UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto
IBILCE

Alfio Grassi Filho

Critérios de Divisibilidade e Aplicação em Sala de Aula

São José do Rio Preto
2015

Alfio Grassi Filho

Critérios de Divisibilidade e Aplicação em Sala de Aula

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2015

Alfio Grassi Filho

Critérios de Divisibilidade e Aplicação em Sala de Aula

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Lígia Laís Fêmina
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
27 de abril de 2015

AGRADECIMENTOS

A Nosso Senhor Jesus Cristo, pelo amparo em minha vida.

A professora Évelin Meneguesso Barbaresco, pela orientação e incentivo sem as quais não teria conseguido a conclusão deste trabalho.

Aos professores do Programa PROFMAT, que contribuíram muito para meu aperfeiçoamento profissional e conclusão desta pesquisa.

A Sra. Supervisora Rosemar, pelas orientações necessárias que muito contribuíram para a conclusão deste curso.

Ao todos os funcionários do IBILCE, em especial, aos da Secção de Pós-Graduação, em particular, ao Alex, pelo acompanhamento administrativo e suporte oferecido aos alunos do PROFMAT.

Aos colegas do PROFMAT que muito me auxiliaram com contribuições e apoio para finalização desta etapa.

A todos da E.E. “Celso Abbade Mourão” pelo apoio e participação neste trabalho.

À minha família: mãe, madrinha, irmãos, e aos meus queridos netos Leon e Juan.

RESUMO

A divisibilidade é um assunto em Matemática que, quando apresentado aos alunos do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, pode ser considerada difícil para um grande número deles. As dificuldades geralmente ocorrem por falta de domínio de pré-requisitos e até por criarem uma espécie de barreira sobre o tema. Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar uma regra geral e simplificada para estabelecer critérios de divisibilidade para números primos naturais maiores ou iguais a 7. Critérios de divisibilidade são regras que permitem determinar a divisibilidade dos números sem a necessidade de efetuar longos processos de divisão. Particularmente, estudamos o critério de divisibilidade por 7, por ser o maior número primo de um algarismo e muito pouco explorado nos materiais didáticos da Rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo.

Palavras-chave: Divisibilidade, Números Primos, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Divisibility is a subject in mathematics that, when presented to students of elementary school or even also of high school, can be considered difficult for a large number of them. The difficulties often occur for lack of prerequisites knowledge and even by creating a kind of barrier on the subject. This work aims to present a general and simplified rule to establish divisibility criteria for natural primes greater or equal to 7. Divisibility criteria are rules for determining divisibility of numbers without the need to perform long division processes. In particular, we study the criterion of divisibility by 7, the largest prime number of one digit and very little explored in teaching materials of the Official Network of São Paulo State Education.

Keywords: Divisibility, Prime Numbers, Mathematics Education.

Sumário

INTRODUÇÃO

Atualmente podemos notar um grande empenho em solucionar as dificuldades de aprendizagem em Matemática, ligadas a inúmeros problemas, que vão desde o aluno até o professor. Considerando o contexto sociocultural atual, as demandas que têm sido feitas à escola pela sociedade e atendendo aos interesses e às expectativas dos alunos, o professor deve dispor de estratégias diferenciadas com o objetivo de tornar os alunos capazes de promover a realização pessoal, a qualificação para o trabalho, para a participação social e política, enfim, para uma cidadania plena.

Nesta direção, um fator necessário é investir na formação dos professores, preparando-os adequadamente e reciclando seus conhecimentos. O professor precisa conhecer os conceitos matemáticos e saber como apresentá-los, intervindo de forma adequada e produtiva.

Neste trabalho, pretendemos apresentar um assunto explorado dentro da teoria de números, teoria essa que teve o seu desenvolvimento atrelado ao desenvolvimento da própria Matemática. A partir do momento em que a humanidade sentiu necessidade de um modelo de contagem (deve-se a isso o surgimento dos números), houve o interesse em estudar e explorar as propriedades dos números.

Nossa proposta é explorar os critérios de divisibilidade, dando destaque para o caso de divisibilidade por um número primo qualquer. Para isso, no Capítulo 1 são apresentados alguns pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Tais pré-requisitos tratam dos números naturais e suas operações, assim como a relação de ordem estabelecida sobre esse conjunto e suas propriedades. Além disso, neste capítulo temos também o Princípio de Indução e suas variações, o Princípio da Boa Ordenação e um breve histórico dos sistemas de numeração.

No capítulo 2, exploramos os critérios de divisibilidade e, em particular, o critério de divisibilidade por um número primo. Para isso, recordamos o conceito de divisibilidade, o algoritmo da divisão de Euclides, números primos e então passamos a estudar os critérios.

No capítulo 3, há o relato de uma atividade realizada em sala de aula com alunos do 3º ano do Ensino Médio, onde lhes foram apresentados os critérios de divisibilidade por números primos e sua exploração através de exercícios.

CAPÍTULO 1 - PRÉ- REQUISITOS

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente observamos que as principais referências para este capítulo são (LIMA,1999) e (HEFEZ, 2011).

1.1 NÚMEROS NATURAIS

À medida que a humanidade se civilizava, surgiu a necessidade da utilização de um sistema de contagem. Os números naturais formam um modelo abstrato de contagem (um, dois, três,...) que surgiu lentamente diante da necessidade provocada por um sistema social cada vez mais complexo.

Decorridos alguns milênios, hoje os números naturais podem ser escritos de maneira concisa e precisa utilizando a notação introduzida pelo matemático italiano Giuseppe Peano por volta do século 20. Nesta notação usamos o símbolo $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto cujos elementos são chamados *números naturais*. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ está na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando $n, n' \in \mathbb{N}$, dizemos que n' é o sucessor de n quando n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais obedece às seguintes regras:

a) Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
b) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda, números que têm o mesmo sucessor são iguais.)
c) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 0 e chamado de "zero".
d) Se um conjunto de números naturais contém o número 0 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

As afirmações a), b), c) e d) acima constituem os *axiomas de Peano*, sendo que o item (d) é denominado *axioma de indução*. Tudo que se sabe à respeito dos números naturais pode ser demonstrado como consequência dos axiomas de Peano.

1.1.1 Adição e Multiplicação

Sobre o conjuntos dos números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a ***adição***, que aos números $n,\ p \in \mathbb{N}$ faz corresponder a *soma* $n + p$ e a ***multiplicação***, que lhes associa o *produto* $n \cdot p$.

A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, $n + 1$ é o sucessor de n, $n + 2$ é o sucessor de $n + 1$, etc.

De agora em diante, o sucessor do número natural n será designado por $n + 1$.

Quanto ao produto, tomamos $n \cdot 0 = 0$, por definição e, quando $p \neq 0$, $n \cdot p$ é a soma de p parcelas iguais a n.

A rigor, as operações fundamentais são definidas por indução, como segue:

- *Adição*: $n + 1$ é o sucessor do número natural n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. A última igualdade diz que, se sabemos somar p a todos os números naturais n, sabemos também somar $p + 1$. Ou seja, a soma $n + (p + 1)$ é simplesmente o sucessor $(n + p) + 1$ de $(n + p)$. O axioma da indução garante que a soma $n + p$ está definida para quaisquer $n,\ p \in \mathbb{N}$.
- *Multiplicação:* $n \cdot 0 = 0$ e $n \cdot (p + 1) = n \cdot p + n$. Se sabemos multiplicar todos os números naturais n por p, sabemos também multiplicá-los por $p + 1$, para isso basta tomar $n \cdot (p + 1) = n \cdot p + n$. Por indução, sabemos multiplicar todo n por qualquer p.

A seguir enunciamos algumas propriedades importantes, válidas para a adição e multiplicação, que podem ser demonstradas usando o axioma de indução:

a) Comutativa:

b) $\forall a, b \in \mathbb{N}$, temos $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

c) Associativa:

d) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, temos $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

e) Distributiva:

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

1.1.2 Ordem

No conjunto dos números naturais temos uma relação de ordem definida da seguinte maneira: dados dois números naturais m, n dizemos que m é ***menor*** do que n, e denotamos por $m < n$, quando existe $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, tal que $n = m + p$. Assim, dizemos que n é *maior* do que m e escrevemos $n > m$ para representarmos $m < n$. Escrevendo $m \leq n$ *segue* que $m < n$ ou $m = n$. Por definição, temos que $m < m + p$ para todo $m, p \in \mathbb{N}$.

Segue da definição que $0 < n$, para qualquer número natural $n \neq 0$.

De fato, pelo axioma (c) da definição dos números naturais, $n \neq 0$ implica que n é sucessor de algum número natural m, ou seja, $n = m + 1 = 1 + m$, logo $n > 1$ ou $n = 1$. Portanto, 0 é o menor dos números naturais.

Os números naturais possuam a seguinte propriedade (conhecida como *tricotomia*): dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas:

$$m < n, \quad m = n \quad ou \quad n < m.$$

Definição: Consideremos A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Dizemos que um número natural a é o ***menor*** elemento de A quando $a \in A$, e ainda, $a \leq n$, para todo $n \in A$.

Se A possui um menor elemento, este é único. De fato, se a e a' são menores elementos de A, então $a \leq a'$ e também $a' \leq a$, o que implica que $a = a'$.

1.1.3 Princípio de Indução

O axioma de indução é a base de um excelente método bastante utilizado em demonstrações de fatos relativos aos números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência). Enunciado sob a forma de propriedade ele se apresenta assim:

Teorema 1 (Princípio de Indução Matemática): Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i. $P(0)$ é válida;

ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

Então, $P(n)$ é válida para todo número natural n.

Demonstração: Se denotarmos por X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, temos que $0 \in X$ pela hipótese (i). Além disso, a hipótese (ii) garante que se $n \in X$ então $n' \in X$. Logo, pelo axioma da indução, podemos concluir que $X = \mathbb{N}$.

Vejamos um exemplo de aplicação deste Princípio.

***Exemplo 1*:** Provemos que é verdadeira a seguinte afirmação:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

Para provar que essa afirmação é verdadeira para todo natural a partir do 0, observamos que, para $n = 0$, temos $\frac{0}{0!} = \frac{(0+1)!-1}{(0+1)!} = 0$. E, portanto, a proposição para $n = 0$ é verdadeira.

Suponhamos válida para $n = k$, e a partir desse fato, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$. Temos que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}.$$

Então, acrescentando o termo $\frac{k+1}{(k+2)!}$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$

$$= \frac{(k+2).[(k+1)!-1]+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-k-2+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}.$$

Assim, a partir de $n = k$, provamos que a propriedade vale para $n = k + 1$.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Existem também variações desse método, como veremos no teorema abaixo.

Teorema 2 (Princípio de Indução Generalizado): Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i. $P(a)$ é válida;

ii. $\forall\, n \geq a$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq a$.

Demonstração: Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}\,;\, P(a+n) \text{ é } verdadeira\}$. Provemos, por indução sobre n que $X = \mathbb{N}$.

Como $P(a)$ é válida então, pela hipótese (ii), $P(a+0)$ também é válida. Logo, $0 \in X$. Além disso,

$$n \in X \Rightarrow P(a+n) \text{ é } verdadeira \overset{(ii)}{\Rightarrow} P(a+n+1) \text{ é } verdadeira \Rightarrow n+1 \in X.$$

Assim, pelo princípio de indução, temos que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é válida para todo $n \geq a$.

Exemplo 2: Vejamos uma situação simples onde se emprega o Princípio da Indução Generalizado. Trata-se de provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$. Esta afirmação, (que é falsa para $n = 1$ ou $n = 2$), vale quando $n = 3$.

De fato, temos que $2.3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$. Logo a afirmação é válida para $n = 3$.

Supondo-a válida para um certo $n \geq 3$, mostremos que daí decorre sua validez para $n + 1$. Com efeito,

$$2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

(Na primeira desigualdade, usamos a hipótese de indução.) Desse modo temos provado que a propriedade é válida para $n+1$. Assim, pelo Princípio da Indução Generalizado, temos que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$.

Às vezes, para demonstrarmos uma propriedade por indução, seria fundamental admitirmos que a proposição seja válida não somente para n e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a n. Assim, vejamos os teoremas a seguir:

Teorema 3 (Segundo Princípio de Indução): Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X, então $n \in X$. Assim sendo, pelo Segundo Princípio de Indução, temos que se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ tem a propriedade acima, então ele coincide com $\mathbb{N}$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$, isto é $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural que não pertence a X. Então, todos os números naturais menores do que n pertencem a X. Mas a propriedade da hipótese, n pertence a X, o que é uma contradição. Logo $\mathbb{N} - X = \emptyset$ e portanto $X = \mathbb{N}$.

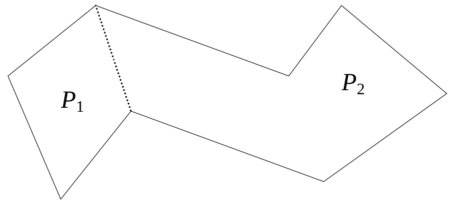
Teorema 4 (Segundo método de demonstração por indução): Seja $P(n)$ uma propriedade referente aos números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a propriedade $P(n)$ for válida para todo número natural *menor* do que n, e esse fato implicar que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais.

Demonstração: De fato, sendo o conjunto X dos números naturais que apresentam a propriedade P , então satisfaz a condição de hipótese do Segundo Princípio da Indução. Logo, $X = \mathbb{N}$ e P vale para todos os números naturais.

Exemplo 3: O número de diagonais internas que não se interceptam de um polígono P de n lados é igual a $n - 3$.

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ vamos supor que esta proposição seja válida para qualquer polígono com menos de n lados.

Consideremos uma decomposição do polígono P, de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixando-se uma dessas diagonais, ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$. Assim, a proposição é válida para os polígonos P_1 e P_2. Observe que $n_1 + n_2 = n + 2$.



As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam da seguinte maneira: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1, $n_2 - 3$ decompõem P_1 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto $d = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5$.

Como $n_1 + n_2 = n + 2$, resulta que $d = n - 3$. Assim, completamos a demonstração.

1.1.4 Propriedades de ordem e princípio da boa ordenação

A seguir temos algumas propriedades básicas da relação de ordem, definida na subseção 1.1.2, e o resultado conhecido como Princípio da Boa Ordenação, o qual garante que todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Em todos os teoremas a seguir considere m, n e p sendo números naturais.

Teorema 5 (*Transitividade*): Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração: Se $m < n$ e $n < p$, então existem $k, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = m + k$ e $p = n + r$. Logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$.

Definição: Dois números naturais m, n são ***comparáveis*** quando se tem $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Teorema 6 (*Comparabilidade*): Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.

Demonstração: Vamos provar por indução. O número 0 é comparável com qualquer outro número natural, pois já sabemos que $0 < m$ para qualquer $m \neq 0$.

Suponhamos que o número n seja comparável com todos os números naturais. Provemos que $n + 1$ também possui esta propriedade.

De fato, seja $m \in \mathbb{N}$. Então $m < n$, $m = n$ ou $n < m$. Assim temos que:

se $m < n$, então $m < n + 1$, por transitividade, pois sabemos que $n < n + 1$.

se $m = n$, então $m < n + 1$.

se $n < m$ então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Daí temos duas possibilidades:

se $p = 1$, donde $m = n + 1$;

se $p > 1$, temos que $p = 1 + p'$, para algum $p' \in \mathbb{N}$. Então

$$m = n + (1 + p') = (n+1) + p'.$$

Assim verificamos que $n + 1 < m$.

Logo concluímos que $n + 1$ é comparável com qualquer número natural m. Portanto, pelo Princípio de Indução, fica verificada a comparabilidade de quaisquer números naturais m e n.

Teorema 7 (*Monotonicidade*): *Se* $m < n$, *então* $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Demonstração: Se $m < n$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Assim, $n + p = (m + k) + p$, donde se conclui que $m + p < n + p$. De modo análogo temos, $m < n$ implica que $n = m + k$. Então $np = mp + kp \Rightarrow mp < np$.

A recíproca da demonstração também é verdadeira pois, se $m + p < n + p$ então $m < n$, e $mp < np$ implica que $m < n$.
De fato, suponhamos $m + p < n + p$, com $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$. Então, se tivéssemos $m > n$, existiria $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$, de modo que $m = n + r$. Como $m + p < n + p$, então $(n + r) + p < n + p$. Mas isso é um absurdo pois $r \neq 0$.

De modo análogo, se consideramos $mp < np$, com $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, então supondo que $m > n$, existe $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$, de modo que $m = n + r$. Como $mp < np$, então $(n + r)p < np$. Daí $np + rp < np$. O que é um absurdo pois $r \neq 0 \; e \; p \neq 0$.

O teorema seguinte mostra que n e $n + 1$ são números consecutivos.

Proposição 1. Dado n um número natural, não existem números naturais entre n e $n + 1$.
Demonstração: Se existisse $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$, teríamos $p = n + k$ e $n + 1 = p + r$, para $k, r \in \mathbb{N}$, com $k \neq 0 \; e \; r \neq 0$. Assim, $n + 1 = n + k + r$, o que implicaria em $1 = k + r$. Isto significaria que $k = 0 \; ou \; r = 0$, o que

é absurdo.

A seguir, apresentaremos uma propriedade importante sobre ordenação, que é uma consequência do axioma de indução.

Teorema 8 (Princípio da Boa Ordenação): Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Demonstração: Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e suponha, por absurdo, que A não possui um menor elemento. Queremos mostrar que A é vazio, levando a uma contradição.

Considere o conjunto B, complementar de A em $\mathbb{N}$. Queremos mostrar que $B = \mathbb{N}$.

Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N};\ k \leq n\}$ e considere sentença aberta $P(n)\colon I_n \subset B$. Como $0 \leq n$, para todo n, segue que $0 \in B$, pois, caso contrário, 0 seria um menor elemento de A. Logo $P(0)$ é verdadeira.

Suponha agora que $P(n)$ seja verdade e provemos que $P(n+1)$ também é verdadeira. Se $n+1 \in A$, como nenhum elemento de I_n está em A, teríamos que $n+1$ é um menor elemento de A, o que não é possível, pela maneira como consideramos o conjunto A. Assim, $n+1 \in B$. Logo

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\} \subset B,$$

o que prova que $\forall n,\ I_n \subset B$.

Portanto, $\mathbb{N} \subset B \subset \mathbb{N}$ e, consequentemente, $\mathbb{N} = B$.

1.2 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Durante toda a história, assim como a palavra, o número também passou por diversas mudanças na sua representação. Os símbolos “9”, “nove”, “IX”, são maneiras diferentes de representar o mesmo número, apenas escrito em idiomas e épocas distintas. *Sistema de Numeração* é um sistema que representa números de uma forma consistente, representando uma grande quantidade de números úteis, dando a cada número uma única representação. No transcorrer da história da humanidade foram criados símbolos e regras por cada povo, originando assim os diferentes *Sistemas de Numeração.*

1.2.1. Sistema de Numeração Egípcio

O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números chave: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000. Um traço vertical representava 1 unidade, um osso de calcanhar invertido representava o número 10, um laço valia 100 unidades, uma flor de lótus valia 1.000, um dedo dobrado valia 10.000, um girino representava 100.000 unidades, uma figura ajoelhada (talvez representando um deus) valia 1.000.000. Veja a Figura 1 abaixo.

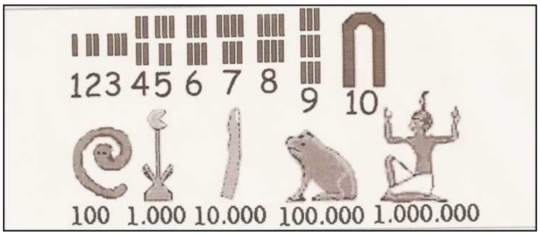


Figura 1: Representação dos números no sistema de numeração egípcio
Fonte: site http://meuartigo.brasilescola.com/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm

Para representar os outros números eram feitas combinações, como mostrado na Figura 2 abaixo:

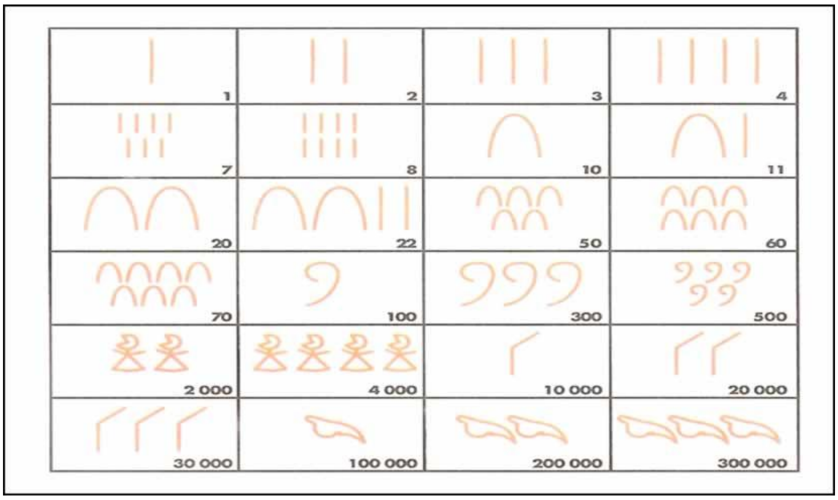


Figura 2: Representação dos números no sistema de numeração egípcio
Fonte: site http://meuartigo.brasilescola.com/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm

Os egípcios não se preocupavam com a ordem dos símbolos, o que para a atualidade é imprescindível. Esse sistema de numeração servia para efetuar cálculos que envolviam números inteiros. A técnica era efetuar todas as operações matemáticas através de uma adição.

1.2.2. Sistema de Numeração Romano

O Sistema de Numeração Romano, apesar das dificuldades operatórias que apresentava, foi utilizado na Europa durante muitos séculos. Ainda hoje utilizamos esse sistema de numeração em algumas situações, tais como:

- designação de papas e reis;
- designação de séculos e datas;
- indicação de capítulos e volumes de livros;
- mostradores de alguns relógios, etc.

No Sistema de Numeração Romano são utilizado sete símbolos (letras) que representam os seguintes números:

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Para formar outros números romanos utiliza-se as letras acima repetindo-as uma, duas ou três vezes (nunca mais de três). Sendo que as letras V, L e D não podem ser repetidas.

2	3	20	30	200	300	2000
II	III	XX	XXX	CC	CCC	MM

Para formar números diferentes dos citados até agora, devemos saber que as letras I, X e C, colocam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, obedecendo às seguintes regras:

- I coloca-se à esquerda de V ou X
- X coloca-se à esquerda de L ou C
- C coloca-se à esquerda de D ou M

1.2.3. Sistema de Numeração Babilônico

Os babilônios usavam um sistema de numeração posicional, herdado das civilizações sumérios e acadianos. Nenhuma das numerações até então existentes tinha sido um sistema posicional.

Os primeiros registros desse sistema de numeração datam de cerca de 3100 a.C. Foi o primeiro sistema posicional, ou seja, onde cada dígito particular tem seu valor dependendo tanto de seu valor próprio como da sua posição na sequência que representa uma quantidade (como é, aliás, o caso da numeração arábica). Esse desenvolvimento foi de extrema importância, por que as numerações sem essa característica precisavam ter muitos símbolos próprios para cada uma das potências de uma base numeral, o que dificultava os cálculos.

Somente dois símbolos básicos, o  para as unidades e o  para as dezenas, eram combinados para formar os dígitos de 1 a 59 numa forma semelhante à da numeração romana. Por exemplo, a combinação  representava o dígito 23 (veja Figura 3 abaixo).

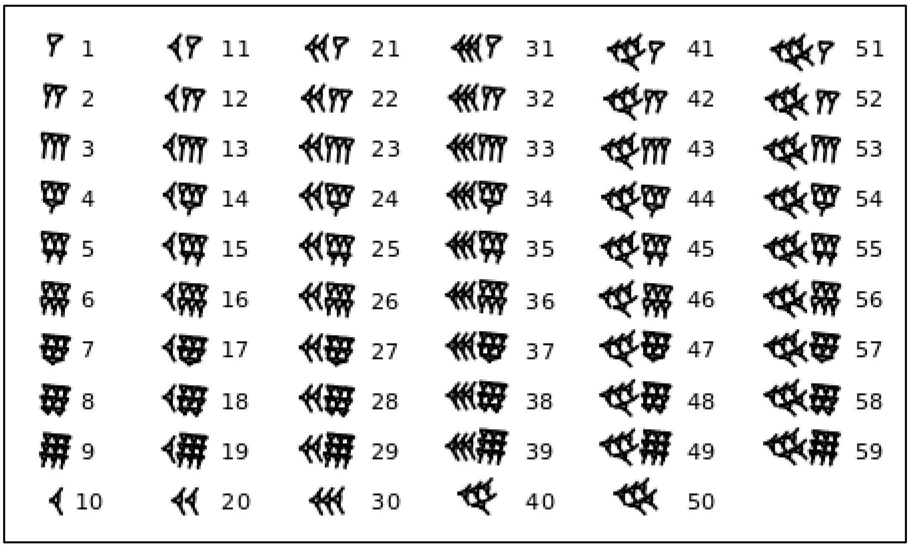


Figura 3: Representação dos números no sistema de numeração babilônico

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A3o_babil%C3%B4nia

Um espaço vazio era deixado para indicar uma "casa" sem valor, o zero. Mais tarde os babilônios criaram um símbolo para representar essa condição.

Esse sistema, no entanto, usava claramente um sistema decimal para representar os 59 dígitos, mas não era de bases misturadas (bases 10 e 6), uma vez que a sub-base dez é usada somente para facilitar a representação de uma grande quantidade de dígitos (59) necessários, enquanto que os valores de posição numa sequência de dígitos eram consistentes com um sistema de base 60 e a aritmética necessária para trabalhar com essas sequências numéricas era, portanto, sexagesimal.

O legado sexagesimal babilônico ainda deixa vestígios até hoje, na forma dos graus de uma circunferência (360º), do ângulo interno de um triângulo equilátero (60º) e das subdivisões da trigonometria e da medição de tempo: 60 minutos em um grau ou numa hora, os 60 segundos num minuto (ângulo ou tempo), embora nesses casos, haja bases misturadas.

1.2.4. Sistema de Numeração Indo-Arábico

O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus que o inventaram, e aos árabes que o transmitiram para a Europa Ocidental.

Os hindus, que viviam no vale do Rio Indo, onde hoje é o Paquistão, conseguiram desenvolver um sistema de numeração que reunia as diferentes características dos antigos sistemas.

Tratava-se de um sistema posicional decimal. Posicional porque um mesmo símbolo representava valores diferentes dependendo da posição ocupada, e decimal porque era utilizado um agrupamento de dez símbolos.O número 10 é utilizado como base, devido ao fato de termos 10 dedos nas mãos.

Esse sistema posicional decimal corresponde ao nosso atual sistema de numeração. Os dez símbolos, utilizados para representar os números, denominam-se algarismos indo-arábicos. São eles:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Esses algarismos são agrupados de 10 em 10 unidades e são utilizados para contar unidades, dezenas e centenas. A partir do agrupamento de 10 em 10 surgiu a primeira definição: o grupo de dez unidades recebe o nome de dezena, o grupo de 10 dezenas forma uma centena.

CAPÍTULO 2 - CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Critérios de divisibilidade são mecanismos que permitem reconhecer se um número natural dado é ou não divisível por outro. Para falarmos sobre esses critérios precisamos, inicialmente, definir divisibilidade e considerar algumas de suas propriedades. A principal referência para este capítulo foi (HEFEZ, 2011).

2.1. DIVISIBILIDADE

Definição: Consideremos dois números naturais a e b, com $a \neq 0$. Diremos que a ***divide*** b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Nesta situação, diremos que a é um ***divisor*** ou um *fator* de b ou, ainda, que b é um *múltiplo* de a ou b é ***divisível*** por a.

Vale ressaltar que a notação $a|b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{N}$, nem representa uma fração. Simplesmente representa uma sentença que diz ser verdade que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$.

Note, ainda, a semelhança entre as definições da relação de divisibilidade e da relação de ordem em $\mathbb{N}$:

$$a \leq b \iff \exists\, c \in \mathbb{N};\ b = a + c,$$
$$a|b \iff \exists\, c \in \mathbb{N};\ b = a \cdot c.$$

A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é a contrapartida multiplicativa da relação de ordem (porém, não vale a tricotomia para a relação de divisibilidade).

A seguir temos algumas propriedades da divisibilidade:

Proposição 2: Considere $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a, b \neq 0$. Então temos que:

i. $1|c$, $a|a$ e $a|0$.
ii. Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.

Demonstração: (i) De fato, isso decorre das igualdades $c = 1 \cdot c$, $a = a \cdot 1$ e $a \cdot 0 = 0$.

(ii) Como $a|b$ e $b|c$ então existem $f, g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a \cdot f$ e $c = b \cdot g.$ Substituindo o valor de b na segunda equação,obtemos:

$$c = b \cdot g = (a \cdot f) \cdot g = a \cdot (f \cdot g),$$

mostrando que $a|c.$

A propriedade (i) acima nos mostra que todo número natural é divisível por 1 e, se esse número não for nulo, ele é divisível por si mesmo.

Proposição 3: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, com $a, c \neq 0$. Então

$$a|b \ e \ c|d \ \Rightarrow \ a \cdot c \mid b \cdot d.$$

Demonstração: Se $a|b \ e \ c|d$ então existem $f, \ g \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot f$ e $d = c \cdot g.$ Assim, $b \cdot d = (a \cdot c)(f \cdot g),$ e segue que $a \cdot c|b \cdot d$.

Em particular, se $a|b,$ então $a \cdot c|b \cdot c,$ para todo $c \in \mathbb{N}$.

Proposição 4: Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0,$ tais que $a|(b + c)$. Então

$$a|b \Leftrightarrow a|c.$$

Demonstração: Como $a|(b + c),$ existe $f \in \mathbb{N}$ tal que

$$b + c = f \cdot a. \qquad (I)$$

Se $a|b$, temos que existe $g \in \mathbb{N}$ tal que

$$b = a \cdot g. \qquad (II)$$

Pelas expressões *(I)* e *(II),* temos:

$$a \cdot g + c = f \cdot a = a \cdot f.$$

Disso segue que $a \cdot f > a \cdot g$ e, consequentemente, $f > g$. Logo, da igualdade acima, obtemos:

$$c = a \cdot f - a \cdot g = a \cdot (f - g),$$

o que implica que $a|c$, pois $f - g \in \mathbb{N}$.

De modo análogo, prova-se que se $a|(b + c)$ e $a|c$ então $a|b$.

Proposição 5: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0,$ e $x, \ y \in \mathbb{N}$ são tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb + yc)$.

Demonstração: Supondo que $a|b$ e $a|c$, então existem $f, g \in \mathbb{N}$ tais que $b = a \cdot f$ e $c = a \cdot g.$ Logo, $xb + yc = x(af) + y(ag) = a(xf + yg),$ o que prova o resultado, pois $xf + yg \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Divisão euclidiana

Embora um número natural a nem sempre divide o número natural $b,$ o matemático Euclides, nos seus estudos, utiliza o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de b por $a,$ com resto diferente de zero. Faremos a demonstração desse resultado a seguir.

Teorema 9 (Divisão euclidiana): Sejam a e b dois números naturais, com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que

$$b = a \cdot q + r, \quad com \quad r < a.$$

Demonstração: Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, b - a, b - 2a, \dots, b - n \cdot a, \dots$$

Considere S o conjunto formado pelos elementos acima. Observe que $S \subset \mathbb{N}$ e $S \neq \emptyset$. Então pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Vamos provar que $r < a$.

Se a divide b, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, a não divide b, então $r \neq 0$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Desse modo, sendo $r = c + a = b - q \cdot a,$ teríamos

$$c = b - (q + 1) \cdot a \in S, \quad com \quad c < r.$$

Assim, temos que $c \in S$ e $c < r$. Mas isso é uma contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, provando assim a existência de q e r.

Provemos agora a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, como a diferença entre o maior e o menor desses elementos é um múltiplo de a, então essa diferença é pelo menos a. Logo, se $r = b - q \cdot a$ e $r_1 = b - q_1 \cdot a$, com $r < r_1 < a$, teríamos $r_1 - r > a$, o que implicaria em $r_1 > r + a > a$. Mas isso é uma contradição. Portanto $r = r_1$.

Disso segue-se que $b - q \cdot a = b - q_1 \cdot a$, implicando em $q \cdot a = q_1 \cdot a$ e, portanto, $q = q_1$.

Definição: Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de ***quociente*** e de ***resto*** da divisão de b por a.

Note que o resto da divisão de b por a é zero se, e somente se, a divide b.

Note também que a demonstração do teorema fornece um algoritmo para calcular o quociente e o resto da divisão de um número por outro, por subtrações sucessivas. Por exemplo, vamos procurar o quociente e o resto da divisão de 19 por 5. Considere as diferenças sucessivas:

$$19 - 5 = 14, \qquad 19 - 2 \cdot 5 = 9, \qquad 19 - 3 \cdot 5 = 4 < 5.$$

Isto nos diz que $q = 3$ e $r = 4$.

2.1.2 Máximo divisor comum

Definição: Dados dois números naturais a e b, não simultaneamente nulos, diremos que o número natural $d \in \mathbb{N}^*$ é um ***divisor comum*** de a e b se $d|a$ e $d|b$. (Observação: o símbolo $\mathbb{N}^*$ denota o conjunto dos números naturais não nulos.)

Definição: Diremos que d é o ***máximo divisor comum*** (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i. d é um divisor comum de a e b, e
ii. d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser reenunciada como segue:

ii'. Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Assim, se d é um mdc de a e b e c é um divisor comum desses números, então $c \leq d$. Isto nos mostra que o máximo divisor comum de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comum desses números. Em particular, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então $d \leq d'$ e $d' \leq d$, consequentemente, $d = d'$. Portanto podemos concluir que, o mdc de dois números, quando existe, é único.

Denotamos o mdc de a e b por (a, b). Como o mdc de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que $(a, b) = (b, a)$.

Provemos a seguir um teorema que garante a existência do mdc de dois números.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$. Definimos o conjunto

$$J(a,b) = \{x \in \mathbb{N}^*;\ \exists\, u, v \in \mathbb{N}, x = ua - vb\}.$$

Por definição temos que,

$$J(b,a) = \{y \in \mathbb{N}^*;\ \exists\, u, v \in \mathbb{N}, y = vb - ua\}.$$

Lema: Temos que $J(a,b) = J(b,a) \neq \emptyset$.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar a igualdade entre os dois conjuntos. Pelo caráter simétrico do resultado com relação a a e b, basta mostrar que $J(a,b) \subset J(b,a)$.

Seja $x \in J(a,b)$, então $x = ua - vb$ com $u, v \in \mathbb{N}$. Assim, existem números naturais $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ tais que $\lambda a > v$ e $\mu b > u$. Tomando $\rho = \max\{\lambda, \mu\}$, temos que $\rho a > v$ e $\rho b > u$. Portanto,

$$x = ua - vb = (\rho a - v)b - (\rho b - u)a \in J(b,a).$$

Agora, note que $a \in J(a,b)$ e, portanto, $J(a,b) \neq \emptyset$.

O resultado acima e a Propriedade de Boa Ordem garantem que existe $\min J(a,b)$.

Teorema 10: Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ e seja $d = \min J(a,b)$. Então

i. d é o mdc de a e b,
ii. $J(a,b) = \{nd\ ; n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração: (i) Suponha que c divide a e b, então c divide todos os números naturais da forma $ua - vb$. Assim, c divide todos os elementos de $J(a,b)$. Portanto, $c|d$.

Agora vamos mostrar que d divide todos os elementos de $J(a,b)$.

Seja $x \in J(a,b)$ e suponha, por absurdo, que $d \nmid x$. Então, pela divisão euclidiana, temos que

$$x = dq + r, \quad com \quad 0 < r < d.$$

Como $x = ua - vb$ e $d = mb - na$, para alguns $u, v, m, n \in \mathbb{N}$, segue que

$$r = (u + qn)a - (v + qm)b \in J(a,b),$$

o que é um absurdo, pois $d = \min J(a,b)$ e $r < d$. Em particular, $d|a$ e $d|b$.

(ii) Como $kd = k(na - mb) = (kn)a - (km)b \in J(a,b)$ então

$$\{ld; l \in \mathbb{N}\} \subset J(a,b).$$

Por outro lado, todo $x \in J(a,b)$ é tal que $d|x$ e, portanto, $J(a,b) \subset \{ld; l \in \mathbb{N}\}$.

Definição: Dois números naturais a e b são ditos ***primos entre si***, ou *coprimos*, se $(a,b) = 1$; ou seja, se o único divisor comum de ambos é 1.

Proposição 6: Dois números naturais a e b são primos entre si se, e somente se, existem números naturais m e n tais que $na - mb = 1$.

Demonstração: Suponha que a e b são primos entre si. Logo $(a,b) = 1$. Como, pelo Teorema 10, temos que existem números naturais m e n tais que $na - mb = (a,b) = 1$, segue-se a primeira parte da proposição.

Reciprocamente, suponha que existam números naturais m e n tais que $na - mb = 1$. Se $d = (a,b)$, temos que $d|\,(na - mb)$, o que mostra que $d|1$ e portanto $d = 1$.

Teorema 11: Sejam a, b e c números naturais. Se $a \mid bc$ e $(a,b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração: Se $a \mid bc$ então existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $bc = ae$.

Se $(a,b) = 1$, então pela Proposição 6, temos que existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$na - mb = 1.$$

Multiplicando por c ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$c = nac - mbc.$$

Substituindo bc por ae nesta última igualdade, temos que

$$c = nac - mbc = a(nc - me)$$

e, portanto, $a|c$.

A noção de mdc pode ser generalizada como segue.

Definição: Um número natural d será dito mdc de dados números naturais $a_1, a_2, \dots, a_n$ se possuir as seguintes propriedades:

i. d é divisor comum de $a_1, a_2, \dots, a_n$.
ii. Se c é um divisor comum de $a_1, a_2, \dots, a_n$, então $c|d$.

O mdc, quando existe, é único e será denotado por $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Proposição 7: Dados números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, existe o seu mdc e

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, (a_{n-1}, a_n)).$$

Demonstração: Provemos por indução sobre n (para $n \geq 2$).

Para $n = 2$ já sabemos que o resultado é válido. Suponha, por hipótese de indução, que o resultado é válido para n. Provemos que é válido para $n + 1$, e para isso basta mostramos que $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, \ldots, (a_n, a_{n+1}))$, pois isso provará também a existência.

Seja $d = \left(a_1, a_2, \ldots, (a_n, a_{n+1})\right)$. Logo $d|a_1, \ldots, d|a_{n-1}$ e $d|\,(a_n, a_{n+1})$. Portanto, $d|a_1, \ldots, d|a_{n-1}, d|\ a_n$ e $d|\ a_{n+1}$.

Por outro lado, seja c um divisor comum de $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, então c é um divisor comum de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$e (a_n, a_{n+1}). Logo $c|d$.

2.2 NÚMEROS PRIMOS

Definição: Um número natural p é ***primo*** se $p \neq 1$ e os únicos divisores de p são 1 e p. Dizemos que um número natural m é ***composto*** se $m \neq 1$ e m não for primo.

Exemplos de números naturais primos menores do que 100: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 73, 79, 83, 89\ e\ 97$.

O grande matemático Euclides, por volta de 300 A.C., demonstrou que existem infinitos números primos. Vejamos a justificativa para essa afirmação.

Suponhamos que o conjunto dos números primos seja finito: $\mathbb{P} = \{2,3,5, \ldots, p\}$. Assim, tomemos o número m tal que $m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p) + 1$. Note que m não é divisível por nenhum elemento de $\mathbb{P}$ pois o resto da divisão de m por qualquer elemento de $\mathbb{P}$ é sempre 1. Então, ou m é outro número primo ou m é um número composto cujos fatores são números primos que pertencem à $\mathbb{P}$. Mas isso é um absurdo, pois estamos supondo que todos os números primos existentes pertencem ao conjunto $\mathbb{P}$.

Logo o conjunto dos números primos é infinito.

A seguir, estabelecemos um resultado fundamental de Euclides (*Os Elementos*, Proposição 30, Livro VII).

Proposição 8: Sejam $a, b, p \in \mathbb{N}^*$, com p primo. Se $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Suponhamos que $p|ab$ e $p \nmid a$, provemos que $p|b$. Se $p \nmid a$, eles são primos entre si, logo $(p, a) = 1$, e pelo Teorema 11 temos o requerido.

Corolário: Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ são números primos e, se $p \mid p_1\, p_2\, \dots\, p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Prova-se por indução sobre n, usando a proposição acima e o fato que, se $p|p_i$ então $p = p_i$.

O Teorema Fundamental da Aritmética, enunciado e demonstrado a seguir, nos diz que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única como um produto de números primos .

Teorema 12 (Teorema Fundamental da Aritmética): *S*eja $a \geq 1$ um número natural. Então, existem números primos positivos $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_t$, de modo único, tal que $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_t$.

Demonstração: *Existência da decomposição*

Vamos utilizar para esta demonstração o Segundo Princípio de Indução. Para $a = 2$ existe uma decomposição trivial em números primos, porque 2 é um número primo. Suponhamos que exista uma decomposição para todo natural b, com $2 \leq b < a$.

Se a for um número primo, existe a decomposição trivial. Caso contrário, a admite um divisor positivo b tal que $1 < b < a$, ou seja $a = bc$, para algum $c \in \mathbb{N}$ e temos também $1 < c < a$. Usando a hipótese de indução, b e c podem ser expressos como produtos de primos, isto é, existem números primos $p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_t$ tal que $b = p_1\, p_2\, \dots\, p_s$ e $c = q_1 q_2\, \dots\, q_t$.

Disso temos que $a = p_1\, p_2\, \dots\, p_s\, q_1\, q_2\, \dots\, q_k$ e o resultado é verdadeiro para a.

Unicidade da decomposição

Suponha agora que $a = p_1\, p_2\, \dots\, p_s$ e $a = q_1 q_2\, \dots\, q_t$, onde os p_i e q_j são números primos. Como $p_1 |\, q_1 q_2\, \dots\, q_t$, pelo corolário acima temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, q_2, \dots, q_t$ podemos supor que seja q_1. Portanto, $p_2\, \dots\, p_s = q_2\, \dots\, q_t$.

Como $p_2\, \dots\, p_s < a$, por hipótese de indução temos que $r = s$ e os p_i e q_j são aos pares.

2.3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Como foi dito no início desse capítulo, critérios de divisibilidade são mecanismos que permitem reconhecer se um número natural dado é ou não divisível por outro. Em geral, nos materiais didáticos da Rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo, são tratados apenas os casos 2, 3, 5, 9, 10 e 11, considerados os critérios mais simples. Neste capítulo pretendemos abordar outros critérios, não comumente explorados; em particular, os critérios de divisibilidade por números primos.

A seguir vamos descrever os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 9 e 10. Para isso vamos fazer uso do seguinte fato: seja dado um número natural n escrito na forma decimal como

$$n = n_r \dots n_1 n_0 = n_r\, 10^r + \cdots + n_1\, 10 + n_0.$$

Podemos então escrever

$$n = (n_r\, 10^{r-1} + \cdots + n_1)10 + n_0,$$

onde n_0 é o algarismo da unidade de n.

Reciprocamente, se n é da forma $n = 10m + n_0$, onde n_0 é um dos algarismos de 0 a 9, então n_0 é o algarismo da unidade de n.

Divisibilidade por 2: Um número natural n é divisível por 2 se, e somente se, o algarismo da unidade é par.

Justificativa: Se um número natural n é par, ele pode ser escrito na forma $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim sendo, 2 divide n, logo todo número par é divisível por 2.

Reciprocamente, se um número natural n é divisível por 2 então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$ e, portanto, n é par.

Divisibilidade por 3 (e por 9): Um número natural $n = n_r \dots n_1 n_0$ é divisível por 3 (ou por 9) se, e somente se, $n_r + \cdots + n_1 + n_0$ for divisível por 3 (ou por 9).

Justificativa: Inicialmente note que, para n um número natural não nulo, temos

$$10^n - 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{\text{n-vezes}} \times 9.$$

Portanto, todos os números da forma $10^n - 1$ são divisíveis por 9 e também por 3, já que 9 é divisível por 3.

Seja dado agora um número n escrito no sistema decimal como

$$n = n_r \dots n_1 n_0 = n_r\, 10^r + \cdots + n_1\, 10 + n_0.$$

Subtraindo a soma $n_r + \cdots + n_1 + n_0$, dos algarismos que compõem o número n, de ambos os lados da igualdade acima temos:

$$n - (n_r + \cdots + n_1 + n_0) = n_r\, 10^r - n_r + \cdots + n_1\, 10 - n_1 + n_0 - n_0$$

$$= (10^r - 1)n_r + \cdots + (10 - 1)n_1.$$

Note agora que a última expressão é sempre divisível por 9, logo, por 3. Portanto, pela Proposição 4, temos que n é divisível por 9 ou por 3 se, e somente se, o número $n_r + \cdots + n_1 + n_0$ é divisível por 9 ou por 3.

Divisibilidade por 4: Um número natural n é divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos algarismos de n for divisível por 4.

Justificativa: Inicialmente observe que 10^r é divisível por 4, se $r \geq 2$.

Assim dado um número n, escrevendo ele na forma decimal temos:

$$n = n_r \dots n_1 n_0 = n_r\, 10^r + \cdots + n_2\, 10^2 + n_1\, 10 + n_0 =$$

$$= n_r\, 4k_r + \cdots + n_2\, 4k_2 + n_1\, 10 + n_0 = 4(n_r\, k_r + \cdots + n_2\, k_2) + n_1\, 10 + n_0.$$

Portanto, se $n_1\, 10 + n_0$ (que é o número formado pelos dois últimos algarismos de n) for divisível por 4, então pela Proposição 4, n também será.

Divisibilidade por 5 e por 10: Um número natural n é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo da sua unidade for 0 ou 5. Um número natural n é divisível por 10 se, e somente se, o algarismo da sua unidade for 0.

Justificativa: Seja n um número natural escrita na forma $n = 10m + n_0$, onde n_0 é o algarismo da unidade de n. Como $10m$ é divisível por 5 e por 10, temos que n é divisível por 5 ou por 10 se, e somente se, n_0 é divisível por 5 ou por 10, respectivamente. Mas isso ocorre se, e somente se, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$, no primeiro caso; e $n_0 = 0$, no segundo caso.

2.3.1 Divisibilidade por 7

Vamos tratar da divisibilidade por 7 separadamente por ser o maior número primo de um algarismo e muito pouco explorado nos materiais didáticos da Rede Oficial de Ensino do Estado de São Paulo. Por esse motivo, achamos interessante explorar esse critério de divisibilidade em sala de aula. A aplicação de uma atividade envolvendo esse critério está descrita no próximo capítulo.

Um número natural $n = n_r \dots n_1 n_0$ é divisível por 7 se, e somente se, o número que não contém o último algarismo ($n_r \dots n_2 n_1$) subtraído do dobro do último algarismo for divisível por 7. Se o número obtido for grande repita o processo até que seja possível verificar a divisão por 7.

Justificativa: Primeiro escrevemos

$$n_r \dots n_1 n_0 = 10(n_r n_{r-1} \cdots n_1) + n_0.$$

Se

$$n_r n_{r-1} \cdots n_1 - 2n_0 = 7k,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ (ou seja, o número que não contém o último algarismo subtraído do dobro do último algarismo for um múltiplo de 7,) então

$$n_r n_{r-1} \cdots n_1 = 7k + 2n_0.$$

Assim,

$$n_r \dots n_1 n_0 = 10(n_r n_{r-1} \cdots n_1) + n_0 = 10(7k + 2n_0) + n_0 = 70k + 21n_0,$$

que é um número divisível por 7.

Agora suponha que $n = n_r \ldots n_1 n_0$ seja divisível 7. Vamos supor, que $n_r n_{r-1} \cdots n_1 - 2n_0 = lk$, onde l e k são primos. Se $n_r n_{r-1} \cdots n_1 - 2n_0 = lk$ então $n_r n_{r-1} \cdots n_1 = lk + 2n_0$.

Assim,

$$n_r \ldots n_1 n_0 = 10(n_r n_{r-1} \cdots n_1) + n_0 = 10(lk + 2n_0\,) + n_0 = 10lk +\ 21n_0.$$

Como $n_r \ldots n_1 n_0$ é divisível por 7, então devemos ter $10lk +\ 21n_0$ também divisível por 7. Mas isso só é possível de $l = 7$ ou $k = 7$.

Logo $n_r n_{r-1} \cdots n_1 - 2n_0$ é divisível por 7.

Exemplo: Vamos utilizar o método para verificar se 7315 é divisível por 7.

Do número 7315 separamos o algarismo da unidade, 5. Do restante do número, 731, subtraímos o dobro do algarismo separado $(2\,x\,5)$. Do resto, separamos novamente o algarismo da unidade e procedemos como no esquema abaixo:

$$731\mathbf{5}\ \ \times 2 \qquad 731 - 10 = 721,$$

$$72\mathbf{1} \times 2 \qquad 72 - 2 = 70.$$

Como 70 é divisível por 7, concluímos que 7315 é divisível por 7.

2.3.2 Divisibilidade por outros números primos maiores ou iguais a 7

Em geral, no estudo dos critérios de divisibilidade são dadas as regras que permitem verificar se um número é divisível por 2, 3, 5, 9 ou 11, considerados os critérios mais simples, deixando-se de lado o estudo da divisibilidade por 7, 13, 17 e por outros números primos. Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar uma regra geral que permita estabelecer critérios de divisibilidade por qualquer número primo, excetuando-se apenas 2 e o 5, que obedecem a regras bastante simples.

Antes de enunciar e provar o critério geral de divisibilidade por um número primo qualquer, vejamos alguns exemplos numéricos de casos particulares.

Divisibilidade por 13

Considere o número 8281. Separamos o algarismo da unidade, 1. Do restante do número, 828, subtraímos nove vezes o algarismo separado (9×1). Do resto, separamos novamente o algarismo da unidade e procedemos como no esquema a seguir:

$$828\mathbf{1}\ \times 9 \qquad 828-9=819$$
$$81\mathbf{9}\ \times 9 \qquad 81-81=\ 0.$$

Como 0 é divisível por 13, concluímos que 8281 também é divisível por 13.

No procedimento descrito cima, representando um número n qualquer na forma $10k+n_0$, em cada passagem substituímos $10k+n_0$ por $k-9n_0$. Então, dizemos que um número $n=10k+n_0$ é divisível por 13 se, e somente se, $k-9n_0$ for divisível por 13.

Divisibilidade por 17

Um número $n=10k+n_0$ é divisível por 17 se, e somente se, $k-5n_0$ for divisível por 17.

Verifiquemos se o número 59551 é divisível por 17.

$$5955\mathbf{1}\ \times \mathbf{5} \qquad 5955-5=5950$$
$$595\mathbf{0}\ \times \mathbf{5} \qquad 595-0=595$$
$$59\mathbf{5}\ \times \mathbf{5} \qquad 59-25=34$$

Como 34 é divisível por 17, concluímos que 59551 também é divisível por 17.

Seguindo esse raciocínio, temos os seguintes critérios de divisibilidade por 19, 23, 29, 31...

- $n=10k+n_0$ é divisível por 19 se é somente se $19\ |(k-17n_0)$
- $n=10k+n_0$ é divisível por 23 se é somente se $23\ |(k-16n_0)$
- $n=10k+n_0$ é divisível por 29 se é somente se $29\ |(k-26n_0)$
- $n=10k+n_0$ é divisível por 31 se é somente se $31\ |(k-3n_0)$
- $n=10k+n_0$ é divisível por 37 se é somente se $37\ |(k-11n_0)$
- $n=10k+n_0$ é divisível por 41 se é somente se $41\ \ |(k-4n_0)$

Observamos que, para estabelecer um critério de divisibilidade de $n = 10k + n_0$ por um número d, subtraímos de k o algarismo da unidade, n_0, multiplicado por um determinado fator a. Vamos mostrar agora como encontrar um valor de a adequado para cada d.

Determinação do fator a

Supondo que $n = 10k + n_0$ seja divisível por d, vamos determinar a para que $k - an_0$ também seja divisível por d.

$d \mid (10k + n_0) \Rightarrow 10k + n_0 = dq \Rightarrow n_0 = dq - 10k,$ para algum $q \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$$k - an_0 = k - a(dq - 10k) = k - adq + 10ak = (10a + 1)\,k - aqd.$$

Para que $k - an_0$ seja divisível por d, basta escolher um inteiro a tal que $10a + 1$ seja divisível por d, isto é, $10a + 1 = dx$, para algum $x \in \mathbb{N}$, ou $a = \frac{dx - 1}{10}$.

Mas a deve ser um número natural, portanto o produto dx tem que ser da forma $10k + 1$, pois só dessa maneira $dx - 1$ será divisível por 10. Assim, por exemplo, para escolher o menor a para um critério de divisibilidade por 43, o número 43 deve ser multiplicado por $x = 7$ para dar um produto terminado em 1:

$$a = \frac{(43 \cdot 7) - 1}{10} = \frac{(301) - 1}{10} = 30,$$

isto é, obtemos o número 30, que é o fator a procurado.

Sabemos que os divisores primos dos números maiores ou iguais a 7 só podem terminar em 1, 3, 7 e 9. Portanto, os menores fatores x, que produzem produtos terminados em 1 são, respectivamente, 1, 7, 3 e 9. Isso facilita a obtenção de a.

Falta mostrar que, tendo escolhido a tal que $10a + 1$ é divisível por d, então, se d dividir $k - an_0$, d dividirá $n = 10k + n_0$

De fato, $d \mid (10a + 1) \Rightarrow 10a + 1 = xd,$ para algum $x \in \mathbb{N},$ (1)

e $\quad d \mid (k - an_0) \Rightarrow k - an_0 = yd,$ para algum $y \in \mathbb{N}$. $\quad (2)$

Multiplicando a igualdade (1) por n_0, a igualdade (2) por 10 e somando os resultados, obtemos:

$$10an_0 + n_0 + 10k - 10\,an_0 = xdn_0 + 10\,yd,$$

o que implica $10k + n_0 = d(xn_0 + 10y),$ isto é, d divide $(10k + n_0)$.

Vejamos abaixo alguns exemplos de como determinar o fator a:

- $n = 10k + n_0$ é divisível por 47 se, e somente se, $47 \mid (k - 14n_0)$

$$a = \frac{(47 \cdot 3) - 1}{10} = \frac{(141) - 1}{10} = 14.$$

- $n = 10k + n_0$ é divisível por 59 se, e somente se, $59 \mid (k - 53n_0)$

$$a = \frac{(59 \cdot 9) - 1}{10} = \frac{(531) - 1}{10} = 53.$$

CAPÍTULO 3 - ATIVIDADE PROPOSTA EM SALA DE AULA

Neste capítulo iremos apresentar o desenvolvimento de uma atividade sobre o critério de divisibilidade por 7. Esta atividade foi realizada no 2º semestre de 2014, com os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e também com o 3º ano do Ensino Médio, em uma escola estadual de São José do Rio Preto, São Paulo.

Tema: Critério de divisibilidade por 7.

Objetivos Gerais: Contribuir para a melhoria da formação do aluno e incentivá-lo a participar de atividades de ensino e pesquisa em Matemática, como instrumento de cidadania e inserção social.

Objetivos Específicos: Apresentar ao aluno um critério de divisibilidade que muitas vezes não é trabalhado em sala de aula, através de metodologias de ensino alternativas, objetivando a melhoria do processo ensino e aprendizagem dos educando e também orientar a utilização de material didático para o estudo de divisibilidade em Matemática, particularmente dos números naturais primos, com destaque para o número 7, último primo natural de um algarismo.

Etapas do Desenvolvimento:

- Resolução de exercícios sobre a divisão por 7.
- Análise e discussão dos procedimentos utilizados para resolver os exercícios propostos.
- Avaliação dos alunos sobre a atividade proposta.

Tempo Utilizado: 3 aulas em cada turma, sendo a primeira para apresentação da teoria de divisibilidade, em particular, o critério de divisão por 7; a segunda, para aplicação de uma lista de exercícios; e a terceira, para correção, comentários e avaliação dos alunos sobre a atividade.

Habilidades:

- Ler, interpretar e resolver problemas que envolvam a divisibilidade entre números naturais primos.
- Compreender o significado da divisão entre números naturais.

- Conhecer métodos de verificação dos resultados.
- Analisar situações-problema, interpretá-las e resolvê-las utilizando estratégias e métodos matemáticos.

Recursos materiais: Por trabalhar numa escola de periferia, constituída por alunos de famílias de baixa renda, o trabalho foi desenvolvido apenas com caderno do aluno, lápis, borracha, caneta.

Expectativa: Ao final das aulas sobre divisibilidade, espera-se que o aluno tenha adquirido os conhecimentos necessários para verificar se um número natural é ou não divisível por 7.

DESENVOLVIMENTO:

1ª Etapa: Apresentação do critério de divisibilidade por números primos.

A teoria sobre divisibilidade por números primos, com destaque para a divisibilidade por 7, foi apresentada em uma aula em cada uma das citadas séries. No ensino fundamental, a apresentação foi mais simplificada, pois os alunos apresentam muitas dificuldades para compreender o assunto; já no ensino médio, foi feita a demonstração da técnica da divisibilidade por 7, além dos exercícios propostos, uma vez que eles possuem mais elementos para assimilar as informações apresentadas.

2ª Etapa: Resolução de exercícios sobre a divisibilidade por 7.

Segue abaixo alguns dos exercícios que foram trabalhados em sala de aula, com os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

"Juca possui duas chácaras, sendo a chácara A, com $9450\ m^2$ e a chácara B, de 14400 m^2 . Se ele deseja dividi-las em 7 lotes para plantação, de modo que cada lote tenha como área um número inteiro, em , em qual delas (ou ambas) é possível fazer isto?"

Utilizando a técnica apresentada, sem efetuar a divisão, a maioria dos alunos concluiu que a chácara A era a solução. Alguns alunos erraram na parte final por deficiências na tabuada, que foram discutidas na aula de correção.

“ Verifique qual (quais) números são divisíveis por 7:

A) 3402 B) 26400 C) 2700000 D) 205128”

De modo análogo, os alunos aplicaram a técnica da divisibilidade por 7 e conseguiram verificar que A e D eram divisíveis por 7 enquanto B e C, não. Naturalmente, tivemos alunos que não conseguiram acertar a questão por não saberem a tabuada do 7. Por este motivo apresentei uma técnica para construir a tabuada do 7.

Agora, alguns dos exercício que foram trabalhados com os alunos da 3ª série do Ensino Médio.

“O número 3780N será divisível por 7 se N for igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

De acordo com a teoria da divisibilidade por 7, muitos alunos concluíram que a alternativa **a** era a solução; eles montaram uma tabela com valores de 0 a 4 para verificar a opção correta. Alguns alunos apresentaram dificuldades de raciocínio lógico para chegar na solução, pois essa questão apresenta uma variável, onde analisamos e comentamos a solução na aula de correção.

“ Complete as lacunas com V(verdadeiro) ou F(falso) sobre números divisíveis por 7: ( )57855 ( ) 20160 ( ) 64800 ( ) 13767.”

A maioria dos alunos concluíram que a sequência de respostas corretas era **VVFF**, bastando aplicar a técnica apresentada na sala de aula. O que mais me impressionou foi o relato de uma aluna que não conseguiu fazer o exercício pois ainda tinha dificuldades em memorizar as tabuadas. Assim, procurei apresentar a ela regras básicas para obter as tabuadas e então compreender os exercícios vistos.

3ª Etapa: Discussão dos procedimentos utilizados para a solução dos exercícios.

Os alunos fizeram vários questionamentos sobre os exercícios mais elaborados. No caso dos alunos do 7º ano, o problema sobre as chácaras foi o que rendeu mais discussão, e no caso dos alunos do Ensino Médio, a questão que gerou as discussões foi aquela contendo a variável N.

Em anexo apresentamos algumas fotos das atividades desenvolvidas pelos alunos, onde podemos observar que alguns alunos tiveram dificuldades para resolver enquanto outros fizeram corretamente.

AVALIAÇÃO

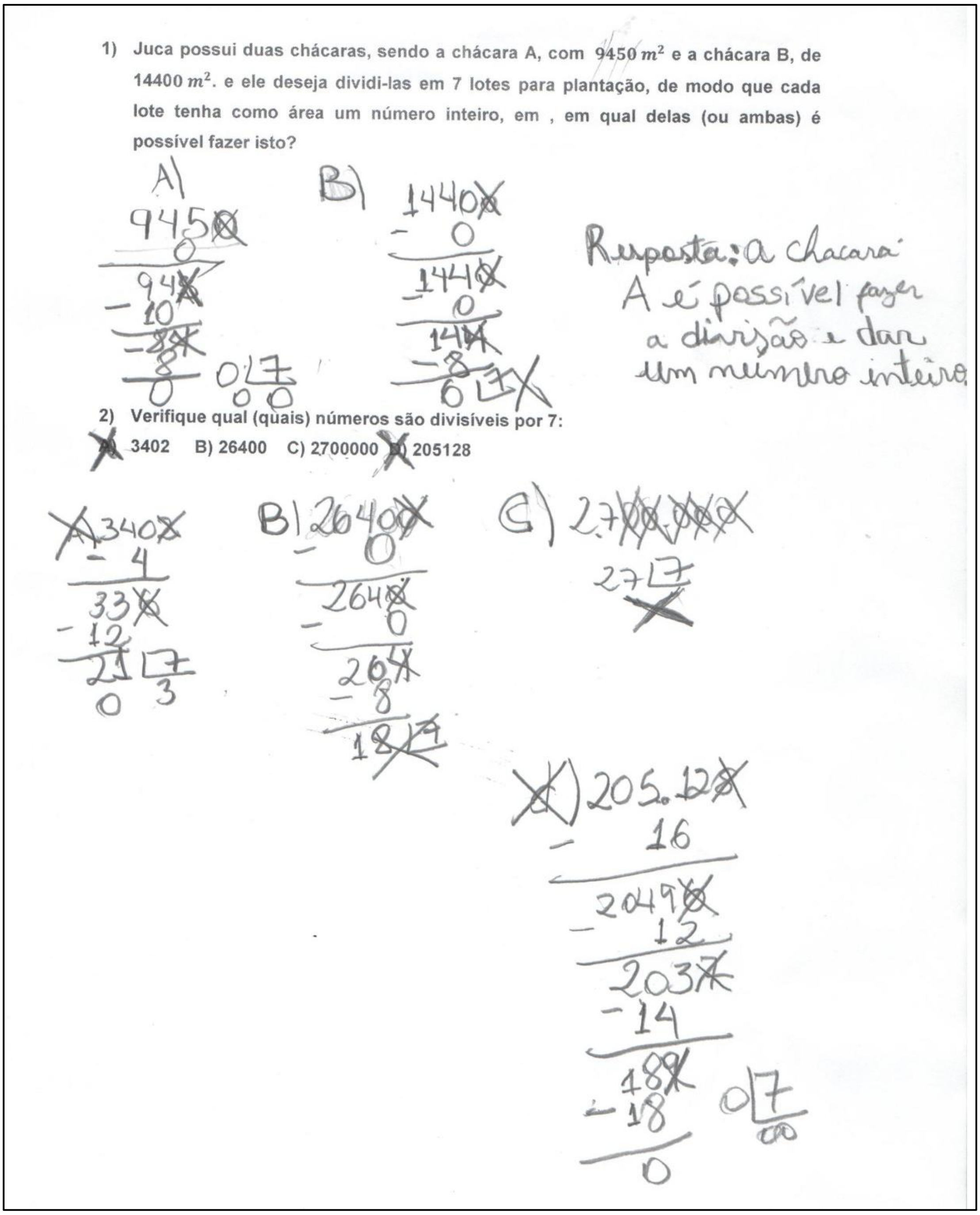
Após a correção comentada, os alunos escreveram sobre este projeto de aula, avaliando e sugerindo alterações. Dentre os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a maioria aprovou o projeto de aula, elogiando a iniciativa. As observações foram no sentido de ter mais aulas contendo temas “diferentes” e sobre “reforçar” as tabuadas.

Já na 3ª série do Ensino Médio, eles também aprovaram a atividade e sugeriram que outras disciplinas também deveriam fazer aulas diferenciadas.

Assim, concluímos que o projeto foi aprovado e proveitoso aos alunos, o que nos motiva a prosseguir com projetos diferenciados nas demais séries.

ANEXO

Neste apêndice apresentamos algumas fotos de soluções apresentadas pelos alunos.



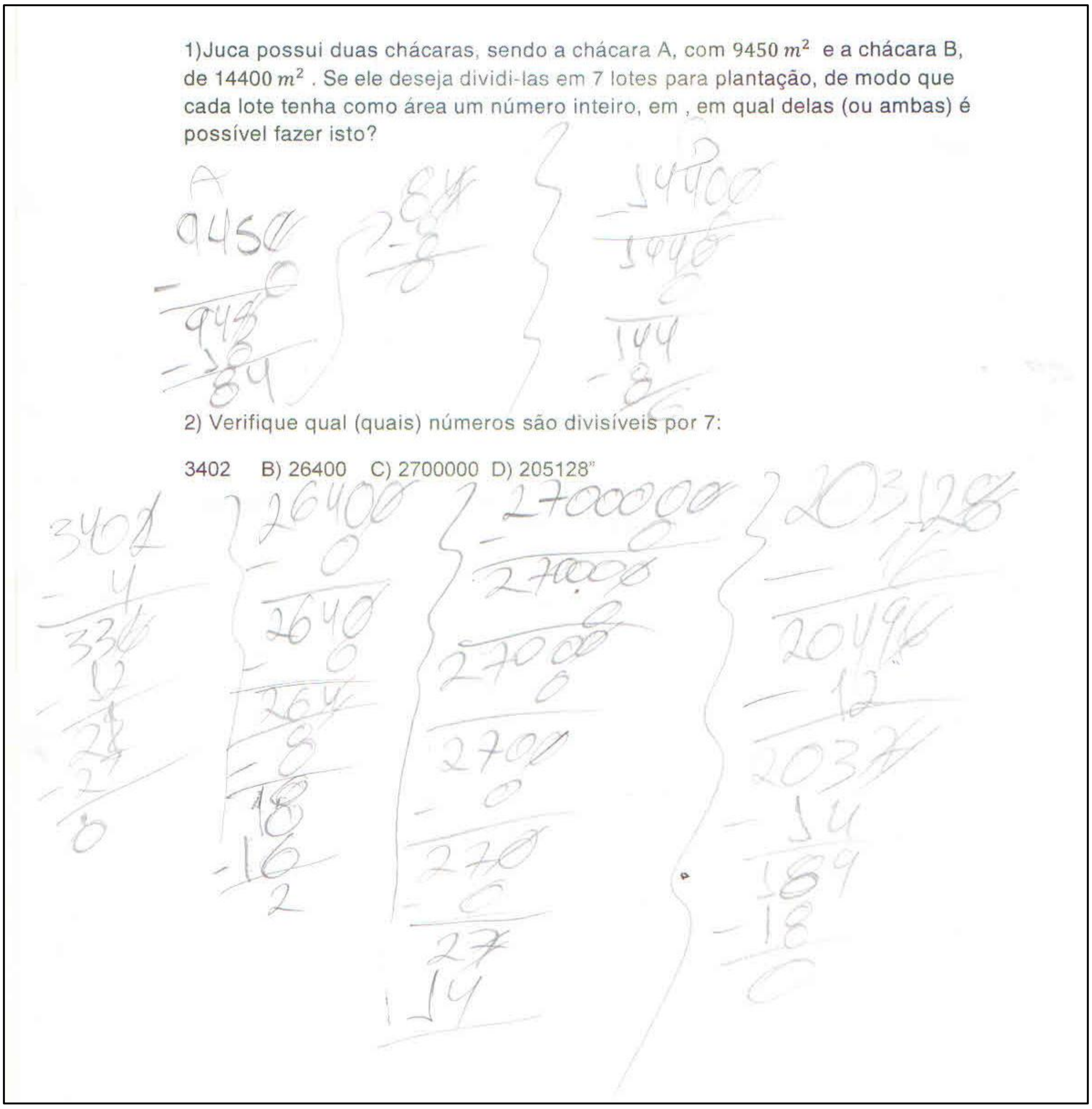
1) Juca possui duas chácaras, sendo a chácara A, com $9450\,m^2$ e a chácara B, de $14400\,m^2$. e ele deseja dividi-las em 7 lotes para plantação, de modo que cada lote tenha como área um número inteiro, em , em qual delas (ou ambas) é possível fazer isto?

A) B)

Resposta: a chacara A é possível fazer a divisão e dar um número inteiro.

2) Verifique qual (quais) números são divisíveis por 7:

A) 3402 B) 26400 C) 2700000 D) 205128


1)Juca possui duas chácaras, sendo a chácara A, com 9450 m^2 e a chácara B, de 14400 m^2 . Se ele deseja dividi-las em 7 lotes para plantação, de modo que cada lote tenha como área um número inteiro, em , em qual delas (ou ambas) é possível fazer isto?

2) Verifique qual (quais) números são divisíveis por 7:

3402 B) 26400 C) 2700000 D) 205128"

1) O número 3780N será divisível por 7 se N for igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

37800
-16
21 é divisível por 7.

2) Complete as lacunas com V(verdadeiro) ou F(falso) sobre números divisíveis por 7: (V)57855 (V) 20160 (F) 64800 (F) 13767

57855
10
5775
-10
567
-14
42 é divisível por 7

20160
12
189
18
0 é divisível por 7

64800
-16
48 não é divisível por 7

13767
14
1367
4
137
4
9 não é divisível

1) O número 3780N será divisível por 7 se N for igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

37800
-16
21
-2
0

37801
-2
3678
-16
351
-2
33
-6
-3

37802
-4
3178
12
368
-10
26
-10

37803
-8
3779
-4
378
-6
31
-2
2

2) Complete as lacunas com V(verdadeiro) ou F(falso) sobre números divisíveis por 7: (F)57855 (V) 20160 (F) 64800 (F) 13767

Referências Bibliográficas

CARVALHO, P. C. P; MORGADO, A. C. O. ***Matemática Discreta***. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

CINOTO, R. ***Regras de divisibilidade para o 7, 11, 13 e outros números*** - Parte 1. Vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=sHfqdySLFCE. Acesso em: 10/07/2014.

CINOTO, R. ***Regras de divisibilidade para o 7, 11, 13 e outros números*** - Parte 2. Vídeo disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=otb3n3FErJ8>. Acesso em: 10/07/2014.

DOMINGUES, H. H. ***Fundamentos de Aritmética.*** São Paulo: Atual, 1991.

HEFEZ, A. ***Elementos de aritmética***, 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

HEFEZ, A. ***Indução Matemática***. Apostila nº 4 do Programa de Iniciação Científica OBMEP.

HEFEZ, A. ***Iniciação à Aritmética***. Apostila nº 1 do Programa de Iniciação Científica OBMEP.

LIMA, E. L. et al. ***A matemática no Ensino Médio***, vol. 1. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM , 1999.

MOREIRA, C. G. T. A.; MARINEZ, F.; SALDANHA, N. ***Tópicos de Teoria dos Números***. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. ***Iniciação à Matemática****: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM , 2010.

SAMPAIO, J. C. V.; CAETANO, P. A. S. ***Introdução à teoria dos números:*** *um curso breve.* São Carlos: EdUFSCar, 2009.

TORRES, G. Z. Divisibilidade por 3, 7, 9, 11, 13, 17... ***Revista do Professor de Matemática***, v. 58. 2005.