UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - CÂMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Hudson Alves Martins

Apagando Luzes com Matrizes e Sistemas Lineares

Três Lagoas
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - CÂMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Hudson Alves Martins

Apagando Luzes com Matrizes e Sistemas Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza.

Três Lagoas
2015

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Apagando Luzes com Matrizes e Sistemas Lineares

por

HUDSON ALVES MARTINS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

____
Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza (Orientador)
UFMS/CPTL

____
Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi
UFMS/CPTL

____
Prof. Dr. Selma Helena Marchiori Hashimoto
UFGD

Fevereiro de 2015

Dedicatória

Quero dedicar aos meus familiares, que sempre foram presentes nos momentos mais difíceis e que souberam me dar apoio pra continuar minha trajetória e, em especial, a meu pai e minha mãe, que sempre me incentivaram a estudar, mostrando que educação seria o melhor forma de se conseguir atingir meus objetivos. Por fim, quero dedicar às minhas filhas, Júlia, Anna Luiza, Stela e a minha esposa Ádila pois tudo que faço, fiz e farei é por e para vocês. Obrigado pela base que nós estamos construindo, pois ela é que me dá forças para seguir em frente, na luta para dar uma melhor qualidade de vida para todos nós. Amo muito vocês.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me dado muita força e saúde para enfrentar as dificuldades e superá-las.

A toda minha família, por sempre estarem me apoiando, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao professor Fernando Souza pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do PROFMAT pelos seus ensinamentos repassados com louvor durante esses dois anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

E a CAPES, por promover e financiar esta brilhante ideia de aperfeiçoamento dos professores de Matemática.

Aos meus amigos de mestrado, pelos inúmeros dias de estudos afincos, em que houve muitas dificuldades, mas por fim superadas pelo apoio que um dava ao outro.

“Lembra que o sono é sagrado e alimenta de horizontes o tempo acordado de viver”.

Beto Guedes (Amor de índio)

Resumo

Este trabalho trata dos conhecimentos básicos de Álgebra Linear: Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Concluímos com a apresentação de uma aplicação desses conceitos juntamente com o conceito de conjunto dos resto da divisão por 2 ($\mathbb{Z}_2$), a aplicação é desenvolvida, fazendo uma modificação no algoritmo da eliminação de Gauss, para que este entenda que os números trabalhados são elementos do conjunto $\mathbb{Z}_2$, o algoritmo foi implementado no software livre Scilab, que é uma excelente ferramenta de auxilio do ensino da Matemática.

Palavras Chaves: Matrizes; Sistemas Lineares e Scilab.

Abstract

This work deals with the basic knowledge of Linear Algebra: Matrices, Determinants and Linear Systems. We conclude with the presentation of an application of these concepts along with the concept of all the rest of the division by 2 ($\mathbb{Z}_2$), the application is developed, making a change in the Gaussian elimination algorithm, so that it understand that the numbers worked are elements of the set $\mathbb{Z}_2$, the algorithm was implemented in free software Scilab, which is an excellent aid tool of mathematics teaching.

Key Words: Matrices;Linear Systems; Scilab.

Sumário

Introdução **9**

1 Matrizes **10**

1.1 Matriz Quadrada 11

1.2 Operações com Matrizes 13

1.3 Forma Escalonada de uma Matriz 19

1.4 Determinação da Inversa de uma Matriz 20

1.5 Determinantes 22

2 Sistemas Lineares **30**

2.1 Sistemas Lineares 2x2 31

2.2 Sistemas Lineares 3x3 32

2.3 Representação Matricial 37

3 Problema das Luzes Apagadas **40**

3.1 O conjunto dos restos da divisão por 2 41

3.2 Modelando o Problema das Luzes Apagadas 42

3.3 Como Resolver Utilizando o Scilab 46

Considerações Finais **53**

Referências Bibliográficas **54**

Introdução

As matrizes e Sistemas Lineares apresentam um papel muito importante na área de exatas. E sua, importância tem crescido nas últimas décadas, já que os modelos matemáticos lineares, assumiram um destaque juntamente com o desenvolvimento tecnológico,o que tem motivado um crescimento de interesse nesses assuntos.

Muito das dificuldades de um estudante que vai estudar Álgebra Linear pela primeira vez está relacionada com o pouco ou nada de conhecimento sobre matrizes, sistemas lineares e a introdução de ideias abstratas, que implicam em uma mudança profunda de como o estudante deve mudar sua forma de raciocinar.

No presente trabalho, pretendemos apresentar os conceitos de operações e propriedades de matrizes, o conceito e resolução de sistemas lineares e uma aplicação desses conceitos básicos da Álgebra Linear, utilizando o software livre Scilab, utilizado para resoluções numéricas.

O capítulo 1 que têm como principal foco tópicos de matrizes e determinantes como a, soma de matrizes, produto de matrizes por escalar, produto entre matrizes, determinação da inversa por escalonamento e algumas propriedades de determinantes.

No capítulo 2 discutimos sistemas lineares e as representações geométricas de sistemas 2×2 e 3×3, também a forma matricial de sistemas em geral, bem como suas resolução através de escalonamento.

No capítulo 3 apresentamos um jogo da década de 90 ”Light Out”, que consiste em uma tabela com 25 teclas ilumindas, onde, no começo do jogo algumas teclas estão acessas o objetivo do jogo e apagar todas as teclas. Porém, quando apertamos uma tecla, as teclas diretamente a esquerda, direita, acima e abaixo também mudam seu estado. O jogo será descrito utilizando os conceitos de matrizes, sistemas lineares e o conjunto dos restos da divisão por $2(\mathbb{Z}_2)$, no final implementamos um programa no Scilab que resolve o jogo através do método da eliminação de Gauss.

1 Matrizes

Neste capítulo abordaremos conceitos de matrizes, já que as matrizes não se limitam a ser apenas representações de conjuntos numéricos, tornaram-se ferramentas básicas da Algébra Linear, pois entre outras aplicações fornecem meios para a solução de sistemas de equações lineares.

Sejam m e n números inteiros maiores ou igual a 1. Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n), uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

Uma matriz A pode ser representada pelos números a_{ij} com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ e a_{ij} é o elemento situado no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna, assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo: Vamos escrever a matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ com $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{para} \quad i = j, \\ a_{ij} = 0 & \text{para} \quad i \neq j. \end{cases}$$

A matriz deve ter 3 linhas e 3 colunas e $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ e $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, logo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Toda matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, que tem apenas uma linha, é chamada de matriz linha.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Toda matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, que tem apenas uma coluna é chamada de matriz coluna.
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A matriz que tem todos os elementos iguais a zero denomina-se *matriz nula*. Denota-se por $0_{n\times m}$ a matriz nula de ordem $m \times n$.
Exemplo: A matiz nula 3×3 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\mathcal{M}(m,n)$ representa todas as matrizes que possuem m linhas e n colunas, ou seja, do tipo $m \times n$.

1.1 Matriz Quadrada

Uma matriz $m \times n$ é dita quadrada quando $m = n$ e assim dizemos que a matriz é de ordem n.

Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos a_{ij} com $i = j$ formam a *diagonal principal.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -1 & \mathbf{6} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 10 \\ -3 & \mathbf{0} & 8 \\ 5 & -1 & \mathbf{6} \end{bmatrix}.$$

A outra diagonal da matriz quadrada denomina-se *diagonal secundária* que é formada pelos elementos a_{ij}, com $i + j = n + 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{10} \\ -3 & \mathbf{0} & 8 \\ \mathbf{5} & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada é dita *triangular superior* quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada é dita *matriz triangular inferior* quando todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz de ordem n é dita *diagonal* se os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são nulos é chamada de *matriz identidade* sendo representada por I_n.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em uma matriz identidade temos que:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{para} \quad i = j, \\ a_{ij} = 0 & \text{para} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Veremos mais adiante que a matriz identidade se comporta como elemento neutro da multiplicação de matrizes.

1.2 Operações com Matrizes

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, A e B pertencem ao mesmo conjunto $\mathcal{M}(n,m)$ e seus elementos correspondentes são iguais.

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ temos que:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \text{com} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo: Determine x, y e z de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 6 \\ 3 & z \end{bmatrix}$.

Temos por definição que $2x = x+1$, $3y = 6$ e $z = 4$, logo $x = 1$, $y = 2$ e $z = 4$

Dadas as matrizes A e $B \in \mathcal{M}(m,n)$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A+B$, a matriz C do tipo $m\times n$, na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ então a soma $A+B = C$, onde:

$$C = [c_{ij}]_{m\times n} \text{ onde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $C = A+B$

Pela definição de soma de matrizes obtemos:

$$C = \begin{bmatrix} 3+1 & 5+(-4) & -2+(-1) \\ 2+7 & 8+0 & -6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Uma matriz é dita *oposta de uma matriz* quando a soma destas duas matrizes tem como resultado uma matriz nula.

A matriz oposta de A, denota-se por $-A$

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix}$, determine $-A$

temos que $-A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$,pois:

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes a de números reais:

Sejam A, B e $C \in \mathcal{M}(m,n)$, então:

- $A+(B+C)=(A+B)+C$ Associativa da adição;
- $A+B=B+A$ Comutativa da adição;
- $A+0=A$ onde $0 \in \mathcal{M}(m,n)$ Elemento Neutro da adição;
- $A+(-A)=0$ Matriz oposta.

Demonstração:

(i) Fazendo $A+(B+C)=Xe(A+B)+C=Y$, temos:

$$x_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

Pela propriedade associativa da adição de números reais, temos que:

$$a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=y_{ij},$$

para todo i e j.

(ii) Fazendo $A+B=X$ e $B+A=Y$, temos:

$$x_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Pela propriedade comutativa da adição de números reais, temos que:

$$a_{ij}+b_{ij}b_{ij}+a_{ij}=y_{ij}.$$

(iii) Impondo $A+M=A$, resulta:

$$a_{ij}+m_{ij}=a_{ij}\Rightarrow m_{ij}=0\Rightarrow M=0.$$

Isto é, o elemento neutro é a matriz nula.

(iv) Impondo $A+A'=0$, resulta:

$$a_{ij}+a'_{ij}=0\Rightarrow a'_{ij}=-a_{ij}$$

Para todo i e j, isto é a oposta da matriz A para a adição é a matriz A', na qual cada elemento é oposto ao seu correspondente em A.

Se $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ definimos por produto de A pelo número real k, a matriz $kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$

Exemplo: Calcule$-3A$ onde $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$-3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer matrizes A e $B\in\mathcal{M}(m,n)$ e $a,b\in\mathbb{R}$.

- $a(A+B)=aA+aB$ Distributiva de números reais em relação a adição de matrizes;
- $(a+b)A=aA+bA$ Distributiva de Matrizes em relação a adição de números reais;
- $a(bA)=(ab)A$ Associativa da multiplicação de Matrizes com números reias;
- $1A=A$ Elemento neutro da Multiplicação;

Demonstração:
(i) Sejam as matrizes $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ e o número a, então:

$$a\cdot(A+B)=a\cdot[(a_{ij}+b_{ij})]=[a\cdot(a_{ij}+b_{ij})]=[a\cdot a_{ij}+a\cdot b_{ij}]=[a\cdot a_{ij}]+[a\cdot b_{ij}]=a[\cdot a_{ij}]+a[\cdot b_{ij}]=a\cdot A+a\cdot B$$

onde utilizamos a distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais.
(ii) Sejam os reais a e b, e a matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, então:

$$(a+b)\cdot A=(a+b)\cdot[a_{ij}]=[(a+b)\cdot a_{ij}]=[a\cdot a_{ij}+b\cdot a_{ij}]=[a\cdot a_{ij}]+[b\cdot a_{ij}]=a\cdot[a_{ij}]+b\cdot[a_{ij}]=a\cdot A+b\cdot A.$$

onde usamos a distributiva da multiplicação em relação à adição
(iii)Sejam os reais a e b, e a matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, então:

$$a\cdot(b\cdot A)=a\cdot[(b\cdot a_{ij})]=a\cdot(b\cdot[a_{ij}])=(a\cdot b)\cdot[a_{ij}]=(a\cdot b)\cdot A.$$

onde usamos a propriedade associativa da multiplicação de números reais.
(iv) Seja a matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, então:

$$1\cdot A=1\cdot[a_{ij}]=[1\cdot a_{ij}]=[a_{ij}]=A.$$

onde usamos a propriedade do elemento neutro da multiplicação.

Dadas as matrizes $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{n\times p}$, o produto AB de A por B, é definido como uma matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{jn}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$

Exemplo: Determine o produto AB sabendo que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)+4(1) & 2(1)+4(-1) \\ 0(-1)+0(1) & 0(1)+0(-1) \\ -1((-1)+3(1) & -1(1)+3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Observação:

A multiplicação de uma matriz A por uma matriz B só está definido se o número de colunas de A for igual ao númer de linhas de B. Note que, no exemplo anterior, $A \in \mathcal{M}(3,2)$ e $B \in \mathcal{M}(2,2)$, neste caso podemos efetuar a multiplicação AB mas não podemos fazer BA.

E diferente do que ocorre nos números reais a multiplicação $AB = 0$ não implica que $A = 0$ ou $B = 0$. Observe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Não há comutatividade na multiplicação de matrizes, ou seja, para duas matrizes quaisquer A e B é falso que $A \cdot B = B \cdot A$.

Exemplo: Observe que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ não apresentam comutatividade em relação a multiplicação de matrizes.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

logo$A \cdot B \neq B \cdot A$.

Desde que as operações sejam possíveis, temos que:

- $A(B+C) = AB+AC$, distributiva da multiplicação em relação à adição à esquerda;
- $(A+B)C = AC+BC$, distributiva da multiplicação em relação à adição à direita;
- $(AB)C = A(BC)$, associativa da muliplicação;
- $AI = IA = A$, elemento neutro da multiplicação.

Demonstração:

(i) Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{p\times n}$temos que:

$$A(B+C) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_kj + a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = AB+AC.$$

(ii) Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{m\times p}$ e $C = [c_{ij}]_{p\times n}$temos que:

$$(A+B)C = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}+b_{kj})c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_kj + b_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj} = AC+BC.$$

(iii) Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ e $C = [c_{ij}]_{q\times n}$ temos que:

$$A(BC) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}(AB)_{il}c_{lj} = (AB)C$$

(iv) Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $I_n = [i_{ij}]$ a matriz identidade $n\times n$ temos que:

$$AI = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}i_{kj}$$

mas $i_{kj} = 1$ para $k = j$ para os outros valores de k temos que $i_{kj} = 0$ então:

$$AI = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}i_{kj} = a_{ij} = A.$$

Se

$$IA = \sum_{k=1}^{n} i_{ik}a_{kj}$$

mas $i_{ik} = 1$ para $k = i$ para os outros valores de k temos que $i_{ik} = 0$ então:

$$IA = \sum_{k=1}^{n} i_{ik}a_{kj} = a_{ij} = A.$$

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, a matriz $[b_{ij}]_{n\times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, a matriz transposta A^t é dada por:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades Para toda matriz A e B temos:

- $(A^t)^t = A$;
- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- Se $k \in \mathbb{R}$ então $(kA)^t = k \cdot A^t$;
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Demonstração:

(i) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então:

$$[A^t]^t = [(a_{ij})^t]^t = [(a_{ji})]^t = a_{ij} = A.$$

(ii) $(A+B)^t = (a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = [a_{ij}]^t + [b_{ij}]^t = A^t + B^t$

(iii) $(kA)^t = [ka_{ij}]^t = k[a_{ij}]^t = kA$

(iv) $(AB)^t = (AB)ji = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} (a_{kj})^t (b_{ik})^t = \sum_{k=1}^{p} (b_{ik})^t (a_{kj})^t = B^t A^t$

Uma matriz quadrada A é chamada simétrica. se $A^t = A$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a matriz A é simétrica

Uma matriz quadrada B é chamada de antissimétrica se $B^t = -B$

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz B é antissimétrica.

1.3 Forma Escalonada de uma Matriz

Seja A uma matriz do tipo m x n. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotamos por L_i a i - ésima linha de A. Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz A como segue:

- Permutação das linhas L_i e L_t, indicada por $L_i \leftrightarrow L_t$;
- Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com outra linha L_t multiplicada por um valor real k, indicado por $L_i \rightarrow L_i + kL_t$;
- Multiplicação de uma linha L_i por um número real k não nulo, indicado por $L_i \rightarrow k \cdot L_i$.

Exemplo: Vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow 3 \cdot L_1 \begin{bmatrix} 6 & 15 & -6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} L_2 \rightarrow L_2 + 2 \cdot L_1 \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 11 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Toda transformação elementar ε nas linhas de uma matriz A de ordem $m \times n$ $(\varepsilon(A))$ é reversivel, no sentido de que existe uma transformação ε' tal que $\varepsilon'(\varepsilon(A)) = A$ e $\varepsilon(\varepsilon'(A)) = A$, para toda matriz A.

Duas matrizes A e B de mesma ordem são equivalentes quando B pode ser obtida através de um número finito de transformações elementares na matriz A.

Exemplo: Vamos mostrar que as Matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são equivalentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz m x n se diz na forma escalonada se for nula ou se:

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;
2. Cada coluna que contêm o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
3. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
4. Se $L_1, L_2, \cdots, L_p$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na coluna K_i, então $K_1 < K_2 < \cdots < K_p$.

Exemplo: Essas matrizes estão na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enquanto que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

não estão na forma escalonada a primeira não satisfaz a condição 3 e a segunda não satisfaz as condições 2 e 4.

Toda matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ pode ser transformada na forma escalonada através de operações elementares e definimos o posto de uma matriz A como o número de linhas não nulas de sua forma escalonada.

1.4 Determinação da Inversa de uma Matriz

Uma matriz $A = [a_{ij}]_n$ é invertível se, e somente se, existe uma matriz $B = [b_{ij}]_n$, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Seja $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz invertível e se B é uma matriz na forma escalonada equivalente a A então $B = I_n$. E ainda temos que as mesmas sequências de transformações elementares aplicadas em A para gerar B, se forem aplicadas na I_n gera A^{-1}.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ uma matriz invertível vamos determinar a A^{-1}.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$L_2 \to -L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$L_3 \to -L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que se efetuarmos estas operações a uma matriz não invertível, então não conseguiremos encontrar a matriz Identidade.

Proposição:

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n:

i) Se A é invertível, então A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demonstração: Se uma matriz B é a inversa de A^{-1} então:

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I$$

Como A^{-1} é a inversa de A temos que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

como a inversa é única temos que $B = A$, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii) Se A e B são invertível, então $A \cdot B$ também será invertível e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Demonstração: Temos que mostrar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Para se verificar se uma matriz $A = [a_{ij}]_n$ é invertível ou não, é comum utilizar-se do chamado *determinante*, o qual veremos na próxima seção.

1.5 Determinantes

Toda matriz quadrada tem associado a ela um número chamado de determinante da matriz, obtido por meio de operações que envolvem todos os elementos da matriz.

Escrevemos o determinante de uma matriz por:

$$detA, |A| \text{ ou } det[a_{ij}].$$

Se $n = 1$, então a matriz $A = [a_{ij}]_n$ é dada por $a = a_{11}$. Neste caso $detA = a$, vamos supor agora que $n > 1$ e que $detB$ esteja definido para todas as matrizes $B = [b_{ij}]_m$, com $m < n$ e $A = [a_{ij}]_n$. Para cada (i, j), define-se a matriz A_{ij} formada a partir de A retirando-se a sua i-ésima linha e j-ésima coluna. Assim $A_{ij} = [a_{ij}]_{n-1}$ e $detA_{ij}$ está definido.

Definimos então que o determinante de A como sendo:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \cdot detA_{ij},$$

onde i é uma linha fixa, ou

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot detA_{ij},$$

onde j é uma coluna fixa.

Observamos que, em geral, para fazer o cálculo do determinante de uma matriz o melhor é escolher linha, ou coluna, com maior número possível de zeros.

Determinantes de Matriz Quadradas de Ordem 2

Se $A = [a_{ij}]_2$ temos que:

$$\det[a_{ij}]_2 = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+i} a_{ij} \cdot detA_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

então $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. O que pode ser obtido multiplicando os elementos da diagonal principal e subtraindo a multiplicação dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (3 \cdot (-2)) = 20.$$

Determinantes de Matriz Quadradas de Ordem 3

Se $A = [a_{ij}]_3$ temos que:

$$\det[a_{ij}]_3 = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+i} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Logo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}) - a_{11}(a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}) + a_{12}(a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}) - a_{13}(a_{22}a_{31})$$

Podemos obter esses seis produtos de uma forma prática, conhecida como Regra de Sarrus, fazendo o seguinte:

- Repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz e efetuamos as seis multiplicações como indicado.

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

- Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal;

- Os produtos obtidos na direção da diagonal secundaria mudam o sinal;
- O determinante é a soma dos valores obtidos.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule o det$A$

Pela regra de Sarrus temos que:

$\det A = 3 \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 5 \cdot 0 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot (-3) = 72$

Determinante de Matrizes Quadradas de Ordem 4

Se $A = [a_{ij}]_3$ temos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

que podemos escrever assim:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

ou

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Observe que o determinante da matriz 3x3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatriz 2x2, isto é:

$$\det A = a_{11} \left| A_{11} \right| - a_{12} \left| A_{12} \right| + a_{13} \left| A_{13} \right|,$$

onde A_{ij} é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso se chamarmos$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|$, obtemos a expressão:

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes de ordem n, e assim podemos expressar:

$$\det[a_{ij}]_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$$

Assim se $B = [b_{ij}]_4$ então:

$$\det B = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}\Delta_{ij},$$

escolhendo $i = 1$ temos:

$$\det B = \sum_{j=1}^{4} b_{1j}\Delta_{1j} = b_{11}\Delta_{11} + b_{12}\Delta_{12} + b_{13}\Delta_{13} + b_{14}\Delta_{14}$$

onde Δ_{ij} são sub matrizes 3x3 que podemos usar a regra de Sarrus para calcular os determinantes.

Exemplo: Vamos calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desenvolvendo segundo os elementos da 1º linha temos:

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1+0+10-4-15)-(10+6) = -20-16 = -36$$

Propriedades dos Determinantes

Chamaremos de fila, uma linha ou coluna da matriz. As propriedades de determinantes permite mais agilidade no cálculo de Determinantes.

1. Se todos os elementos de uma fila de uma Matriz quadrada forem iguais à zero, seu determinante será nulo.

   Exemplo: Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $$\det A = 0\cdot(-2) - 0\cdot 3 = 0$$

   $$\det B = 4\cdot 3\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot 2 - 0\cdot 5\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot 1 = 0$$

2. Se os elementos correspondentes de duas filas paralelas de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será nulo.

   Exemplo: Calcule os determinantes abaixo:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - (-2)\cdot 3 = -6 - (-6) = -6 + 6 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 3 - (-2)\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot 1\cdot 3 = 0.$$

3. Se uma matriz quadrada possui duas filas paralelas proporcionais, o determinante será nulo.

   Exemplo: Calcule os determinantes abaixo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 6 - (-4)\cdot 3 = -12 - (-12) = -12 + 12 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot(-6) + 1\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot(-6) - (-2)\cdot 2\cdot(-6) - 1\cdot 1\cdot(-6) - 1\cdot 3\cdot(-2) = 0.$$

4. Se todos elementos de uma fila de uma matriz quadrada forem multiplicados por um número real a, então seu determinante ficará também multiplicado por a.

   Exemplo: Observe que

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\cdot 4 - 3\cdot 3 = 28 - 9 = 19.$$

   multiplicando a segunda coluna por 2, temos

$$\begin{vmatrix} 7 & 2\cdot 3 \\ 3 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7\cdot 8 - 3\cdot 6 = 56 - 18 = 38.$$

5. Se uma matriz quadrada de ordem n é multiplicada por um número real a, o seu determinante fica multiplicado por a^n.

   Exemplo: Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, seu determinante é

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 4 + 6\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 7\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 1\cdot 4 = 118 - 94 = 24.$$

Agora, multiplicando todos os elementos por 2, o determinante é dado por:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 6 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 7 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 0 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 2 & 14 & 6 \\ 10 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 192.$$

Mas $192 = 8\cdot 24 = 2^3\cdot 24$

6. O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua transposta, ou seja, $\det A = \det A^t$.

   Exemplo: Observe
   $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 3\cdot 10 - (-4)\cdot 6 = 30 + 24 = 54$ e
   $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3\cdot 10 - 6\cdot(-4) = 30 + 24 = 54.$

7. Se trocarmos de posição duas filas paralelas de uma matriz quadrada o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz original.

   Exemplo: Observe que
   $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 4 + 6\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 7\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 1\cdot 4 = 118 - 94 = 24.$
   Agora trocando a linha 1 com a linha 2 obtemos:
   $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 4 + 7\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 0 - 5\cdot 6\cdot 7 - 0\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 7 = 94 - 118 = -24.$

8. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

   Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, a qual é triangular superior, então

   $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-10)\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot(-10)\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 5 =$
   $-150 = 3\cdot(-10)\cdot 5.$

9. Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e $A \cdot B$ a matriz produto, então:

$$\det\,(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, vamos verificar que $\det\,(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$. Sabemos que $A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$,
logo

$$\det\,(A \cdot B) = 11 \cdot (-20) - 16 \cdot (-15) = 20$$

e

$$\det A = 2 \cdot (-5) - 0 \cdot 3 = -10$$

e

$$\det B = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

então:

$$(\det A) \cdot (\det B) = (-10) \cdot (-2) = 20 = \det\,(A \cdot B)$$

10. Seja A uma matriz quadrada invertível, então $\det A \neq 0$, seja A^{-1} sua inversa, assim $\det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
Exemplo: Dada $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz inversa A^{-1} é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,
observe que:
$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$ e
$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - (-1) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
Assim $\det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
Observação: Essa propriedade apresenta um fato importante.
Teorema:

Uma matriz A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Demonstração: Temos que:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det\,(AA^{-1}) = \det I \Rightarrow \det\,(A) \cdot \det\,(A^-1) = 1$$

Logo: $\det A \neq 0$ e assim $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

11. O determinante de uma matriz quadrada não se altera quando adicionam aos elementos de uma fila qualquer, os elementos correspondentes de outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante.

    Exemplo: Observe que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 4 + 6\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 7\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 1\cdot 4 = 118 - 94 = 24$$

    Agora fazendo $L_2 \to L_2 - 3L_3$ temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -14 & 7 & -9 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 4 + 6\cdot -9\cdot 5 - 2\cdot 7\cdot 5 - (-14)\cdot 6\cdot 4 = 364 - 340 = 24.$$

Assim, apresentamos o conceito de matrizes que tem aplicações em diversas áreas, como na Física, Economia, Estatística, Psicologia etc. Com o uso de novas tecnologias, grandes quantidades de informação podem ser armazenadas e manipuladas de uma forma muito rápida com o uso de matrizes.

2 Sistemas Lineares

Neste capítulo abordaremos conceitos de sistemas lineares, um tema abordado no ensino médio muito utilizado no cotidiano, veremos como classifica-los e resolve-los.

De modo geral, denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

na qual:

- $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ são incógnitas;
- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são números reais chamados de coeficientes das incógnitas;
- b é o termo independente.

Observe as seguintes equações lineares:

a) Dada a equação $3x + 2y = 18$, dizemos que:

- O par ordenado (4,3) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$
- O par ordenado (6,0) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$
- O par ordenado (5,1) não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \neq 18$

b) Dada a equação $3x + y - 2z = 8$, dizemos que:

- O terno ordenado (2,4,1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 1 = 8$;
- O terno ordenado (0,6,-1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 0 + 6 - 2 \cdot (-1) = 8$
- O terno ordenado (5, -2, 3) não é uma solução da equação, pois $3 \cdot 5 + (-2) - 2 \cdot 3 \neq 8$

Generalizando, dada uma equação linear:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dizemos que n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução da equação se, e somente se:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

Denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado assim:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Exemplos:

1º) $\begin{cases} 3x - 2y = & 6 \\ x + 3y = & 10 \end{cases}$ é um sistema linear 2x2 nas incógnitas x e y.

2º) $\begin{cases} x + 4y - 2z & = 1 \\ 3x - y + z & = 6 \end{cases}$ é um sistema linear 2x3 nas incógnitas x, y e z.

3º) $\begin{cases} x - 2y - z & = 0 \\ 2x - y - z & = -1 \\ x - y + z & = 8 \end{cases}$ é um sistema linear 3x3 nas incógnitas x, y e z.

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satifaz simultaneamente todas as equações lineares do sistema.

2.1 Sistemas Lineares 2x2

Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam uma reta. A intersecção de duas retas que representam as equações de um sistema linear $2X2$ determina sua solução, se existir.

Se as equações que determinam um sistema 2x2, forem retas concorrentes. A solução é um único par ordenado dizemos que o sistema é possível e determinado.

Se as equações que determinam o sistema linear 2x2, forem retas paralelas, não existe par ordenado que seja solução do sistema, dizemos que o sistema é impossível.

Se as equações que determinam o sistema linear 2x2 forem retas coincidentes, a solução do sistema vai ter infinitos pares ordenados, dizemos que o sistema é possível e indeterminado.

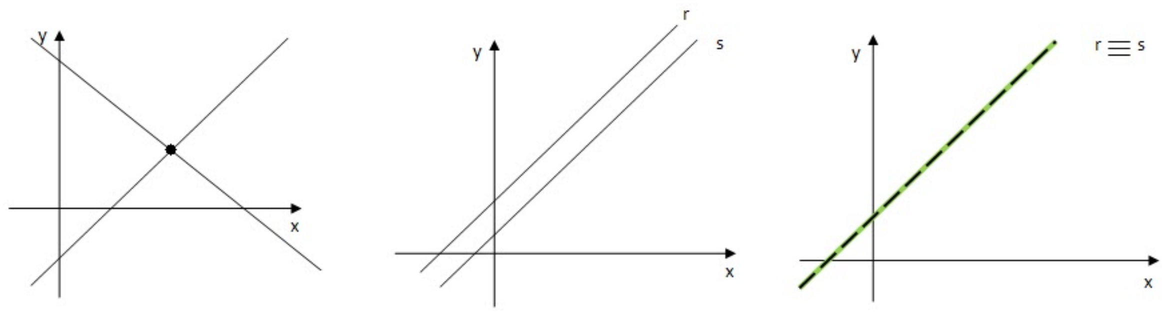


Figura 2.1: Sistema Possível e Determinado, Sistema Impossível e Sistema Possível e Indeterminado

Exemplos: Observe os sistemas:

$\begin{cases} 3x-2y &= 4 \\ x-4y &= 2 \end{cases}$ Neste caso temos duas retas concorrentes, logo o sistema é possível e determinado.

$\begin{cases} 3x+y &= -2 \\ -6x-2y &= 4 \end{cases}$ Neste caso temos duas retas parelelas, então o sistema é impossível.

$\begin{cases} 3x-2y &= 4 \\ x-4y &= 2 \end{cases}$ Neste caso temos duas retas coincidentes, então o sistema é possível e indeterminado.

2.2 Sistemas Lineares 3x3

Considerando o sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

de três equações com três incógnitas. Cada equação define os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente. O terno ordenado (x,y,z) é solução desse sistema quando o ponto $P(x,y,z)$ pertence a intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, P está simultaneamente nos três planos .

Existem oito possibilidade para as posições relativas dos três planos, π_1, π_2 e π_3, no espaço.

Sejam $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, descrevemos as oito situações à seguir .

1º Os três Planos Coincidem.

Neste caso, todos os pontos $P(x,y,z)$ de π são soluções do sistema. Há portanto infinitas soluções para o sistema. Isso ocorre quando L_1, L_2 e L_3 são múltiplos uns dos outros.

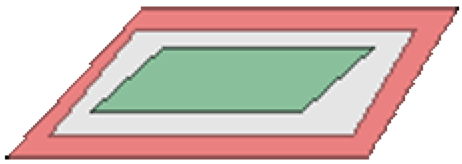


Figura 2.2: Planos Coincidentes

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y-2z=2, \\ 4x+4y-4z=4. \end{cases}$

2º Dois planos Coincidem e o terceiro é Paralelo a eles.

Neste caso, o sistema é impossível, não possui solução. Isso ocorre quando L_2 é múltiplo de L_1 mas L_3 não é múltiplo L_1, ou seja $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ e (a_3, b_3, c_3) são múltiplos e d_1 e d_2 são múltiplos, mas d_1 e d_3 não são múltiplos.

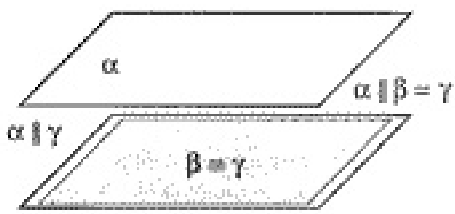


Figura 2.3: Dois Planos Coincidentes e um terceiro Paralelo a eles.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y-2z=2, \\ 4x+4y-4z=7. \end{cases}$

3º Dois Planos Coincidentes e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

Neste caso, todos os pontos $P(x,y,z)$ da reta são soluções. Há, portanto, infinitas soluções. O sistema é possível e indeterminado. Isso ocorre pois L_2 é múltiplo de L_1 mas L_3 não é múltiplo de L_1 nem os coeficientes.

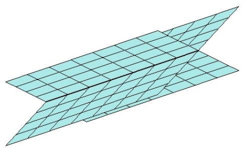


Figura 2.4: Dois Planos Coincidentes e um terceiro intersecta eles.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y-2z=2, \\ 4x+4y-z=4. \end{cases}$

4º Os planos são paralelos dois a dois.

Neste caso, o sistema não possui solução, sistema impossível. Isso ocorre quando as os coeficientes são múltiplos dois a dois, porém L_1, L_2 e, L_3 não são múltiplos uns dos outros.

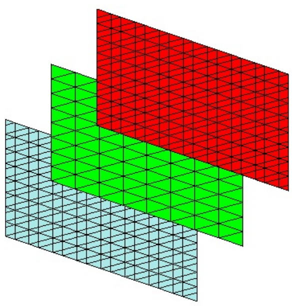


Figura 2.5: Planos Paralelos dois a dois.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y-2z=3, \\ 4x+4y-4z=7. \end{cases}$

5º Dois Planos são Paralelos e o outro os intersecta segundo Retas Paralelas.

Neste caso, o sistema não tem solução pois se $\pi_1 // \pi_2$ temos que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Portanto o sistema não tem solução. Isso ocorre quando os coeficientes da segunda equação são múltiplos dos coeficientes da primeira equação mas L_2 não é múltiplo de L_1. Além disso, os coeficientes da terceira equação não são múltiplos dos coeficientes da primeira equação.

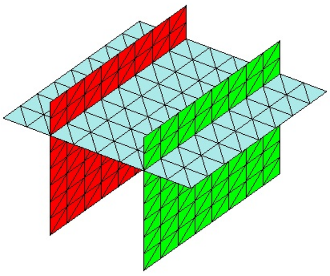


Figura 2.6: Dois planos paralelos e um Transversal.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y-2z=3, \\ 4x+4y-z=4. \end{cases}$

6º Os três Planos são Distintos e Têm uma Reta em Comum.

Neste Caso, temos que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ onde r é uma reta, assim todos os pontos $P(x,y,z)$ da reta r são soluções. Há portanto, infinitas soluções.Isso ocorre quando os coeficientes das equações não são múltiplos um do outro e L_3 pode ser escrito como uma combinação linear de L_1 e L_2.

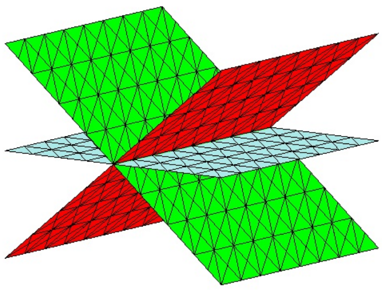


Figura 2.7: Três Planos Distintos com uma Reta em comum.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x-y+z=5, \\ 4x+y+3z=7. \end{cases}$

7º Os três Planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas uma as outras.

Neste caso, o sistema é impossível, Isso ocorre quando os coeficientes das equações não são múltiplas uma da outra e ainda os coeficientes de uma equação é uma combinação linear das outras duas e L_3 não é combinação linear de L_1 e L_2.

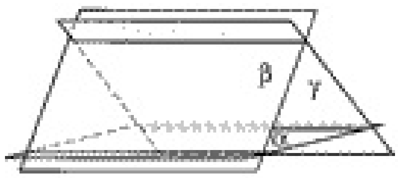


Figura 2.8: Três Planos se intersectam Dois a Dois.

Por exemplo: $\begin{cases} x+y-3z=1, \\ 5x+2y+z=2, \\ 9x+3y+5z=5. \end{cases}$

8º Os Três Planos Têm um único Ponto em comum.

Neste caso, o sistema é possível e determinado. Isso ocorre quando nenhum dos coeficientes das equações são combinações lineares dos coeficientes das outras duas equações.

Por exemplo: $\begin{cases} x+2y-3z=4, \\ 2x+3y+4z=5, \\ 4x+7y-z=13. \end{cases}$

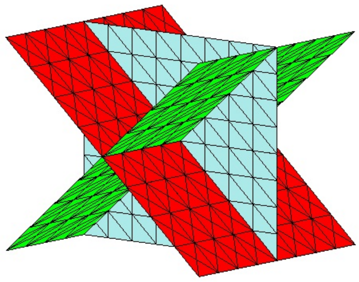


Figura 2.9: Três Planos se intersectam em um Ponto.

2.3 Representação Matricial

Um sistema Linear $m \times n$:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

pode ser reescrito da seguinte forma $AX = B$, assim classificamos a matriz $[A|B]$ como matriz ampliada do sistema linear. Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A matriz formada pelos coeficientes do sistema linear é chamada de matriz associada do sistema linear.

A matriz formada pelos coeficientes do sistema linear com a última coluna sendo os termos independentes do sistema é chamada de matriz associada completa do sistema linear, escrevemos $[A|B]$.

Um método bem eficaz de se resolver um sistema linear é o método do escalonamento. Este consiste em tornar a matriz associada completa do sistema linear na forma escalonada.

Exemplo: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} -x-2y-z=1=2, \\ 2x+5y+4z=-2, \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$

temos que a matriz associada ampliada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & 5 & \vdots & -2 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3+3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -2 & \vdots & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_1+2L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_3+4L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 \leftrightarrow -L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_1+3L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2-2L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right]$$. Portanto a solução é dada por $x=2, y=-2$ e $z=1$.

Sejam P_{AB} o posto da matriz ampliada e P_A o posto da matriz A então:

i) O sistema é possível se, e somente se, $P_{AB}=P_A$;

ii) O sistema é possível e determinado se, e somente se, $P_{AB}=P_A=n$;

iii) O sistema é possível e indeterminado se, e somente se, $P_{AB}=P_A<n$ onde $n-P_A$ é o número de incógnitas livres.

Ou seja, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.

Exemplo: Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} x+2y-2z+3w=2 \\ 2x+4y-3z+4w=5 \\ 5x+10y-8z+11w=12 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema linear escreveremos a matriz ampliada do sistema linear e em seguida a escalonamos.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -2 & 3 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & \vdots & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3-5L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \end{array} \right].$$

Como $P_{AB} = P_A = 2 < 4$(n número de incógnitas) temos que o sistema linear é possível e indeterminado. Existem então duas incógnitas livres, digamos y e w as quais podemos atribuir qualquer valor real a e b.

Portanto as soluções do sistema são os elementos do conjunto S.

$$S = \{(4 - 2a + b, a, 1 + 2b, b), a, b \in \mathbb{R}\}.$$

3 Problema das Luzes Apagadas

Neste capítulo abordaremos uma aplicação de matrizes e sistemas lineares que consiste em resolver o problema das luzes apagadas, no qual, também aplicaremos o conceito de $\mathbb{Z}_2$ (conjunto dos restos da divisão por 2).

"Lights Out" é um famoso jogo da década de 90, o qual consiste de 25 teclas iluminadas e arranjadas na forma de uma matriz 5x5.

Figura 3.1: Jogo Light Out

Nesse jogo, ao apertar uma tecla ,essa tecla e aquelas que estão diretamente a direita, a esquerda, acima e abaixo tem seu estado alternado como mostra a figura:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.2: Estado inicial

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.3: Teclas 8 e 11 apertadas

O jogo começa com algumas luzes acessas e algumas apagadas, o objetivo é apagar todas as luzes, para que, possamos apagar todas as luzes utilizamos matrizes, sistemas lineares e $\mathbb{Z}_2$.

3.1 O conjunto dos restos da divisão por 2

Como para cada $n \in \mathbb{Z}$ existem exatamente n restos possíveis $0, 1, 2, \cdots, n-1$, denotamos por $\mathbb{Z}_n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, o conjunto dos restos da divisão por n. Assim o conjunto dos restos da divisão por 2 é denotado por $\mathbb{Z}_2 = 0, 1$

No conjunto dos $\mathbb{Z}_2$, definimos as seguintes operações:

Adição:

$$
\begin{gathered}
0+0=0, \\
0+1=1, \\
1+0=1, \\
1+1=0.
\end{gathered}
$$

Multiplicação:

$$
\begin{gathered}
0.0=0, \\
0.1=0, \\
1.0=0, \\
1.1=1.
\end{gathered}
$$

Essas operações estão bem definidas pois é fechada, utlizamos elementos de $\mathbb{Z}_2$ para efetuarmos as operações e encontramos elementos de $\mathbb{Z}_2$.

3.2 Modelando o Problema das Luzes Apagadas

Começando o jogo com uma determinada configuração por exemplo:

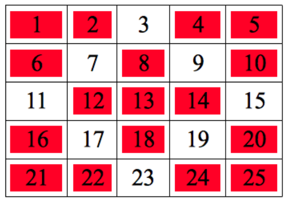


Figura 3.4: Estado Inicial do Jogo.

Observamos que nenhuma tecla precisa ser apertada mais do que uma vez, pois quando apertamos uma quantidade par de vezes a tecla retorna ao estado inicial e quando apertamos um número ímpar de vezes a tecla fica no mesmo estado de quando apertamos uma vez.

Ou seja, o estado final de uma tecla depende de quantas vezes ela e as teclas diretamente a direita, esquerda, acima e abaixo foram apertadas, sem importar a ordem.

Atribuindo 1 para o estado acesso da tecla, e 0 para o estado apagado da tecla temos que o estado inicial dado acima, pode ser representado pelo vetor $b \in (\mathbb{Z}_2)^{25}$:

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_{25})^t,$$

$$b = (1,1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1)^t.$$

Começando com todas as luzes apagadas e formos apertando as teclas chegaremos num estado que tem solução, ou seja se apertamos as mesmas teclas conseguiremos apagar todas as luzes.

Um estado é obtido quando apertamos uma determinada sequência de teclas a qual denotaremos por:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{25})^t,$$

Exemplo:

$$x = (1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0)^t$$

Seja o sistema obtido, quando apretamos cada uma das 25 teclas do jogo:

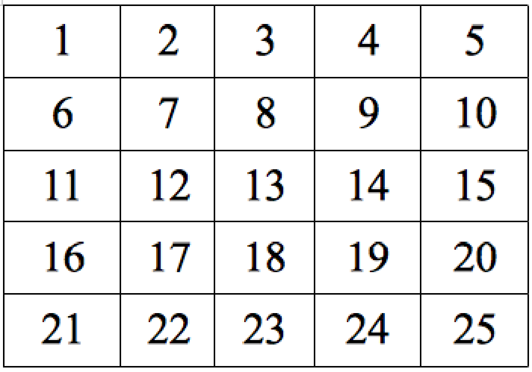


Figura 3.5: Estado Inicial

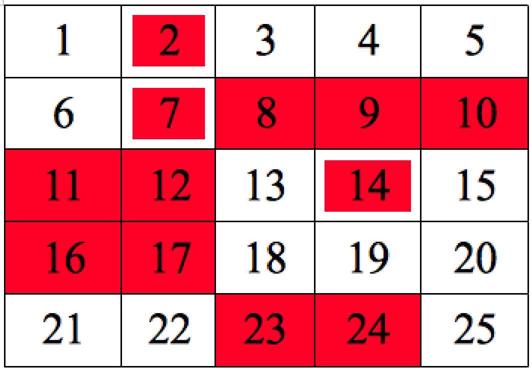


Figura 3.6: Sequência x apertada

$$
\begin{cases}
t_1 = & x_1 + x_2 + x_6 \\
t_2 = & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \\
t_3 = & x_2 + x_3 + x_4 + x_8 \\
\vdots & \vdots \\
t_{12} = & x_7 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{17} \\
\vdots & \vdots \\
t_{24} = & x_{19} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \\
t_{25} = & x_{20} + x_{24} + x_{25}
\end{cases}
$$

Podemos escrever o sistema Linear acima na forma matricial $Ax = T$ com $T \in (\mathbb{Z}_2)^{25}$ e A_{25x25}, com:

$$
A_{25x25} = \begin{bmatrix} B & I & 0 & 0 & 0 \\ I & B & I & 0 & 0 \\ 0 & I & B & I & 0 \\ 0 & 0 & I & B & I \\ 0 & 0 & 0 & I & B \end{bmatrix}, \text{ onde } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Assim:

$$A=\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{bmatrix}.$$

Assim para determinar a solução de um estado b, devemos encontrar uma estratégia x, tal que.

$$Ax+b=0.$$

Como $b\in(\mathbb{Z}_2)^{25}$ temos que $b+b=0$, então resolvemos o sistema:

$$Ax=b.$$

Um estado b pode ser resolvido se, e somente se, b pertence ao espaço coluna de A $(b\in col(A))$.

Como A é simétrica temos que o espaço coluna de A (col(A)) é igual ao espaço linha de A (row(A)). Mas o espaço linha de A é o complemento ortogonal do espaço nulo de A (Ker(A)). Sendo E a forma escalonada de A temos que:

$$E = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}.$$

Assim $Ker(A) = Ker(E)$ e $Posto(A) = 23$, logo a $dim(Ker(A)) = 2$. As variáveis livres estão nas duas ultimas colunas da matriz E, ou seja, $col(A) = row(A)$ é gerado pelas 23 primeiras linhas.

O $col(A)$ é formado pelos vetores ortogonais aos vetores da base do espaço nulo de A, e como as duas últimas colunas são dadas por:

$$(0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0)^t,$$

$$(1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,0)^t,$$

temos que a base do espaço nulo de A é dada pelos vetores:

$$\vec{n}_1 = (0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0)^t,$$

$$\vec{n}_2 = (1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1)^t.$$

Logo $Ax = b$ é possível, se e somente, se b é ortogonal a n_1 e n_2. Se b é ortogonal a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ temos que $b \in col(A)$. Assim $Ax = b$ tem solução, utilizaremos o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema.

O Método da eliminação de Gauss-Jordan é um método de escalonamento que consiste em aplicar operações elementares à matriz aumentada do sistema, até que ela fique na forma escalonada reduzida.

3.3 Como Resolver Utilizando o Scilab

Para resolver esse sistema fizemos uma modificação no algortimo da eliminação de Gauss, fazendo todas as operações terem como resultados um elemento de $\mathbb{Z}_2$.
Algoritmo da eliminação de Gauss.
Seja $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$.

então $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

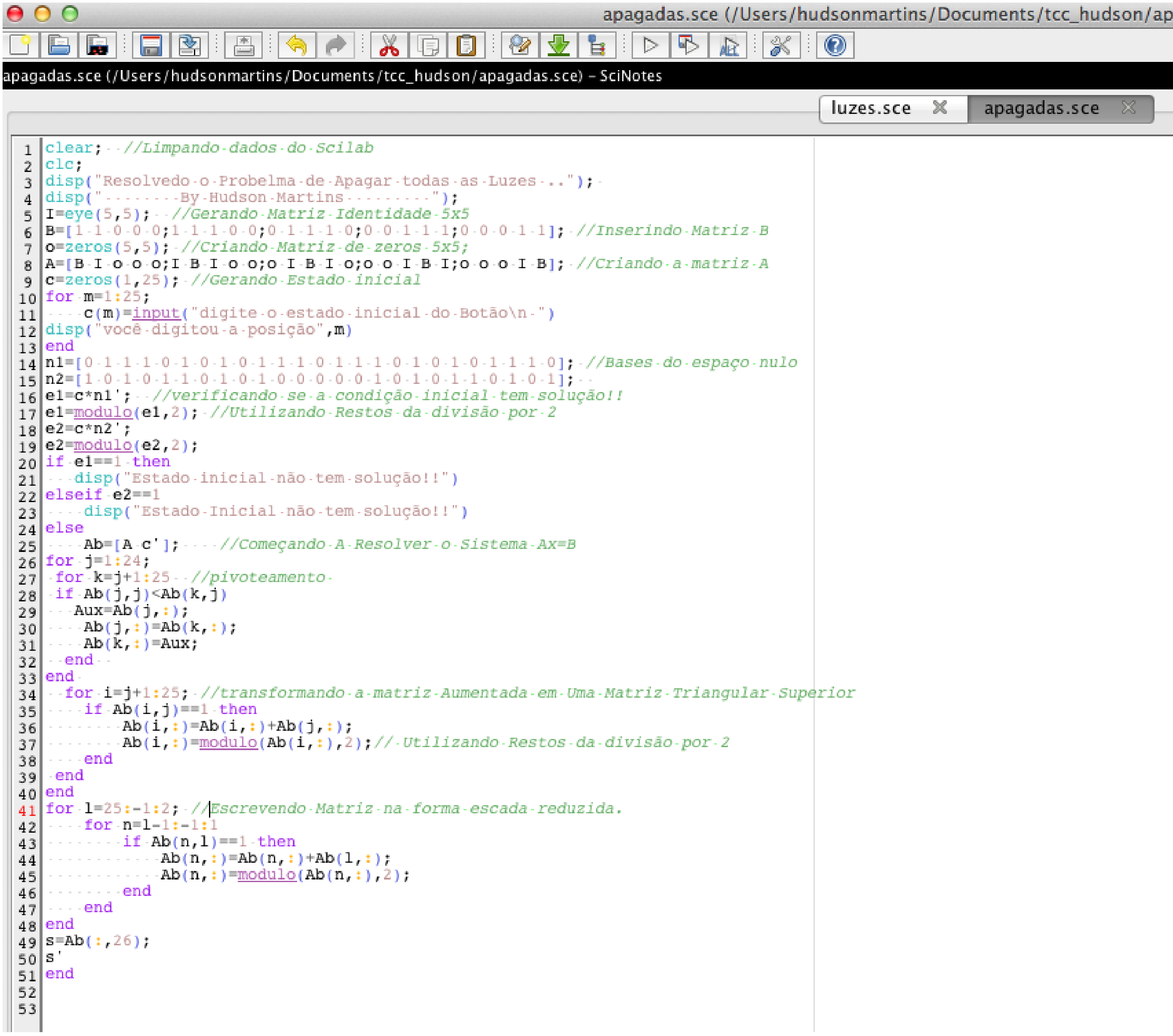
Para $j = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k}{a_{jj}}.$$

Para resolver o problema das luzes apagadas implementamos o algoritmo acima modificado no Scilab.

O Scilab é um software livre e de código aberto distribuido gratuitamente via internet (www.scilab.org) desde de 1994, voltado para computação numérica semelhante ao Matlab. O Scilab inclui centenas de funções matemáticas e a possibilidade de se incluir novas , graças a interatividade com programas de variadas linguagens (C, C++, Fortran etc).

O programa no Scilab:




```
clear;  //Limpando dados do Scilab
clc;
disp("Resolvedo o Probelma de Apagar todas as Luzes ..");
disp("        By Hudson Martins         ");
I=eye(5,5);  //Gerando Matriz Identidade 5x5
B=[1 1 0 0 0;1 1 1 0 0;0 1 1 1 0;0 0 1 1 1;0 0 0 1 1]; //Inserindo Matriz B
o=zeros(5,5); //Criando Matriz de zeros 5x5;
A=[B I o o o;I B I o o;o I B I o;o o I B I;o o o I B]; //Criando a matriz A
c=zeros(1,25); //Gerando Estado inicial
for m=1:25;
    c(m)=input("digite o estado inicial do Botão\n ")
disp("você digitou a posição",m)
end
n1=[0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0]; //Bases do espaço nulo
n2=[1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1];
e1=c*n1';  //verificando se a condição inicial tem solução!!
e1=modulo(e1,2); //Utilizando Restos da divisão por 2
e2=c*n2';
e2=modulo(e2,2);
if e1==1 then
   disp("Estado inicial não tem solução!!")
elseif e2==1
    disp("Estado Inicial não tem solução!!")
else
    Ab=[A c'];    //Começando A Resolver o Sistema Ax=B
for j=1:24;
 for k=j+1:25  //pivoteamento
 if Ab(j,j)<Ab(k,j)
   Aux=Ab(j,:);
    Ab(j,:)=Ab(k,:);
    Ab(k,:)=Aux;
  end
end
  for i=j+1:25; //transformando a matriz Aumentada em Uma Matriz Triangular Superior
    if Ab(i,j)==1 then
        Ab(i,:)=Ab(i,:)+Ab(j,:);
        Ab(i,:)=modulo(Ab(i,:),2);// Utilizando Restos da divisão por 2
    end
 end
end
for l=25:-1:2; //Escrevendo Matriz na forma escada reduzida.
    for n=l-1:-1:1
        if Ab(n,l)==1 then
            Ab(n,:)=Ab(n,:)+Ab(l,:);
            Ab(n,:)=modulo(Ab(n,:),2);
        end
    end
end
s=Ab(:,26);
s'
end
```

Figura 3.7: Script implementado no Scilab

O programa escreve a matriz A do problema a luzes apagadas, recebe do usuário o estado inicial do jogo, escreve as bases do espaço nulo $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, verifica a condição de solução no conjunto dos $\mathbb{Z}_2$, em seguida aplica-se o algoritmo da eliminação de Gauss no $\mathbb{Z}_2$ e assim escreve a solução do Problema das Luzes Apagadas indicando que teclas devem ser apertadas.

Exemplo: Seja o estado inicial do jogo:

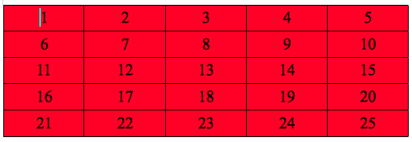


Figura 3.8: Condição Inicial todas as luzes acessas.

Utilizando o programa encontramos a seguinte solução:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vejamos o que acontece quando seguimos essa sequencia:

Pela sequência que obtivemos devemos aperta as seguintes teclas:

A tecla 2 o jogo vai ficar da seguinte forma:

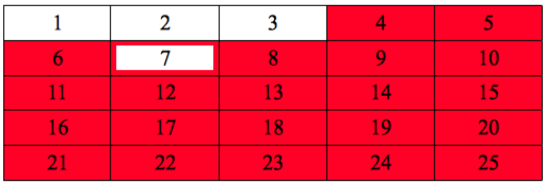


Figura 3.9: Tecla 2 apertada.

A tecla 3 o jogo agora têm a seguinte configuração:

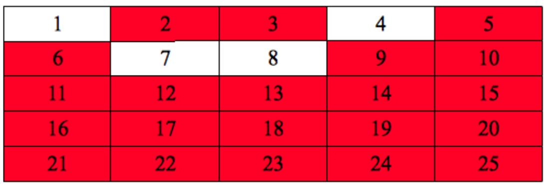


Figura 3.10: Tecla 3 apertada.

A tecla 5 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.11: Tecla 5 apertada.

A tecla 7 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.12: Tecla 7 apertada

A tecla 8 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.13: Tecla 8 apertada

A tecla 9 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.14: Tecla 9 apertada

A tecla 13 o jogo agora têm a seguinte configuração:

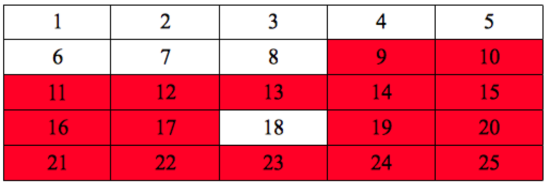


Figura 3.15: Tecla 13 apertada

A tecla 14 o jogo agora têm a seguinte configuração:

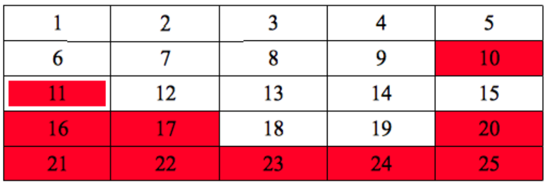


Figura 3.16: Tecla 14 apertada

A tecla 15 o jogo agora têm a seguinte configuração:

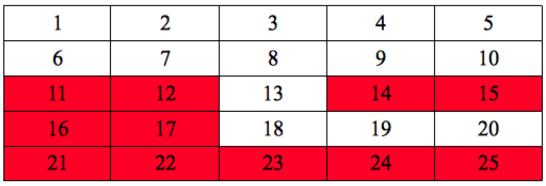


Figura 3.17: Tecla 15 apertada

A tecla 16 o jogo agora têm a seguinte configuração:

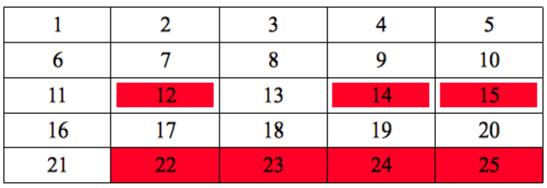


Figura 3.18: Tecla 16 apertada

A tecla 17 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.19: Tecla 17 apertada

A tecla 19 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.20: Tecla 19 apertada

A tecla 20 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.21: Tecla 20 apertada

A tecla 21 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.22: Tecla 21 apertada

A tecla 22 o jogo agora têm a seguinte configuração:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3.23: Tecla 22 apertada

De fato, conseguimos apagar todas as luzes, lembrando que podemos apertas as teclas em qualquer ordem, mesmo assim iremos apagar todas as luzes.

Considerações Finais

Começamos tratando de assuntos do ensino médio que são de fundamental importância para o estudante que vai estudar Álgebra Linear,uma das áreas de maior importância em ciências exatas, por resolver diversos problemas, como vimos no último capítulo deste trabalho, podendo nos auxiliar até mesmo na resolução de um jogo de ”luzes piscantes”.

No ensino médio é muito importante que o conceito matemático seja construído junto com o estudante raciocinando, lembrando conceitos anteriores e descobrindo novos, para que ele consiga fazer conexões entre os assuntos. E assim absorve muito mais conhecimento e prática matemática.

E com certeza essa prática será bem mais prazerosa e satisfatória se usarmos os conceitos matemáticos num uso computacional afim de resolver um problema prático, neste trabalho utilizamos o software Scilab tão quase poderoso quanto MATLAB, MATHEMATICA, entre outros do gênero numérico, mas com a seguinte vantagem, de ser um software livre, então temos uma excelente ferramenta de auxílio no ensino de matrizes, geometria analítica, gráficos em geral. Assim como existem outras ferramanetas tecnologicas para auxiliar no desenvolvimento de outros conteúdos, o uso da tecnologia pode ajudar muito no ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] HEFEZ, Abramo.; FERNANDEZ, Cecilia de Souza. Introdução à Álgebra Linear. Coleção PROFMAT -ed 1 - Rio de Janeiro - SBM - 2012

[2] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. Um curso de Álgebra Linear -ed 2ª -rev. e ampl. - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. Pinto;WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César – A matemátca do ensino médio - vol3 - 6ªed -Rio de Janeiro: SBM 2006.

[4] ANDERSON, Marlow; FEIL, Todd – Turning Lights Outs wiht Linear Algebra - Mathematics Magazine, Vol 71, nº4, Outubro de 1998, pg 300 -303

[5] GONÇALVES,Maria Inês C. Apagando as Luzes Usando Álgebra Linear. Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática

[6] FILHO, Danusio Gadelha . Apostila do Scilab . disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/ giacomo/Manuais-softw/SCILAB/Apostila%20de%20Scilab%20-%20atualizada.pdf aceesado em 11/10/2014.

[7] RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais - São Paulo: McGraw-Hill, 1998.