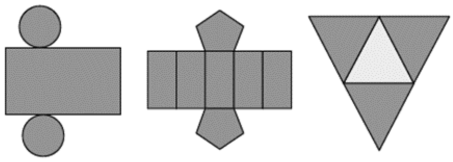

Figura 3.12: Figuras planificadas.

Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Resposta: LETRA A.

Resolução: Reconhecer um sólido a partir da sua planificação.

Comentário: A questão exige apenas uma compreensão da planificação de alguns sólidos. Neste caso: cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

Aplicação 3.2 *ENEM - 2010.1 - Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.*

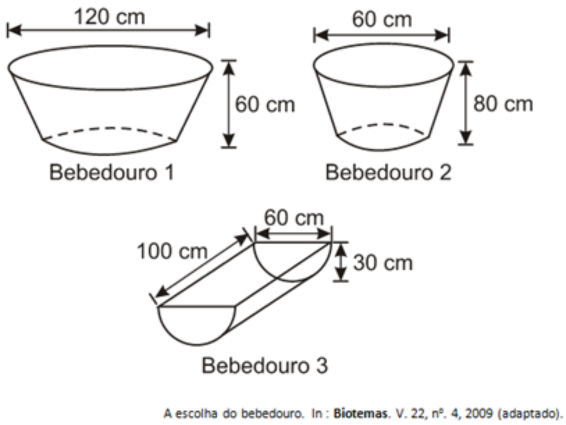

Figura 3.13: Bebedouros.

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

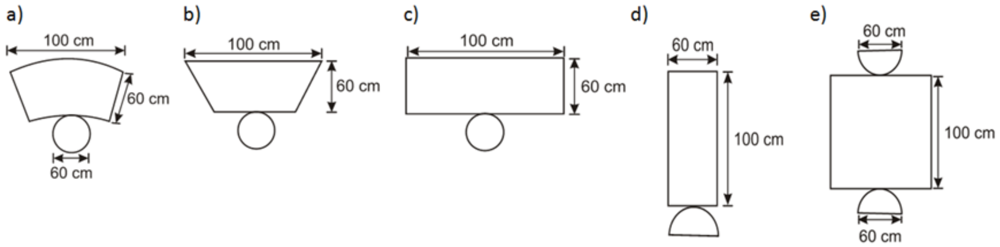

Figura 3.14: Bebedouros planificados.

Resposta: LETRA E.

Comentário: A questão exigiu apenas a noção da planificação de um semicilindro.

Ver também a questão de Aplicação A8 nos Anexos.

3.7.2 Planificações

Muito parecido com o item anterior, neste item, além da necessidade de um boa visualização, é necessário também fazer uma relação de valores, posições e conceitos.

Aplicação 3.3 *PROFMAT 2013 - A figura abaixo apresenta a planificação de um cubo. A face oposta à face 1*

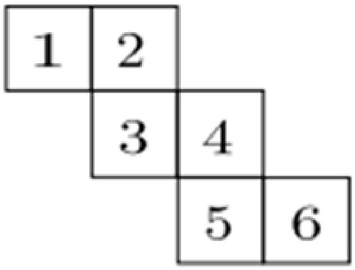

Figura 3.15: Cubo planificado.

a) é a face 3.

b) é a face 4.

c) é a face 5.

d) é a face 6.

e) não pode ser determinada

Resposta: LETRA B.

Comentário: Dobrando as faces mentalmente, sem necessidade de cálculos ou construções, encontra como face oposta à face 1, a face de número 4.

Aplicação 3.4 *ENEM - 2010.1 - A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.*

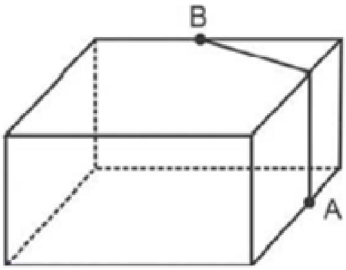

Figura 3.16: Planificação cabo tv.

Nesse salão, o ponto em que chega o sinal de TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para transmissão de jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

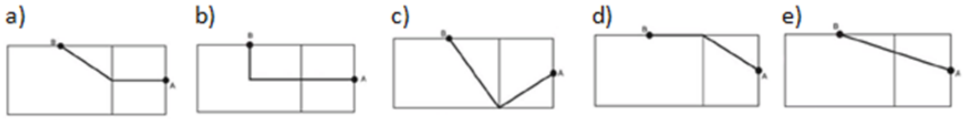

Figura 3.17: Planificação cabo tv opções.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

Resposta: LETRA E.

Comentário: Após a planificação, percebe-se que a menor distância entre os pontos A e B é uma reta.

3.7.3 Relações trigonométricas

- Em muitos dos problemas apresentados na geometria espacial métrica, as soluções dos mesmos têm exigido a aplicação da trigonometria básica, como o uso do Teorema de Pitágoras e das razões métricas no triângulo retângulo.

Aplicação 3.5 *ENEM - 2013 - As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de* $15°$ *com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB).*

Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.fickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Figura 3.18: Prisma oblíquo.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de $15°$ *e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço*

a) *menor que 100 m^2.*

b) *entre 100 m2 e 300 m^2.*

c) *entre 300 m2 500 m^2.*

d) *entre 500 m2 e 700 m^2.*

e) *maior que 700 m^2.*

Resposta: LETRA E.

Resolução: Considerando L, o lado da base e aplicando a tangente de $15°$, tem-se:

$$tg15° = \frac{L}{114} \quad \Rightarrow \quad L = 114 \cdot 0,26 \quad \Rightarrow \quad L = 29,64m$$

$$A_{base} = L^2 \quad \Rightarrow \quad A_{base} = 29,64^2 \quad \Rightarrow \quad A_{base} \cong 878,52m^2 > 700m^2.$$

Comentário: A questão aborda a relação tangente no triângulo retângulo e área de um quadrado. É preciso ter um cuidado na interpretação da figura para a aplicação da tangente, pois é dito no enunciado que o ângulo de $15°$ é com a vertical, onde é comum nessas situações o ângulo dado, ser formado com a horizontal.

Aplicação 3.6 *PROFMAT 2014 - Uma pirâmide de base quadrada tem todas as arestas congruentes, de medida 8. A altura da pirâmide (em relação à base quadrada) mede?*

a) $4\sqrt{2}$.

b) 4.

c) $2\sqrt{2}$.

d) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

e) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Resposta: LETRA A.

Resolução:

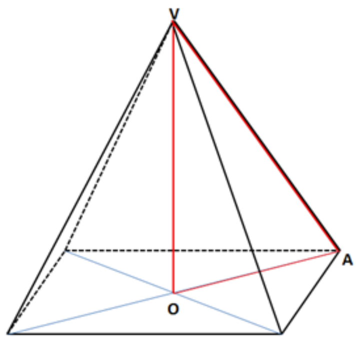

Figura 3.19: Pirâmide questão.

Como todas as arestas são iguais, o segmento AO, tem medida igual a metade da diagonal da base, logo $AO = 4\sqrt{2}$. O comprimento VA mede 8 e, sendo VO a altura, por definição é perpendicular a base em O, fazendo assim com que o triângulo VOA seja retângulo em O. Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$8^2 = (4\sqrt{2})^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 64 - 32 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad h = 4\sqrt{2}.$$

Comentário: A questão abordou conhecimentos básicos sobre as partes da pirâmide e uma aplicação do Teorema de Pitágoras.

Ver também as questões de Aplicações A9, A10 e A11 nos Anexos.

3.7.4 Projeções ortogonais

- Mais uma vez é exigido aqui uma visualização aguçada, pois antes de qualquer cálculo, é necessário compreender bem, como certos objetos se comportam ao serem projetados ortogonalmente em um determinado plano.

Aplicação 3.7 *ENEM - 2012 - O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.*

Na Figura 2, o ponto A está no plano da chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão.

Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

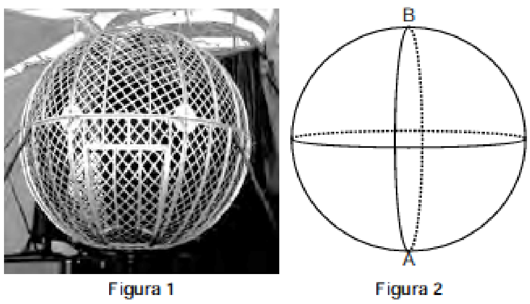

Figura 3.20: Globo da morte.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

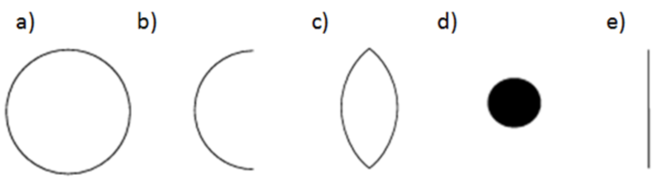

Figura 3.21: Globo da morte projeção da luz.

Resposta: LETRA E.

Resolução:
O plano que contém A e B dessa circunferência é perpendicular ao plano do chão, logo a

imagem (ou projeção) do trajeto feito pelo motoqueiro é um segmento de reta.

Comentário: Interpretar a projeção de um objeto sobre um plano, visto a partir de um ponto fixo.

Aplicação 3.8 *ENEM - 2012 - João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.*

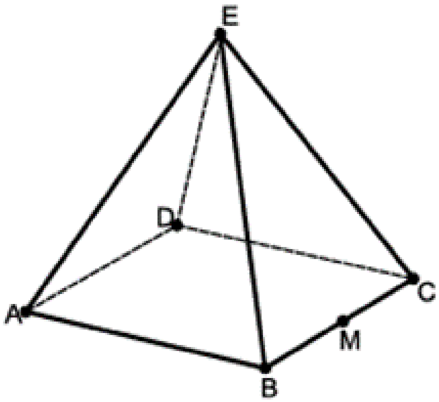

Figura 3.22: Pirâmide projeção.

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

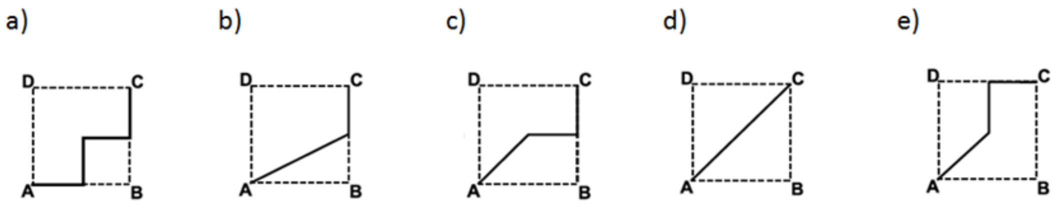

Figura 3.23: Pirâmide projeção solução.

Resposta: LETRA C.

Comentário: O conhecimento exigido nessa questão, é apenas o da projeção ortogonal do trajeto descrito por João, sobre o plano que contém à base.

Capítulo 4

A geometria e o cotidiano

Neste capítulo, serão apresentadas algumas situações práticas sob forma de textos, que servirão como exemplos para uma atividade sugerida ao final deste mesmo capítulo, e com isso aguçar ainda mais o interesse e a curiosidade sobre o que foi apresentado ao longo de todo o trabalho, quem sabe assim tornando o leitor ainda mais entusiasmado pelo assunto.

4.1 Embalagens de refrigerantes, em geral são cilíndricas. Praticidade, estética ou economia?

Figura 4.1: Evolução das latinhas de refigerante.

É comum nas prateleiras dos supermercados, encontrarmos diversos segmentos de gêneros alimentícios com suas respectivas embalagens, não existindo um único padrão para os mesmos, como alguns exemplos a seguir: Doces, Maioneses, óleos, queijos, biscoitos e tantos outros. Essa regra de formas diferentes de embalagens para um mesmo produto não se emprega para os refrigerantes que em sua totalidade ou quase ela, apresentam formas predominantemente cilíndricas.

De forma ainda mais específica para os refrigerantes, temos as latas, que ao longo do tempo perduram-se com alterações mínimas no seu design, mantendo-se quase 100%

cilíndrica, como em outrora. Atualmente elas apresentam próximos as bases, troncos de cones de forma sutil, não modificando em quase nada com relação as pioneiras.

Será por uma questão de praticidade? Será por uma questão de estética? Será por uma questão de economia?

Provavelmente todos acima estão corretos. Levando em consideração que o consumo da bebida na lata é feito diretamente na mesma, não tendo dificuldades assim de escolher o lado para colocar a boca, já que a mesma é circular. Esse tipo de forma é mais viável, quando o consumo é feito diretamente na embalagem apresentada. Muito se justifica também a questão de segurar o produto, pois sendo cilíndrica a embalagem, o consumidor terá mais conforto ao segurá-la. Nesse caso, essa justificativa talvez ofusque a mais importante delas, a da economia na confecção da embalagem que apresenta tal forma, sendo essa a mais barata para indústria que comportará a capacidade apresentada no seu rótulo. Como apresentado no Capítulo 3, a área total de certo sólido é o somatório de todas as áreas que o compõe e, no caso dos prismas e dos cilindros, o produto entre a área da base e a altura determina seu volume. Dentre os dois citados, aquele que apresentará o menor custo de material para sua confecção, com capacidades iguais, é o de forma cilíndrica, pois o círculo é a figura plana para a base de maior área e menor comprimento. A *desigualdade isoperimétrica* afirma que qualquer curva fechada de comprimento l cerca uma área menor ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$ e que o valor só é atingido se a curva for um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$ (ver mais no apêndice A), logo sendo interessante para o fabricante por uma questão de economia. Dentre os cilindros, o equilátero é o que apresentará a economia máxima. A justificativa pode ser encontrada no TCC - PROFMAT de André Costa da Fonte, Médias, desigualdades e problemas de otimização [5].

4.2 Espaço interno, porta malas e carroceria, grandes diferenciais nas propagandas e vendas de veículos automotivos

É muito comum percebermos nos anúncios automotivos como alguns dos atrativos para uma maior venda, os itens relacionados à capacidade de armazenar alguma coisa. Em outras palavras, o volume. Em geral, são os seguintes:

- Espaço interno: que associa ao conforto dos passageiros;
- Porta-malas: que está diretamente relacionado com as bagagens diversas que poderá transportar;
- Tanque de combustível: Está ligado diretamente a autonomia do veículo, em que, se tratando de uma longa viagem, o fato de não precisar ficar parando para abastecer, faz toda uma diferença;

- Porta-objetos: atrelado as miudezas que normalmente são levadas soltas no interior do veículo;
- Caçamba: um diferencial para quem procura um carro no segmento das caminhonetes.

Figura 4.2: Porta malas de veículos.

XC60 ganha no tamanho do porta-malas. O SUV tem capacidade para 495 litros, enquanto o Evoque oferece espaço para 420 litros.

(Fonte da imagem: http://www.zap.com.br/revista/carros/ultimas-noticias/comparativo-range-rover-evoque-impressiona-pelo-luxo-mas-volvo-xc60-oferece-melhor-custo-beneficio-20130502/ acessado em 17/07/2014)

Uma curiosidade nesse tópico é que, em geral, essas capacidades, esses volumes são apresentados em litros, logo, é imprescindível chamar a atenção que:

$1dm^3$ **corresponde a 1 litro** (isso facilitará o entendimento, pois normalmente as unidades iniciais fornecidas nos estudos em sala de aula, serão as de comprimento).

Veja a matéria a seguir:

"Nada como bagageiro espaçoso para enchê-lo de malas e viajar nas férias"....

"Quer um carro com um bom porta-malas já pensando em cair na estrada durante as férias de julho?"

As indagações acima feitas pelo site iCarros selecionou os dez maiores bagageiros em cinco categorias (compactas) diferentes, onde aqui é apresentada a categoria das minivans:

Nissan Livina - 449 litros x Citroën Xsara Picasso - 550 litros

(Fonte: http://www.icarros.com.br/noticias/geral/top-10:-maiores-porta-malas-para-cair-na-estrada/8419.html, acessado em 10 de maio de 2014) [17].

Com um olhar matemático em tais propagandas, é importante lembrar que a representação de 1 litro corresponde a representação de 1 cubo com aresta medindo 1 dm.

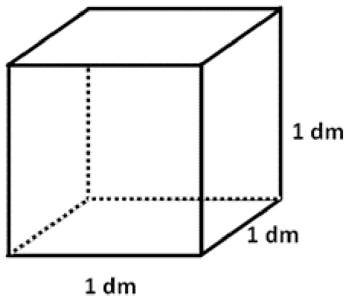

Figura 4.3: Cubo unitário de 1 litro.

Uma sugestão para o Professor é que o mesmo sempre possua para as suas aulas um cubo como o sugerido na figura acima. Será bem interessante relacionar a propaganda com tal cubo. Por exemplo, na comparação entre as minivans a Nissan Livina apresenta 449 litros para o seu bagageiro, enquanto sua concorrente, a Citroën Xsara Picasso - 550 litros. Tal relação fica interessante, imaginando que o primeiro bagageiro apresentado corresponde a **449 cubos** idênticos ao proposto pela figura, já no segundo, são **550 cubos**, ou seja **101 cubos a mais**.

O conceito de volume dado no Capítulo 2, fica bem evidente nessas situações, onde são necessárias comparações para um melhor entendimento da situação.

4.3 O volume do meu corpo

O estudo da Geometria Espacial Métrica no ensino médio, se volta basicamente para os cálculos de comprimentos, áreas e volumes dos seguintes sólidos: Prismas, Pirâmides, Cilindros, Cones, Esferas e Troncos.

O problema em questão é, como, com as ferramentas vistas ao longo dos estudos de Geometria Espacial Métrica, podemos encontrar os volumes dos sólidos diferentes dos citados acima? Como por exemplo o volume do meu corpo que não sou tão esférico nem tão pouco cilíndrico.

O exemplo a seguir nos dará uma ótima ideia para resolver esse problema.

Exemplo 1 *Alguns objetos durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento como* *mostrado na figura.*

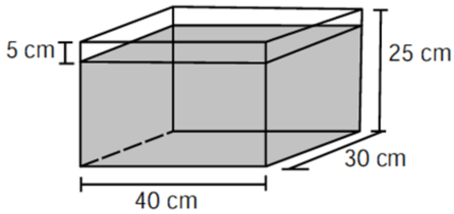

Figura 4.4: Volume de um objeto qualquer.

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de $2400cm^3$*?*

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Como uma ideia do que se quer mostrar com o texto inicial, vem:

Considerando xcm o quanto o nível da água vai subir, ao colocar o objeto no tanque, tem-se:

$$40 \cdot 30 \cdot x = 2400 \quad \Rightarrow \quad x = 2cm.$$

Como o nível da água é de 20 cm, ao colocar tal objeto o nível subirá 2 cm, fazendo com que o nível da água atinja 22 cm de altura (Letra C).

É muito comum esse tipo de situação problema, logo, a diferença entre o volume final após colocar o objeto menos o volume inicial ainda sem a presença do objeto, dará o volume desejado, logo, por conveniência, é interessante trabalhar com taques cilíndricos ou prismáticos pois as bases se repetem, bastando se preocupar apenas com a altura. Dessa forma, será relativamente simples obter volumes de outros sólidos com formas geométricas aparentemente desconhecidas. Pelo menos no nível de estudo em questão.

4.4 Encarecendo o produto, sem aumentar o preço: uma saída geométrica

É fato que quando há um aumento no preço de um produto, o consumidor logo se questiona: será que ainda vale a pena comprá-lo? Porém, muitas vezes o mesmo é reajustado sem que o consumidor perceba diretamente o reajuste. Como?

A solução é simples, reduz-se um pouco o diâmetro de cada biscoito, pois assim torna-se menos perceptível tal redução; ou melhor, tal aumento, em se tratando do preço. Mesmo contendo na embalagem que a redução existiu, pouco valoriza-se tais informações, fazendo assim com que as vendas desses produtos se mantenham intactas, sendo perfeitamente possível "iludir"o consumidor usando um **artifício geométrico**.

Veja a evolução discreta no aumento do preço do biscoito Bono, supondo mantido seu valor de venda, após cada redução na quantidade do produto:

Figura 4.5: Embalagens de bono.

Para uma ilustração matemática, considere que o valor do biscoito foi mantido ao longo do tempo em R$$1,00$. Para efeito de cálculos, não leve em consideração o fator inflação.

- Fazendo uma análise do aumento "apresentado"na primeira redução do produto, o valor correto a ser vendido seria de R$0,825. Ou seja, como continuou sendo vendido por R$1,00, houve um aumento de R$0,175.

- Fazendo agora uma análise do aumento "apresentado"ao longo do tempo, o valor correto seria de R$0,70, ou seja, um aumento real de R$0,30.

Veja a informação da redução existente no rótulo...

Figura 4.6: Embalagem de bono com informação de redução.

Veja a matéria abaixo:

Fabricante da Coca-Cola é multado por reduzir embalagem
Posted on 16 de maio de 2013.

A Refrigerantes Minas Gerais, produtora da Coca-Cola, terá de pagar quase *R*$ 460 mil, em valores atualizados, por ter reduzido a quantidade de produto nas embalagens, de 600 ml para 500 ml. A multa, aplicada pelo Procon estadual, foi mantida pela 2ª Turma do Superior Tribunal de Justiça. Para o órgão de defesa do consumidor, a empresa teria "maquiado" o produto, praticando "aumento disfarçado" de preços, ao reduzir as embalagens de Coca-Cola, Sprite, Fanta e Kuat sem informar adequadamente os consumidores.

Figura 4.7: Rótulo da coca-cola.

Matéria retirada de: http://www.eduardoagnoletto.adv.br/fabricante-da-coca-cola-e-multado-por-reduzir-embalagem-advogado-eduardo-agnoletto-campo-largo/ [18] acessado em 17 de julho de 2014

Se não tivermos o cuidado com a leitura do que o rótulo apresenta, pouco enxergaríamos tal redução, pois as garrafas são praticamente iguais, talvez com uma leve redução na altura e na "cintura", fazendo com que acreditemos que continua tudo do mesmo jeito.

Curiosidade:

Existe uma portaria do ministério da justiça (PORTARIA Nº 81, DE 23 DE JANEIRO

DE 2002) que acumula leis que dão proteção ao consumidor, no tocante a questão das embalagens dos produtos.

4.5 Ilusão de vantagem

Seguindo ainda a ideia apresentada no item anterior, uma outra situação clássica para tentar iludir o consumidor, é a da falsa ideia de que o produto apresentado tem mais massa que o concorrente. Para isso, imaginemos dois produtos em embalagens cilíndricas fechadas, com exatamente o mesmo sabor e o mesmo preço.

Consideremos ainda que os cilindros possuam mesma altura, sendo a espessura de cada biscoito em ambas as embalagens a mesma, resultando na mesma quantidade de biscoitos por embalagem.

Se imaginarmos que o **biscoito 1** tem o formato de um círculo e o **biscoito 2**, a forma de uma coroa circular (em geral chamados de rosquinhas), e, sendo suas áreas iguais, embalados, o produto a ser consumido será o mesmo, sendo mais uma vez uma saída geométrica interessante para atrair o consumidor, a aparência apresentada.

Figura 4.8: Biscoitos.

Considerando a área da base do Biscoito 1, como A_1 e a área da base do biscoito 2, como A_2, tem-se

$$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad \pi R_1^2 = \pi R_2^2 - \pi R_3^2 \quad \Rightarrow \quad \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_3^2) \quad \Rightarrow \quad R_1^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

Exemplo: Basta tomar $R_1 = 4$ cm, $R_2 = 5$ cm e $R_3 = 3$ cm.

Na ilustração da figura 4.9, observe que se ele não tivesse essa forma, ou seja, tivesse a forma do biscoito 1, sugerido no exemplo e mantendo o diâmetro externo, a altura do pacote seria menor, trazendo assim a falsa ilusão de que possui uma quantidade menor do que a apresentada na embalagem proposta.

Figura 4.9: Biscoito com formato de rosquinha.

4.6 A projeção ortogonal e a copa do mundo no Brasil, um recurso interessante

A copa do mundo no Brasil, em 2014, apresentou uma tecnologia bem interessante, com o intuito de minimizar problemas com relação a validação ou não de um gol, denominada *Goal-Line* Technology (Tecnologias da Linha do Gol) .

Embora a Fifa sempre tenha se mostrado contrária à utilização de qualquer sistema de recursos eletrônicos que possam intervir no resultado de um jogo durante sua realização, houve uma forte pressão após a polêmica, em torno do chute do meia inglês Lampard durante a partida contra a Alemanha na Copa de 2010. O chute do jogador passou a linha quando o jogo estava 2 a 1 para os alemães (resultado que com o gol sendo validado poderia mudar toda a história), porém o gol não foi validado e os ingleses perderam por 4 a 1.

Para a copa de 2014 no Brasil, a FIFA resolveu implantar o que eles chamaram de "árbitro eletrônico". No link a seguir, encontraremos como funciona o sistema:
http://www1.folha.uol.com.br/esporte/folhanacopa/2014/06/1470859-entenda-como-funciona-o-arbitro-eletronico-que-ratificou-o-gol-para-a-franca.shtml [19]

O mesmo justifica como o gol da França foi validado com o auxílio desse recurso eletrônico no dia 15 de junho de 2014, em que o atacante Benzema chutou, a bola bateu na trave e, no rebote, o goleiro de Honduras colocou para dentro.

Quem teve a oportunidade de observar quando o recurso foi colocado em prática nas transmissões dos jogos, deve ter percebido que o que acontece, é simplesmente a **projeção ortogonal de uma esfera** (no caso a bola de codinome cafusa), **sobre um plano** (campo de futebol), **comparada com uma reta que está contida no campo**, ou simplesmente a projeção ortogonal da parte superior da trave sobre o campo (marcação abaixo da trave).

Figura 4.10: GLT.

Imagem retirada de: http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2014/06/entenda-tecnologia-que-validou-o-gol-da-franca-na-copa-do-mundo.html , acessada em 03 de julho de 2014.

Duas polêmicas envolvendo as mesmas seleções em copas do mundo:

Na imagem da esquerda, representa a decisão da copa de 1966 (Inglaterra 4 x 2 Alemanha), pelas oitavas de final, onde na ocasião, o gol foi validado para a Inglaterra, prejudicando assim a seleção Alemã. Por outro lado veio a "compensação", na imagem da direita, copa de 2010 (Alemanha 4 x 1 Inglaterra), o gol não foi validado prejudicando assim a Inglaterra, como já dito anteriormente

Figura 4.11: Foi gol ou não foi?.

Imagens retiradas de: https://www.youtube.com/watch?v=B5cVRUqqeY8 , acessado em 27 de julho de 2014.

4.7 Ar condicionado, qual a compra correta para um determinado ambiente?

Sempre que nos deparamos com a situação da compra de um ar condicionado, vem algumas dúvidas: modelo, marca, tamanho, quantos btu's ele possui, e assim por diante, sendo, talvez o último citado, o de maior importância prática para a necessidade em questão.

O que é BTU?

BTU é a sigla de **British Thermal Unit**, expressão em inglês que significa Unidade Térmica Britânica. BTU é uma unidade de potência, que mede a quantidade de energia necessária para elevar a temperatura. BTU é uma unidade utilizada nos Estados Unidos e no Reino Unido que serve para determinar a potência de refrigeração de vários aparelhos, por exemplo, o ar-condicionado. BTU é uma unidade que não tem medida, porém equivale a algumas outras unidades, como 252,2 calorias e 1 055,05585 joules. Para derreter uma massa de gelo, são necessários 143 BTU.

Como calcular o BTU?

Para calcular o BTU de um aparelho, é necessário saber o número de pessoas que ficarão no ambiente, a área em m^2, outros aparelhos que possam irradiar calor, como computador, refrigerador, as paredes e vidros, para então saber qual deve ser a potência, em BTU do aparelho.

Retirado de: http://www.significados.com.br/btu/ [20], acessado em 22/06/2014.

O cálculo de BTU irá ajudá-lo a escolher o ar-condicionado indicado para sua casa ou trabalho.

O cálculo é feito da seguinte forma:

- Para cada metro quadrado, multiplica-se por 600 BTU.
- Cada pessoa adicional soma 600 BTU (a primeira pessoa não contabiliza).
- Cada equipamento eletrônico soma 600 BTU.

Exemplo 2 *Uma sala com* $30m^2$ *para três pessoas com dois computadores* $30m^2 \cdot 600BTU + 1200BTU$ *(duas pessoas, pois a primeira não conta)* + 1200 *BTU (dois computadores)* =20400 *BTU.*

Observação. 4.1

- Se o cômodo ficar diretamente exposto ao sol, aconselha-se considerar 800 BTU para cada medida.
- Não recomenda-se usar aparelhos abaixo da potência indicada. Em alguns casos, isto pode trazer problemas para o equipamento, aumentando custos com manutenção e consumo de energia, além de demorar mais para gelar o ambiente.

Retirado de http://www.webarcondicionado.com.br/calculo-de-btu [21] , acessado em 22/06/2014.

Sugestão de um exemplo simples:

Pedir para que cada aluno calcule a quantidade de BTU necessária para climatizar a sua sala de aula.

4.8 Sugestões para atividades

Após ter apresentado as situações problemas do cotidiano (Seções 4.1 ao 4.7 deste capítulo), todas ou as que forem compatíveis com o momento desejado, insista que o estudante será capaz de fazer, criar algo semelhante, a partir de duas atividades propostas, sendo uma em grupo e uma outra individual

- Atividade em Grupo:

I- Dividir a turma em grupos com no máximo cinco alunos (a depender de cada turma).

II- Orientar que os mesmos visitem algum supermercado, tendo como objetivo verificar nas prateleiras:
- sólidos semelhantes.
- sólidos com a mesma forma geométrica porém não semelhantes.
- um mesmo produto com embalagens distintas.

III- Depois de escolher as embalagens a serem observadas, fazer algumas análises:
- Custo x Benefício para a confecção da embalagem.
- Custo x Benefício com relação a capacidade.
- Outras relações de proporcionalidades que podem ser extraídas das análises feitas.

IV- O que se esconde por trás das promoções (por trás das embalagens)? Qual o objetivo de certas promoções?

V- Deixar cada grupo a vontade para apresentar seus resultados e curiosidades com relação a atividade proposta, abrindo um espaço final para a troca de experiências entre os grupos

Alguns exemplos do que pode ser explorado:

Antes é bom registrar que, todas as imagens foram fotografadas no mesmo supermercado e no mesmo dia.

- **Sabão com a embalagem na forma de paralelepípedo:**

Figura 4.12: Sabão em pó 1kg e 2 kg.

A Figura 4.12 retrata que o grama do sabão na embalagem da esquerda (2 kg) na promoção sai por $R\$$ 0,00595, sem ser na promoção, sai por $R\$$ 0,00649. Já o grama na embalagem da direita (1 kg), o grama sairá por $R\$$ 0,00749. Note que, mesmo não estando na promoção, a embalagem que apresenta 2 kg é mais vantajosa com relação ao preço X quantidade de sabão. Será que a quantidade de papelão para confeccionar a caixa em termos de área será o dobro? Verifique! Talvez esteja aí a explicação para custar um pouco menos.

Por curiosidade, ainda tem a embalagem com 500 g, onde o grama de sabão custa $R\$$ $0,00898$.

Figura 4.13: Sabão em pó 500 g.

Já nesta situação do leite, a Figura 4.15 mostra uma inversão na relação quantidade de leite x custo, o grama na embalagem da esquerda (400 g) sai por R\$ $0,03745$ enquanto o da direita (800 g) fica por R\$ $0,039975$.

- Leite com embalagem na forma cilíndrica:

Figura 4.14: Embalagens de leite em várias perspectivas .

Figura 4.15: Embalagens de leite preço.

Outras embalagens:

- Embalagens com formas distintas de um mesmo produto.

Figura 4.16: Embalagens de aveia.

- Embalagens aparentemente semelhantes (sendo necessário verificar a proporcionalidade em todas as suas medidas).

Figura 4.17: Embalagens de goiabada.

- Embalagens que diferem apenas pela altura.

Figura 4.18: Latas de refrigerante.

Capítulo 5

Considerações finais e sugestões para pesquisas futuras

A escolha do tema trouxe a necessidade de novas e velhas leituras, pesquisas, publicações, construções de conceitos, discussões, e tantas outras fontes de informações para que o mesmo seja consistente e convincente.

A inquietação e busca pelo melhor resultado após os confrontos de informações, resultou neste trabalho aqui apresentado, sendo o mesmo uma opção de análise para aqueles que utilizam a geometria espacial métrica nos seus estudos diários.

O trabalho feito com cuidado e afinco também tende a trazer uma contribuição aos estudantes diretamente ligados a quem o fez, além obviamente de trazer para quem o fez, dando novos horizontes muitas vezes às sequências já apresentadas nos livros didáticos. Exemplo disso, a definição geral de um cilindro, normalmente apresentada e de forma tendenciosa apenas os de base circular. Uma outra ideia interessante e diferente é que, sempre os prismas aparecem nos estudos desses livros antes do estudo sobre os cilindros e, na sequência aqui apresentada, o prisma é um caso particular do cilindro. O mesmo vale para o cone e a pirâmide.

A ideia da compreensão do princípio de Cavalieri como ponto inicial do estudo também é algo que sempre aparece a posteriori nos livros didáticos, sendo esse aqui colocado em primeiro plano.

Fazer o novo de coisas muitas vezes milenares, não é tão simples. Tentar escrever algo que há anos já vem sendo apresentado como o padrão de verdade pelos livros didáticos também não. Porém, não podemos e nem devemos ficar no comodismo acreditando e aceitando tudo como foi imposto sem uma reflexão mais profunda sobre o tema em questão. Tal incômodo teve como resultado um trabalho dessa natureza aqui proposto.

Por fim, sabemos que não é fácil, pois o conhecimento é inesgotável, mas o trabalho aqui concluído nos deixa satisfeito, sabendo que tentamos da melhor forma despertar o interesse ou aprofundar-se naquilo que foi proposto. Para trabalhos futuros, fica a sugestão de outras propostas para este aqui apresentado: produção de vídeo-aulas, materiais elaborados aula a aula, manipulação desses conceitos utilizando softwares ou materiais concretos, um aprofundamento fazendo uma análise das questões da OBM e OBMEP.

O que modificou nas minhas aulas ao longo das discussões para a construção desse trabalho?

- O prisma é um caso particular de um cilindro e uma pirâmide é um caso particular de um cone. Passei a mencionar isso nas minhas aulas, justificando que os livros didáticos apresentam uma versão diferente, pois da forma que eles apresentam, de fato termina sendo uma particularidade de um prisma, o cilindro. De modo análogo o cone com relação a pirâmide, pois os mesmos limitam-se a mostrar os cilindros de bases circulares.

- Na hora de construir os prismas, cilindros em sala, sempre eu fazia de forma tendenciosa, em que parecia que todo cilindro e prisma teriam que ser retos, e a Professora Orientadora desse trabalho, Dra. Luciana Roze me chamou a atenção e daí comecei a mudar, e vi que de fato faz toda uma diferença.

- Após o levantamento das questões do ENEM, em geral sempre fazia questão de responder e discutir com os alunos, mas, mais uma vez, a Professora Dra. Luciana Roze sugeriu que fizéssemos um levantamento por tipos de questões, como se fossem separadas por raciocínios matemáticos, e mais uma vez, fez diferença nas aulas.

- Estimular o trabalho em campo para que os alunos percebam tais raciocínios matemáticos sob um olhar mais crítico.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques,*Geometria Euclidiana Plana*. 9ª Edição. SBM. Rio de Janeiro, 2006.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2ª Edição. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1996

[3] BRITO, Fernando de Paulo.*O Uso de Softwares no Ensino de Geometria Espacial Posicional.*

[4] BUCCHI, Paulo, *Matemática e Cidadania: Volume 2*. 1ª Edição. Escala Educacional. São Paulo, 2008

[5] DA FONTE , André Costa.*Médias, desigualdades e problemas de otimização.*

[6] DA SILVA, Alex Reis.*Uma Proposta Para o Ensino de Geometria Espacial Métrica no Ensino Médio*.

[7] FANELLI, Rosana Parolisi Lima. *Alternativas Para o Ensino de Geometria Espacial*.

[8] LIMA, Elon Lages. Et al. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. IMPA/SBM. Rio de Janeiro, 2001

[9] LIMA, Elon Lages. Et al.*A Matemática do Ensino Médio Volume 2*. 6ª Edição. SBM. Rio de Janeiro, 2006

[10] MARINATTO, Mariângela Andrade. Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides.

[11] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de, *Manual de Redação Matemática*. 1ª Edição. Fábrica de Ensino. Campina Grande, 2010

[12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. 1ª Edição. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

[13] SHINE, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica*. SBM. - Rio de Janeiro, 2009

[14] SILVA , Charleson Clivandir de Araujo. A desigualdade Isoperimétrica

[15] http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/134

[16] http://home.fa.utl.pt/ lmmateus/1314-1-sem//sebenta01-v5.pdf

[17] http://www.icarros.com.br/noticias/geral/top-10:-maiores-porta-malas-para-cair-na-estrada/8419.html

[18] http://www.eduardoagnoletto.adv.br/fabricante-da-coca-cola-e-multado-por-reduzir-embalagem-advogado-eduardo-agnoletto-campo-largo/

[19] http://www1.folha.uol.com.br/esporte/folhanacopa/2014/06/1470859-entenda-como-funciona-o-arbitro-eletronico-que-ratificou-o-gol-para-a-franca.shtml

[20] http://www.significados.com.br/btu/

[21] http://www.webarcondicionado.com.br/calculo-de-btu

Apêndice A

Mais algumas questões do ENEM e PROFMAT com resoluções e comentários

Esse apêndice apresenta algumas questões complementares, enriquecendo ainda mais o banco de questões e as recorrentes situações de raciocínios matemáticos exigidos para as resoluções das mesmas.

Aplicação A.1 *ENEM - 2010.2 - Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte:*

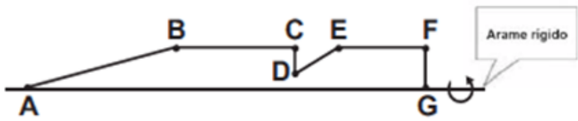

Figura A.1: Rotação foguete.

Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução. Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG$, $BC = 3FG$, $EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) *pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.*

b) *cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.*

c) *cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.*

d) *cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.*

e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

Resposta: LETRA C.

Comentário: Para resolução da questão, basta ter conhecimento dos conceitos de cone, cilindro, cilindro equilátero, tronco de cone, e da visualização de que todos são obtidos ao girar figuras planas em torno de um dos seus lados de forma conveniente.

Aplicação A.2 *ENEM - 2013 - Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:*

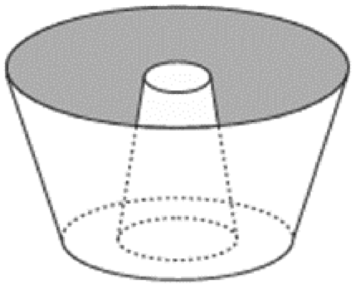

Figura A.2: Forma de bolo.

Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

a) um tronco de cone e um cilindro.

b) um cone e um cilindro.

c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

d) dois troncos de cone.

e) dois cilindros.

Resposta: LETRA D.

Comentário: A questão exigiu apenas o conhecimento do conceito e a visualização de tronco de cone, dispensando qualquer cálculo.

Aplicação A.3 *ENEM - 2010.2 - João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R\$*$1,50$ *a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R\$*$3,00$ *a unidade.*
Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João

a) aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.

*b) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R\$*$12,00$.

*c) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R\$*$7,50$.

*d) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R\$*$6,00$.

*e) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R\$*$4,50$.

Resposta: LETRA D.

Resolução: Para a moeda M_1 com 4 cm de diâmetro, tem para seu volume V_1:

$$V_1 = \pi r_1^2 h \quad \Rightarrow \quad V_1 = \pi 2^2 h \quad \Rightarrow \quad V_1 = 4\pi h.$$

Para a moeda M_2 com 8 cm de diâmetro, de volume V_2, proposta por Pedro, tem-se:

$$V_2 = \pi r_2^2 h \quad \Rightarrow \quad V_2 = \pi 4^2 h \quad \Rightarrow \quad V_2 = 16\pi h \quad \Rightarrow \quad V2 = 4(4\pi h) \quad \Rightarrow \quad V_2 = 4V_1.$$

Logo, o custo da moeda de chocolate proposta por Pedro é de $4 \cdot 1,50 \quad \Rightarrow \quad$ R\$$6,00$.

Comentário: Para a proposta de Pedro, ele dobrou o raio, que no cilindro, influencia a área, e, considerando k a constante de proporcionalidade entre os raios, para a área será k_2, logo alterando tanto no volume quanto no preço em k_2 (no caso $2^2 = 4$)
Logo,

$$V_2 = 4V_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4C_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4 \cdot R1,50 \quad \Rightarrow \quad C_2 = R\$6,00$$

Aplicação A.4 *PROFMAT - 2013 - Um círculo de raio R tem área A e, girando o círculo em torno de um diâmetro, obtemos uma esfera de volume V. Se repetirmos o procedimento com um círculo de raio 2,5R, sua área e o volume da esfera correspondente serão, respectivamente,*

a) 2,5A e 2,5V.

b) 5A e 10V.

c) 5A e 25V.

d) 6,25A e 12,25V.

e) 6,25A e 15,625V.

Resposta: LETRA E.

Resolução: Por proporção temos:
Constante de proporcionalidade para o raio é de $k = 2,5$, o que implica que para a área A será de $(2,5)^2 = 6,25$ e para o volume V, $(2,5)^3$ o que corresponde a $15,625$.
Comentário: É o tipo de situação em que não terá a necessidade do uso das fórmulas de áreas e de volumes, pois a relação na questão é entre duas esferas, que são sempre semelhantes, logo, sendo apenas necessário o uso da razão de semelhança, da proporcionalidade entre comprimentos, áreas e volumes.

Aplicação A.5 *ENEM - 2009 - Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura - 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior -, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.*

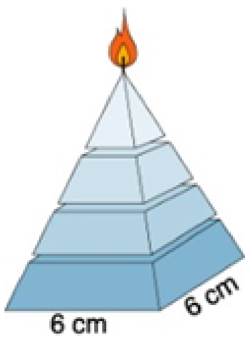

Figura A.3: Vela piramidal.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3.

b) 189 cm^3.

c) 192 cm^3.

d) 216 cm^3.

e) 540 cm^3.

Resposta: LETRA B.

Observação. A.1 *Os troncos de pirâmides são obtidos a partir de seções feitas por planos paralelos à base.*

Resolução:
Desconsiderando os espaços entre os troncos e a pirâmide superior, como uma base superior é sempre igual a inferior que está acima dele, teremos quatro sólidos sobrepostos formando uma pirâmide com altura $H = 16$ cm.

O volume dessa pirâmide formada por todos os sólidos é obtido fazendo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad V = 192cm^2$$

A pirâmide do topo, com altura $h = 4$ cm, é semelhante a pirâmide de volume V, formada por todos os sólidos logo, usando a proporção, vem:

$$\left(\frac{H}{h}\right)^3 = \frac{V}{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{16}{4}\right)^3 = \frac{192}{v} \quad \Rightarrow \quad v = 3cm^3$$

O volume desejado é encontrado pela diferença entre V e v, logo:

$$V - v = 192 - 3 = 189 \quad cm^3.$$

Comentário: A partir do momento que se conhece um dos volumes e se tem a razão de proporção gerado por duas alturas correspondentes, basta aplicar a razão de semelhança de forma coerente que encontra-se o outro volume desejado, não tendo a necessidade de fazer o uso da fórmula do volume novamente.

Aplicação A.6 *ENEM 2010.1 - Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura.*

Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R\$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

a) R\$ 230,40.

b) R\$ 124,00

c) R\$ 104,16

d) R\$ 54,56.

e) R\$ 49,60.

Resposta: LETRA D.

Resolução: Inicialmente, calcula-se o volume de concreto necessário para a construção da manilha. A manilha é construída a partir de dois cilindros circulares com bases concêntricas.

$$\begin{aligned} V_{concreto} &= A_{coroa\ \ circular} \cdot h \\ &= \pi(R^2 - r^2) \cdot h \\ &= 3,1 \cdot (1,2^2 - 1^2) \cdot 4 \\ &= 3,1 \cdot (1,44 - 1) \cdot 4 \\ &= 5,456\ \ m^3. \end{aligned}$$

O valor aproximado da manilha é de R\$ 54,56.
Comentário:

A questão exigiu conhecimento sobre volume de cilindro; e posteriormente perceber que o desejado é diferença entre volume de dois cilindros.

Aplicação A.7 *ENEM - 2009 - Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.*

Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

a) 4.

b) 8.

c) 16.

d) 24.

e) 32.

Resposta: LETRA B.

Resolução: A caixa é cúbica e possui um volume de 13.824 cm^3. O volume de um cubo é a^3, logo, $a^3 = 13.824\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad a = 24$ cm. Como o diâmetro da esfera é $2 \cdot 6cm = 12cm$, o número máximo de esferas na caixa pode ser encontrado fazendo $\left(\frac{24}{12}\right)^3 = 2^3 = 8$ esferas.

Comentário: Observe que usando raciocínio tradicional de dividir o volume da caixa pelo volume de uma esfera (que é de aproximadamente $904,32\ cm^3$), encontra-se também de forma aproximada $15,28$ esferas, o que poderia levar ao pensamento de serem no máximo

15 esferas. Porém, isso seria possível, se as mesmas fossem derretidas ou coisa do tipo, mas fica clara a ideia que além de cálculos, deve ser levada em consideração a forma dos sólidos junto à interpretação dessa situação. Sabendo da procura por parte dos candidatos por esse raciocínio, os elaboradores não querendo polemizar, não colocaram 15 (ou qualquer outro valor entre 8 e 16) nas opções.

Aplicação A.8 *ENEM - 2010.2 - Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?*

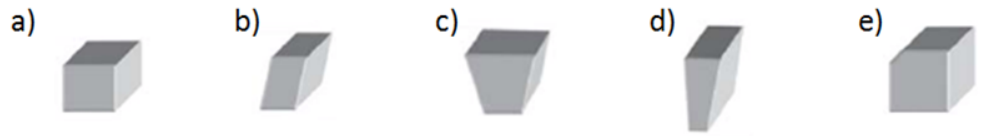

Figura A.4: Cestos de madeira.

Resposta: LETRA C.

Comentário: A questão parte do princípio de figuras planificadas para montar o sólido (confeccionar cesto), sendo a visualização mais uma vez o fator diferencial para resolução da mesma.

Aplicação A.9 *PROFMAT 2012 - Pedro recorta em uma folha de papel um setor circular OAB de raio 12 cm e um ângulo de 120°.*
Juntando e colando os raios AO e OB ele faz um cone como mostra a figura abaixo.

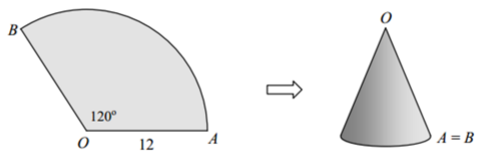

Figura A.5: Planificação da lateral de um cone.

A altura desse cone é, aproximadamente:

a) 9,6 cm.

b) 10,4 cm.

c) 10,8 cm.

d) 11,3 cm.

e) 11,7 cm.

Resposta: LETRA D.

Resolução: Note que

120° é equivalente a $\dfrac{2\pi}{3}$, logo, tem-se:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{AB}{12} \quad \Rightarrow \quad AB = 8\pi.$$

Chamando de r o raio da base do cone, tem-se:

$$AB = 2\pi r = 8\pi \quad \Rightarrow \quad r = 4 \ \ cm.$$

Sabe-se que

$$g^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad 12^2 = 4^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 144 - 16 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{128}cm \quad \Rightarrow \quad h \cong 11,3cm$$

Comentário: O conhecimento exigido para a resolução da questão é de relação arco e ângulo em uma circunferência. Deve-se perceber ainda que o arco determinado pelo ângulo de 120° corresponde ao comprimento da circunferência da base e por fim uma aplicação do Teorema de Pitágoras envolvendo a altura, o raio da base e a geratriz do cone.

Aplicação A.10 *ENEM - 2010.2 - Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central. Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.*

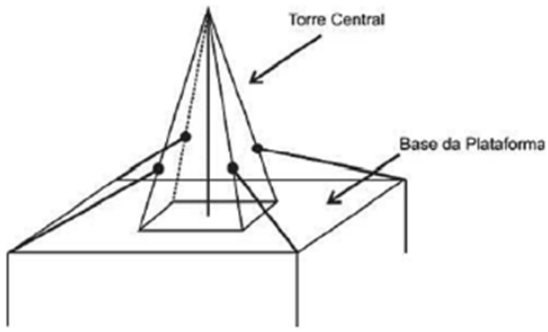

Figura A.6: Pirâmide plataforma marítima.

Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

a) $\sqrt{288}$.

b) $\sqrt{313}$.

c) $\sqrt{328}$.

d) $\sqrt{400}$.

e) $\sqrt{505}$.

Resposta: LETRA D.

Resolução: Na figura A.7, tomando $QR//OP$, onde R é ponto médio de VA, por semelhança (triângulos VOA e VQR) Q é ponto médio de VO, logo $VQ = QO = 12m$. O quadrilátero $OQRP$ é um retângulo, daí $OP = RQ = 6m$.
Como

$$\overline{O}B = \frac{19\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 19m \quad e \quad \overline{O}A = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 6 \quad m,$$

tem-se

$$PB = OB - OP \quad \Rightarrow \quad PB = 16 \ m.$$

O triângulo RPB é retângulo em P, por consequência,

$$\begin{aligned} RB^2 &= RP^2 + PB^2 \\ &= 122 + 162 \\ &= 400. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Portanto, $RB = \sqrt{400}$.

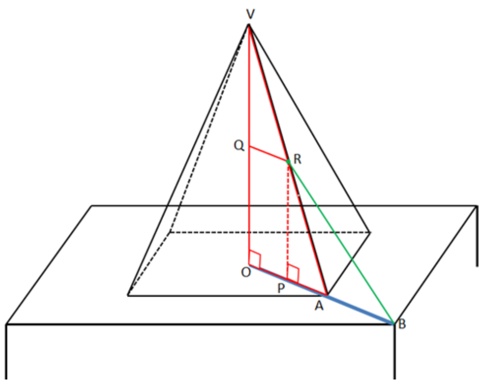

Figura A.7: Plataforma marítima resolução.

Comentário: A questão exige conhecimento das partes de uma pirâmide, uma boa visualização e percepção para fazer uso da semelhança entre triângulos. É importante perceber que não tem fórmula pronta para resolvê-la.

Aplicação A.11 *ENEM - 2010.2 - Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.*

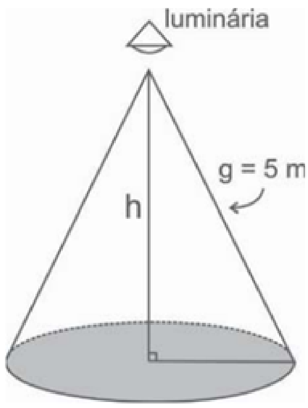

Figura A.8: Cone iluminação.

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26\ m^2$*, considerando* $\pi \cong 3,14$*, a altura h será igual a*

a) 3 m.

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 9 m.

e) 16 m.

Resposta: *LETRA B.*

Resolução: *A área a ser iluminada é a área de um círculo de raio r, logo*

$$\pi \cdot r^2 = 28,26 \quad \Rightarrow \quad 3,14 \cdot r^2 = 28,26 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3m.$$

Da relação, $g^2 = h^2 + r^2$ *vem:*

$$5^2 = h^2 + 3^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad h = 4m.$$

Comentário: *A questão contempla apenas a área da base de um cone circular (área de um círculo) e uma aplicação do Teorema de Pitágoras, envolvendo a geratriz, o raio da base e a altura do cone.*

Apêndice B

Um pouco da História

CAVALIERI

"Os egípcios, por exemplo, sabiam que o volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura, mas uma prova disto quase certamente estava acima de suas possibilidades, pois exige um ponto de vista equivalente ao do cálculo integral. Arquimedes mais tarde escreveu que esse resultado era devida a Demócrito, mas que esse não o provou rigorosamente. Isso cria um enigma, pois, se Demócrito acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio aqui, só pode ter sido alguma espécie de prova, ainda que inadequada. Talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que são, duas a duas, de mesma altura e bases iguais são iguais, o teorema egípcio familiar.

Essa pressuposição só pode ser justificada por aplicação de técnicas infinitesimais. Se, por exemplo, pensamos em duas pirâmides de mesma base e altura como compostas de uma infinidade de secções infinitamente finas e iguais em correspondência biunívoca (um artifício usualmente chamado princípio de Cavalieri em honra ao geômetra do século dezessete), ela parece ficar justificada. Cavalieri era membro de uma ordem religiosa (dos jesuados, não dos jesuítas como se tem dito frequente mas incorretamente) e viveu em Milão e Roma antes de tornar-se professor em Bolonha em 1629. Caracteristicamente para seu tempo ele escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada - geometria, trigonometria, astronomia e óptica - e foi o primeiro auto italiano a apreciar o valor dos logaritmos. Em seu Directorium universale uranometricum de 1632 ele publicou tabelas de seno, tangentes, secantes e senos versos, junto com seus logaritmos, até oito casas; mas ele é relembrado mais por um dos livros mais influentes no início do período moderno, a Geometria indivisibilibus continuorum, publicada em 1635.

O argumento em que baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e

Galileu - que a área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis"e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos. Embora Cavalieri na época dificilmente pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente muito respeitáveis, pois é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em O método, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos."

"Não havia no método de Cavalieri nenhum processo de aproximação contínua, nem omissão de termo, pois ele usava uma estrita correspondência um a um dos elementos em duas configurações. Nenhum elemento era descartado, qualquer que fosse a dimensão. O estilo geral e a especiosa plausibilidade do método dos indivisíveis são bem ilustrados pela proposição ainda conhecida em muitos livros de geometria no espaço como "o teorema de Cavalieri".

"*Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão."(BOYER [2])*