UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O ENSINO DAS PROPRIEDADES DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS ENFOCANDO O USO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

IDEOGAR PEREIRA SOARES

Instituto de Matemática

Maceió
2014

PROFMAT

IDEOGAR PEREIRA SOARES

O ENSINO DAS PROPRIEDADES DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS ENFOCANDO O USO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 17 de Outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

MACEIÓ
2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S676e Soares, Ideogar Pereira.
O ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos enfocando o uso de construções geométricas / Ideogar Pereira Soares. - Maceió, 2014.
133 f. ; il.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

Bibliografia: f. 103-105.
Apêndices: f. 106-133.

1. Construções geométricas. 2. Teoria de Van Hiele. 3. Triângulos. 4. Paralelogramos. 5. Materiais manipuláveis. I. Título.

CDU: 514.115

O ENSINO DAS PROPRIEDADES DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS ENFOCANDO O USO DE CONSTRUCÕES GEOMÉTRICAS

Ideogar Pereira Soares

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 17 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileria de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Amauri Barros

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros (Orientador - UFAL)

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (UFAL)

Vinicius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello (UFBA)

Aos meus pais, Marlos e Lucileide,
dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus por minha vida e por todas as pessoas que têm feito parte dela.

À minha família pelo apoio incondicional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Amauri da Silva Barros pelas contribuições essenciais à realização deste trabalho.

Aos meus professores do PROFMAT/UFAL, pelo conhecimento construído durante o curso.

Ao meu amigo Alberto Heleno Rocha da Silva pela amizade construída e por toda ajuda prestada durante o curso.

Aos meus amigos Jonathas Alberto e Josué Lourenço, aos professores Geovane Duarte Borges e Jairo José Campos da Costa da Universidade Estadual de Alagoas pela ajuda prestada em momentos decisivos.

À professora Ana Flávia Ferro Bernardo pelo auxílio essencial à conclusão desta dissertação.

Ao meu amigo Marcelo Araújo e demais amigos do PROFMAT da turma de 2012.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

À Universidade Federal de Alagoas, à Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada por oportunizar a realização deste programa de mestrado.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Matemática não se aprende passivamente
Elon Lages

RESUMO

Este trabalho trata do uso das construções geométricas no ensino de propriedades de triângulos e paralelogramos no quarto ciclo do ensino fundamental. Uma temática escolhida tanto devido à importância de tais conteúdos para a formação do conhecimento discente como pela necessidade de focar em estratégias didáticas que auxiliem no desenvolvimento da capacidade de abstração nesta etapa da escolaridade. Adotando uma visão construtivista, apontamos falhas na forma tradicional de ensino de Geometria Euclidiana Plana e, embasados na Teoria de Van Hiele e nos Parâmetros Curriculares Nacionais, estabelecemos estratégias de ensino que priorizam a construção do conhecimento através da análise das relações entre determinadas construções geométricas e as propriedades elementares destas figuras planas. Trabalhamos com a hipótese de que o uso de materiais manipuláveis num contexto em que a resolução de problema é a base da situação didática é a melhor forma de ensinar Geometria.

Palavras-chave: Construções geométricas. Teoria de Van Hiele. Triângulos. Paralelogramos. Materiais manipuláveis.

ABSTRACT

This study deals with the use of geometric constructions in teaching properties of triangles and parallelograms in the fourth cycle of basic education. A thematic chosen both because of the importance of such contents for the training of student knowledge as the need to focus on teaching strategies that assist in developing the capacity of abstraction at this stage of schooling. Adopting a constructivist vision, we point out flaws in the traditional teaching of Euclidean geometry Plana and grounded in Van Hiele Theory and the National Curriculum Parameters, we established teaching strategies that prioritize the construction of knowledge through the analysis of relationship between determined geometric constructions and properties elementary of these plane figures. We work with the hypothesis that the use of manipulable materials in a context where problem solving is the base of the didactic situation is the best way to teach geometry.

Key words: Geometric constructions. Van Hiele Theory. Triangles. Parallelograms. Manipulable materials.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria desempenha um papel de extrema importância no ensino básico[1] porque ajuda a desenvolver a capacidade de abstração. Também é necessária para a vida profissional, pois, a formação do pensamento geométrico é pré-requisito de várias áreas do conhecimento: engenharia, mecânica, arquitetura, e outras. O que nos leva a pensar que esta disciplina é tão necessária hoje quanto foi no passado.

O desenvolvimento da capacidade de abstração é uma das principais contribuições deste ramo da matemática para a formação do conhecimento discente por possibilitar o contato com situações que levam à transição entre os aspectos concretos e abstratos dos conteúdos. Além disso, mesmo para saberes definidos como algébricos, é possível criar inúmeras situações em que a Geometria se emprega como parte de estratégias didáticas, tanto é que o estabelecimento das bases necessárias à algebrização em muitos casos passa por artifícios geométricos.

No entanto, seu ensino tem sofrido séria desvalorização ao longo dos anos[2]. Após o Movimento da Matemática Moderna[3], numa tentativa de aproximar o saber científico do saber escolar, introduziu-se uma forma de ensinar que priorizava a álgebra e a topologia. Desde então, a teoria dos conjuntos ganhou destaque e os conteúdos de natureza geométricos acabaram sofrendo certo abandono, ficando relegados às últimas páginas dos livros didáticos. Como consequência, a formação do professor de matemática nas décadas passadas priorizava a aquisição do conhecimento algébrico e esse fato tem se refletido na atualidade com um ensino desmotivador que não aborda um dos aspectos fundamentais de todo conhecimento geométrico que é sua natureza prática.

O "quase" abandono do ensino de conteúdos desta área da Matemática originou sérias lacunas na formação do conhecimento discente, por isso, ao longo dos anos foram necessárias algumas reformulações no currículo visando melhorar esta situação.

As reformulações que ocorreram com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[4] tinham por base a crítica ao descaso a que estava submetido o ensino de

[1] De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional corresponde a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Veja [4].

[2] Veja [23].

[3] Na década de 1960 teve início um movimento internacional para o ensino de matemática que tinha como foco o estabelecimento do rigor matemático através da teoria dos conjuntos. Esse movimento ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Veja [7] e [11].

[4] Criados em 1996, os Parâmetros Curriculares Nacionais são diretrizes elaboradas pelo governo federal objetivando nortear a prática pedagógica nacional. Veja [5] e [6].

Geometria e a ênfase a sua importância.

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BASIL, 1998, p.122).

Na atualidade, a didática dos conteúdos geométricos encontra-se relegada à fragilidade de processos de memorização, o que ocasiona certas deficiências no processo de ensino-aprendizagem. Basta parar para pensar no perfil do aluno concluinte do ensino médio nas escolas públicas, veremos que há uma grande diferença entre o que deveria saber e o que realmente sabe. Isto é um alerta às práticas pedagógicas que vêm sendo efetuadas nestas instituições públicas de ensino.

O problema é que se lecionamos de forma superficial, por estratégias que valorizam apenas a memorização, se não damos oportunidades para que os conceitos sejam explorados por nossos alunos, consequentemente os privamos de analisar as propriedades das figuras de forma autônoma e entender como estas se relacionam.

Para Soares (2009) parte dos problemas com o ensino de Geometria está relacionada à formação do professor.

> Dando enfoque à formação do professor de Matemática, a situação parece mais grave quando se trata especificamente da Geometria, visto que esta, na maioria das vezes, é apresentada aos alunos como ciência pronta e acabada, com conteúdos desvinculados do real, desmotivando os alunos e gerando dificuldades [...] na prática alguns professores fogem do ensino da Geometria, e ainda pior, devido à deficiência na formação, alguns acabam trabalhando alguns conceitos de maneira equivocada. (SOARES, 2009, p.44-46).

Independentemente das séries em que trabalhamos, como formadores não podemos deixar de conhecer e empregar corretamente os conceitos e as propriedades que destes decorrem. Assim como não podemos privar nossos alunos do prazer da descoberta. Acreditamos que os primeiros contatos com os conceitos geométricos devem favorecer a construção de definições por meios concretos e que o tratamento das propriedades das figuras deve ser efetuado com crescente formalismo.

"É a forma como enxergamos a Matemática que direciona a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas e definição de objetivos e conteúdos e as formas de avaliação"(BRASIL, 1998, p. 36). Se acreditarmos que esta ciência se resume à memorização de conceitos e procedimentos estaremos limitados ao desenvolvimento de aulas expositivas as quais não favorecem a manifestação da criatividade dos alunos, por não serem utilizadas estratégias que priorizem a investigação. Caso pensemos que o conhecimento se dá por processos construtivos[5] buscaremos formas de levar nosso aluno à construir o saber.

> As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldade em utilizar o conhecimento matemático "adquirido"; em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância [...] O professor, por outro lado, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico, procura novos elementos muitas vezes, meras receitas de como ensinar determinado conteúdo que, acredita, possam melhorar este quadro. (FIORENTINI e MIORIM, 1990, p.1).

Nosso trabalho está voltado ao processo de ensino e aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana no quarto ciclo do ensino fundamental[6] por ser uma etapa da vida discente em que os aspectos dos conteúdos ensinados devem passar por um refinamento e porque este ramo da Geometria têm as características adequadas a essa transição.

Nesta etapa de escolaridade, o currículo geométrico contempla uma série de conteúdos, dentre os quais damos um enfoque especial ao ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos por considerá-las parte indispensável do conhecimento que deve ser formado no ensino fundamental. Entre as propriedades dos triângulos destacamos aquelas relacionadas aos casos de congruência devido à importância das mesmas para a compreensão formal de resultados relacionados a tais figuras. Através destes, vários resultados podem ser demonstrados, logo, são meios que podem levar os alunos à entenderem a relação entre diferentes propriedades geométricas.

Uma das competências que o aluno deve desenvolver ao longo do quarto ciclo é "Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos" (BRASIL, 1998, p. 89). Os resultados relacionados às propriedades dessas figuras fomentam o desenvolvimento da abstração e possibilitam ao aluno

[5] Veja capítulo 2.

[6] 7ª e 8ª série ou 8º e 9º ano.

dispor de informações essenciais à resolução de inúmeros problemas geométricos.

Ressaltamos a importância de se trabalhar o saber geométrico a partir do concreto até que as abstrações acabem se tornando simples. Para tanto, os conteúdos ensinados, num primeiro contato, devem ser associados a algo material, devemos buscar estratégias didáticas que facilitem a associação entre o concreto e o abstrato. Inclusive, há elementos que se buscarmos definir apenas formalmente, nos depararemos com dificuldades desnecessárias. Didaticamente, esses elementos sempre devem ser associados a coisas materiais para que nossos alunos tenham argumentos plausíveis à construção do conceito. Para a construção de conceitos menos elementares, o professor pode buscar o auxílio de materiais concretos.

Adiante, mostraremos como utilizar construções geométricas para ensinar as propriedades de triângulos e quadriláteros notáveis. Em muitos casos utilizaremos a terminologia "resultados básicos" para nos referirmos às propriedades destas figuras. Veremos também como o uso das transformações isométricas pode ser útil na elaboração de justificativas condizentes com o nível de compreensão[7] no quarto ciclo do ensino fundamental. Estabeleceremos construções para o desenvolvimento de conceitos e para a compreensão de propriedades que resultam em teoremas e proposições.

Destacamos a necessidade de utilizar estratégias didáticas diferentes das usualmente aplicadas na educação básica, por acreditar que o trabalho do professor é o maior diferencial em relação a aprendizagem discente e que sob a responsabilidade de quem ensina na educação básica há exigências ainda maiores, já que os educadores trabalham com um público diversificado o qual, em média, estão numa faixa etária onde as responsabilidades de aprender normalmente não são inclusas por eles como parte de suas obrigações como alunos, ou seja, nos vemos diante de um público que não quer aprender.

Pelos motivos explicitados, desenvolvemos um trabalho com o objetivo de mostrar como lecionar sobre as propriedades de triângulos e paralelogramos no ensino fundamental utilizando construções geométricas com régua e compasso e de uma forma que possibilite ao aluno desenvolver seu nível de compreensão ao ponto de ser capaz de entender as demonstrações nas quais utilizamos os casos de congruência de triângulos e elaborar justificativas plausíveis às proposições e aos teoremas relacionados a triângulos e paralelogramos. Para tanto, organizamos esta dissertação da seguinte forma:

[7]A Teoria de Van Hiele defende que nosso pensamento geométrico passa por cinco níveis de compreensão. Veja Capítulo 2.

No capítulo 1, buscamos explicitar como se dá o processo de formação de conceitos geométricos. Mostramos as características dos principais elementos que compõem um texto matemático para analisar aspectos sobre a forma adequada de se expressar dentro desta área de conhecimento. Expusemos e discutimos as concepções discentes acerca de conceitos e propriedades de triângulos e paralelogramos que são fundamentais à formação básica e destacamos as propriedades de triângulos e paralelogramos que devem compor o currículo. Explicitamos que a elaboração de uma definição adequada se estabelece com base nas idéias que se formam sobre os aspectos das figuras. Além disso, com base numa pesquisa de campo, justificamos a necessidade de modificar as metodologias do ensino de conceitos geométricos.

No capítulo 2, nos dedicamos a mostrar como ensinar Geometria Euclidiana Plana no quarto ciclo do ensino fundamental. Expomos as principais características da Teoria dos Van Hiele, na qual destacamos, a necessidade de utilizar materiais didáticos manipuláveis, enfatizando o uso de régua e compasso e a adoção de metodologias construtivistas norteadas pelo uso de estratégias centradas na resolução de problemas. Também, frisamos a importância do uso das isometrias para o desenvolvimento do conceito de congruência.

No capítulo 3, buscamos mostrar a importância das construções geométricas para a aprendizagem de conteúdos da Geometria Euclidiana Plana. Expomos e realizamos construções que são úteis à aprendizagem de conceitos referentes a triângulos e paralelogramos.

No capítulo 4, especificamos quais construções geométricas são apropriadas à compreensão de certos resultados. Expomos como utilizar isometrias como recurso à elaboração de justificativas para proposições e teoremas.

No capítulo 5, expusemos dados de uma pesquisa de campo, visando corroborar nossas afirmações e explicitar a forma como desenvolvemos atividades com base nas construções geométricas que levaram alunos concluintes do ensino fundamental, inicialmente avaliados nos níveis de compreensão iniciais da Teoria Van Hiele a evoluírem ao ponto de utilizarem os casos de congruência de triângulos para justificar propriedades de figuras planas.

Objetivamos mostrar como o professor pode lecionar sobre tais propriedades de uma forma eficaz, possibilitando o pleno desenvolvimento do conhecimento discente. Contudo, nosso objetivo maior é mostrar um caminho para o ensino de tais propriedades de modo que os alunos consigam justificá-las mediante o uso dos casos de congruência de triângulos.

“Um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem (BRASIL, 1998, p. 36)”.

2 O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO NO QUARTO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Como professores de Matemática no ensino fundamental, nosso objetivo maior é que nossos alunos concluam esta etapa da escolaridade dispondo de conhecimentos bem estruturados, podendo utilizá-los com certa destreza em situações diversificadas. Para a Geometria Euclidiana Plana, essa destreza se concretiza a partir da plena compreensão das propriedades das figuras e o domínio das relações que se estabelecem entre elas, o que remete ao desenvolvimento de uma competência imprescindível à formação discente no primeiro grau, na qual focamos o presente trabalho, que é a capacidade de justificar teoremas e proposições utilizando as propriedades cabíveis.

É no quarto ciclo do ensino fundamental que se objetiva o desenvolvimento da compreensão destas relações. É nessa fase também que se torna fundamental entender o que são definições, axiomas, proposições, teoremas e demonstrações, porque estes elementos fazem parte do conhecimento matemático formal.

Neste capítulo, expomos as propriedades de triângulos e paralelogramos enfatizadas durante o desenvolvimento do trabalho, descrevemos as principais características dos elementos acima citados e, através da exposição e da análise de dados obtidos numa pesquisa de campo, buscando fundamentar a necessidade da elaboração de estratégias didáticas que objetivem a formação de conceitos e a compreensão formal de propriedades no quarto ciclo do ensino fundamental. Além disso, estabelecemos o que é uma comprovação geométrica, defendendo sua utilização na construção de situações didáticas para o ensino dos resultados em foco.

2.1 CONTEÚDOS ESSENCIAIS À FORMAÇÃO DO CONHECIMENTO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Nos anos finais do ensino fundamental o aluno passa a ter um contato mais efetivo com a formalização do conhecimento matemático, é aí que se inicia com maior rigor o desenvolvimento de técnicas de abstração. Este contato tem origem nos estudos das propriedades das figuras planas, de onde provêem situações favoráveis ao processo de transição entre o prático e o teórico. Então o trabalho com Geometria torna-se ainda mais fundamental por ser uma disciplina na qual o ensino dos resultados, por mais abstratos que sejam, pode ser realizado mediante abordagens práticas.

Além disso, para a formação do próprio conhecimento geométrico, o ciclo final do ensino fundamental é uma etapa extremamente importante, pois, é a partir daí que o aluno passa a tratar com certa profundidade das propriedades das figuras porque, nesta fase de escolaridade, as concepções discentes acerca das formas geométricas devem passar por um refinamento que possibilite a aquisição de aspectos abstratos. Mas, normalmente, ele não está preparado para este tipo de estudo, pois, poucas são as experiências em sala de aula que tratam de geometria nos anos anteriores ao oitavo.

Muitos estudantes acabam sendo reprovados por não terem desenvolvido as habilidades necessárias ou aprovados mesmo sem elas. Em ambos os casos, o prejuízo à aprendizagem é enorme, pois, por um lado a reprovação é um dos principais contribuintes à evasão escolar[8] e por outro acaba-se aprovando alguém que não tem condições de lidar de forma adequada com o conhecimento do ensino médio.

No que concerne ao processo ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana no quarto ciclo, num primeiro momento, o conhecimento está relacionado à formação de conceitos, é a forma como enxergamos os elementos que determina o quanto compreendemos sobre eles. Depois, há o domínio das propriedades relacionadas aos conceitos, nesse ponto, é necessário compreender as relações entre os resultados oriundos da mesma definição ou de definições diferentes. Assim, um aluno que olha, por exemplo, para um quadrado e não vê ali um retângulo e um losango, ou que ao ver um triângulo isósceles não vê a congruência de seus ângulos da base, ainda não dispõe de tal conhecimento. Por fim há a necessidade de justificar a existência destas propriedades, é aí que se introduz a demonstração que representa o nível mais formal de conhecimento, em que as abstrações são indispensáveis.

Mesmo que saibamos definir figuras geométricas não significa que conhecemos ou que sabemos utilizar as propriedades básicas ligadas a tal definição. Mesmo que saibamos utilizá-las nada indica que sabemos justificá-las. Na visão que adotamos neste trabalho, para um aluno do ensino fundamental essa compreensão é indispensável, ele precisa saber justificar as propriedades elementares das figuras planas.

Sobre os conteúdos que devem ser ensinados no quarto ciclo, existe um consenso bem representado pelos PCN de Matemática que aponta àqueles que se adéquam às necessidades de formação nesse período. No que diz respeito a este trabalho estaremos focados no ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos explicitadas abaixo.

---

[8]Entendemos por evasão escolar a situação em que o aluno abandona a escola ou que por ser reprovado em determinado ano letivo não efetua a matrícula no ano seguinte.

RESULTADOS BÁSICOS[9]

1. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.
2. Em qualquer triângulo a soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.
3. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
4. Todo triângulo que possui dois ângulos congruentes é isósceles.
5. Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.
6. Todo triângulo que possui todos os ângulos congruentes é equilátero.
7. Em qualquer triângulo isósceles a mediana relativa a base é também bissetriz e altura.
8. Em qualquer paralelogramo os lados opostos são congruentes.
9. As diagonais de qualquer paralelogramo se intersectam em seus respectivos pontos médios.
10. Em todo retângulo, as diagonais são congruentes.
11. Em todo losango, as diagonais determinam as bissetrizes dos ângulos internos.
12. Em todo losango as diagonais são perpendiculares.
13. Em todo retângulo os pontos médios dos lados determinam um losango.

A compreensão formal dessas propriedades e das relações estabelecidas entre elas estão relacionadas ao processo de formação de conceitos geométricos que se desenvolve durante as experiências em sala de aula, na verdade, esse processo precede a compreensão das propriedades.

A seguir estudaremos os aspectos mais importantes para que se efetive a construção dos conceitos da Geometria Euclidiana Plana relacionados a triângulos e paralelogramos no quarto ciclo do ensino fundamental.

2.2 FORMAÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS NO QUARTO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

[9] Para demonstração veja Apêndice B.

Definir ou conceituar[10] é um ato natural que faz parte da formação do conhecimento matemático. Através das definições evitamos mencionar todas as propriedades das quais gozam determinados entes, ou seja, quando conceituamos devemos compreender que existem propriedades relacionadas aquele conceito e que o simples ato de citar uma definição, dependendo do contexto, pode implicar na aceitação destes resultados.

De acordo com Daniel Cordeiro Filho "[...] definir é dar nomes aos objetos matemáticos mediante determinadas propriedades interessantes que apresentem." (FILHO, 2004, p. 49).

Quando pensamos em determinada definição instintivamente estabelecemos uma ligação entre o conceito e a "coisa". Mas, nem sempre temos em mente suas propriedades porque não passamos pelas experiências necessárias à aquisição deste tipo de conhecimento.

O que o professor do ensino fundamental deve entender é que esse processo é mais delicado do que aparenta ser. Nesta fase do ensino, o ato de definir um objeto geométrico não deve ser puramente mecânico. A produção de uma definição formal é um processo que depende do estudo das características do objeto a ser definido e não apenas um processo expositivo.

Quando definimos, utilizamos algumas propriedades explícitas da figura. Mas, essa definição deve representá-la de tal modo que qualquer outra figura que satisfaça àquela caracterização tenha as mesmas propriedades. Por exemplo, para alunos do ensino fundamental é comum a afirmação "triângulos são figuras que possuem três lados". Definição que não está devidamente construída porque quando dizemos "figura" estamos fazendo uso de um conceito que não se limita ao grupo dos polígonos. Se afirmarmos "triângulos são polígonos que possuem três lados" estamos estabelecendo uma definição, própria, pois primeiro incluímos o conjunto dos triângulos como subconjunto do conjunto dos polígonos. Essa inclusão é um dos atributos de uma definição bem realizada.

Neste ponto, a inclusão de classes é um artifício importante para o trabalho pedagógico. O professor tem que estabelecer uma cadeia de conceitos que se relacionam, mostrando suas propriedades comuns e específicas.

As conceituações geométricas são realizadas enfatizando-se certas propriedades das

[10]Apesar de alguns artigos apontarem sutis diferenças entre definição e conceito, neste trabalho trataremos ambos os termos como sinônimos.

figuras definidas. Embora algumas das características não sejam mencionadas durante o ato de definir, há uma correlação entre estas de tal modo que o conceito está matematicamente correto apenas quando pelos aspectos mencionados possamos justificar as demais propriedades.

Daniel Cordeiro estabelece dois passos fundamentais à construção de uma definição.

> [...] PRIMEIRO PASSO: Nesse estágio da construção de uma definição, parte-se das noções do objeto a ser definido, para uma concepção mais elaborada desse objeto. Deve-se levar em conta, principalmente, a descoberta das principais propriedades que o caracterizam. Essa é a fase de conceituação, quando pode-se usar exemplos particulares para descobrir essas propriedades. [...] SEGUNDO PASSO: A formalização da definição, usando as propriedades que foram concebidas na conceituação do objeto. Neste estágio é necessário usar o formalismo e a terminologia adequada. Essa é a fase da redação do que foi conceituado, é o momento de redigir a definição, que deve ter um caráter geral. (FILHO, 2004, p.51).

Por este processo, evitamos também, o uso de definições redundantes, por exemplo, algumas concepções acerca do conceito de quadrado. É comum, principalmente vindo de nossos alunos a afirmação de que "um quadrado é um paralelogramo que possui quatro lados com medidas iguais e quatro ângulos retos".

Dessa vez, se emprega a inclusão de classes de forma equivocada por não considerar as propriedades dos paralelogramos. Observando-as é possível verificar que essa definição utiliza informações em excesso, pois, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a $360°$ e em qualquer paralelogramo os ângulos opostos são congruentes. Portanto, como um quadrado é um paralelogramo deve o mesmo ter ângulos opostos congruentes e a soma das medidas de seus quatro ângulos internos igual a $360°$, isto significa que sua definição matematicamente coerente seria: um quadrado é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes e um ângulo interno reto.

Utilizando a inclusão de classes, no caso dos quadrados, podemos incluí-los como parte do conjunto dos retângulos ou dos losangos: um quadrado é um retângulo que possui os lados congruentes; um quadrado é um losango que possui um ângulo reto.

O indispensável é levar nossos alunos a compreender que se uma figura pertence a determinado grupo, então possui as propriedades gerais daquele grupo, e também que há elementos do grupo que possuem características específicas, mas estas podem ou não ser compartilhadas por outros.

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS E SUAS MEDIDAS

Ângulos e suas medidas por vezes são tratrados com o mesmo sentido. Chegamos até a dizer que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°", quando deveríamos nos referir a soma das "medidas" destes ângulos.

Falamos também sobre a igualdade de segmentos, ou entre ângulos quando deveríamos nos referir à congruência destes, pois, igualdade é o que se estabelece entre suas medidas.

Sobre detalhes como estes, podemos até pensar que não são significativos quanto a aprendizagem discente no ensino fundamental, mas como formadores não podemos deixar de empregá-los corretamente. Além disso, mesmo que priorizemos a aplicação de propriedades elementares não devemos ignorar que o formalismo faz parte da construção do conceito. Mesmo que a princípio busquemos o prático e até o informal, futuramente o aluno deverá tê-lo desenvolvido formalmente.

NOTAÇÃO

Em Geometria os conceitos são acompanhados por notações[11] que facilitam a produção do texto. Claramente, uma notação inconveniente também pode prejudicar a compreensão das ideias que o autor tenta transmitir.

Em sala de aula a adoção de uma notação adequada não é apenas uma questão de bom senso do educador, mas uma ação que favorece o estabelecimento das bases necessárias à compreensão do conteúdo[12]. Especialmente no quarto ciclo, pois, há a necessidade de mencionar figuras geométricas com certa assiduidade, seja na resolução de uma questão ou no estudo de determinado conceito.

Devemos levar o aluno a entender que os símbolos têm a finalidade de simplificar a escrita matemática. Os textos, principalmente no âmbito da Geometria, ficariam bastante extensos sem a utilização destes. Por isso, ao fazer referência à determinada figura é preferível que optemos por sua notação.

[11]Neste trabalho, as base matemáticas, que incluem definições e notações estão explicitadas no Apêndice A.
[12]Veja [15] e [17].

No entanto, o principal problema acerca do uso de notações durante o trabalho pedagógico não se refere à compreensão de sua importância, é a percepção que o aluno tem acerca de determinadas expressões. O pensamento de que uma letra ou um símbolo sempre representará a mesma quantidade é o foco do problema. Assim, se em determinado contexto nos referirmos ao ângulo $\widehat{AOB}$ cuja medida é $A\hat{O}B = 50°$, para parte dos alunos, em qualquer contexto quando fizermos referência a um ângulo $\widehat{AOB}$ este terá a mesma medida do anterior. O estudante cria a ideia de unicidade quanto ao valor. Devemos desfazer esses conceitos incertos de uma forma que alcance toda a turma.

Veja que é simples resolver pendências como estas, basta notar que é a forma como o professor trata o assunto que fará o aluno associar a notação com o conceito. Recai sobre o trabalho educativo a responsabilidade pela compreensão e utilização correta dos símbolos matemáticos.

2.2.1 CONCEPÇÕES DISCENTES ACERCA DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS

Esta seção e as seguintes utilizam dados de uma pesquisa de campo[13], que se estabeleceu de forma qualitativa e quantitativa e objetivou analisar a forma como os concluintes do ensino fundamental conceituam triângulos e paralelogramos, avaliando quais propriedades são mais assíduas nas definições elaboradas por eles. Veja as tabelas 1 e 2., elas explicitam a quantidade de alunos, no total de 64, e suas formas de conceituar.

CONCEPÇÕES SOBRE TRIÂNGULOS

Durante a pesquisa, ao definir triângulos um dos argumentos mais comuns foi: é uma figura geométrica que tem três lados. Esse tipo de definição mostra uma restrição do conceito ao seu número de lados. É claro que, se tivermos em mente o universo dos polígonos essa é uma definição aceitável, mas, se tratando de figuras geométricas de um modo geral não é necessariamente verdade.

A primeira definição, da Tabela 1, mostra que o aluno associa a figura a uma forma espacial. A terceira definição também representa uma restrição do conceito relacionando a figura a sua quantidade de ângulos. Quanto à quarta, vemos que apesar de não estar correta busca mais elementos para definir, o que demonstra uma preocupação em obser-

[13] Para conhecer as questões utilizadas veja apêndice E.

Tabela 1: Concepções discentes sobre triângulos

Conceitos	Nº de alunos	Concepções discentes
Triângulo	1	Associa a formas espaciais
	30	É uma figura que possui três lados
	11	É uma figura que possui três ângulos
	10	É uma figura que possui três lados e três ângulos
	12	Confunde os conceitos
Triângulo equilátero	26	É um triângulo que possui três lados iguais
	22	É um triângulo que possui ângulos iguais
	16	Não elabora definição
Triângulo isósceles	12	É um triângulo que possui dois lados iguais
	37	Confunde os conceitos
	15	Não elabora definição
Triângulo retângulo	3	É um triângulo que possui ângulo reto
	43	Confunde os conceitos
	18	Não elabora definição

Fonte: Autor, 2014.

var os elementos que compõem a figura. As confusões de conceitos fazem referência aos alunos que, ao definir, utilizaram argumentos como "triângulos são figuras que possuem três lados iguais" estes não distinguem os conceitos de triângulo e triângulo equilátero, os alunos que a utilizaram não conseguem julgar que nem todo triângulo é equilátero, para eles para ser triângulo é necessário ter os lados iguais.

Os demais conceitos avaliados mostram erros semelhantes. Além disso, há uma grande quantidade de alunos que não apresentaram definições sobre as figuras.

Em nenhum momento houve referência ao termo polígonos. Então, não se faz ligação entre o conjunto dos triângulos e o conjunto dos polígonos, o que nos leva a observar que eles não fazem inclusão de classe. Além disso, erram ao utilizar a igualdade para comparar entes geométricos quando deveriam utilizar o termo congruência.

Notemos que os resultados das avaliações não mostram necessariamente que os participantes não reconhecem o que é um triângulo, apenas revelam a imaturidade dos conceitos formados por eles ao longo do ensino fundamental. As experiências com este tipo de figuras não foram suficientes para produzir uma concepção correta.

CONCEPÇÕES SOBRE PARALELOGRAMOS

Tabela 2: Concepções discentes sobre paralelogramos

Conceitos	Nº de alunos	Concepções discentes
Paralelogramo	12	Associa a formas espaciais
	37	É uma figura com lados iguais
	15	Não elabora definição
Retângulo	14	Associa a formas espaciais
	16	É uma figura com quatro ângulos retos
	24	É uma figura com quatro lados
	10	Não elabora definição
Losango	12	Associa a formas espaciais
	44	É uma figura com quatro lados iguais
	8	Não elabora definição
Quadrado	3	Associa a formas espaciais
	28	É uma figura com quatro lados iguais
	32	É uma figura com quatro lados e quatro ângulos iguais
	1	Não elabora definição

Fonte: Autor, 2014.

Perguntamos a um aluno que nome recebe o polígono que possui quatro lados com medidas iguais, a resposta imediata foi "é um quadrado". Percebemos que, as experiências que ele vivenciou fizeram-no criar o conceito de quadrado com base na caracterização de seus lados. Portanto, é provável que o tenha desenvolvido logo após estudar a definição de retângulos, mas a forma como ele conceitua não está correta por não agregar, necessariamente, as propriedades dos retângulos.

Ao definirem quadrado, grande parte dos alunos afirmou que "quadrado é uma figura que possui quatro lados iguais" definição que não é aceitável, mais uma vez devido a falta de informações. Veja que podemos compor uma figura qualquer que possua quatro lados com medidas iguais e esta não será um quadrado necessariamente. Além disso, há o mesmo erro apresentado quando definiram triângulos por não utilizar a congruência para estabelecer a igualdade entre entes geométricos.

Outra definição afirmava que "quadrado é aquele que possui quatro lados". Na qual o aluno, por não ter construído uma base para o conceito, não consegue relacioná-lo a algo conhecido e sem tais argumentos utiliza o termo "aquele" como fundamentação de sua definição.

2.3 O ESTUDO DAS PROPRIEDADES DAS FIGURAS PLANAS

Basicamente, entre os resultados referentes às figuras planas, há aqueles que são estabelecidos de forma axiomática e aqueles que necessitam ser justificados.

A distinção entre estes termos é parte importante da organização do conhecimento geométrico. No entanto, na educação escolar esses saberes vêm sendo estudados esporadicamente no ensino médio. Dificilmente o aluno conclui o ensino fundamental sabendo, por exemplo, o que é um axioma. Mas sua formação deve englobar informações sobre estes elementos, com as quais compreenderá a organização dos saberes geométricos, pois, a partir do momento que uma afirmação é caracterizada como proposição ou teorema, como veremos adiante, o estudante saberá que existem argumentos que as justificam.

2.3.1 AXIOMAS

"Axioma é uma sentença matemática que não é uma definição, e é aceita sem precisar ser justificada." (FILHO, 2004, p.56). São afirmações que não podem ser obtidas por processos dedutivos, porque estão na origem dos encadeamentos lógicos.

Historicamente, Euclides foi um dos principais responsáveis por reunir e organizar axiomaticamente a Geometria Plana, o que é feito mediante aceitação destes resultados, dados sem demonstrações. Os trabalhos de Euclides tiveram grande impacto nesse ramo da matemática. Em sua homenagem a Geometria Plana, hoje, é conhecida como Geometria Euclidiana Plana[14].

Para que se estabeleça o rigor matemático qualquer conceito que for usado numa sentença deve estar bem definido. Então as definições precedem o estabelecimento dos axiomas.

Entre os axiomas estudados no ensino fundamental destacam-se os axiomas de congruência que são importantes para justificar vários resultados referentes à Geometria Euclidiana Plana. A maioria das propriedades básicas de triângulos e paralelogramos é formalmente aceita com base no uso dos axiomas de congruência abaixo descritos.

Axioma 1 (CASO DE CONGRUÊNCIA LAL). *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$ então $ABC \equiv DEF$.*

Axioma 2 (CASO DE CONGRUÊNCIA ALA). *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ e $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$ então $ABC \equiv DEF$.*

[14]veja[28].

Axioma 3 (CASO DE CONGRUÊNCIA LLL)**.** *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{CA} \equiv \overline{FD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ então $ABC \equiv DEF$.*

Axioma 4 (CASO DE CONGRUÊNCIA LAA$_o$)**.** *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$ e $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$ então $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}$.*

Apesar de tratamos estas hipóteses como axiomas, sabemos que o estabelecimento do caso LAL é suficiente para deduzir os demais[15]. Portanto, se podem ser deduzidos de outra hipótese, não são axiomas propriamente ditos.

Mas, no ensino fundamental, estas considerações podem não contribuír para a aprendizagem pelo nível de abstração exigido, por isso, são aceitos e seu uso é justificado sem precisar formalizar.

Além destes, costumamos utilizar o caso de congruência CH (CATETO, HIPOTENUSA) para triângulos retângulos.

Axioma 5 (CASO DE CONGRUÊNCIA CH)**.** *Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos em A e D respectivamente. Se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ou $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ então $ABC \equiv DEF$.*

O caso CH é a aceitação, sob circunstâncias especiais, de que dados dois triângulos tais que são iguais as medidas de um ângulo, de um lado adjacente a este ângulo e do lado oposto, então estes triângulos são congruentes. Sabemos que para corroborar essa afirmação há a necessidade de que o ângulo em questão seja reto.

Esses aspectos precisam ficar bem definidos mesmo que não se tenha trabalhado com as informações formais que justificam a aceitação deste resultado.

No ensino fundamental, é necessário dar sentido a origem desses resultados, mostrar que existem formas de determiná-los o que pode ser feito através da observação de certas regularidades. O professor deve utilizar processos práticos para obtê-los. Isso quer dizer que mesmo os axiomas precisam ter sentido estabelecido mediante o uso de algum artifício.

Didaticamente, sem estabelecer o conceito de congruência não é frutífero ensinar os casos de congruência porque os elementos citados devem estar bem definidos. Então a formação da ideia de congruência entre triângulos precede o estudo destes casos. Mas essa formação deve munir os alunos de informações capazes de auxiliar na compreensão

[15]Veja [21] e [27].

das condições necessárias e suficientes para a aceitação de um caso de congruência.

A abordagem dos axiomas deve levar o aluno a compreendê-los para que possam aplicá-los para resolver problemas pertinentes ao seu nível de escolaridade.

Na Tabela 3 apresentamos algumas concepções discentes sobre o conceito de triângulos congruentes. Assim como os conceitos anteriormente tratados, é possível perceber que os alunos avaliados não demonstraram conhecimento satisfatório sobre este termo. Especialmente por se tratar de concluintes do ensino fundamental, não podemos ignorar a necessidade de mudar a prática em sala de aula na tentativa de modificar o quadro apresentado.

Tabela 3: Concepções discentes sobre triângulos congruentes

Nº de alunos	Concepções discentes
6	São triângulos com ângulos iguais
19	São triângulos com lados iguais
13	São triângulos que possuem a mesma forma
8	São triângulos eu têm os lados e os ângulos iguais
18	Não definem triângulos congruentes

Fonte: Autor, 2014.

2.3.2 PROPOSIÇÕES E TEOREMAS

Proposição é qualquer afirmação verdadeira ou falsa.

Teorema é uma sentença verdadeira que precisa ser justificada.

Assim como os postulados, proposições e teoremas dependem das definições previamente estabelecidas.

"Os teoremas são propriedades que podem ser demonstradas com base nos postulados e em propriedades anteriormente demonstradas" (BIANCHINI, 2011, p.157). São constituídos de sentenças condicionais (ou implicativas)[16].

"Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da base são congruentes".

[16]Sentença que estabelece uma relação de dependência entre duas ou mais proposições. Veja [18].

A presença do "se, e somente se" indica uma sentença bi-condicional[17] que pode ser expressa por duas sentenças condicionais distintas.

"Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes".

"Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles".

No ensino fundamental quanto mais simplificado se apresentar o conteúdo maior será a possibilidade de compreensão. Com estas condições, vemos que trabalhar teoremas com sentenças bi-condicionais é menos adequado do que quando separamos as sentenças.

Lembremos que, para o trabalho com alunos do ensino fundamental, as propriedades de quaisquer figuras devem ser tratadas com crescente formalização. Logo, didaticamente, não devemos seguir o modelo axiomático da Geometria Euclidiana Plana em que as definições são apresentadas e em seguida se faz o estudos de proposições e teoremas de modo formal. É necessário experimentar para se obter os resultados e assim entender que estes fazem parte da figura.

2.4 DEMONSTRAÇÕES

As demonstrações são formas de comprovar a veracidade de uma proposição ou de um teorema. Estas são realizadas com base na utilização de premissas anteriormente definidas. São constituídas por uma sequência de afirmações ligadas por implicações. Possuem grande importância para a matemática e representam o pleno desenvolvimento do raciocínio axiomático.

> Uma demonstração matemática é um processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, admitindo-se a sentença P, deduz-se, por argumentação, a sentença Q. Ou ainda, uma demonstração garante que a sentença Q ocorre todas as vezes em que P ocorrer. (FILHO, 2004, p.42).

Ao passo que as definições representam o início da construção do pensamento axiomático, as demonstrações representam a conclusão, pois, sua realização exige o conhecimento formal de conceitos e propriedades relacionados àquele fato que se deseja provar.

[17] Sentença que estabelece uma relação de dependência entre duas proposições de modo que a primeira é verdadeira apenas se a segunda for e a segunda é verdadeira apenas se a primeira for. Veja [18].

> Consideramos, usualmente, a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. (ALMOULOUD, 2012, p.24).

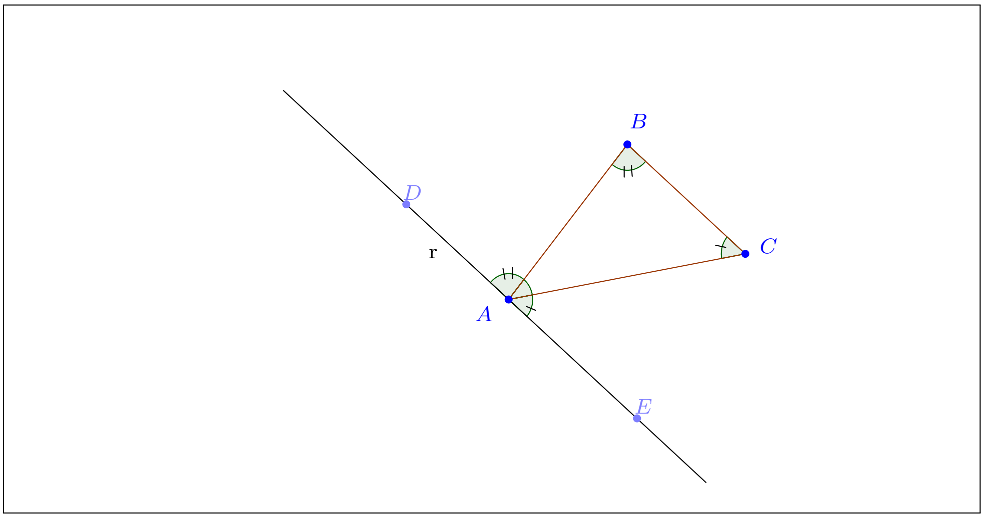
2.4.1 DEMONSTRAÇÕES COM O AUXÍLIO DE FIGURAS

Na Geometria utilizar figuras durante uma demonstração é algo que auxilia a compreensão do texto. Claramente, apenas a apresentação da figura não implica que se realizou uma demonstração, pois, apesar do forte apelo visual ligado aos resultados geométricos, facilmente podemos nos enganar, então mesmo com o uso de figuras não se pode basear conclusões apenas por meio das aparências destas. Mas a visualização pode nos indicar um caminho a seguir na nossa argumentação.

Exemplo 1. *Em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ABC um triângulo qualquer. Por A, trace a reta r paralela a $\overline{BC}$. Tome o ponto D tal que $\widehat{BAD}$ e $\widehat{ABC}$ sejam alternos internos. Analogamente tome E tal que $\widehat{CAE}$ e $\widehat{ACB}$ sejam alternos internos.

Figura 1: Soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC.



Fonte: Autor, 2014.

Agora note que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + B\hat{A}D + C\hat{A}E = 180°$. C.Q.D.

O estabelecimento de justificativas menos formais que as demonstrações faz parte da construção do conhecimento discente e se apresenta como uma alternativa à aceitação de proposições e teoremas no ensino fundamental. Para isto, o uso de figuras é ainda mais importante, porque através delas os alunos irão perceber quais artifícios utilizar para estabelecer suas argumentações.

2.5 COMPROVAÇÕES GEOMÉTRICAS

Referimo-nos à comprovação quando tratamos de formas de mostrar que determinado resultado é válido, num sentido menos rigoroso do que aquele que se estabelece para as demonstrações propriamente ditas. Uma comprovação de um resultado geométrico é uma argumentação necessária à aceitação deste num nível de escolaridade em que as demonstrações não seriam cabíveis.

A comprovação que propomos não se limita à simples verificação empírica, pois não se prende apenas à utilização da intuição, mas se estabelece sobre a utilização de artifícios ligados ao uso de instrumentos para a aceitação dos resultados e dessa forma, vemos o ato de comprovar um resultado como um estágio que intermedia o empirismo e a demonstração.

As comprovações dependerão das construções de figuras e subsidiarão a elaboração de justificativas por meio de argumentos plausíveis não atados à explicações puramente empíricas. A partir destas figuras, estaremos estabelecendo um apelo visual necessário às justificativas que serão dadas.

Mesmo que o trabalho pedagógico não objetive a realização de demonstrações formais por parte dos alunos[18], no quarto ciclo do ensino fundamental, é necessário que o professor consiga ensinar estes resultados e levar seus alunos a utilizar justificativas de forma implicativa observando as relações entre as propriedades.

Adiante enfatizaremos a importância didática das comprovações geométricas. Veremos como o professor pode utilizá-las para auxiliar o desenvolvimento do pensamento por meio da busca por justificativas de alguns resultados através das construções geométricas.

[18]Demonstração no ensino fundamental é uma temática que vem sendo alvo de estudos de vários pesquisadores e muitas são as recomendações favoráveis ao seu uso especialmente em Geometria. Veja [16].

3 O ENSINO DE PROPRIEDADES DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS NO QUARTO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Em nossa concepção, um aluno, concluinte do ensino fundamental, estará bem preparado no campo da Geometria Euclidiana Plana se conseguir utilizar as propriedades das figuras em diferentes situações que, inclusive, englobem a elaboração de justificativas para teoremas e proposições utilizando outras propriedades. No entanto, a observação do nível de conhecimento que a maioria dos alunos das escolas públicas consegue atingir ao final do ensino fundamental, revela quão longe estamos de conseguir que eles tenham tal conhecimento ao término desta etapa. Na realidade, em muitas instituições de ensino, os alunos não conseguem sequer entender as questões geométricas mais elementares, que envolvem apenas a aplicação direta de alguns resultados estudados ao longo dos anos de escolaridade básica.

Com base nisto, o presente capítulo expõe pressupostos teóricos e práticos para o estabelecimento das mudanças necessárias no ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos no quarto ciclo do ensino fundamental. Atribuindo ao professor a responsabilidade pela aprendizagem discente, fazemos a exposição de aspectos fundamentais das teorias construtivistas para justificarmos a necessidade de inovações na abordagem dos conteúdos em sala de aula. Através da exposição dos aspectos da Teoria dos Van Hiele, de onde concluímos que os conteúdos geométricos devem ser trabalhados com crescente formalização, mostramos a necessidade de incluir materiais manipuláveis nas estratégias de ensino. Também, contrapomos os métodos de ensino que, tradicionalmente, visam à memorização à dinâmica do processo de construção do conhecimento para o qual acreditamos na necessidade de utilizar a resolução de problemas como foco das estratégias didáticas.

Em consonância com Parâmetros Curriculares Nacionais, que apontam para a necessidade de trabalhar os aspectos mais elementares das transformações geométricas desde os anos iniciais do ensino fundamental e apoiados no trabalho de campo a partir do qual detectamos a fragilidade dos conceitos formados ao logo dos anos de escolaridade básica, expomos e justificamos a necessidade de utilização das isometrias como base para o estudo dos casos de congruência de triângulos.

3.1 COMO ENSINAR GEOMETRIA NO QUARTO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Um bom professor deve dominar os conteúdos que leciona, pois a compreensão o levará a tratar com propriedade àquilo que ensina. Não devemos ensinar determinado resultado sem conhecermos suas aplicações, sem sabermos como demonstrá-lo e sem conhecermos suas consequências dentro do conteúdo geral. Mas apenas isto não garante que seremos capazes de ministrar aulas de maneira favorável à aprendizagem discente. Não adianta apenas expor e explicar o conteúdo mesmo de uma forma minuciosa, é preciso encontrar a melhor forma de "passar" estes conhecimentos para os alunos.

Durante o ato de lecionar é comum nos perguntarmos *por que certas estratégias de ensino não têm o resultado esperado? Por que por mais que expliquemos ou por mais atividades que passemos nossos alunos não aprendem?*

Um dos maiores erros é achar que é pura falta de interesse do aluno. Claro, no contexto escolar existem aqueles que estão bastante desmotivados por fatores que pedagogos, psicólogos e outros profissionais têm tentado explicar ao longo dos anos. Mas, relegar ao esquecimento a importância do papel do professor por acreditar que é responsabilidade do aluno adquirir interesse pelo assunto é uma ação contraditória ao compromisso de lecionar.

Outra forma errada de ver os problemas do processo ensino-aprendizagem é pensar que a aprendizagem de conteúdos básicos é igualmente básica e, portanto pensar que nossos alunos entenderão com facilidade, ou seja, julgar que o que consideramos fácil é fácil para o aluno.

Quanto ao quarto ciclo, alguns professores baseiam suas metodologias de ensino em aulas puramente expositivas. Mas, explicações orais com exemplos pobres pouco contribuem para que aconteça a aprendizagem. Na verdade, esses procedimentos comuns têm criado uma lacuna entre o que nossos alunos sabem e o que deveriam saber. Essa prática de apenas expor e buscar a memorização leva à determinadas carências que podem ser observadas por meio de simples avaliações em sala de aula, porque os alunos não possuem a maturidade necessária à compreensão por meio apenas da exposição.

Não estamos criticando a adoção de aulas expositivas, mas sim a realização de aulas expositivas quando o público alvo não tem o conhecimento necessário para compreender através deste tipo de situação didática. Como mostramos no capítulo anterior, nesta fase de escolaridade, lidamos com alunos que não formaram uma base para a aprendizagem das propriedades das figuras planas, que não conseguem conceituar com precisão.

Mesmo diante desse tipo de situação, vários educadores priorizam a exposição e ainda se perguntam por que seus educandos não entendem as propriedades ensinadas, algo tão simples na concepção do professor. Até as proposições e os teoremas são ensinados superficialmente e, portanto concebidos pelos alunos como receitas, as quais decoram e tentam aplicar. O problema é que entender propriedades de algo que não sei definir, apesar de possível, é mais complicado do que quando há o desenvolvimento de habilidades que tornam o aluno capaz de conceituar por si próprio.

Na Geometria Euclidiana Plana, as definições, por suas características que remetem à fácil percepção visual devem ser trabalhadas de modo prático para depois serem formalizadas. Analogamente, os teoremas e as proposições não devem apenas ser expostos como resultados prontos, mas devemos levar o aluno a *construí-los.*

3.1.1 CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Ao final do quarto ciclo, o ensino de Matemática deve conduzir o aluno ao domínio de habilidades que o levam a "Decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos" (BRASIL, 1998, p. 92). Mas, nos últimos anos tem-se ensinado matemática através de uma prática educativa totalmente expositiva. O conhecimento é transmitido através de explicações orais e de exemplos no quadro. Os alunos se encarregam apenas de copiar e resolver exercícios. Alguns professores acreditam que quanto mais seus educandos respondem questões mais aprendem, o que não é totalmente falso, mas deixa a desejar pois, de acordo com D'Ambrósio (1989), cria-se a concepção de que a resolução de problemas reduz-se aos procedimentos realizados pelo professor.

D'Ambrósio (1989) aponta duas consequências dessa prática:

> Primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15).

Não se possibilita o desenvolvimento da autonomia do aluno. Seus procedimentos para resolver questões são cópias dos procedimentos do educador e quando se deparam com um problema diferente sentem extrema dificuldade até em iniciar a resolução.

Atualmente, as teorias educacionais são norteadas por uma tendência conhecida como Tendência Construtivista. Presente em várias áreas no conhecimento, essa tendência teve origem com os trabalhos de Jean Piaget[19]. No âmbito educacional, defende que os indivíduos devem ser sujeitos ativos do processo de aprendizagem, enquanto o professor é apenas mediador desse processo. Cabe a este propiciar situações para auxiliar o aluno na aquisição do conhecimento. Em outras palavras, o papel do educador é estabelecer as situações necessárias à produção do saber discente, a educação escolar deve ser um processo de construção do conhecimento.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou sua construção(FREIRE, 2002, p.52). Se tratando de tais possibilidades um dos campos mais férteis é certamente a Geometria, por possibilitar, de modo natural, a formação de vínculos entre os aspectos práticos e teóricos dos conceitos que serão trabalhados.

Nessa área, a necessidade de construir é mais evidente no ensino fundamental, pois o conhecimento geométrico é indispensável à formação básica por estruturar o processo de abstração fornecendo o necessário para entender várias situações-problema. Logo, uma abordagem puramente expositiva pode levar à formação de saberes fragmentados e assim prejudicar a capacidade de agir com propriedade em situações futuras.

A relação entre o concreto e o prático é um fator determinante para que se produza conhecimento no ensino fundamental. No quarto ciclo, partir do palpável é necessário à construção de definições, à visualização das propriedades e subsequentemente ao entendimento de proposições e teoremas.

Já ressaltamos no Capítulo 1 que, a formação do conhecimento geométrico está relacionada à construção dos conceitos, o que implica que a aprendizagem em Geometria está ligada à forma como esse processo é desenvolvido. Neste caso, a adoção de estratégias construtivistas com as quais o aluno será levado a investigar e produzir uma definição plausível pode proporcionar melhor rendimento do que a situação habitual em que os conceitos são apresentados e copiados.

3.1.2 O MODELO VAN HIELE

[19] Jean Piaget foi o fundador da epistemologia genética, uma teoria que defende que a aprendizagem é resultado da interação entre indivíduo e meio ambiente. Veja [24], [25] e [30].

O modelo Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico teve origem em 1957 com as teses de doutorado do casal de educadores holandeses, Dina van Hiele - Geldof e seu marido, Pierre Marie van Hiele[20]. Esse modelo é composto por cinco níveis de compreensão que determinam uma sequência de níveis de raciocínio geométrico e cinco fases de aprendizagem. A Teoria de Van Hiele apresenta características a respeito do desenvolvimento do pensamento geométrico que podem auxiliar na prática educativa, especialmente na elaboração de um plano de ensino efetivo.

NÍVEIS DE COMPREENSÃO

Para Adela Jaime Pastor (1993):

> O núcleo central do Modelo de Van Hiele está constituído pela idéia de que ao longo do processo de aprendizagem da Geometria o raciocínio dos estudantes passa por uma série de níveis de raciocínio que são sequenciais, ordenados e tais que não se pode saltar nenhum. Cada nível supõe a compreensão e utilização dos conceitos geométricos de uma maneira distinta, que se reflete em uma forma diferente de interpretar, definir, classificar e fazer demonstrações. (PASTOR, 1993, p.13) (TRADUÇÃO PRÓPRIA).

Nível 0 (Visualização)

As figuras geométricas são reconhecidas e comparadas por sua aparência como um todo, pois os alunos não identificam suas propriedades subjacentes.

Costumam usar propriedades irrelevantes para identificar, comparar, classificar e descrever figuras. É comum associarem figuras planas a objetos, se for proposto que definam algumas figuras geométricas darão respostas totalmente baseadas em critérios visuais e de forma comparativa podendo associar triângulos a pirâmides, quadrados a dados (cubos), retângulos a caixas (paralelepípedos). Apresentam noções incompletas dos conceitos por verem condições necessárias como suficientes.

Alguns autores fazem referência a um nível anterior ao primeiro de Van Hiele por isso, adotam a distribuição dos níveis de 1 a 5. E põem esse como o nível 0 definido como Pré-reconhecimento[21] que trata das primeiras concepções que são formadas acerca das figuras. Neste trabalho estaremos utilizando a definição original dos níveis.

[20]Veja [33] e [34].
[21]Veja [12].

Nível 1 (Análise)

As figuras são reconhecidas e comparadas por meio de suas propriedades.

Na realização de definições os alunos exibem todas as características que conhecem, ou seja, não conceituam focando apenas nas propriedades suficientes. Nesse nível é comum dizer que "um quadrado é uma figura que possui quatro lados iguais e quatro ângulos retos" e que "um triângulo é uma figura que possui três ângulos e três lados".

Não fazem correlação entre as propriedades. Não associam, por exemplo, o fato de um triângulo ser isósceles com a congruência dos ângulos da base.

Não fazem inclusões de classes. Consideram que quadrados e retângulos pertencem a conjuntos disjuntos. Não compreendem que um retângulo é um losango.

O estabelecimento da verdade de uma declaração é dado por abordagens empíricas, por exemplo, o uso de observação e medição com base em diversos rascunhos.

Nível 2 (Dedução informal ou Ordenação)

Os alunos começam a perceber as relações entre as propriedades de uma figura. São capazes de compreender as definições geométricas e realizar deduções. Acompanham demonstrações, mas ainda tem dificuldades em realizá-las. Passam a compreender a inclusão de classes, por exemplo, entendem que um quadrado é um retângulo e que um triângulo equilátero é também isósceles.

Formulam definições de forma econômica e correta para as figuras. Transformam definições incompletas em definições completas e aceitam diferentes definições equivalentes para o mesmo conceito.

Não compreendem às funções de definições, axiomas, proposições, teoremas e demonstrações formais.

Nível 3 (Dedução formal)

Os alunos são capazes de compreender e realizar demonstrações formais.

Compreendem as respectivas funções de definições, axiomas, proposições, teoremas e demonstrações formais.

Sobre este nível Schirio e Silva (2009) afirmam que:

> Os alunos passam a dominar o processo dedutivo e as demonstrações e reconhecem, assim, as condições necessárias e suficientes para fazer as deduções de modo a estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático, passando a aceitar as diferentes possibilidades de se atingir um mesmo resultado. (SCHIRIO e SILVA, 2009, p.57).

Nível 4 (Rigor)

Os indivíduos são capazes de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos. As geometrias não euclidianas são compreendidas.

A Teoria Van Hiele é sequencial e ordenada porque um nível superior de compreensão só pode ser alcançado quando o aluno domina as habilidades do nível imediatamente anterior.

O QUARTO CICLO E OS NÍVEIS DE VAN HIELE

Os cursos de nível fundamental e médio normalmente são desenvolvidos nos quatro primeiros níveis, e é justamente nestes que se concentra a maioria das pesquisas educacionais.

Em relação ao quarto ciclo do ensino fundamental, pelos objetivos traçados para esta etapa de escolaridade, entre os quais, figura a capacidade de justificar teoremas e proposições com base numa argumentação que provém da correlação entre as propriedades, situamos no terceiro nível a compreensão adequada ao concluinte. Um aluno que possui as características condizentes com este nível estará preparado para trabalhar com os conteúdos geométricos no ensino médio.

No trabalho de campo que realizamos[22], obtivemos os dados contidos na tabela 2.1, em que expusemos a classificação dos níveis de conhecimento de 64 alunos concluintes no ensino fundamental de acordo com a Teoria Van Hiele.

Essas informações mostram que os alunos concluem o ensino fundamental apresentando compreensão no máximo de nível 1. O que é insuficiente quando pensamos nas habilidades que devem ser desenvolvidas através do estudo de Geometria Euclidiana

[22]Para conhecer as questões utilizadas na avaliação realizada para obter os dados expostos na Tabela 5, veja o Apêndice E.

Tabela 4: Quantidade de alunos por níveis de compreensão dos conceitos

Conceito	Nível 2	Nível 1	Nível 0
TRIÂNGULO	0	14	50
TRIÂNGULO EQUILÁTERO	0	11	53
TRIÂNGULO ISÓSCELES	0	10	54
TRIÂNGULO RETÂNGULO	0	9	55
BISSETRIZ	0	2	62
ALTURA	0	6	58
MEDIANA	0	3	61
PARALELOGRAMO	0	10	54
RETÂNGULO	0	2	62
LOSANGO	0	9	55
QUADRADO	0	5	59

Fonte: Autor, 2014.

Plana ao longo do ensino fundamental.

Para os Van Hiele, alcançar determinado nível depende apenas dos conteúdos e das experiências as quais somos submetidos. Sendo assim, é responsabilidade do professor adequar suas metodologias para englobar situações que possibilitem o desenvolvimento das estruturas necessárias em cada nível.

Para o desenvolvimento de aulas que possibilitem a evolução de acordo com a Teoria Van Hiele, inicialmente, o professor deve compreender em que nível se encontram seus alunos, a partir daí vem a adequação da linguagem e de formas de abordar os conteúdos. Não se deve tratá-los num nível distinto do que se encontra a turma com a consequência de não haver aprendizagem. O trabalho com alunos que se encontram nos estágios mais básicos deve levá-los, esporadicamente, a adquirir a maturidade necessária para tratar do conhecimento geométrico com a destreza cabível ao término do ensino fundamental. Definições que a princípio se baseiam em protótipos visuais devem ir adquirindo propriedades abstratas.

> Para que um aluno progrida do Nível 1 para o Nível 2 em um tópico específico (por exemplo, os quadriláteros) é necessário que ocorra uma reorganização significativa de relações e um refinamento de conceitos. Há, portanto muito mais em tal transição do que apenas verbalização de conhecimento intuitivo, já que a verbalização anda lado a lado com a reestruturação do conhecimento. (VILLIERS, 2010, p.402).

Como professores da educação básica, estamos acostumados a ensinar Geometria com base naquilo que nossos alunos precisam dominar. No entanto, raramente paramos para analisar se a forma que desenvolvemos nossas aulas contribui expressivamente para que aconteça a aprendizagem.

Certamente, um dos problemas que cercam o ensino de Geometria é a vaga compreensão que nossos alunos demonstram sobre o que lhes é ensinado. O problema pode residir na falta mútua de compreensão defendida pelo modelo Van Hiele “se duas pessoas tratam do mesmo assunto em diferentes níveis, não haverá compreensão mutua” o que justifica porque os alunos não aprendem e porque o professor não consegue ensinar. Com isto, percebemos que nossas estratégias para levá-los ao entendimento não são tão frutíferas quanto deveriam ser, porque o problema de não entender as explicações pode estar vinculado ao nível de compreensão que o aluno precisa ter para aprender a partir dos artifícios que utilizamos.

FASES DE APRENDIZAGEM

Para que haja uma reorganização efetiva na forma de compreender os conteúdos, o Modelo determina uma progressão de 5 fases de aprendizagem que indicam uma sequência de estratégias que devem estar contidas no plano de ensino. As fases de aprendizagem representam um conjunto de informações que direcionam a prática docente na busca pela transição de níveis.

> As cinco fazes de aprendizagem pretendem apresentar uma organização das atividades que permitem passar de um nível de compreensão ao seguinte. As fases não estão, portanto associadas a um nível determinado, mas em cada nível de instrução deve começar com as atividades da primeira fase e continuar com as atividades das fases seguintes. No fim da quinta fase, os estudantes devem ter atingido o nível seguinte de raciocínio. (Pastor, 1993, p. 9)(TRADUÇÃO PRÓPRIA).

Fase 1 (Informação): Nesta fase o aluno terá contato com o tema que será estudado. O professor informa o que vão trabalhar e observa o que os alunos sabem sobre tal conteúdo;

Fase 2 (Orientação dirigida): Fase em que se dá a construção dos conceitos a serem trabalhados. As atividades propostas devem levar o aluno a desenvolver conceitos sobre a orientação do professor;

Fase 3 (Explicitação): Os alunos são levados a trocar ideias sobre o conteúdo estudado. Fazer comparações entre os resultados que obtiveram. Investigar as propriedades com autonomia. Experimentar para depois defender seu ponto de vista sobre os resultados obtidos;

Fase 4 (Orientação livre): Nesta fase se tem inicio a transição entre níveis de compreensão. Devem-se consolidar os conhecimentos adquiridos nas fases anteriores. Os alunos têm que aplicar a linguagem e os conhecimentos que acabaram de adquirir. O professor deve proporcionar problemas que levem a diferentes soluções.

Fase 5 (Integração): Nesta fase não se introduz nenhum conceito novo. O professor apenas deve proporcionar uma visão geral daquilo que foi aprendido. Organizar as informações estudadas.

Objetivando o avanço de nível, o professor pode ter nas fases um guia à elaboração do plano de ensino, pois estas descrevem uma sequência de experiências que o professor deve proporcionar aos alunos para levá-los a alcançar um nível imediatamente superior.

3.1.3 O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Em Geometria Euclidiana Plana, a construção de conceitos, que parte das noções preliminares sobre o objeto, deve estar atada à descoberta das propriedades características deste. Há recursos que podem auxiliar o professor na tarefa de implementar estratégias didáticas visando estabelecer tais descobertas, esses recursos são os materiais concretos (ou manipuláveis).

A concepção de materiais manipuláveis que adotamos se baseia da definição de Camacho (2012):

> Os materiais manipuláveis são um exemplo de materiais que, ao longo dos anos, têm vindo a ser utilizados na construção e na procura de conceitos. São, portanto, objetos que têm vindo a assumir diversos significados e muitos são os pedagogos, psicólogos e médicos que descrevem os seus atributos, defendendo piamente a sua utilização.(CAMACHO, 2012, p. 25).

O ensino de Geometria, pela própria caracterização dos conceitos pertinentes a esta área, deveria, num primeiro contato entre o aluno e o conceito a ser produzido, possibilitar uma análise individual através da manipulação de materiais concretos que possuam as características necessárias à aprendizagem do conceito estudado.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1998, p.37).

A abordagem de conceitos geométricos de forma prática pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento discente. Ao fornecer artifícios práticos para que o aluno possa perceber informações pertinentes ao objeto de estudo estamos proporcionando uma visão que não se limita à ação do professor.

De acordo com as informações que explicitamos anteriormente, as definições não devem ser apenas apresentadas e copiadas, mas sim trabalhadas de modo que os estudantes possam produzir os conceitos e verificar as relações que se estabelecem entre as propriedades. Uma forma de fazer esse trabalho é através da manipulação de materiais concretos.

Sabemos que não é frutífero apenas definir figuras e elucidar suas propriedades, mas proporcionar o contato com a mesma de uma forma que dê ao aluno a oportunidade de analisá-las e entender porque certos resultados devem ser aceitos. É nesse ponto que se destaca o uso dos materiais concretos, pois, quando o público alvo apresenta níveis básicos de compreensão, devemos buscar metodologias que trabalhem a formação de conceitos com crescente formalização e priorizando o contato inicial da forma mais prática possível.

O saber “concreto” é acessível a qualquer nível de compreensão, logo, haverá maior envolvimento dos alunos na situação didática. Se este participa mais, consequentemente se interessa mais pelo conteúdo em questão, o que favorece a produção de conceitos e procedimentos. Servem para instigar a curiosidade motivando questionamentos e troca de informação.

Além do aspecto motivacional a utilização de materiais manipuláveis tem a função pedagógica de proporcionar a visualização de forma prática das características dos objetos auxiliando a compreensão de conceitos que subsidiam a aceitação de propriedades que se relacionam. A compreensão destas relações é vista com maior facilidade quando as experiências contemplam atividades práticas.

Segundo Silva e Martins (apud ROCCO e FLORES, p.2):

> os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstracto, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as idéias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático. (SILVA e MARTINS, 2000, p. 4).

Sabemos que essa transição é fundamental para o desenvolvimento do conhecimento discente. Se pensarmos que quanto maior o nível de compreensão apresentado pelos alunos mais efetivas são as abstrações realizadas por eles, confirmamos a necessidade de proporcionar atividades que auxiliem na transição de níveis favorecendo a formação do pensamento abstrato. E é na Geometria que se encontram as melhores oportunidades para esta formação. Logo, o uso de materiais concretos nesta área é ainda mais importante porque os conceitos geométricos básicos estão relacionados a uma estrutura física, e no ensino fundamental, as concepções abstratas necessitam de um apoio concreto.

Entre os materiais manipuláveis que possuem grande importância no ensino de conceitos e propriedades, nos capítulos seguintes damos destaque ao uso de régua e compasso, materiais simples, que no passado tiveram papel central no desenvolvimento da Geometria[23].

3.1.4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO EM GEOMETRIA

O desenvolvimento do trabalho pedagógico referente aos conceitos e às propriedades das figuras planas por meio de estratégias mecânicas de aprendizagem não possibilita aos alunos consiguirem resolver situações problemas diferentes daquelas com as quais já tiveram contato. Porque, com este tipo de metodologia, limitamos sua capacidade de explorar diferentes estratégias de resolução por condicioná-los a resolvê-las da forma que resolvemos. Logo, quando estes se deparam com uma situação adversa ficam sem conseguir aplicar as propriedades mesmo que se recordem delas.

[23]O uso de construções com régua e compasso era a base das conceituações gregas estabelecidas acerca dos objetos geométricos. Veja [28].

> Os estudos e pesquisas em educação matemática apontam que é necessário enfatizar mais a compreensão, o envolvimento do aluno e a aprendizagem por descoberta. Ambos, compreensão e descoberta, exigem mais pensamento. E mais pensamento implica maior uso de atividades de resolução de problemas. (DANTE,2010, p. 9).

Se quisermos que o aluno seja responsável por seu aprendizado, se pensamos em utilizar estratégias que o levem à interagir com o professor e com os demais alunos, o saber matemático deve ser apresentado como algo desafiador, algo que incentiva o raciocínio. “Devemos delegar aos alunos mais responsabilidades por aquilo que aprenderão”.

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 39-40).

É possível perceber que mesmo quando introduzimos um problema em meio ao ensino de determinado conteúdo, há uma dedicação bem maior para resolvê-lo do que para aprender o que estava sendo ensinado. Observa-se uma motivação maior, mais alunos se interessam por aquele desafio, porque a ideia de ser desafiado é instigante, o problema mobiliza-os de uma forma que a simples exposição jamais conseguiria.

Porém mesmo abordando uma problemática em meio ao desenvolvimento de determinado conteúdo, ainda há aqueles que não se mostram interessados. Nem todos os problemas são atrativos para o aluno, alguns deles não tem significado, não representam nada para ele e usando como justificativa que “o problema é difícil” acaba não dando atenção e não procura investir numa solução.

A resolução de problemas deve ser precedida por uma organização, tem que ser planejada pelo professor. Não é apenas expor um problema e exigir resposta, um dos detalhes cruciais para que tenha os resultados desejados, é que o público alvo precisa dominar conhecimentos prévios com os quais irão buscar as soluções. Outro fator é que, durante a resolução, o professor deve observar como estão tentando resolver para depois proporcionar a análise das estratégias que tiveram êxito e mostrar porque essas foram frutíferas.

De acordo com os PCN (1998, p.40-41) a resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios:

i A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

ii O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

iii Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

iv Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

vi A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois, proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Concordamos com a Teoria dos Van Hiele quando confirma que a aprendizagem de Geometria depende das experiências pelas quais passamos, logo, não adianta querer ensinar por meio de estratégias que incluam a resolução de problemas e o uso de materiais concretos sem ter a certeza de que a forma como conduziremos a situação didática é eficiente, do contrário poderíamos estar apenas enchendo nossas aulas com elementos improdutivos. O uso de qualquer instrumento ou estratégia de ensino deve priorizar a aprendizagem em quantidade e qualidade.

O uso de régua e compasso é um recurso cabível ao ensino de Geometria Euclidiana Plana que pode ser aplicado em conjunto com a solução de problemas como estratégia didática e manter a objetividade do processo de ensino e aprendizagem.

3.1.5 O RECURSO DAS ISOMETRIAS

Um dos conceitos de maior importância a ser estabelecido no ensino fundamental é o conceito de congruência. Observando que a aplicabilidade dos casos de congruência de triângulos é fundamental à demonstração das propriedades de figuras planas[24], vemos que é indispensável ao concluinte do quarto ciclo ter passado por experiências que lhe possibilitaram o desenvolvimento de habilidades relacionadas à utilização das propriedades de triângulos congruentes.

No entanto, esse é um dos pontos em que se acentuam as deficiências da formação geométrica de alunos do ensino fundamental, pois, o ensino de congruências de triângulos é realizado num nível de compreensão que dificulta a aprendizagem, já que o conceito de figuras côngruas tem sido estudado apenas no início do quarto ciclo e de forma totalmente teórica. Durante os anos anteriores os estudantes dificilmente têm experiências com a movimentação de figuras no plano e sem as ideias básicas sobre o que são figuras congruentes o aluno se vê diante de algo alheio a sua compreensão.

Como a maioria dos conceitos geométricos básicos relacionados a triângulos, este deveria compor as ementas curriculares ao longo de todos os anos de escolaridade básica com crescente formalização, oportunizando a evolução de níveis durante os anos anteriores ao quarto ciclo do ensino fundamental, para que quando chegasse ao oitavo ano, o aluno já tivesse desenvolvido as habilidades necessárias à construção formal do conceito de congruência e à compreensão dos casos de congruência de triângulos.

O trabalho com as transformações geométricas[25] em ciclos antecedentes poderia ser um aliado ao estudo introduzido no quarto, pois estaríamos possibilitando a formação de uma base para o domínio dos conceitos e suas propriedades. No entanto, dá-se pouca importância ao estudo das transformações. Em muitos casos, os alunos concluem o ensino fundamental sem ter a noção de que é possível, através de movimentos simples no plano, transformarem uma figura em outra. Mesmo tendo estudado congruências não dominam sua utilização e nos casos mais extremos não conseguem utilizar os casos de congruência

[24] Veja apêndice [2].

[25] Uma transformação geométrica plana é uma bijeção entre duas figuras geométricas no mesmo plano ou em planos diferentes. As congruências ou Isometrias (rotações, rotações com deslizamento, translações, reflexões e reflexões com deslizamento) e as semelhanças são as principais transformações geométricas planas. Estritamente falando se duas figuras são isométricas então representam a mesma figura. Nesta situação dizemos que essas figuras são congruentes. Veja [22].

de triângulos sequer para mostrar se dois triângulos são ou não são congruentes. Isto acontece porque o estudo é feito de forma superficial, não se trabalha a base do conceito de congruência que seria a ideia de transformação isométrica.

"O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência" (BRASIL, 1998, p.124). Se o aluno tem o costume de trabalhar com isometrias, então facilmente poderá compreender o conceito de congruência[26], pois, "duas figuras são congruentes quando existe uma isometria que transforma uma na outra" . Dessa forma, quando estamos aptos a perceber que duas figuras no plano podem resultar de uma mesma figura por meio de isometrias, facilmente iremos identificar as características que definem a congruência de ambas.

Nessa etapa inicial, ou seja, nos primeiros contatos dos alunos do quarto ciclo com as congruências o professor deve proporcionar-lhes a oportunidade de movimentar figuras no plano, mostrar quais são as principais transformações isométricas (rotações, translações e reflexões). Assim, poderá conceituar a congruência como o ato de sobrepor figuras e mostrar, a partir de movimentos, quando há e quando não há a preservação das mesmas características.

As isometrias serão bastante úteis quando tratarmos das justificativas para as propriedades de triângulos e paralelogramos com base nos casos de congruência, pois, a percepção de que certas figuras podem ser decompostas em triângulos congruentes será abordada como um passo inicial à compreensão dos casos mais favoráveis à elaboração destas justificativas.

[26]Não procuramos realizar um estudo voltado ao ensino de isometrias, mas utilizá-las como para a compreensão do conceito de congruência e posteriormente dos casos de congruência de triângulos. Para obter informações sobre um estudo referente as isometrias com base nos níveis de Van Hiele, veja [9].

4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA NO QUARTO CICLO

Já especificamos que o trabalho com régua e compasso, por sua simplicidade e objetividade pode auxiliar na compreensão de conceitos e resultados geométricos básicos. De acordo com a Teoria Van Hiele, não há aprendizado quando ensinamos o conteúdo num nível de compreensão diferente daquele que o aluno alcançou. Além disso, destacamos as estratégias com base na utilização de recursos manipuláveis na tentativa de superar a fragilidade dos processos de ensino utilizados. O uso de construções geométricas permitirá ao professor desenvolver seu trabalho de um modo que todos os alunos tenham as condições mais homogêneas possíveis de aprendizagem. Não é necessário adotar, por exemplo, estratégias de nivelamento, porque os alunos estarão diante de uma nova experiência, uma nova forma de ver os conteúdos geométricos, àqueles que não dispõem de um conhecimento fortemente embasado terão a oportunidade de estabelecê-lo.

Para mostrar as contribuições advindas do uso das construções geométricas no processo de ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana, neste capítulo, explicitamos brevemente seus aspectos históricos e analisamos suas implicações na aprendizagem apontando para o surgimento de dúvidas como fator necessário a produção de conhecimento.

Com base na Teoria Van Hiele e observando que as construções geométricas possibilitam a utilização do uso de régua e compasso num contexto de resolução de problemas, propomos que o ensino de propriedades de triângulos e paralelogramos seja realizado através do uso destas construções. Mas, tratar delas requer o domínio de estratégias para construir figuras planas, por isto, também estudamos os artifícios básicos para a realização de quaisquer construções e expusemos construções elementares que podem ser utilizadas no quarto ciclo do ensino fundamental.

4.1 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

> As construções geométricas aparecem na antiguidade e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática. Há 2000 anos a palavra número significava número natural. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Era de fato complicado. Se não havia ainda a noção de número racional, os números reais então estavam a séculos de distância. Entretanto os gregos tiveram uma idéia

> engenhosa. A de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Esta idéia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto de uma semi-reta graduada. (WAGNER, 2009, p.1).

As construções geométricas[27] consistem em um conjunto de técnicas de resolução de problemas com o uso de régua e compasso. Todas as estratégias das construções estão fundamentadas nos três primeiros postulados dos Elementos de Euclides. A saber:

> I- Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer. II- E que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta. III- E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.85).

Nas construções geométricas a régua serve unicamente para traçar retas e segmentos de retas passando por dois pontos e o compasso para tranportar segmentos e desenhar circunferências com centro e raio determinados.

De acordo com Wagner (2009, p.4) para começar a desenhar, há dois problemas básicos que precisamos aprender:

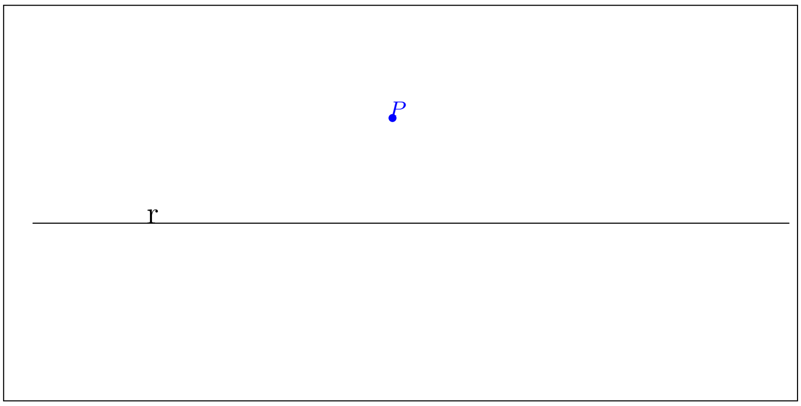
i. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

ii. Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.

Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r (Figura 2).

[27] É importante ressaltar que nas construções que aparecem neste trabalho, quando é necessário traçar arcos de circunferências sempre optamos por construí-la completamente porque a realização do trabalho de campo mostrou que os alunos compreendem melhor as situações quando tratadas dessa forma. Frisamos que a adoção de arcos equivalentes ao ângulo de medida igual a 360° não modifica os processos de construção.

Figura 2: Reta r e ponto P não pertencente a r.

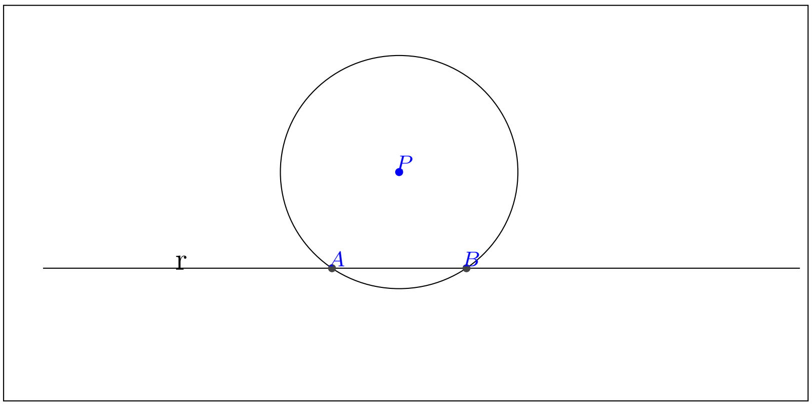


Fonte: Autor, 2014.

i) Construir uma reta perpendicular a r passando por P.

1º passo: Trace uma circunferência com centro em P de modo que esta circunferência intersecte a reta r em A e B.

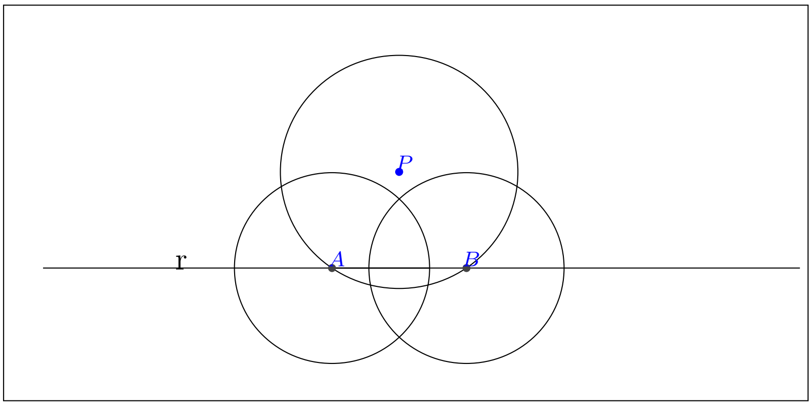
Figura 3: 1º passo da construção da perpendicular.



Fonte: Autor, 2014.

2º passo: Em seguida trace duas circunferências de mesmo raio centradas em A e B.

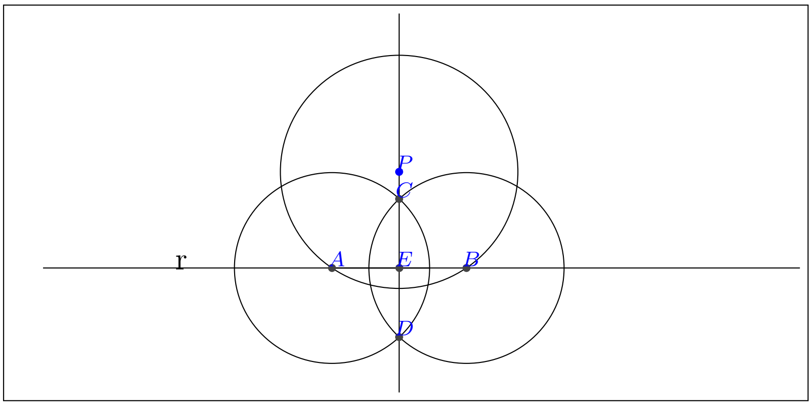
Figura 4: 2º passo da construção da perpendicular.



Fonte: Autor, 2014.

3º passo: Marque as intersecções C e D entre as circunferências. Marque o ponto E de intersecção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. A reta que passa por P e por E é a perpendicular à r passando por P.

Figura 5: 3º passo da construção da perpendicular.



Fonte: Autor, 2014.

JUSTIFICATIVA: Notemos que ACBD é um losango pois $AC = CB = BD = DA$, logo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se intersectam em seus pontos médios[28]. Seja E o ponto médio dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Agora, notemos que PAB é isósceles de base $\overline{AB}$ e como E é ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{PE}$ é altura do triângulo ABC relativa à base[29].

[28]Em todo paralelogramo as diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios. Para demonstração e mais informações veja Apêndice B.

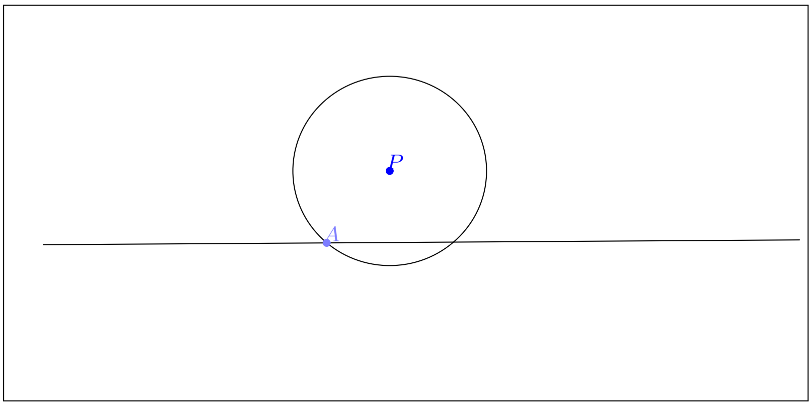
[29]Em todo triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura. Veja Apêndice B.

Dessa forma, a reta definida por P e E é a perpendicular à r passando por P.

ii)construir uma reta paralela a r passando por P.

1º passo: Com centro em P trace uma circunferência e marque um de seus pontos de intersecção com r. Seja A este ponto.

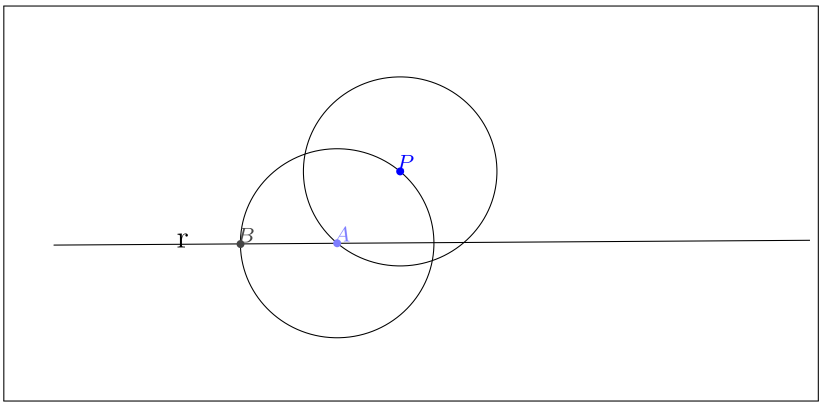
Figura 6: 1º passo da construção da paralela.



Fonte: Autor, 2014.

2º passo: Agora centrado em A trace uma circunferência de mesmo raio e marque um de seus pontos de intersecção com r. Seja B este ponto.

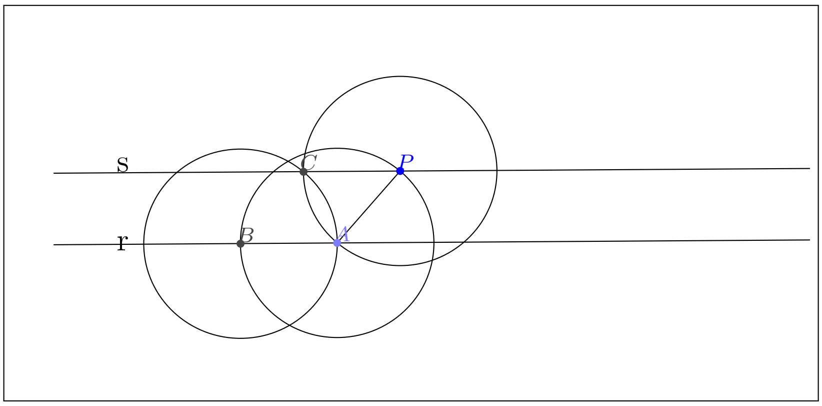
Figura 7: 2º passo da construção da paralela.



Fonte: Autor, 2014.

3º passo: Então centrado em B trace uma circunferência de raio igual ao das anteriores. Esta circunferência intersecta a primeira em A e outro ponto distinto. Seja Q este segundo ponto. A reta s que passa por P e Q é a paralela pedida.

Figura 8: 3º passo da construção da paralela.



Fonte: Autor, 2014.

JUSTIFICATIVA: Notemos que no quadrilátero ABCP temos $AB = BC = CP = PA$, segue que ABCD é um paralelogramo[30] e portanto, possui lados opostos paralelos[31]. Como $\overline{AB}$ está contido na reta r e $\overline{CP}$ está contido na reta s, então r e s são paralelas.

4.1.1 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção exploramos as construções que classificamos como elementares por possuírem aplicação dentro de outras construções. Assim como a construção de retas paralelas e perpendiculares, o transporte e a adição de ângulos e segmentos, as construções de pontos médios e bissetrizes compõem o quadro das construções que serão bastante utilizadas quando objetivarmos trabalhar determinadas propriedades de triângulos e paralelogramos.

O TRANSPORTE E A ADIÇÃO DE SEGMENTOS

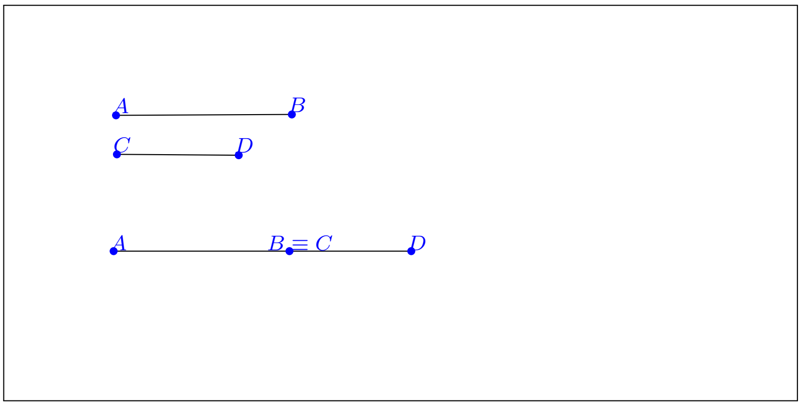
Para transportar um segmento qualquer primeiro marcamos um ponto no plano e depois uma abertura no compasso igual ao comprimento do segmento. Com a ponta seca no ponto marcado no plano, traçamos um arco com a abertura indicada no compasso. Escolhemos um ponto qualquer sobre o arco e unimos por um segmento este ponto e o marcado inicialmente.

A adição de segmentos é igualmente elementar, pois basta transportar os segmentos que serão adicionados de modo que a extremidade de um coincida com o início do

[30]Todo quadrilátero que possui os lados opostos congruentes é uma paralelogramo. Veja Apêndice B.
[31]Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. Veja Apêndice A.

outro.

Figura 9: Adição dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



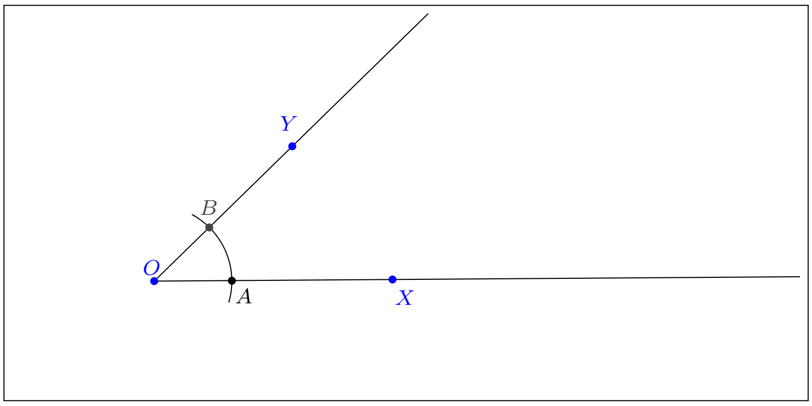
Fonte: Autor, 2014.

O TRANSPORTE E A ADIÇÃO DE ÂNGULOS

Em alguns livros que tratam de construções, o transporte de ângulo é efetuado utilizando a seguinte descrição *primeiro traçar uma semirreta em cuja origem ficará o vértice do ângulo, depois com uma abertura qualquer do compasso, traçar um arco no ângulo original, a seguir marcar a abertura do arco com o compasso e com esta abertura centrar o compasso no vértice do novo ângulo e desenhar um arco de modo que este intersecte a semirreta, então marcar a intersecção e com a mesma abertura no compasso traçar outro arco de modo que este intersecte o primeiro, em seguida é só marcar o ponto de intersecção e construir a semirreta.*

Note que esta construção é falsa, pois, com este método, sempre estaríamos construindo um ângulo de medida igual a 60°. Então, sugerimos que dado o ângulo $\widehat{OXY}$ de vértice O, seja traçado um arco qualquer com centro em O. Este arco intersectará as semirretas suportes do ângulo em dois pontos distintos A e B (Figura 10).

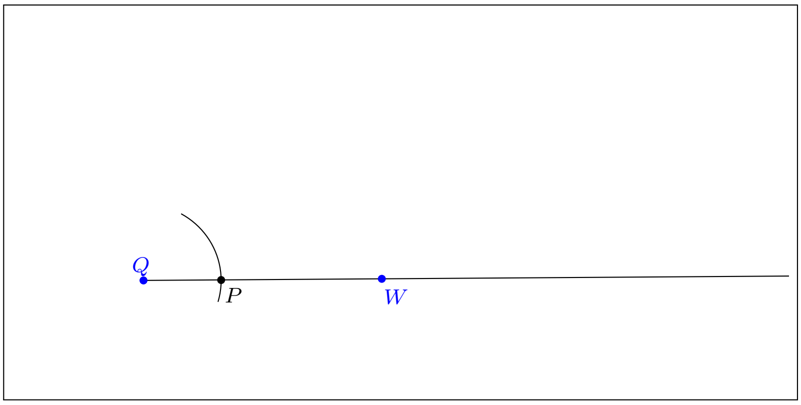
Figura 10: 1º passo do transporte do ângulo $\widehat{OXY}$.



Fonte: Autor, 2014.

Marcamos uma abertura no compasso igual a OA (e não AB como sugerido). Na semirreta de origem Q em que será traçado o ângulo, marcamos $\overline{QP}$ tal que $QP = AO$ (Figura 11).

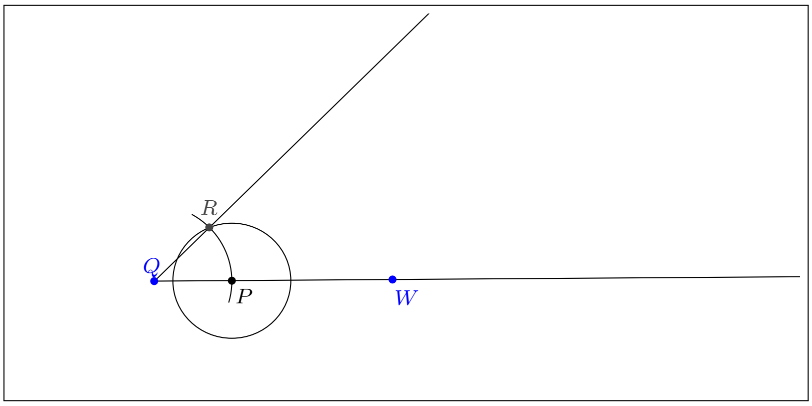
Figura 11: 2º passo do transporte do ângulo $\widehat{OXY}$.



Fonte: Autor, 2014.

Agora com uma abertura no compasso igual a AB, com centro em P traçamos um arco e marcamos seu ponto R de intersecção com o anteriormente marcado. Depois basta traçar a outra semirreta $\overrightarrow{QR}$ (Figura 12).

Figura 12: 3º passo do transporte do ângulo $\widehat{OXY}$.



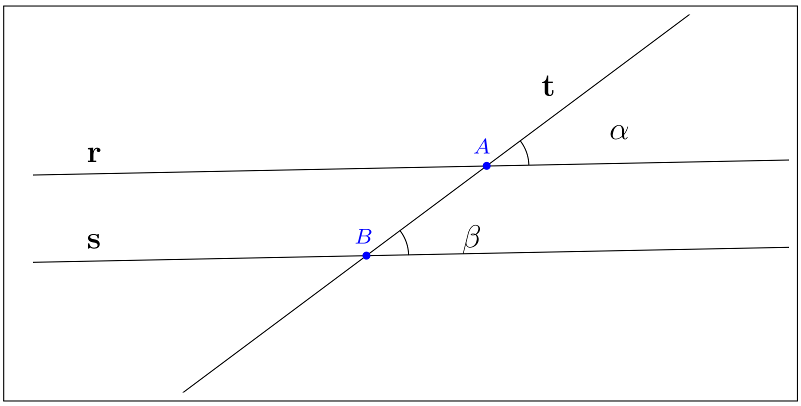
Fonte: Autor, 2014.

Note que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{PQR}$, pois os triângulos OAB e QPR são congruentes (CASO LLL).

Com o transporte de ângulos podemos comprovar as relações de congruência entre ângulos formados por paralelas e transversais sobrepondo ambos por meio de uma construção.

Sejam r e s retas paralelas e t uma transversal. sejam α e β as medidas dos ângulos correspondentes formados por t e r e por t e s respectivamente.

Figura 13: Ângulos correspondentes formados pelas retas paralelas r e s intersectadas por uma transversal t.



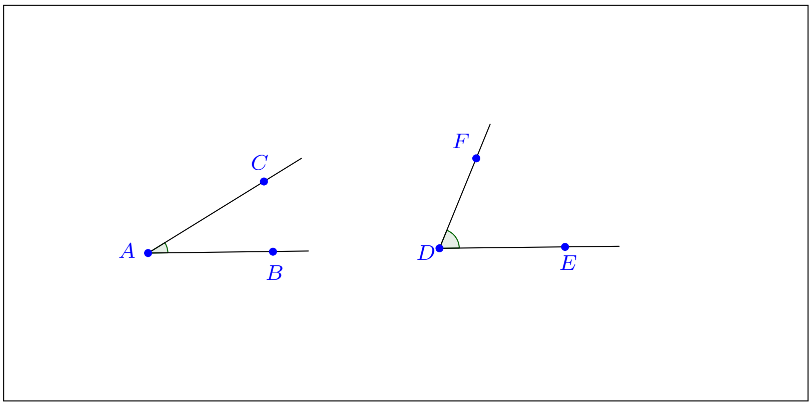
Fonte: Autor, 2014.

Para comprovar a congruência basta transportar o ângulo α à reta s de modo que as semirretas suportes coincidam e que o vértice A coincida com o vértice de B.

Na verdade, qualquer situação que envolva ângulos congruentes pode ser verificada por meio do transporte de ângulos.

Por sua vez, a adição de ângulos é igualmente elementar. Dados os ângulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{FDE}$, pede-se construir o ângulo $\widehat{CAB} + \widehat{FDE}$.

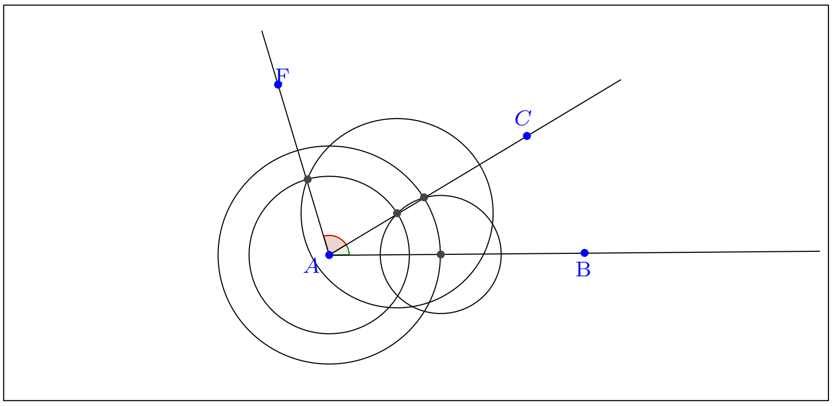
Figura 14: Ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{EDF}$.



Fonte: Autor, 2014.

Basta transportar os ângulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{FDE}$ de modo que ambas as semirreta suporte coincidam.

Figura 15: Adição dos ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{EDF}$.



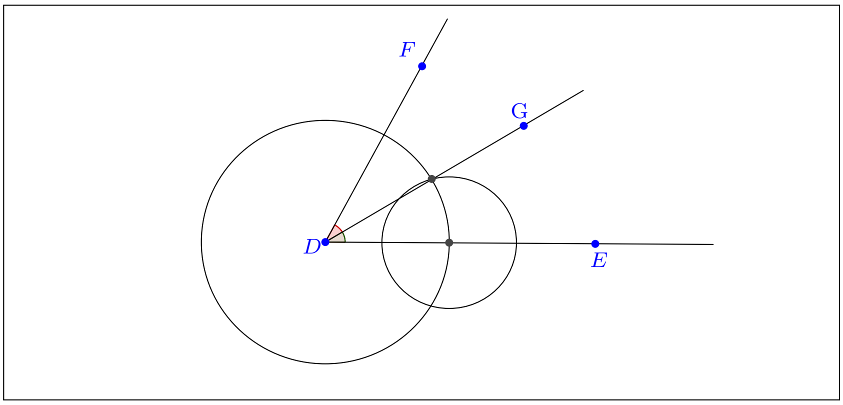
Fonte: Autor, 2014.

Temos que $\widehat{BAF} \equiv \widehat{CAB} + \widehat{FDE}$.

Dados os ângulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{FDE}$, tal que $C\hat{A}B < F\hat{D}E$, pede-se construir o ângulo $\widehat{FDE} - \widehat{CAB}$.

Basta construir o ângulo $\widehat{CAB}$ sobre a semirreta suporte do ângulo $\widehat{FDE}$.

Figura 16: Subtração dos ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{EDF}$.



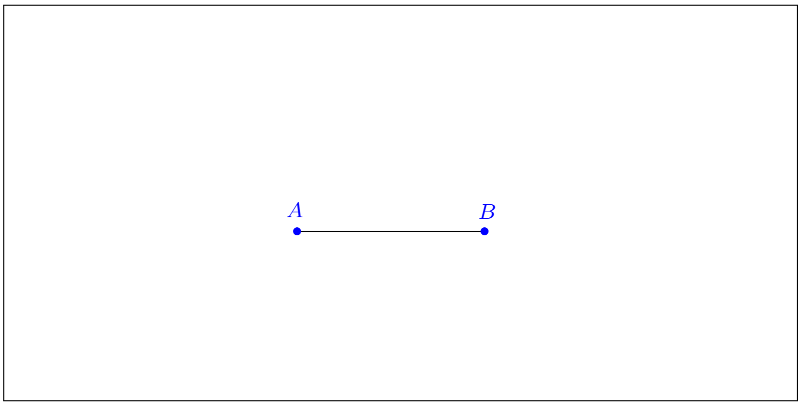
Fonte: Autor, 2014.

Segue que $\widehat{GDF}$ é o ângulo pedido.

CONSTRUÇÃO DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Seja $\overline{AB}$ um segmento qualquer.

Figura 17: Segmento $\overline{AB}$.

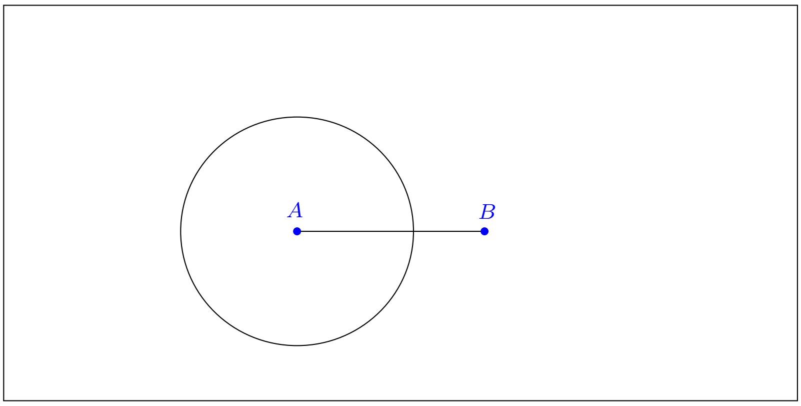


Fonte: Autor, 2014.

Os seguintes passos indicam a construção do ponto médio de $\overline{AB}$.

1º passo: Com centro em A, trace uma circunferência cujo raio seja maior que a metade da medida do segmento $\overline{AB}$;

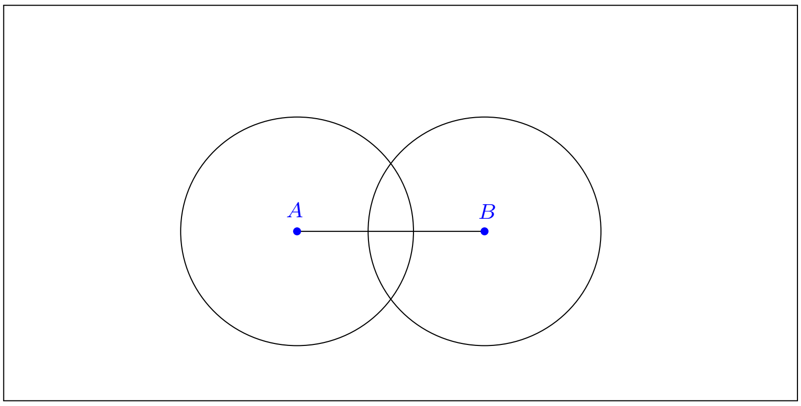
Figura 18: 1º passo da construção do ponto médio de $\overline{AB}$.



Fonte: Autor, 2014.

2º passo: Centrando-se em B trace uma circunferência de mesmo raio que a circunferência anterior;

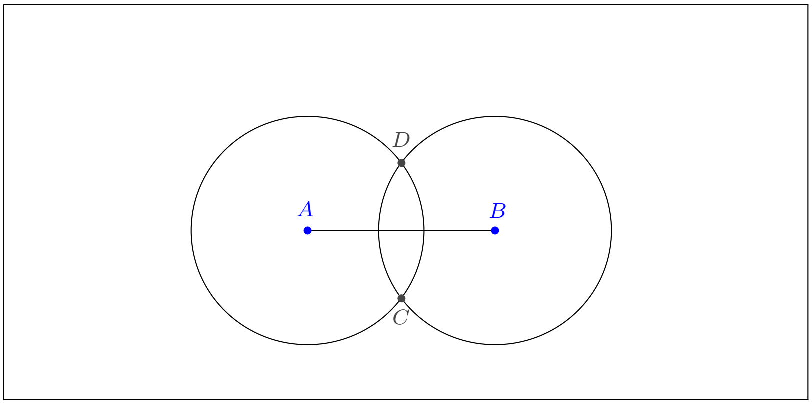
Figura 19: 2º passo da construção do ponto médio de $\overline{AB}$.



Fonte: Autor, 2014.

3º passo: Marque as intersecções entre ambas as circunferências;

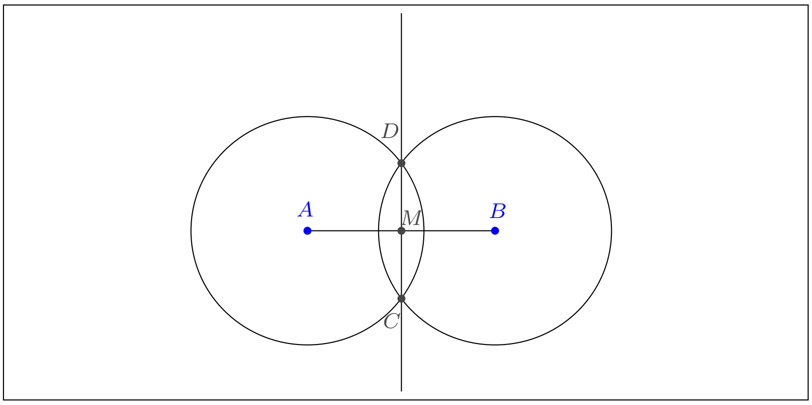
Figura 20: 3º passo da construção do ponto médio de $\overline{AB}$.



Fonte: Autor, 2014.

4º passo: Na intersecção entre a reta que passa pelos pontos de intersecção das circunferências e o segmento $\overline{AB}$ marque o ponto C que é ponto médio de $\overline{AB}$.

Figura 21: 4º passo da construção do ponto médio de $\overline{AB}$.



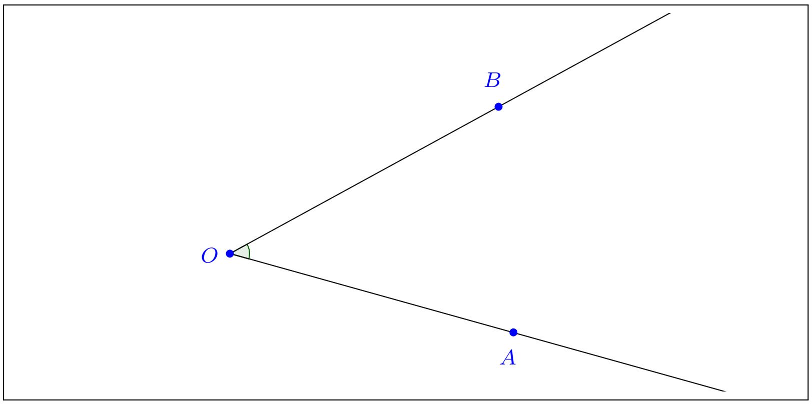
Fonte: Autor, 2014.

JUSTIFICATIVA: C é ponto médio de $\overline{AB}$ porque a $\overline{AE} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{AF} \equiv \overline{BF}$, logo $AEBF$ é um losango cujas diagonais são $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$, pela Proposição 12 do Apêndice B e pela Definição 9 do Apêndice A, $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ se intersectam em seus respectivos pontos médios.

CONSTRUÇÃO DA BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Construir a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ da figura a seguir.

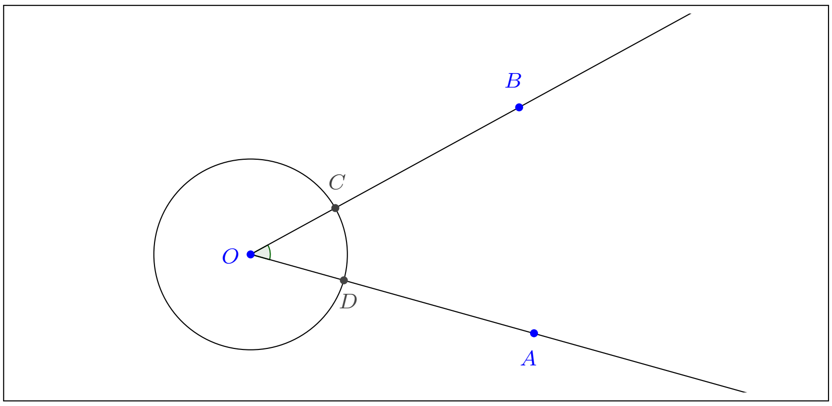
Figura 22: Ângulo $\widehat{AOB}$.



Fonte: Autor, 2014.

1º passo: Com o centro no vértice do ângulo trace um arco de circunferência que intersecte as semirretas suportes do ângulo nos pontos C e D.

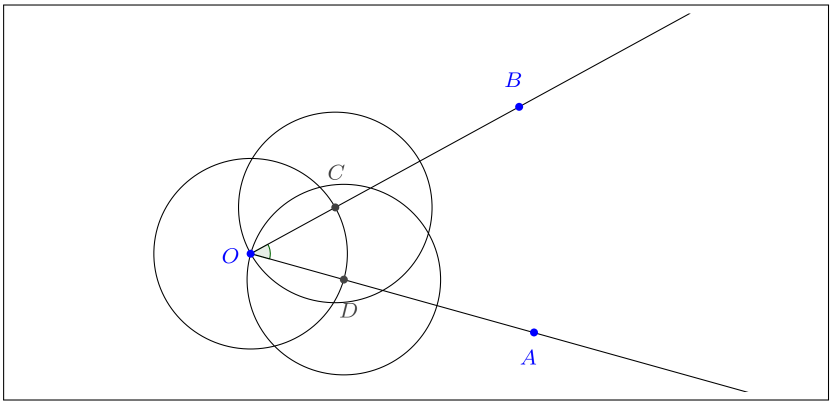
Figura 23: 1º passo da construção da bissetriz de $\widehat{AOB}$.



Fonte: Autor, 2014.

2º passo: Com a mesma abertura no compasso usada anteriormente trace dois arcos de circunferência, um centrado em A e outro centrado em B de modo que ambos se intersectem.

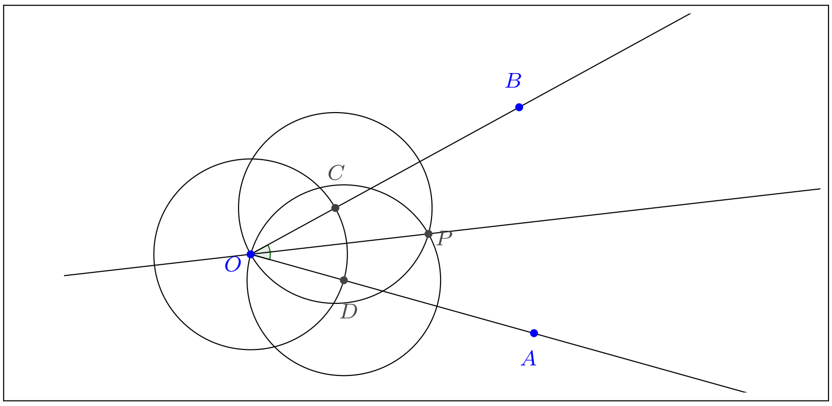
Figura 24: 2º passo da construção da bissetriz de $\widehat{AOB}$.



Fonte: Autor, 2014.

3º passo: Marque o ponto de intersecção P e trace a reta definida por $\overline{OP}$.

Figura 25: 3º passo da construção da bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.



Fonte: Autor, 2014.

Justificativa: A reta que contem $\overline{OP}$ é bissetriz de $\widehat{AOB}$ porque $OACB$ é um losango, logo, os triângulos AOC e AOB são congruentes pelo caso LLL com a correspondência dos vértices dada por A↔B, O↔O e C↔C, então os ângulos $\widehat{COB}$ e $\widehat{COA}$ são congruentes.

4.1.2 CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS

As construções seguintes têm extrema importância didática, constituem a base da aprendizagem dos resultados básicos.

CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULOS

(i) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DOS LADOS

Construa o triângulo ABC tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

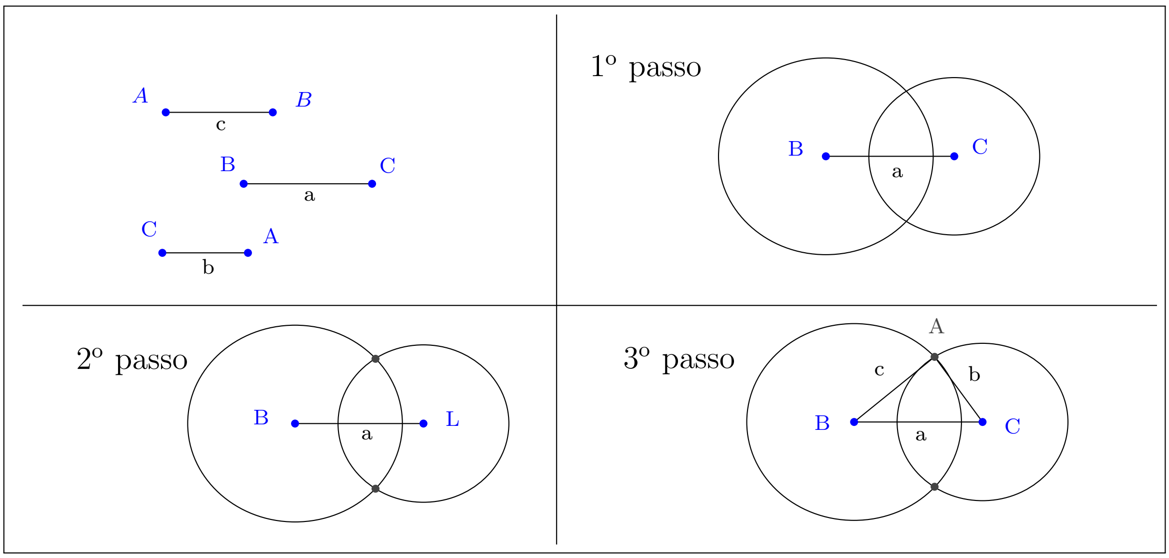
1º passo: Traçar uma reta suporte e nela marcar um dos segmentos (por exemplo, o segmento $\overline{BC}$);

2º passo: Numa das extremidades trace uma circunferência de raio b e na outra uma circunferência de raio c;

3º passo: Marque os pontos de intersecção das circunferências;

4º passo: Escolha um dos pontos e trace o triângulo.

Figura 26: Construção de um triângulo dadas as medidas dos lados.



Fonte: Autor, 2014.

(ii) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DOS ÂNGULOS

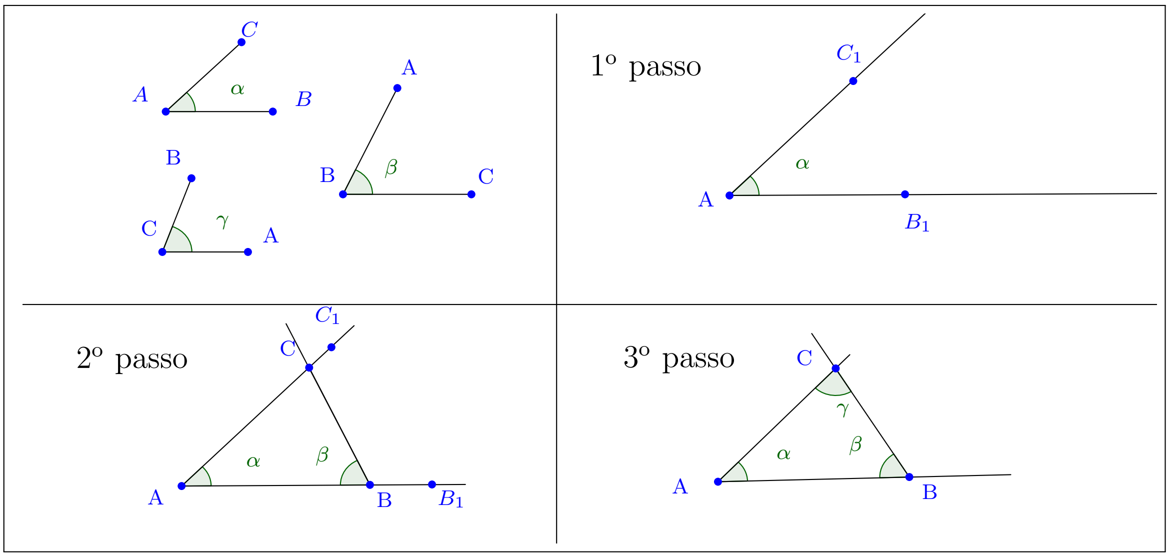
Construa o triângulo ABC tal que $C\hat{A}B = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$ e $B\hat{C}A = \gamma$.

1º passo: Construa um dos ângulos, por exemplo, $\widehat{CAB}$.

2º passo: Numa das retas suportes trace um dos outros dois ângulos, por exemplo, $\widehat{ABC}$.

3º passo: Marque o ponto de intersecção entre as retas não coincidentes.

Figura 27: Construção de um triângulo dadas as medidas dos ângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Perceba que o terceiro ângulo fica determinado a partir da construção dos dois primeiros.

(iii) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO ENTRE ELES

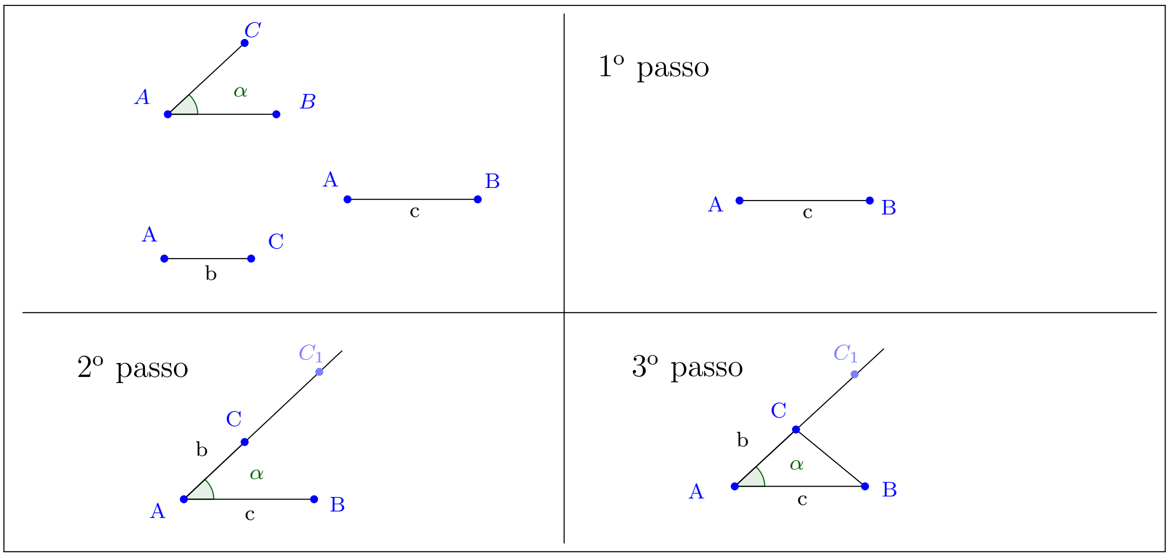
Construa o triângulo ABC tal que $AB = c$, $AC = b$ e $B\hat{A}C = \alpha$.

1º passo: Trace o segmento $\overline{AC}$ (ou $\overline{AB}$).

2º passo: Com vértice em A construa o ângulo $\widehat{BAC_1}$ de medida α e marque sobre a semirreta AC_1 o ponto C de modo que o segmento $AC = b$ (ou $AB = c$).

3º passo: Construa o segmento $\overline{AB}$ (ou $\overline{AC}$) com B pertencendo a semirreta que não contém C.

Figura 28: Construção de um triângulo dadas as medidas de dois lados e do ângulo entre eles.



Fonte: Autor, 2014.

(iv) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DE DOIS ÂNGULOS E DO LADO ENTRE ELES

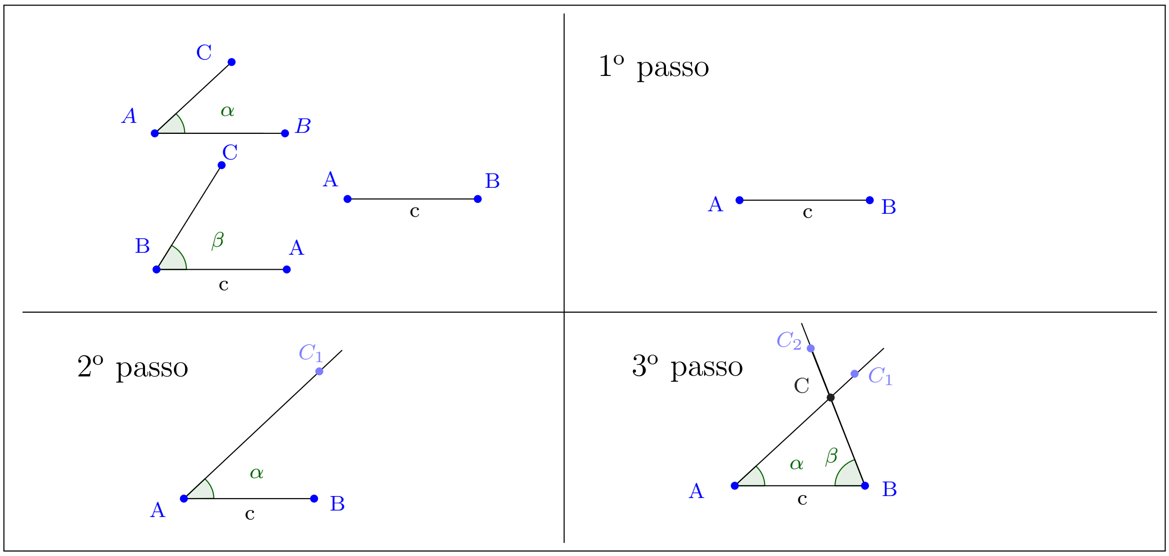
Construa o triângulo ABC tal que $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$ e $AB = c$.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB} = c$.

2º passo: No vértice A construa o ângulo$\widehat{BAC_1} =$ de medida α tal que o segmento $\overline{AB}$ pertença à semirreta suporte do ângulo.

3º passo: Em B trace o ângulo $A\hat{B}C = \beta$ de modo que o segmento $\overline{AB}$ pertença à semirreta suporte do ângulo. Marque o ponto C de intersecção entre as semirretas que não contém o segmento $\overline{AB}$.

Figura 29: Construção de um triângulo dadas as medidas de dois ângulos e do lado entre eles.



Fonte: Autor, 2014.

(v) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DE UM ÂNGULO, DE UM LADO ADJACENTE A ELE E DO LADO OPOSTO.

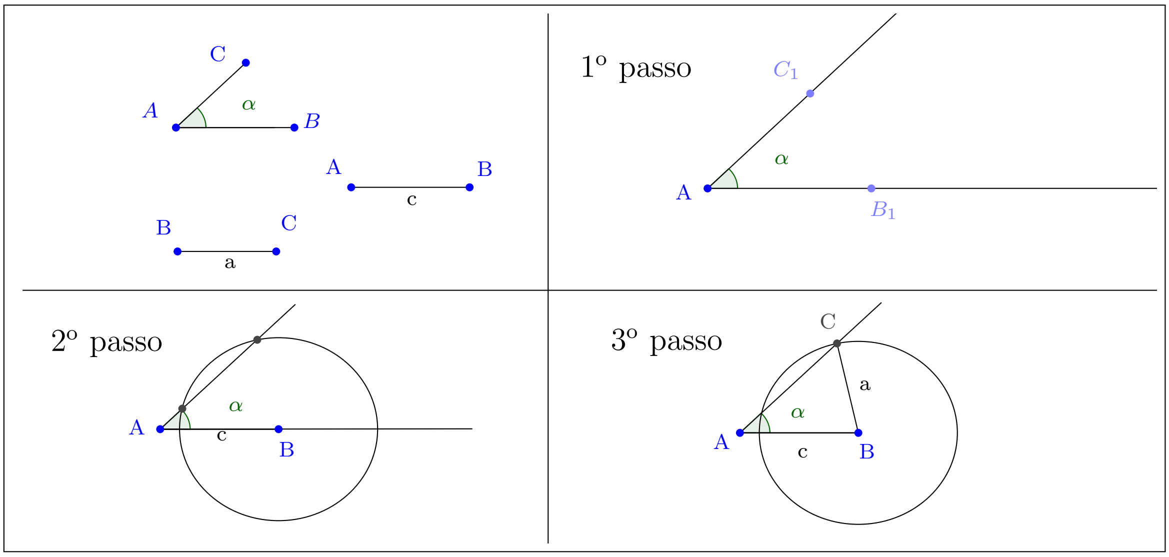
Construa o triângulo ABC tal que $B\hat{A}C = \alpha$, $AB = c$ e $BC = a$.

1º passo: Construa o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$ e numa das semirretas suportes do ângulo marque B tal que $AB = c$.

2º passo: No ponto B trace uma circunferência de raio a e marque os pontos de intersecção desta com a semirreta que não contém B.

3º passo: Resta escolher um dos pontos para representar o vértice C.

Figura 30: Construção de um triângulo dadas as medidas de um ângulo, de um lado adjacente a ele e do lado oposto.



Fonte: Autor, 2014.

(vi) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DE UM LADO, DE UM ÂNGULO ADJACENTE A ELE E DO ÂNGULO OPOSTO.

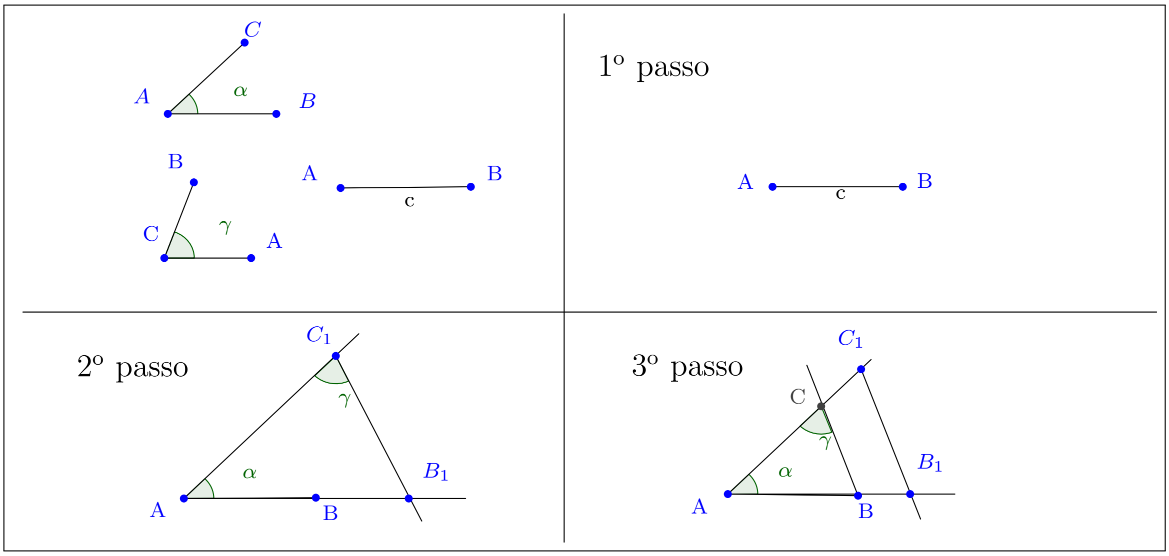
Construa o triângulo ABC tal que $AB = c$, $A\hat{A}B = \alpha$, e $B\hat{C}A = \gamma$.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$

2º passo: No vértice A Construa o ângulo $\widehat{BAC_1}$ de medida α e tomando C_1 como vértice construa o ângulo $\widehat{AC_1B_1} = \gamma$ de medida γ.

3º passo: Por B construa uma reta paralela ao segmento $\overline{B_1C_1}$. Essa paralela intersecta a semirreta $\overline{AC_1}$ no ponto C tal que ABC é o triângulo procurado.

Figura 31: Construção de um triângulo dadas as medidas de um lado, de um ângulo adjacente a ele e do ângulo oposto.



Fonte: Autor, 2014.

Observemos que o conhecimento da soma das medidas dos ângulos internos é necessário para que possamos realizar esta construção. De fato, para construir o triângulo em questão devemos primeiro deduzir o valor do terceiro ângulo que será adjacente ao lado $\overline{AB}$, o que fará a construção recair no caso (iv).

(vii) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

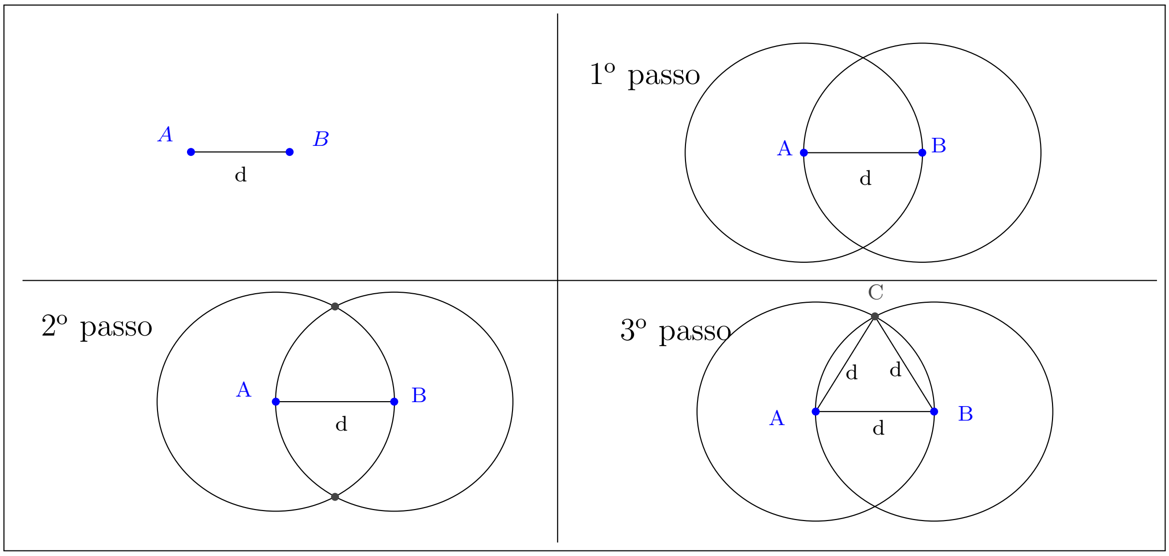
Dado um segmento $AB = d$ construir o triângulo equilátero ABC.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$, com centro em A, trace uma circunferência de raio igual ao comprimento do segmento $\overline{AB}$, com centro em B trace outra circunferência de raio d.

2º passo: Marque os pontos de intersecção entre as circunferências.

3º passo: Marque em uma das intersecções das circunferências o ponto C e trace o triângulo ABC.

Figura 32: Construção de um triângulo equilátero dada a medida do lado.



Fonte: Autor, 2014.

JUSTIFICATIVA: ABC é equilátero, pois, B e C pertencem à circunferência centrada em A, logo $\overline{AB} = \overline{AC}$, mas A e C pertencem a circunferência centrada em B logo $\overline{AB} = \overline{BC}$.

(viii) CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO ISÓSCELES

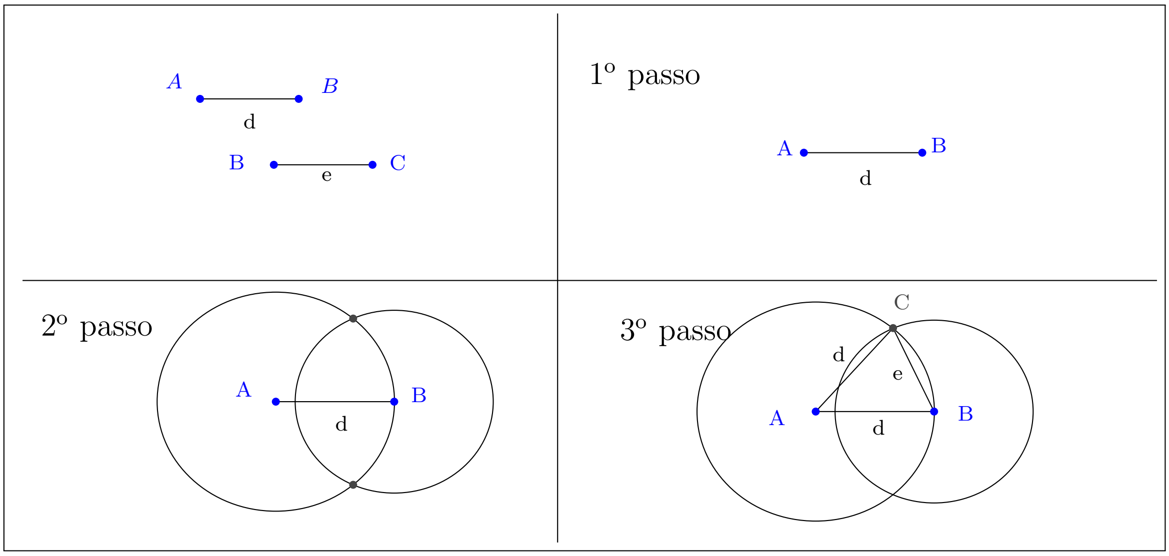
Construir um triângulo isósceles ABC dado que $BC = e$ é sua base e $AB = d$ é a medida dos lados.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$.

2º passo: Com centro em A trace uma circunferência de raio igual ao comprimento do segmento $\overline{BC}$ e com centro em B trace outra circunferência de raio e.

3º passo: Em uma das intersecções das circunferências marque o ponto C e trace o triângulo.

Figura 33: Construção de um triângulo isósceles dadas as medidas da base e dos lados.



Fonte: Autor, 2014.

JUSTIFICATIVA: ABC é isósceles, pois, B e C pertencem à circunferência centrada em A, logo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$.

CONSTRUÇÕES DE PARALELOGRAMOS

(i) PARALELOGRAMOS QUAISQUER

Construa o paralelogramo $ABCD$ tal que $AB = a$, $AD = b$ e $BAD = \alpha$.

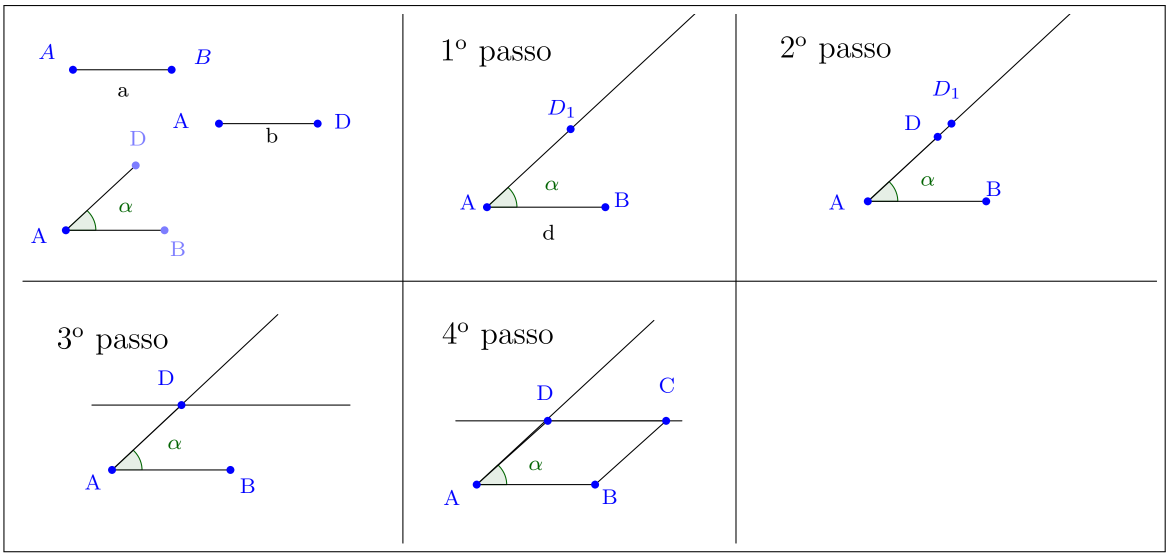
1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$. No vértice A construa o ângulo $\widehat{BAD_1}$ de medida α.

2º passo: Na semirreta suporte AD_1 marque o ponto D tal que $AD = b$.

3º passo: Trace a reta r paralela a $\overline{AB}$ passando por D.

4º passo: Em r marque o ponto C tal que $AB = CD$ e de modo que $\overline{CD}$ pertença ao mesmo semiplano[32] que $\overline{AB}$.

Figura 34: Construção de um paralelogramo dadas as medidas dos lados adjacentes e do ângulo entre eles.



Fonte: Autor, 2014.

[32]Uma das duas regiões de um plano delimitadas por uma reta

Construa o paralelogramo ABCD tal que $AB = a$, $AC = b$ e $B\widehat{A}C = \alpha$.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$.

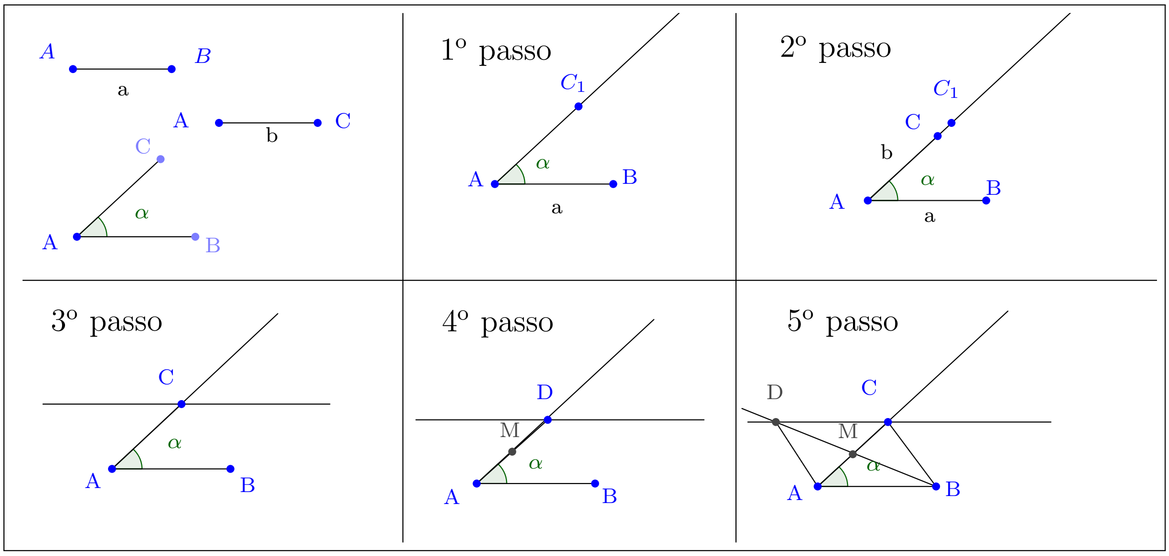
2º passo: No ponto A construa o ângulo $\widehat{BAC_1} = \alpha$. Na semirreta suporte $\overrightarrow{AC_1}$ trace o ponto C tal que $AC = b$.

3º passo: Construa a reta r paralela a AB passando por C.

4º passo: Construa o ponto médio M do segmento $\overline{AC}$.

5º passo: Construa a reta s que passa por B e M e na intersecção entre r e s marque o ponto D.

Figura 35: Construção de um paralelogramo dadas as medidas de um lado, de uma diagonal, e do ângulo entre eles.



Fonte: Autor, 2014.

Construa o paralelogramo ABCD tal que $AB = a$, $AC = b$ e $AD = c$.

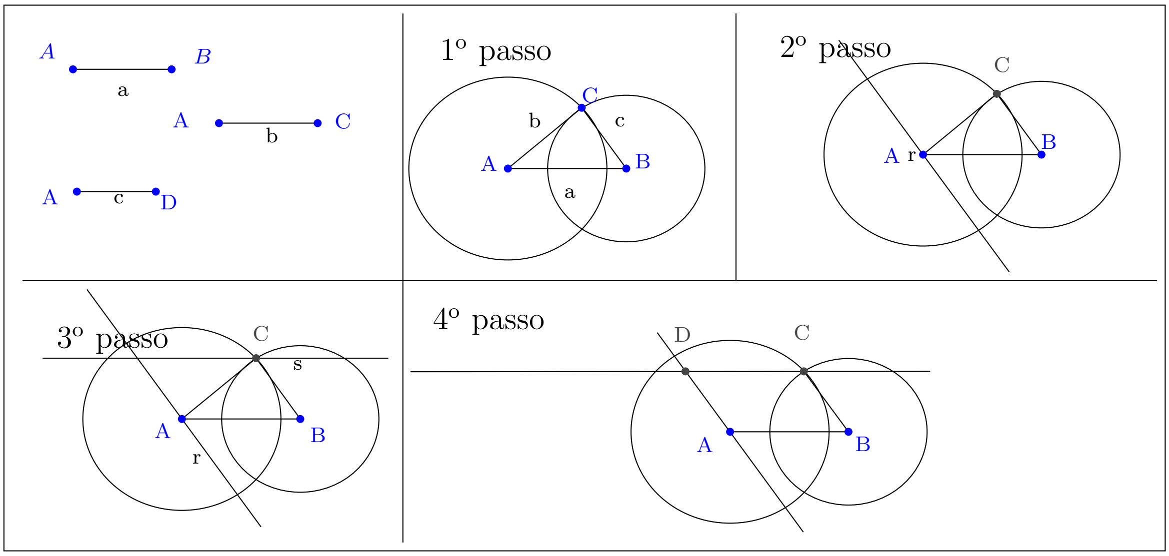
1º passo: Construa o triângulo ABC tal que $AB = a$, $BC = c$ e $AC = b$.

2º passo: No vértice A trace a reta r paralela a $\overline{BC}$.

3º passo: No vértice C trace a reta s paralela a $\overline{AB}$.

4º passo: Marque o ponto D de intersecção de r e s.

Figura 36: Construção de um paralelogramo dadas as medidas dos lados e de uma diagonal.



Fonte: Autor, 2014.

(ii) RETÂNGULOS

Construa o retângulo ABCD tal que $AB = a$ e $AD = b$.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$.

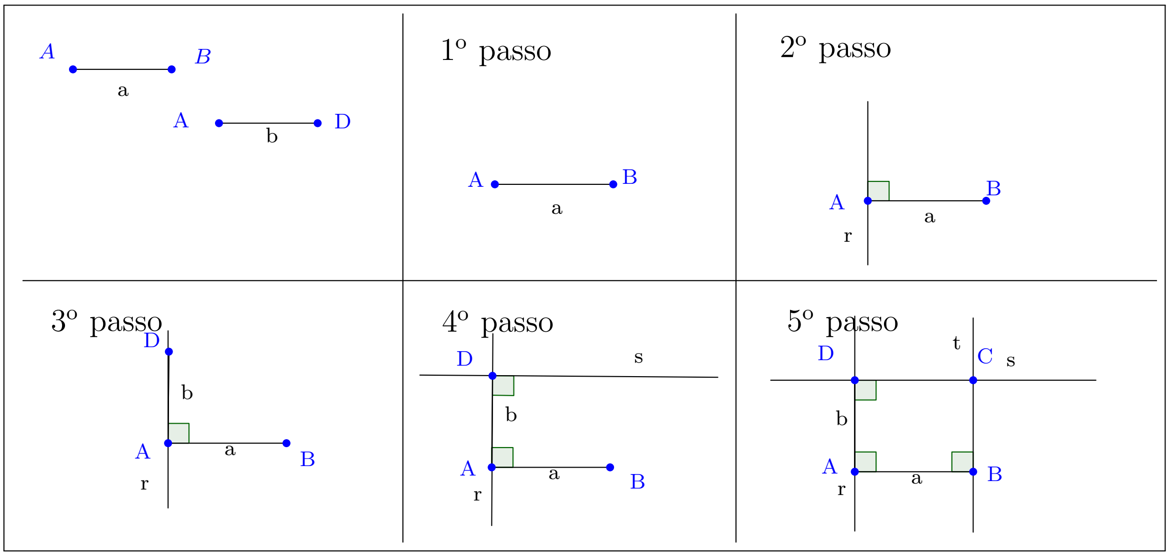
2º passo: Trace a reta r perpendicular a AB passando por A.

3º passo: Em r marque o ponto D tal que $AD = b$.

4º passo: Trace a reta s perpendicular a r passando por D.

5º passo: Construa a reta t perpendicular a s passando por B. Na intersecção entre s e t marque o ponto C.

Figura 37: Construção de um retângulo dadas as medidas dos lados.



Fonte: Autor, 2014.

(iii) LOSANGOS

Construa o losango ABCD cujas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem respectivamente a e b.

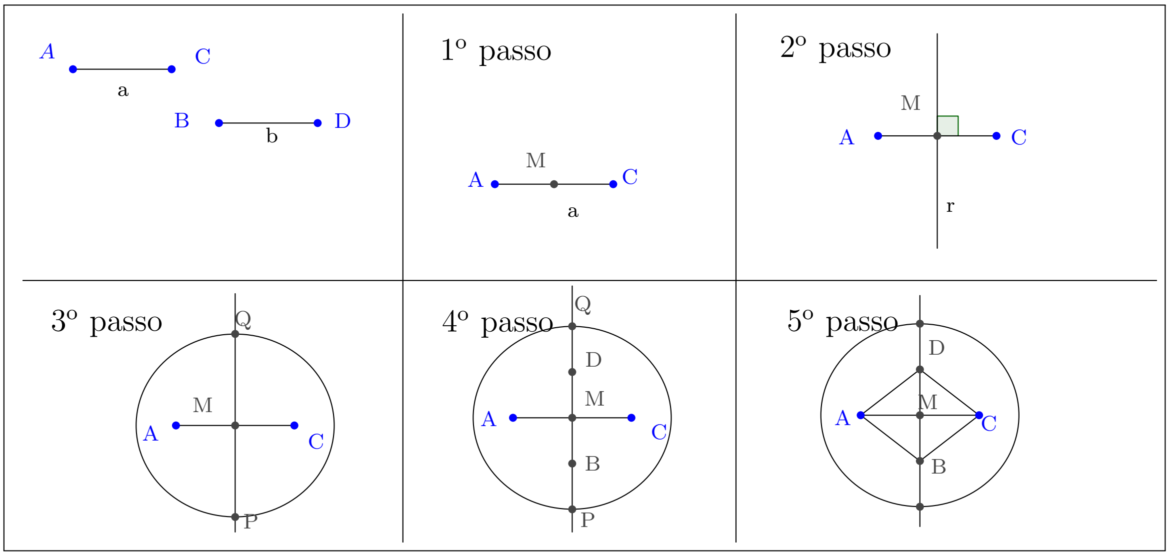
1º passo: Transporte o segmento $\overline{AC}$ e construa seu ponto médio M.

2º passo: Por M trace a reta r perpendicular a $\overline{AC}$.

3º passo: Com centro em M trace uma circunferência de raio b e marque suas intersecções P e Q com r.

4º passo: Construa os ponto médio B e D de $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ respectivamente.

Figura 38: Construção de um losango dadas as medidas das diagonais.



Fonte: Autor, 2014.

(iv) QUADRADOS

Construa o quadrado ABCD de lado medindo l.

1º passo: Transporte o segmento $\overline{AB}$ e com centro em A trace uma circunferência de raio l.

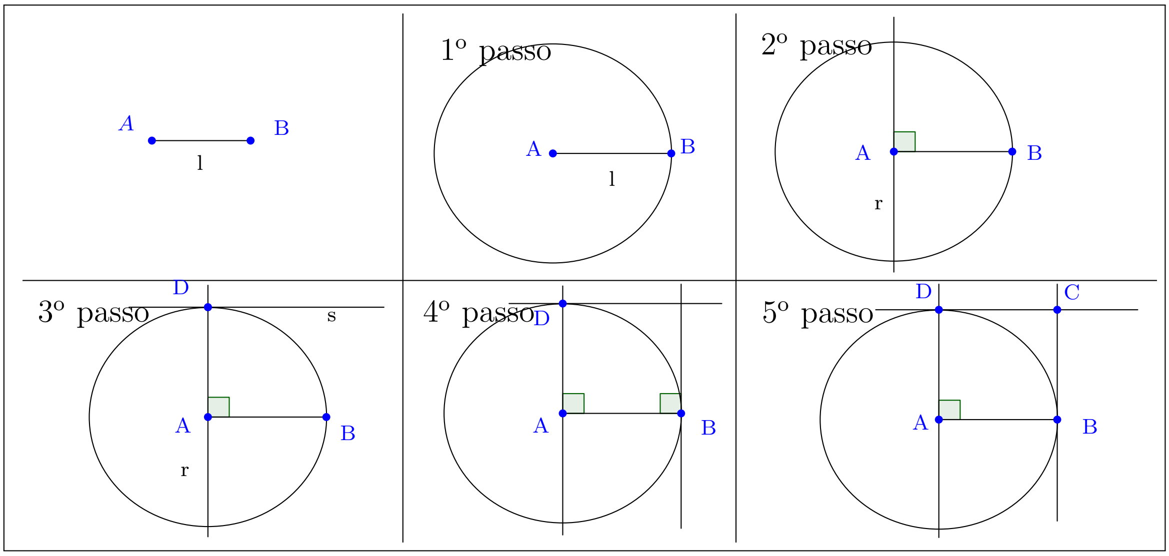
2º passo: Construa a reta r perpendicular a $\overline{AC}$ passando por A.

3º passo: Marque o ponto D de intersecção de r com a circunferência centrada em A e por D trace a reta s paralela a $\overline{AB}$.

4º passo: Agora construa a reta t perpendicular a $\overline{AC}$ passando por B.

5º passo: Marque o ponto C de intersecção de r e s.

Figura 39: Construção de um quadrado dada a medida do lado.



Fonte: Autor, 2014.

Com estas construções, o aluno irá apresentar os primeiros sinais de compreensão das relações que se estabelecem entre as propriedades das figuras. Servirão como uma ponte para a aquisição do conhecimento necessário ao entendimento de tais relações, pois, o próprio aluno passará a se questionar sobre alguns aspectos das figuras construídas, desde que as atividades propostas possam direcioná-lo a isto.

4.2 A IMPORTÂNCIA DO USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geométricas permitem que o aluno perceba a importância do rigor dentro da Geometria, auxiliam a compreender que figuras geométricas podem ser criadas por meio do uso de régua e compasso, e que as estratégias de resolução estão embasadas em suas propriedades. São fecundas quanto a possibilidade de estabelecer uma ligação entre situações concretas e as propriedades abstratas.

As construções nas quais especificamos como queremos a figura, as exigências que fazemos ao propor uma atividade, são as responsáveis por proporcionar desafios interessantes aos estudantes. Se pedirmos para que um aluno desenhe um triângulo, rapidamente o desenho estará pronto. Se pedirmos que o mesmo desenhe um triângulo com um lado medindo x provavelmente obteríamos uma produção em que recorreria ao uso de uma régua. Com um ângulo dado talvéz obteríamos algo semelhante com o uso do transferidor. No entanto, construções de triângulos em que são fornecidos mais de um elemento possuem certo teor de complexidade, por exemplo, se pedirmos para que ele desenhe um triângulo com dois ângulos específicos a probabilidade de obtermos uma resposta assertiva seria bem menor em relação às construções anteriores.

Em toda construção estão inclusas certas especificidades sob as quais ficam subentendidas as propriedades mais elementares das figuras. Por exemplo, pedir que se construa um triângulo com dois ângulos internos maiores que noventa graus depois de ensinar como construir triângulos com dois ângulos específicos é algo que pode gerar certas dúvidas e que se direcionado de forma correta pode auxiliar na dedução de uma propriedade fundamental de qualquer triângulo: em todo triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual a $180°$. Claramente, se o aluno conhecesse essa propriedade questionaria a construção, do contrário tentaria fazê-la e falharia. A falha o levaria a questionar e provavelmente deduzir se isto sempre é válido. É este tipo de questionamento que devemos buscar durante o ensino das construções.

Frisando a importância dos materiais manipuláveis, o uso de régua e compasso tem a finalidade de fornecer os meios para auxiliar os alunos, de forma objetiva no desenvolvimento de sua autonomia, durante o processo de construção do conhecimento. Essa autonomia tem uma importante função na vida escolar de qualquer pessoa porque nos leva a desenvolver estratégias próprias para resolução de problemas. As construções favorecem o surgimento de perguntas sobre as propriedades das figuras que levam à dedução de resultados básicos.

Dois fatores são fundamentais para que o trabalho educativo propicie esse tipo de situação: o direcionamento das atividades e o conhecimento de quais construções e quais resultados estão relacionados. É a isto que se destina o capítulo seguinte.

5 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E A APRENDIZAGEM DE RESULTADOS BÁSICOS

Tradicionalmente temos ensinado os resultados básicos no quarto ciclo do ensino fundamental considerando apenas a adaptação do conteúdo ao ano de escolaridade, mesmo sem levar em conta se nos anos anteriores o aluno desenvolveu ou não um conhecimento geométrico que lhe possibilite compreender resultados abstratos. Dessa forma o que se consegue muitas vezes é que eles memorizem tais resultados, o que não é suficiente para utilização destes ao serem colocados diante de uma situação inusitada.

Neste capítulo, trabalhamos com ênfase no uso das construções geométricas para a aprendizagem de propriedades de triângulos e paralelogramos, para a qual, estabelecemos dois momentos que consistem em deduzir e justificar resultados básicos. Especificamos quais construções e propriedades estão relacionadas e considerando que o uso efetivo deste recurso subentende o domínio das construções elementares expostas no capítulo anterior, mostramos que o trabalho didático deve, inicialmente, enfatizar a aprendizagem destas estratégias, e subsequentemente àquelas relacionadas aos resultados básicos.

5.1 A NECESSIDADE DE CONSTRUIR CONCEITOS E DEDUZIR PROPRIEDADES

Quando o aluno chega ao quarto ciclo do ensino fundamental é comum que ele detenha um conhecimento fragmentado de alguns conceitos geométricos. Normalmente o professor inicia o trabalho com Geometria nessa fase de escolaridade através do estudo de ângulos, retas e suas propriedades, para depois ensinar sobre as propriedades de triângulos e quadriláteros. Mas a abordagem conceitual é muitas vezes limitada, porque o estudante não tem a chance de explorar os conceitos por si mesmo e descobrir os resultados ligados a eles.

Como estabelece o Modelo Van Hiele, cada nível de compreensão tem um vocabulário próprio e uma forma de conceber as definições e propriedades, então o trabalho com qualquer conteúdo deve ter início com a análise dos níveis apresentados pelos alunos, pois as informações obtidas prescindirão à elaboração das estratégias didáticas que serão utilizadas. Além isso, se estas estratégias não estiverem adequadas ao nível de compreensão, provavelmente não terão os resultados desejados.

É nesse ponto que se destaca uma das vantagens da utilização das construções geométricas. Se quisermos ensinar conceitos e mostrar as relações existentes entre as várias propriedades das figuras planas, nada melhor do que fazê-lo através de estratégias com características acessíveis a qualquer nível de compreensão. As construções por sua simplicidade e objetividade se constituem como uma das ferramentas adequadas ao ensino desta disciplina.

Podem ser aplicadas até diante da diversidade do conhecimento apresentado pela turma. Mesmo que os alunos mostrem compreensão condizente com os níveis mais básicos da Teoria, o trabalho com régua e compasso pode ter a eficiência desejada, por possibilitar a compreensão de conceitos e propriedades de forma prática.

Expor para um aluno, por exemplo, que "triângulos isósceles são aqueles que possuem dois lados congruentes" sem oportunizar-lhe a construção desta figura não o fará assimilar esta definição. Os conceitos precisam ser construídos. Nessa fase de escolaridade, a pessoa precisa criar em sua mente as ligações necessárias entre o conceito e a figura.

Problema maior é tentar relacionar o fato de um triângulo ser isósceles com a congruência dos ângulos da base. O que muitas vezes é feito de maneira apenas expositiva. Dizermos que "um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois ângulos congruentes", não implica que entendamos e saibamos aplicar este resultado.

Os alunos apresentarão muita dificuldade em compreender e aplicar teoremas e proposições se estes forem expostos e analisados do modo matematicamente formal, porque o nível de compreensão dos estudantes ainda não é adequado ao estudo axiomático. Então, é viável buscarmos que eles adquiram o conhecimento de forma prática. Devemos explorar o conceito propondo construções referentes a ele para que, a partir destas, o aluno possa analisar por si mesmo as propriedades ligadas àquela definição.

Como especificado no capítulo 1, as figuras geométricas são conceituadas com base em suas características e o conhecimento adequado destas definições implicará na aceitação de que aquele objeto geométrico goza de determinadas propriedades.

Entre os conceitos geométricos que são estudados no quarto ciclo do ensino fundamental, o conceito de congruência, é foco de uma problemática abrangente, pois as dificuldades de nossos alunos em relação ao seu ensino vão além do entendimento dos casos de congruência de triângulos, se estende à própria concepção de congruência. Normalmente, os casos de congruência de triângulos constituem os primeiros contatos de nossos alunos com o conceito de congruência e argumentos necessários à demonstração de determinadas propriedades das figuras planas. Enquanto os próprios PCN sugerem que a ideia de congruência seja construída a partir dos ciclos iniciais do ensino fundamental por meio de transformações no plano, na prática, o aluno passa a trabalhar esse conceito no ciclo final do ensino fundamental. Dessa forma é comum ouvirmos de professores que ensinar congruência é complicado e que mais complicado ainda é ensinar a usar os casos de congruência para justificar algumas propriedades das figuras planas.

As explicações para esse fato se baseiam na Teoria Van Hiele. Como vimos, a maioria de nossos alunos concluem o ciclo final do ensino fundamental demonstrando compreensão de níveis 0 e 1. Nestes níveis não fazem correlação de propriedades, não são capazes de acompanhar ou realizar demonstrações. Logo, fica difícil ensinar um conteúdo cuja compreensão demanda o domínio de determinados resultados sobre as propriedades das figuras.

Portanto, as construções geométricas se mostram extremamente necessárias já que, sabemos que ao aluno é preciso concluir o ensino fundamental sendo capaz de aplicar e justificar os resultados básicos. Para isto, é preciso estabelecer uma ligação entre o conhecimento prático que apresenta e o abstrato adequado ao concluinte. É durante o processo de dedução que se estabelecerá esta ligação.

A seguir mostramos uma série de construções de triângulos e paralelogramos que evidenciam o uso de suas propriedades. Cada passo está devidamente especificado, mas, não devemos tomá-los como formas absolutas de realizá-las. Didaticamente, devemos seguir a ideia da utilização de problemas como ponto de partida para a dedução das propriedades.

As construções geométricas realizadas têm a finalidade de levar os alunos a descobrirem regularidades. Serão vistas como uma ferramenta à dedução dos resultados básicos. “O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades” (BRASIL, 1998, p. 86).

Para deduzir propriedades devemos fazer uso de duas estratégias: a primeira leva o aluno a buscar explicações para algumas construções que não conseguira realizar, ou seja, o problema abordado é parte da própria construção, e a segunda a comparar segmentos e ângulos para deduzir resultados, neste caso, a construção é parte da solução do problema.

5.2 CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Para o trabalho com as construções geométricas, o conhecimento das estratégias básicas de construção é indispensável. O aluno precisa ter um ponto de partida para tentar construir as figuras. Então o passo que se segue à familiarização com os materiais que serão utilizados e como devem ser utilizados é o trabalho com algumas construções elementares. Sendo fundamental, nesse momento, a realização da construção de retas paralelas e perpendiculares e o transporte de ângulos e segmentos, além de construções de pontos médios e bissetrizes, afinal são estes elementos que utilizamos para construir outras figuras.

Cada estudante, no quarto ciclo, possui uma concepção acerca das definições de tais figuras. As primeiras construções devem levá-los a produzirem ideias mais precisas acerca dos conceitos. Sugerimos que além de trabalhar as construções descritas acima, o professor se dedique a exploração de atividades com base nas definições utilizadas, não é necessário elaborar situações problemas insolúveis pelo atual nível de compreensão apresentado pela turma.

Nesta etapa inicial, o professor deve questionar seus alunos, motivá-los a buscar explicações direcionando-os à realização de produções cada vez mais efetivas.

Os alunos também devem ser levados a construir triângulos (polígonos com três lados) e quadriláteros (polígonos com quatro lados) e depois paralelogramos (quadriláteros com lados opostos paralelos). Construções que sucedem as produções acima e encerram a fase inicial do trabalho.

Construções de triângulos e paralelogramos seguem um padrão que depende dos elementos que são fornecidos e das propriedades destas figuras. É este pensamento que deve nortear as estratégias de resolução das situações problemas em sala de aula.

5.2.1 CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS A TRIÂNGULOS

Por definição triângulos são polígonos que possuem três lados[33]. As construções necessárias a compreensão deste conceito decorrem da exposição das medidas dos lados. Fornecendo medidas possíveis à existência desta figura o professor pode pedir que seus alunos produzam triângulos com os instrumentos apresentados.

[33] Veja Apêndice A

Os conceitos que decorrem desta definição como triângulos isósceles, triângulos equiláteros e triângulos retângulos, devem ter suas propriedades específicas destacadas durante a construção.

É nesse momento que também devemos construir os conceitos referentes aos segmentos notáveis. Aproveitando que os alunos já estudaram construções de bissetrizes de ângulos, pontos médios de segmentos e de retas perpendiculares, podemos introduzir as construções de bissetrizes alturas e medianas em triângulos.

Lembremos que nestes primeiros contatos não devemos apresentar situações problemas porque o aluno não tem o conhecimento prévio necessário. A motivação ficará por conta do trabalho com os instrumentos e das produções feitas.

Como o objetivo é a construção de definições, devemos atentar para as produções dos conceitos e nos certificar de que os alunos comecem a observar outros elementos pertencentes às figuras produzidas.

5.2.2 CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS A PARALELOGRAMOS

Quanto aos paralelogramos, tendo em vista a necessidade de tratar dos conceitos com base no artifício da inclusão de classes, num primeiro momento, as construções iniciais devem originar o conceito de quadrilátero, não necessariamente o de paralelogramo. E este será sucessivamente desenvolvido com base na noção de quadrilátero.

Valendo-se da inclusão de classes o professor trabalhará os conceitos de quadrilátero, paralelogramo, retângulos, losangos e quadrados, sempre explorando construções possíveis e utilizando as propriedades explicitas do grupo anterior com exceção para os retângulos e losangos, pois ambos precisam ser tratados como parte do conjunto dos paralelogramos.

É necessário trabalhar a construção de quadrados a partir dos conceitos de retângulo e losango. Construindo losangos que possuem ângulos retos e retângulos que possuem lados de medidas iguais.

As construções que dependem do uso das propriedades implícitas devem ser utilizadas quando o aluno for capaz de realizar as construções elementares.

5.3 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E DEDUÇÃO DE PROPRIEDADES

A seguir relacionamos alguns tipos de construções com os resultados básicos que podem ser deduzidos a partir de seu uso. Por acreditarmos que é necessário também apresentamos sugestões de atividades baseadas no trabalho de campo. Em alguns casos, a realização de uma construção deve ser sucedida por algumas observações, as quais devem ser sugeridas pelo professor.

É a partir deste ponto que as construções precisam ser apresentadas de forma desafiadora.

5.3.1 DEDUÇÃO DE PROPRIEDADES DE TRIÂNGULOS

Em qualquer triângulo a medida de um dos lados é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois.

Construções de triângulos que têm por base as medidas de seus lados auxiliarão no entendimento da desigualdade triangular.

ATIVIDADE: Construa o triângulo ABC tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ com:(i) $a + b > c$; (ii) $a + b < c$; (iii) $a + b = c$.

Estas duas últimas construções levarão os alunos a se questionarem sobre por que não estão conseguindo construir o triângulo. Estas indagações serão responsáveis pela dedução do resultado acima. Os questionamentos irão surgir naturalmente com as experimentações. A curiosidade os levará a buscar explicações sobre porque conseguiram construir alguns triângulos e outros não.

Ao levantarem hipóteses, cabe ao professor direcioná-los à resposta adequada dando exemplos que contradigam as hipóteses não cabíveis. Podem surgir, por exemplo, hipóteses como "a construção é possível apenas quando os lados são diferentes" uma afirmação falsa que pode ser verificada com um simples exemplo.

Em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual a $180°$.

Construções de triângulos dadas as medidas dos ângulos podem levar os alunos a deduzirem o teorema da soma dos ângulos internos.

ATIVIDADE: Construa um triângulo ABC, tal que $C\hat{A}B = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$ e $B\hat{C}A = \gamma$ quando: (i) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; (ii) $\alpha + \beta + \gamma < 180°$; (iii) $\alpha + \beta + \gamma > 180°$

Claramente as possibilidades para esta construção são inúmeras. Infinitos triângulos podem ser construídos com ângulos possuindo a mesma medida.

Mais uma vez os alunos questionarão sobre por que não conseguem construir certos triângulos e passarão a analisar o que as medidas desses ângulos têm em comum.

Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

ATIVIDADE: Construa um triangulo ABC tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e compare as medidas dos ângulos.

ATIVIDADE: Construa um triângulos isósceles ABC tal que $AB = AC$, mas $A\hat{B}C \neq A\hat{C}B$.

O primeiro tipo de construção tende a levar o aluno a concluir o resultado desejado enquanto a segunda recai num problema sem solução que dará origem a perguntas que o farão comprovar que é impossível construir um triângulo isósceles cujos ângulos da base são diferentes.

Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.

ATIVIDADE: Construa um triângulo ABC tal que $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$, exponha como se classifica e compare as medidas dos ângulos.

ATIVIDADE: Construa um triângulo equilátero ABC tal que $C\hat{A}B = \alpha$ e $A\hat{B}C = \beta$, com $\alpha > \beta$.

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

ATIVIDADE: Construa um triangulo ABC tal que $A\hat{B}C = B\hat{C}A$ e exponha as medidas dos lados do triângulo.

ATIVIDADE: Construa um triangulo ABC tal que $A\hat{B}C = B\hat{C}A$, mas AB é diferente de AC.

Qualquer triângulo que possui os três ângulos internos congruentes é equilátero.

ATIVIDADE: Construa um triângulo ABC tal que $C\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}A$ e exponha as medidas dos lados.

ATIVIDADE: Construa um triângulo ABC tal que $AB = BC = a$ e $AC = b$, com $a > b$ e $C\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}A$.

ATIVIDADE: Construa um triângulo ABC tal que $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, com $a > b > c$ e $C\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}A$.

Em um triângulo isósceles a mediana relativa a base é também bissetriz e altura.

ATIVIDADE: Construa um triângulo qualquer ABC e a partir do vértice A trace a mediana, a bissetriz e a altura. Depois exponha os segmentos que as representam.

ATIVIDADE: Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e trace a mediana, a bissetriz e a altura em relação ao vértice A. Depois exponha os segmentos que as representam.

Antes de construir os segmentos notáveis num mesmo triângulo podemos explorá-los individualmente observando que estas construções dependem das noções de perpendicularidade, ponto médio de um segmento e bissetriz de um ângulo[34].

CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Antes do trabalho com os casos de congruência de triângulos o professor deve ensinar as transformações elementares para significar o conceito de congruência e ter artifícios para dar sentido aos axiomas de congruência apresentados no capítulo 1.

Quando voltadas ao estudo dos casos de congruência de triângulos, as atividades deverão levar os alunos a observar que ao fornecer determinados dados para a construção, sempre será construído o mesmo triângulo, ou seja, a congruência pode ser comprovada a partir do fornecimento de alguns dados, então não precisamos verificar a igualdade entre as medidas de todos os ângulos e lados dos triângulos. Por exemplo, construir triângulos,

[34]As construçõs destes segmentos foram omitidas porque são bastante elementares, estas podem ser observadas no Apêndice C.

dadas às medidas de dois lados e do ângulo entre eles (LAL); construir triângulos, dadas às medidas dos lados (LLL), construir triângulos dadas as medidas de dois ângulos do lado entre eles (ALA), construir triângulos dadas as medidas de um lado do ângulo adjacente a esse lado e do ângulo oposto a este lado (LAA), construir triângulos retângulos dadas as medidas do cateto e da hipotenusa (CA) que é uma restrição do caso LAA são construções necessárias à compreensão dos axiomas.

Nesta fase, as atividades devem consistir em realizar a construção e sobrepor os triângulos construídos. Quando perceberem que a congruência da figura é garantida por três elementos, os alunos começarão a pensar que quaisquer três elementos fornecidos são suficientes. Hipóteses que podem ser facilmente desconstruídas a partir da sobreposição dos triângulos construídos.

Uma das perguntas que farão parte das aulas sobre congruência é por que AAA não é um caso de congruência? Pedir que os alunos construam triângulos dadas as medidas dos ângulos (agora explorando construções possíveis) e depois tentar sobrepor figuras feitas por diferentes alunos é uma atividade útil nessa situação. Mostramos assim que é possível construir triângulos com as mesmas medidas de ângulo, mas que não ficam sobrepostos.

Dúvidas também aparecerão sobre um possível caso LLA, neste caso devemos levá-los a entender que é possível variar o terceiro lado do triângulo mesmo quando mantemos invariável a medida de dois lados consecutivos e de um ângulo não comum a ambos os lados. Para isto é necessário que o professor peça que construam triângulos dadas as medidas indicadas e depois tentar sobrepor os triângulos construídos.

5.3.2 DEDUÇÃO DE PROPRIEDADES DE PARALELOGRAMOS

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os lados opostos paralelos[35]. Com esta definição em mente é possível deduzir as demais propriedades destas figuras planas durante a realização de construções geométricas.

Em qualquer paralelogramo os lados opostos são congruentes.

ATIVIDADE: Construa um paralelogramo qualquer $ABCD$ e exponha as medidas dos lados.

[35] Veja Apêndice A.

Se um quadrilátero possui os lados opostos congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

ATIVIDADE: Construa um quadrilátero qualquer $ABCD$ tal que $AB = CD$ e $BC = DA$.

As diagonais de qualquer paralelogramo se intersectam em seus respectivos pontos médios.

ATIVIDADE: Construa um paralelogramo $ABCD$ e construa os pontos médios de suas diagonais.

ATIVIDADE: Construa um paralelogramo $ABCD$ tal que $AB = a$ e $BC = b$ e construa os pontos médios de suas diagonais.

ATIVIDADE: Construa o paralelogramo $ABCD$ tal que $AC = c$ e $BD = d$ são suas diagonais.

Em todo retângulo, as diagonais são congruentes.

ATIVIDADE: Construa um retângulo qualquer $ABCD$ e exponha as medidas das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

ATIVIDADE: Construa o retângulo $ABCD$ tal que $AC = k$, onde $\overline{AC}$ é uma diagonal de $ABCD$.

Em todo losango, as diagonais determinam as bissetrizes dos ângulos internos.

ATIVIDADE: Construa o losango $ABCD$ cujos lados medem l, trace as diagonais AC e BD e exponha as medidas dos ângulos $\widehat{ACD}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BDA}$ e $\widehat{BDC}$.

Em todo losango, as diagonais são perpendiculares.

ATIVIDADE: Construa o losango $ABCD$ trace as diagonais AC e BD, marque o ponto E de intersecção entre $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e depois exponha os valores dos ângulos $\widehat{AED}$, $\widehat{CED}$, $\widehat{AEB}$ e $\widehat{CEB}$.

ATIVIDADE: Construa o losango $ABCD$ dado que $AC = m$ e $BD = n$.

Em todo retângulo os pontos médios dos lados determinam um losango.

ATIVIDADE: Construa um retângulo qualquer $ABCD$, determine os pontos E, F, G, H tais que E é ponto médio de $\overline{AB}$, F é ponto médio de $\overline{BC}$, G é ponto médio de $\overline{CD}$ e H é ponto médio de $\overline{DA}$. Depois exponha as medidas dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HE}$.

Para as construções de losangos a partir das medidas das diagonais utilizamos dois resultados: uma propriedade geral de qualquer paralelogramo (as diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios) e uma propriedade específica dos losangos (as diagonais são perpendiculares). Dessa forma como a questão da já foi trabalhada a inclusão de classes durante a construção do conceito de losango, a percepção de que os losangos possuem essa propriedade geral dos paralelogramos auxiliará na compressnsão desta construção.

Voltamos a frisar que, antes de iniciar a dedução de propriedades, o aluno precisará dominar as construções elementares. Saber como construir triângulos, paralelogramos, pontos médios de segmentos, retas paralelas e retas perpendiculares bem como transportar ângulos e segmentos, mesmo que não saibam justificar a validade dos procedimentos utilizados.

5.4 CONSTRUÇÃO DE ESTRATÉGIAS PARA JUSTIFICAR PROPRIEDADES

Refletindo sobre a importância das comprovações dos resultados estudados na Geometria Euclidiana Plana, mostramos a necessidade de fornecer aos alunos meios de deduzir as propriedades das figuras, para que as mesmas se tornem parte do saber construído no quarto ciclo. Cabe nos questionarmos sobre a necessidade de demonstrarmos estes resultados ainda no nível fundamental de ensino.

Vemos alguns problemas quando pensamos nos objetivos que uma demonstração possui. O rigor matemático exige que os resultados utilizados tenham uma demonstração aceitável. No entanto, no processo de ensino aprendizagem no quarto ciclo do ensino fundamental, os PCN esclarecem que:

> Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos. (BRASIL, 1998, p. 87).

A comprovação das propriedades das figuras planas estudadas tem o papel de mostrar para o aluno que o conhecimento matemático não provém de algo sem sentido e que tão pouco é algo pronto que necessita ser copiado e repetido, além de dinamizar a aprendizagem e possibilitar a compreensão integral dos conceitos, o que inclui o entendimento de que as propriedades de uma figura estão relacionadas.

Numa demonstração formal, utilizamos sequências lógicas contendo afirmações comprovadas ou aceitas como verdade para validar determinado resultado. Nas comprovações, para validar os resultados, utilizamos a observação e os argumentos provenientes do uso das construções geométricas.

Como enfatizamos, as justificativas abstratas não são inteiramente entendidas no ensino fundamental, porque muitas vezes, o aluno não se encontra no nível de compreensão adequado. Oportunizando a comprovação dos resultados de forma prática estamos possibilitando a interação que levará à evolução necessária ao entendimento dos artifícios utilizados nas demonstrações. Uma pessoa que utilizou meios materiais para verificar determinada propriedade irá aceitar com maior facilidade as explicações atribuídas àquele fato.

Todo o trabalho realizado com as construções deve culminar com a plena utilização dos resultados básicos. Note que estamos considerando satisfatório aos alunos no final do nono ano conhecer as proposições e teoremas de modo que consigam aplicá-los com desenvoltura. Assim de acordo com a Teoria Van Hiele, isso os colocaria no terceiro nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Jamais descartaremos a importância das demonstrações, mas defendemos que isto deve ser feito de maneira adequada e no momento em que o nível de compreensão da turma permitir que seja feito. Para realizar demonstrações é necessário pensar axiomaticamente, você usa axiomas, proposições e teoremas para demonstrar proposições e teoremas.

A plena compreensão de um teorema ou proposição se dá a partir do momento em que se conhecem os artifícios empregados em suas demonstrações o que ocorre quando somos capazes de desenvolver uma justificativa própria para o resultado em questão.

5.4.1 ISOMETRIAS E JUSTIFICATIVAS DE PROPRIEDADES

Além das contribuições para a construção do conceito de congruência as transformações isométricas são importantes quando tratamos da elaboração de justificativas para as propriedades de triângulos e paralelogramos.

Visamos que os alunos evoluam ao ponto de ficarem aptos a utilizar os casos de congruência de triângulos para justificar as propriedades dos triângulos e paralelogramos estudados, por isso, precisam conhecer e saber utilizar as isometrias, já que o manejo destas fornecerá informações acerca do caso de congruência adequado à justificativa.

Explicar porque as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio é fácil quando possuímos conhecimento das aplicações dos casos de congruência de triângulos. Mas estas aplicações não são facilmente enxergadas caso não observemos que podemos decompor um paralelogramo em triângulos congruentes. Analogamente, os demais resultados básicos podem ser explicados com base na decomposição das figuras em triângulos congruentes.

Devemos começar a utilizar situações problemas que levem os alunos a obterem triângulos congruentes a partir das figuras estudadas e especificar os casos de congruência. Por exemplo, para mostrar que as diagonais de um retângulo são congruentes necessitamos reconhecer no retângulo, elementos que determinam a congruência de triângulos. Sabemos que para cada resultado básico estudado existe um caso de congruência de triângulos que o validará.

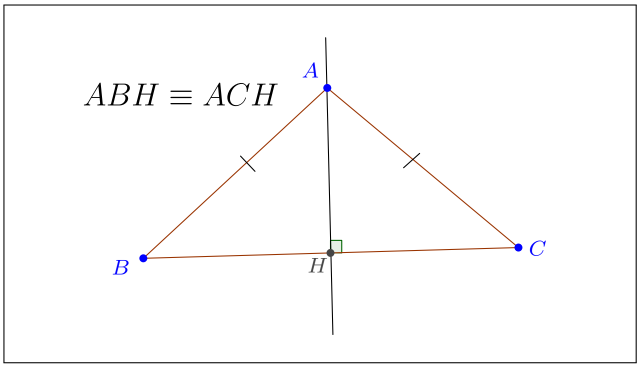
A REFLEXÃO DE TRIÂNGULOS

As simetrias são a parte das transformações isométricas que às vezes aparecem em tarefas elementares no ensino fundamental. Elas representam, na maioria das vezes, toda a experiência que os alunos tiveram com as transformações no plano.

Pelas demonstrações que enfatizam o uso dos casos de congruência de triângulos na argumentação, vemos que as simetrias axiais são extremamente importantes para termos uma percepção de que caso de congruência é mais adequado a determinada situação.

Seja ABC um triângulo isóceles de base $\overline{BC}$. Tracemos a reta r perpendicular a base passando pelo vértice A. Notando que este é o único eixo de simetria desta figura é possível observar que a reta r divide o triângulo em dois triângulos congruentes. Seja H o ponto de intersecção de r com $\overline{BC}$. Fazendo uma reflexão do triângulo ABH em relação a reta r obtemos o triângulos ACH, assim, constatamos que os triângulos ABH e ACH são congruentes.

Figura 40: Reflexão do triângulo ABH em relação à reta r.



Fonte: Autor, 2014.

Em sala de aula, o professor pode utilizar várias atividades que levem os alunos a lidar com este tipo de situação. Traçar eixos de simetria e observar as figuras que surgem. Rotacionar, refletir e transladar as figuras obtidas para comprovar a congruência deve ser o foco das primeiras atividades após as construções de conceitos.

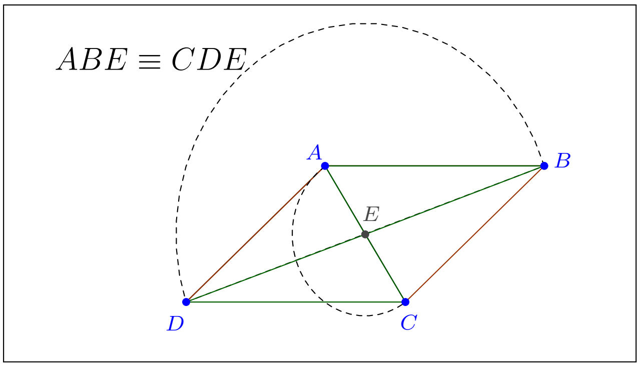
A ROTAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Esse recurso é bastante útil para explicar os resultados básicos referentes a paralelogramos. Por exemplo, para mostrar porque as diagonais de qualquer paralelogramo se cortam em seus respectivos pontos médios, podemos dividir o paralelogramo em triângulos (conforme a Figura 41) e mostrar, a partir da realização de rotações em torno de um de seus vértices, que estes são congruentes[36].

Seja ABCD um paralelogramo e E o ponto de encontro das suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Observando que podemos obter os triângulos CED por rotação do triângulo AEB em torno do vértice E, podemos concluir que estes triângulos são congruentes.

[36]Enfatizamos que a eficácia deste tipo de atividade está relacionada à compreensão de que figuras congruentes podem ser sobrepostas através de isometrias. Logo, antes de realizá-las é fundamental que o professor tenha trabalhado o conceito de congruência de triângulos a partir das transformações isométricas

Figura 41: Rotação do triângulo ABE em torno do vértice E.



Fonte: Autor, 2014.

Nesta etapa em que se visa a elaboração de justificativas para os resultados básicos com base na ação dos alunos, o uso de isometrias é uma ferramenta indispensável.

Mesmo utilizando as construções geométricas para construir conceitos e deduzir propriedades, a justificativa carece de outros artifícios que são alheios à elaboração de construções com régua e compasso. Mesmo assim, é através do trabalho com estes instrumentos que será fornecido todo o conhecimento necessário à compreensão e aplicação das propriedades de triângulos e paralelogramos. As construções geométricas auxiliarão na evolução dos níveis de raciocínio ao ponto de desenvolver no aluno as estruturas básicas à aceitação de demonstrações.

Após as experiências com a produção de figuras planas, os alunos estarão aptos a entender os processos utilizados durante as demonstrações porque conhecerão as propriedades num nível que possibilita esse tipo de abstração. No entanto, não estarão os mesmos aptos para realizá-las, ainda é preciso desenvolver um trabalho voltado ao entendimento de que os casos de congruência servem como justificativas aos resultados básicos estudados. Esse trabalho consiste em observar que podemos tomar um triângulo ou um paralelogramo que goze de determinada propriedade e os decompor em triângulos congruentes.

Por sua vez, essa decomposição fornecerá as informações necessárias à elaboração de justificativas para os resultados básicos.

6 CONCLUSÕES

Com este trabalho, buscamos levar informações que auxiliem na realização de uma prática de ensino efetiva, capaz de contribuir para a evolução do conhecimento discente quanto aos seus níveis de compreensão dos conceitos relacionados a triângulos e paralelogramos. Lavá-los a utilizar as propriedades destas figuras e justificá-las com base nos casos de congruência de triângulos.

A efetividade do uso das construções geométricas com a temática aqui abordada foi comprovada durante a realização de um trabalho de campo realizado na Escola Monsenhor Alfredo Pinto Dâmaso em Rainha Isabel, Bom Conselho - PE, cujos resultados serão expostos em seguida.

Inicialmente realizamos uma pesquisa, na qual foram utilizadas perguntas[37] similares às contidas no livro didático adotado na escola no ano de 2013, com exceção de algumas que introduzimos para facilitar a quantificação dos dados. Ao todo foram 22 questões respondidas em duas etapas nos dias 15 e 16 do mês de Dezembro de 2013; e uma entrevista com 12 perguntas no dia 20 do mesmo mês. Esse trabalho inicial possibilitou a obtenção das informações explicitadas nos capítulos anteriores.

Após a pesquisa, e tendo em vista a fragilidade dos conhecimentos apresentados, os alunos foram convidados a participar de uma experiência no mês de fevereiro de 2014. Dos 64 alunos que participaram da pesquisa apenas 30 aceitaram prosseguir.

Do dia 03 ao dia 07 trabalhamos construções elementares utilizando régua e compasso. Os primeiros passos consistiram em apresentar a proposta e os instrumentos de trabalho e proporcionar os contatos iniciais com as construções geométricas. Os alunos estudaram o transporte a adição de ângulos e segmentos, a construção de retas paralelas e retas perpendiculares, construções de pontos médios e mediatrizes de segmentos, bissetrizes de ângulos, e construções de triângulos e paralelogramos com ênfase nas definições do Apêndice A.

Entre eles permeava a curiosidade, queriam saber como utilizar a régua e o compasso, pois até então os tinha utilizado apenas para desenhar linhas e circunferências, por vezes substituíam o compasso por qualquer outro objeto circular por uma questão de praticidade. Grande foi a "decepção" deles quando esclarecemos que este era o uso que

[37]Veja Apêndice E.

daríamos a tais instrumentos, que utilizaríamos a régua para traçar retas e segmentos e o compasso para construir circunferências e transportar segmentos. Mas sua expressão retornou à curiosidade quando realizamos uma construção com estes instrumentos. Então esclarecemos que é justamente este um dos motivos para utilizá-los: são simples e podemos produzir grandes resultados.

Como tratamos anteriormente, as primeiras construções têm o objetivo de munir o aluno das informações básicas para a realização de construções mais delicadas, buscamos que eles entendessem isto e conseguissem elaborá-las com destreza. Portanto, tudo estava focado na ação do estudante, até os aspectos mais elementares como a transposição de segmentos foram postos como um problema a ser resolvido por eles. As aulas eram guiadas mediante perguntas e sempre buscávamos as justificativas para as produções discentes.

Sabemos que precisamos partir da concepção mais elementar sobre a figura e ir sofisticando-a, mas sempre com o problema como foco. Propor construções que gerem dúvidas que façam o aluno questionar-se e questionar o professor. Possibilitar a troca de informações entre eles propondo atividades coletivas.

Do dia 10 ao dia 21 trabalhamos a construção dos conceitos relacionados a triângulos e paralelogramos, o estudo das propriedades explicitadas no capítulo 1, utilizamos as construções como artifício à dedução.

Já havíamos estudado os conceitos de triângulos e paralelogramos sem enfatizar suas propriedades. Agora passávamos a focar em determinado resultado básico e explorar as construções para deduzi-lo.

Como sabemos, pelos dados expostos anteriormente, a concepção acerca dos conceitos de medianas, bissetrizes e alturas eram extremamente elementares, mas com uma associação simples entre estes conceitos e aqueles vistos na semana anterior logo chegamos a elaboração de definições plausíveis.

A comprovação é um artifício fundamental à aceitação das propriedades. Com base nisto, sempre que um resultado era questionado buscávamos comprovar (no sentido exposto no capítulo 1) que ele era válido ou que não era. Isso garantia a fundamentação básica necessária àquela propriedade.

Especialmente no estudo dos casos de congruência de triângulos, surgiram várias situações que mostram a importância da comprovação. Os alunos lançavam teorias acerca do que seria um caso de congruência. Uma das que se destacavam tratava sobre um possível caso AAA, pois, a distinção entre o que é necessário e o que é suficiente para a aceitação de um resultado ainda estava em processo de construção.

Esses momentos são extremamente importantes para a aprendizagem porque é quando aparece a dúvida que nos tornamos aptos a progredir nos níveis de raciocínio geométrico. E uma simples comprovação esclarece os fatos. Nestas situações adotamos a estratégia de comprovar por meio de comparações. Bastava tomar as construções feitas por diferentes alunos e, como a ideia que produzimos sobre congruência apontava para a construção da mesma figura, era fácil observar e aceitar que nem sempre se produz o mesmo triângulo quando fornecemos apenas os valores dos ângulos.

Como não iríamos nos limitar a deduzir e comprovar resultados, como o objetivo era auxiliar os alunos a utilizarem os casos de congruência de triângulos para justificá-los, introduzimos as isometrias no desenvolvimento do nosso trabalho acreditando que seu estudo ajudaria a entender como fazer as justificativas. Então, do dia 24 ao dia 28, com este objetivo, estudamos a congruência de triângulos e formas de decompor triângulos e paralelogramos em triângulos congruentes.

Inicialmente os alunos foram levados a compreender rotações translações e reflexões de triângulos. Em seguida encaminhados, novamente, pois, já havíamos trabalhado nas semanas anteriores, ao estudo dos casos de congruência através das construções geométricas e da decomposição supracitada.

Chegamos assim ao ápice do trabalho que era justificar os resultados. Nesse momento, o aluno deveria, além de conhecer o resultado, observar a figura para encontrar um caso de congruência que o justificasse. Esta certamente foi a mais desafiadora de todas as experiências realizadas até o momento. A eficácia de sua realização seria um indício de que os objetivos tinham sido alcançados, que os estudantes haviam desenvolvido habilidades intermediárias entre o terceiro e o quarto nível de raciocínio geométrico da Teoria Van Hiele.

Para corroborar a eficiência do trabalho, no dia 14 de junho de 2014 realizamos uma nova avaliação[38] da qual provém os dados expostos na Tabela 5.

A realização do trabalho de campo ajudou os alunos a desenvolverem o conheci-

[38] Veja Apêndice E.

Tabela 5: Quantidade de alunos por níveis de compreensão dos conceitos após o trabalho

Conceito	Nível 2	Nível 1	Nível 0
TRIÂNGULO	28	2	0
TRIÂNGULO EQUILÁTERO	27	3	0
TRIÂNGULO ISÓSCELES	28	2	0
TRIÂNGULO RETÂNGULO	28	2	0
BISSETRIZ	29	1	0
ALTURA	30	0	0
MEDIANA	28	2	0
PARALELOGRAMO	28	2	0
RETÂNGULO	30	0	0
LOSANGO	24	6	0
QUADRADO	28	2	0

Fonte: Autor, 2014.

mento necessário não apenas à utilização das propriedades estudadas, levou-os a evoluírem ao ponto de serem capazes de utilizar os casos de congruência de triângulos para justificar as propriedades de triângulos e paralelogramos. Observe a Tabela 6, nela apresentamos a quantidade de alunos que conseguiam aplicar e justificar os resultados básicos explicitados no Capítulo 1.

Tabela 6: Aplicação e justificativa dos resultados básicos

Resultado	Quantidade de alunos	
	APLICAM	JUSTIFICAM
Resultado 1	30	28
Resultado 2	28	23
Resultado 3	30	25
Resultado 4	30	24
Resultado 5	29	25
Resultado 6	28	25
Resultado 7	28	21
Resultado 8	30	28
Resultado 9	30	22
Resultado 10	30	28
Resultado 11	29	19
Resultado 12	29	18
Resultado 13	27	21

Fonte: Autor, 2014.

Os resultados obtidos na última avaliação vêm a enaltecer a importância de modificarmos as abordagens comumente utilizadas para o ensino de conteúdos geométricos. Neste caso, o uso das construções de figuras planas com régua e compasso foi fundamental para despertar a curiosidade discente, mas existem outros recursos cujo uso adequado poderia ter como consequência os mesmos bons resultados aqui explícitos[39].

Além disso, apenas a utilização dos instrumentos não garantiria necessariamente que se realizasse a aprendizagem, existem fatores que tornam a situação didática mais efetiva como, por exemplo, as relações entre professor e aluno porque, é necessário criar vínculos afetivos, conhecer o aluno para compreender suas dificuldades de aprendizagem e poder a partir disto moldar nossa prática pedagógica.

Fatores como a motivação para o estudo a qual pode surgir dos desafios propostos são extremamente importantes para o processo de ensino e aprendizagem, pois uma pessoa motivada busca informações, questiona, interage[40]. Acreditamos que o uso das construções mostrou-se muito útil porque desde o início focamos em fatores motivacionais, em envolver o aluno na situação didática, fazê-lo participar espontaneamente das atividades propostas, algo que foi favorecido pelo conhecimento prévio que tínhamos a respeito do público alvo.

Reside neste trabalho informações essenciais à realização de uma prática educativa propícia à aprendizagem em Geometria Euclidiana Plana. Tratando especificamente das construções geométricas e seguindo-se essa linha de pensamento, abrem-se várias possibilidades para a realização de produções futuras direcionadas tanto à formação básica dos alunos como a capacitação de professores, pois a introdução deste tipo de estratégia requer um profissional preparado, apto a realizar e discutir as construções com propriedade.

Podemos pensar em adequar as experiências aqui analisadas ao ensino médio. Estaríamos com um público que apresentaria dificuldades semelhantes àquelas estudadas aqui, mas com o diferencial de possuir mais experiência e por isto possibilitar a ascenção à níveis mais teóricos e utilizar construções mais sofisticadas.

Tratar de outras figuras geométricas planas mesmo no ensino fundamental. Havendo maior disponibilidade de tempo, seria bastante proveitoso estudar outras propriedades de triângulos, quadriláteros, posições relativas entre retas e circunferências, ver construções para analisar o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras.

---

[39] Veja [19]

[40] Veja [29].

Voltando nossa atenção à prática pedagógica, como as ideias atuais estão voltadas à valorização cada vez maior da participação do aluno na produção do conhecimento, percebemos que a adoção de estratégias que envolvem o uso de régua e compasso favorece a implementação destas formas de pensar, pois, além da disponibilidade dos materiais, seu uso é facilmente compreendido e possui vasta aplicação no âmbito da Geometria. O uso das construções favorece o estabelecimento de estratégias didáticas centradas na ação do aluno.

Seja por motivação, por tornar assimiláveis os processos de abstrações ou por possibilitar a construção do conhecimento discente através de sua própria ação, as construções geométricas mostram-se como uma alternativa plausível à solução dos problemas do processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

REFERÊNCIAS

[1] ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M.J.F. Provar e demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática.** Campo Mourão-Pr, v.1, n.1, p. 22-41, jul-dez. 2012

[2] BARROSO, M. M.; FRANCO, V.S. O laboratório de ensino de matemática e a identificação de obstáculos no conhecimento de professores de matemática. **ZETETIKÉ.** Rio de Janeiro, v. 18, n. 34, p. 205-234, jul/dez. 2010.

[3] BIANCHINI, E. **Matemática.** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

[4] BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional**. Brasília: MEC, 1996.

[5] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

[6] BRASL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC, 1999.

[7] BÚRIGO, E.Z. O Movimento da Matemática Moderna: Encontro de certezas e ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional**. v.6, n.18, p.35-47, maio./ago. 2006.

[8] CAMACHO, S. F. P. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática:** Aprender explorando e construindo. 2012, 51 f. Uiversidade da Madeira.

[9] CAMPOS, E. P.; SILVA, J. P.; CANDIDO, C.C. **Ensino de translações e rotações com base na Teoria de Van Hiele**, p. 235-242.

[10] CLEMENTS, D. H. et al. Young Children's Concepts of Shape. **Journal for Research in Mathematics Education**.Vol. 30, No. 2, p. 192-212, 1999.

[11] Congresso Nacional de Educação 9., 2009, Paraná, Movimento da Matemática Moderna nas práticas escolares e suas repercursões na maneira de ensinar. **Anais...** Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR) e Centro Universitário Católico do Sudoeste do Paraná (UNICS), 2009.

[12] CROWLEY, M. L. **The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought.** In Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council af Teachers af Mathematics, 1987.

[13] D'AMBRÓSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano 2. n. 2. Brasilia. p. 15-19. 1989.

[14] DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

[15] Encontro Nacional de Educação Matemática 8., 2004, Recife-Pe. Como escrever um texto matemático (o exemplo da sala de aula). **Anais...** Recife: SBEM, 2004.

[16] Encontro Nacional de Educação Matemática 10., 2010, Salvador-BA. Uso de demonstração na educação geométrica no ensino fundamental. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

[17] FILHO, D. C. **Um convite à Matemática:** Fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. Universidade Federal de Campina Grande, 2004.

[18] FILHO, E. A. **Iniciação à Lógica Matemática**. 1. ed. São Paulo: Nobel, 2002.

[19] FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.** Publicado no Boletim SBEM-SP. v. 4, n. 7.

[20] FREIRE. P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à pratica educativa. 21. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

[21] IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. **Geometria plana:** conceitos básicos. 2. ed. São Paulo: Atual, 2011.

[22] LIMA, E.L. **Isometrias**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[23] LOBO, J. S.; BAYER, A. O ensino de Geometria no ensino fundamental. **ACTA Scientae**, Canoas-RS, v.6, n. 1, p. 19-26, jan./jun. 2004.

[24] MORO, M. L. F. Construtivismo e educação matemática. **Educação Matemática e Pesquisa** v. 11, n. 1, p. 117-144, São Paulo, 2009.

[25] PÁDUA, G. L. D. A Epistemologia Genética de Jean Piaget. **FACEVV** 1º Semestre de 2009, n. 2, p. 22-35.

[26] PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñaza de las isometrias del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.** 1993. 190 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Departamento de didática da matemática, Universidade de Valência, Valência.

[27] PINHO, J.L.R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N.T.B. **Geometria 1**. 2. ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

[28] ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[29] SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje:** enfoques, sentidos e desafios. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

[30] SANCHIS, I. P.; MAHFOUD M. Interação e construção: o sujeito e o conhecimento no construtivismo de Piaget.**Ciências e Cognição** 2007; v. 12, p. 165-177.

[31] SCHIRLO, A. C.; SILVA, S.C.R. O ensino de Geometria auxiliando a fabricação de embalagens. **R. B. E. C. T.**, v.2, n. 1, p. 50-69, jan./ abr. 2009.

[32] SOARES, L. H. **Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica.** 2009, 71 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

[33] USISKIN, Z. (1982).**Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry**. Chicago: Universidade de Chicago.

[34] VAN HIELE, P. M. **El Problema de la Comprensión:** En Conexión con la Comprensión de los Escolares en el Aprendizaje de la Geometria. 1957,76 f. Tese (Doutorado em Matemática e Ciências Naturais)- Universidade Real, Utrecht.

[35] VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matematemática Pesquisa.** São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

[36] WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas.** 2012.

APÊNDICE A
Definições e Notação

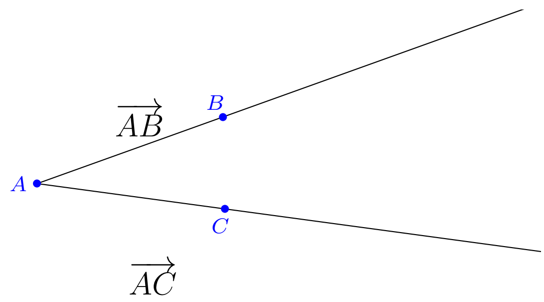
Utilizaremos letras minúsculas para representar retas e letras maiúsculas para representar pontos.

Se A e B são pontos distintos, representaremos por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta que passa por B e tem origem em A.

Representaremos por $\overline{AB}$ o segmento definido pelos pontos A e B, quando $A \neq B$. E por AB a medida do segmento $\overline{AB}$.

Definição 1 (Ângulo)**.** *Ângulo é a abertura entre duas semirretas de mesma origem.*

Figura 42: Âgulo $\widehat{BAC}$.

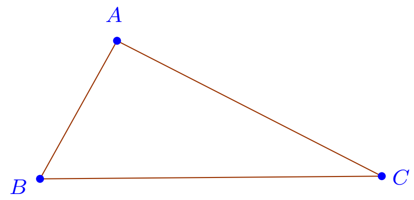


Fonte: Autor, 2014.

É importante não confundrimos o ângulo com sua medida. Para isto, sempre que nos referirmos ao ângulo compreendido entre as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de origem A, utilizaremos a notação $\widehat{BAC}$ quando tratarmos da medida do ângulo compreendido entre as semirretas utilizaremos a notação $B\hat{A}C$.

Definição 2 (Triângulo)**.** *Sejam A, B e C pontos não colineares*[41]*. Chamamos de triângulo e representamos por ABC o conjunto dos pontos do plano que pertencem aos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.*

Figura 43: Triângulo ABC.

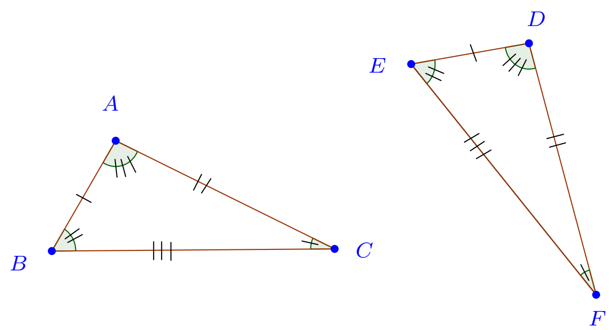


Fonte: Autor, 2014.

Ao escrevermos ABC, BCA, CAB, ACB estaremos representando o mesmo triângulo.

Definição 3 (Triângulos congruentes)**.** *Dois triângulos ABC e DEF são congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que os ângulos e lados correspondentes sejam congruentes.*

Figura 44: Triângulos congruentes.



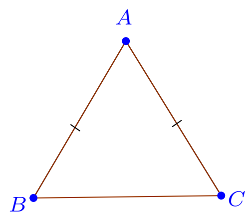
Fonte: Autor, 2014.

Indicaremos $ABC \equiv DEF$ para dizer que os triângulos ABC e DEF são congruentes e a correspondência entre os vértices por $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$.

[41]Dados A, B e C pontos no plano, tais que A≠B≠C, dizemos que A, B e C são colineares quando a reta determinada por A e B contém C. Veja [21].

Definição 4 (Triângulo isóceles). *Um triângulo é dito isósceles se possui dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado de base. Os ângulos opostos as laterais são chamados de ângulos da base.*

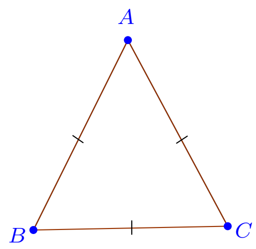
Figura 45: Triângulo isósceles ABC de base BC.



Fonte: Autor, 2014.

Definição 5 (Triângulo equilátero). *Um triângulo é dito equilátero quando possui três lados congruentes.*

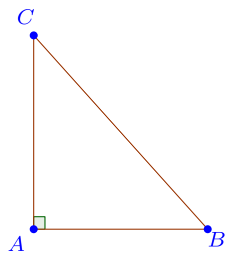
Figura 46: Triângulo equilátero.



Fonte: Autor, 2014.

Definição 6 (Triângulo retângulo). *Um triângulo é dito retângulo se possui um ângulo reto.*

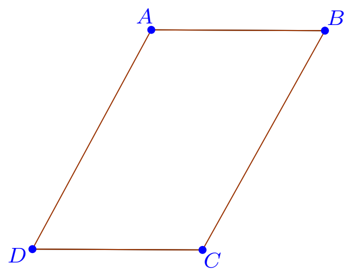
Figura 47: Triângulo retângulo.



Fonte: Autor, 2014.

Definição 7 (Paralelogramo)**.** *Paralelogramos são quadriláteros*[42] *que possuem os pares de lados opostos paralelos.*

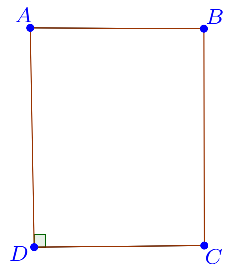
Figura 48: Paralelogramo ABCD, com $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{BC}//\overline{DA}$.



Fonte: Autor, 2014.

Definição 8 (Retângulo)**.** *Qualquer paralelogramo que possui um ângulo reto é chamado retângulo.*

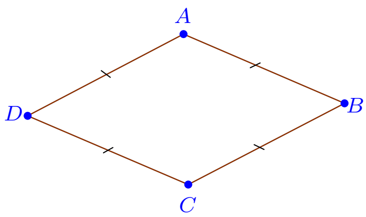
Figura 49: Retângulo ABCD.



Fonte: Autor, 2014.

Definição 9 (Losango)**.** *Um losango é qualquer paralelogramo que possui os quatro lados congruentes.*

Figura 50: Losango ABCD.



Fonte: Autor, 2014.

[42]Polígonos formados por quatro lados. Veja [2] e [21].

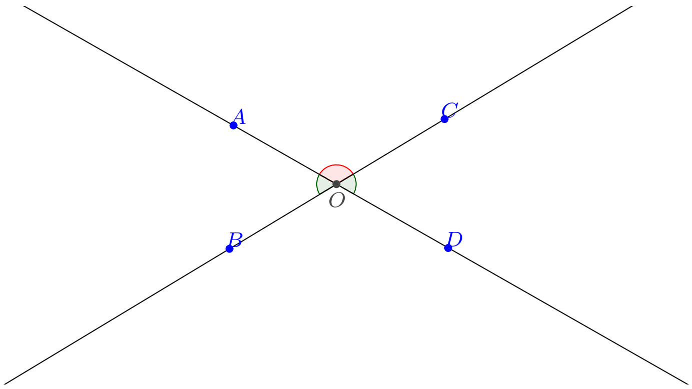
APÊNDICE B
Demonstrações formais dos resultados básicos

Proposição 1. *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, sejam $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ ângulos opostos pelo vértice. Note que $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC}$ são suplementares, logo, $A\hat{O}B + A\hat{O}C = 180^o$. Veja também que $C\hat{O}D + A\hat{O}C = 180^o$. Segue que $A\hat{O}B + A\hat{O}C - \left(C\hat{O}D + A\hat{O}C\right) = 0^\circ \Leftrightarrow A\hat{O}B - C\hat{O}D = 0^o \Leftrightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D$. Como, por definição, dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma abertura e consequentemente a mesma medida[43], temos que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$. C.Q.D.

Figura 51: Demonstração da proposição 1.



Fonte: Autor, 2014.

Proposição 2. *Retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.*

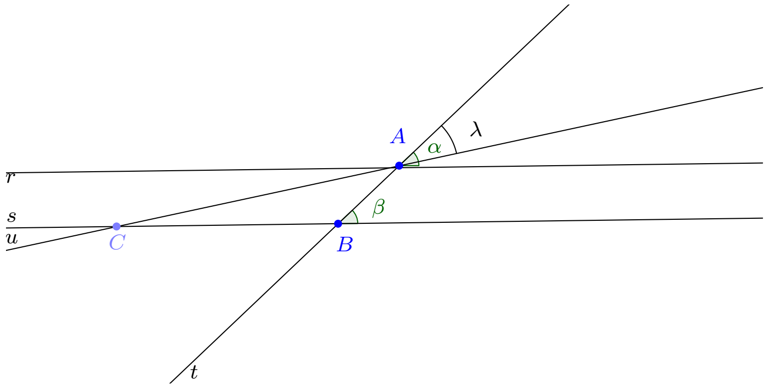
DEMONSTRAÇÃO:

Sejam r e s retas paralelas e t uma transversal que intersecta r em A e s em B. Consideremos os ângulos α formado por r e t e β formado por s e t tais que α e β sejam correspondentes. Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha > \beta$ e, por A, trace uma reta u tal que o ângulo λ formado por t e u é congruente a β. Note que, pela unicidade da paralela, u não é paralela a s. Então existe o ponto C de intersecção entre u e s. Assim, ABC é um triângulo tal que o ângulo β é externo ao vértice B. Pela proposição

[43] Veja [21]

4, temos que $\beta = \hat{A} + \hat{C}$, como o ângulo interno no vértive A é congruente a λ pois são opostos pelo vértice, temos $\beta = \lambda + \hat{C}$. Logo $\beta > \lambda$, mas, por construção $\beta = \lambda$ o que é absurdo. Por tanto, só podemos ter $\beta = \alpha$. C.Q.D.

Figura 52: Demonstração da proposição 2.



Fonte: Autor, 2014.

Proposição 3. *Em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.*

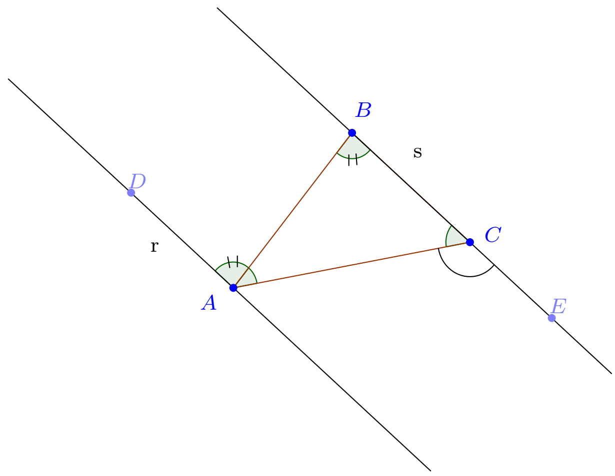
A demonstração foi realizada no capítulo 1.

Proposição 4. *Em qualquer triângulo o ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes*

DEMONSTRAÇÃO:

Seja ABC um triângulo. Mostremos, sem perda de generalidade, que a medida do ângulo externo ao vértice C é igual a soma das medidas dos ângulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$. Por A tracemos uma reta r paralela a $\overline{BC}$ e prolomguemos $\overline{BC}$. Consideremos o ângulo $\widehat{CAD}$ alterno interno do ângulo $\widehat{ACE}$ externo ao vértice C. Decorre que $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACE}$. Agora, observando que $\widehat{BAD}$ e $\widehat{ABC}$ também são alternos internos, vemos que $A\hat{C}E = B\hat{A}D = C\hat{A}B + A\hat{B}C$. C.Q.D.

Figura 53: Demonstração da proposição 4.



Fonte: Autor, 2014.

Proposição 5. *Em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.*

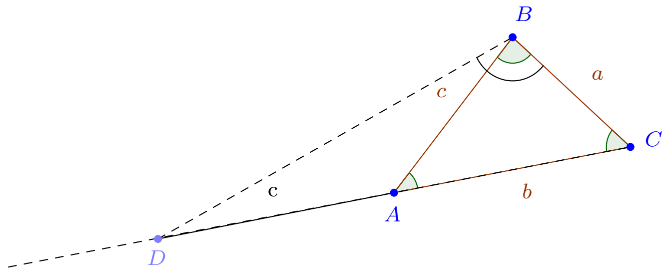
DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que cada ângulo externo é suplementar do interno correspondente. C.Q.D.

Proposição 6. *Em qualquer triângulo a medida de um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois.*

DEMONSTRAÇÃO:

Seja ABC um triângulo. Suponha que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Mostremos que $a < b + c$. Para isto, suporemos $a > b$ e $a > c$ pois os casos em que $a \leq b$ e $a \leq c$ são óbvios. Além disso, precisaremos do seguinte resultado: ao maior lado de um triângulo se opõe o maior ângulo. Agora, prolonguemos o lado AC até o ponto D tal que $AB = AD$. Veremos que, $CD = b+c$. Percebamos que $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BDA} \equiv \widehat{DBA}$.Por construção, $\widehat{DBA}$ é menor que $\widehat{DBC}$ e "Se ABC é um triângulo então $\hat{A}$ é menor que $\hat{B}$ se e só se $\overline{AC} < \overline{BC}$ então segue que $\widehat{BDC}$, oposto a a é menor que $\widehat{DBC}$ oposto a $b+c$, logo, $a < b+c$. C.Q.D.

Figura 54: Demonstração da proposição 6.



Fonte: Autor, 2014.

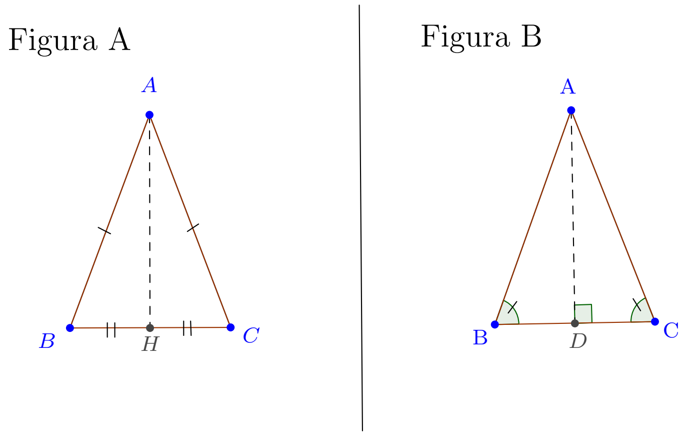
Proposição 7. *Um triângulo é isósceles se, e só se, os ângulos da base são congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO:

($\Rightarrow$) Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. Tomemos o ponto H tal que H seja ponto médio de BC. Note que $AHC \equiv AHB$, pois $AB = AC$, AH é comum e como H é ponto médio de BC então $HB = HC$, portanto pelo caso de congruência LLL temos que $AHC \equiv AHB$, apresentando a seguinte correspondência de vértices $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $H \leftrightarrow H$, mas $A\hat{B}C = H\hat{B}A$ e $B\hat{C}A = H\hat{C}A$, logo $A\hat{B}C = B\hat{C}A$. (Figura A).

($\Leftarrow$) Seja ABC um triângulo com dois ângulos congruentes. Suponhamos, sem perda de generalidade que $A\hat{B}C = B\hat{C}A$. Devemos mostrar que $AB = AC$. Seja D um ponto pertencente à reta que contém o segmento BC tal que AD é altura do triângulo ABC relativa ao vértice A. Vejamos que D só pode pertencer ao segmento $\overline{BC}$. Se D não pertence a $\overline{BC}$, podemos supor que pertence a semirreta $\overrightarrow{BC}$ neste caso $B\hat{C}A > 90°$ pois, $B\hat{C}A = A\hat{D}C + C\hat{A}D$ o que é absurdo porque estamos supondo $\hat{B} = \hat{C}$ e não pode haver um triângulo com dois ângulos internos ambos maiores que $90°$. Dessa forma, D ao segmento $\overline{BC}$ então $ABD \equiv ACD$ pelo caso de congruência LAA com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow D$. Dessa forma $AC = AB$ e ABC é isósceles. (Figura B) C.Q.D.

Figura 55: Demonstração da Proposição 7.



Fonte: Autor, 2014.

Proposição 8. *Um triângulo é equilátero se, e só se, possui os três ângulos congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO:

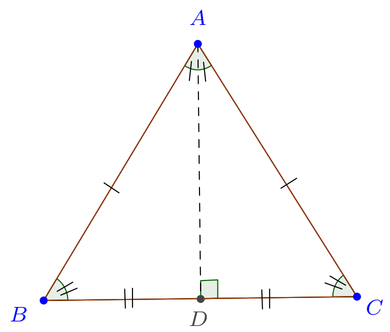
Basta supor que ABC é isósceles, adotar um dos lados como base e proceder como na demonstração da proposição anterior. C.Q.D.

Proposição 9. *Em qualquer triângulo isósceles a mediana relativa a base é também bissetriz e altura.*

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam ABC um triângulo isósceles e D um ponto pertencente ao segmento BC tal que AD seja mediana de ABC relativa a $\overline{BC}$. Note que pelo caso de congruência LLL, $ABD \equiv ACD$ com a correspondência $D \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow A$. Mas $\widehat{BAD} + \widehat{CAD} = \widehat{CAB}$, então $\overline{AD}$ é bissetriz de ABC relativa a A. Além disso, $A\hat{D}C + A\hat{D}B = 180°$, logo, $A\hat{D}C = 90°$ e $A\hat{D}B = 90°$, portanto, $\overline{AD}$ é altura de ABC relativa a $\overline{BC}$. C.Q.D.

Figura 56: Demonstração da Proposição 9.



Fonte: Autor, 2014.

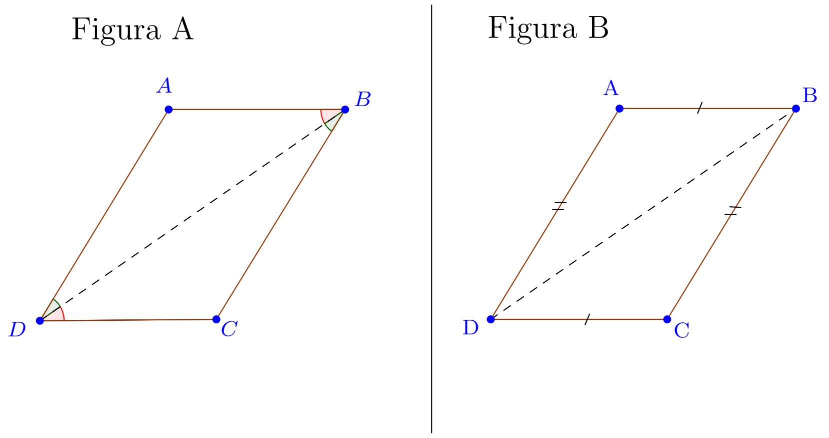
Proposição 10. *Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os lados opostos são congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO:

($\Rightarrow$) Seja $ABCD$ um paralelogramo, tracemos a diagonal $\overline{AC}$ e notemos que, por definição $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$. Logo, a reta que contém o segmento $\overline{AC}$ é transversal às retas paralelas que contém $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e também é transversal às retas que contém $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Então, $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DCA}$ são alternos internos e, portanto congruentes. Analogamente os ângulos $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BCA}$ também são congruentes. Notemos agora que $\overline{AC}$ é lado comum dos triângulos ABC e CDA. Então, pelo caso de congruência ALA temos que $ABC \equiv CDA$ com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ e $C \leftrightarrow A$, logo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. (Figura A).

($\Leftarrow$) Agora suponha que $ABCD$ é um quadrilátero qualquer que possui os lados opostos congruentes. Trace a diagonal AC. Note que, $ACB = CAD$, pelo caso LLL, pois $AB = CD$, $BC = DA$ e AC é lado comum. A correspondência dos vértices é dada por $A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow B$ e $C \leftrightarrow A$. Logo, os ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{ACB}$ são congruentes e dessa forma $AD//BC$. Analogamente, como $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DCA}$ temos que $AB//CD$.(Fiugura B). C.Q.D.

Figura 57: Demonstração da Proposição 10.



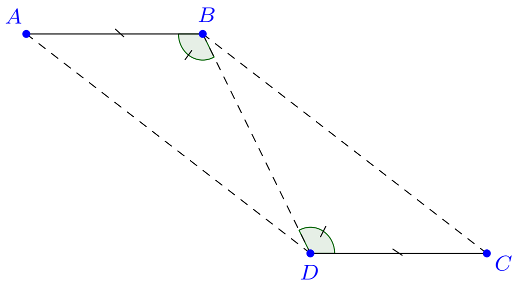
Fonte: Autor, 2014.

Proposição 11. *Se dois segmentos são paralelos e congruentes, suas extremidades são vértices de um paralelogramo.*

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos paralelos e congruentes. Como todo quadrilátero que possui os lados opostos congruentes é um paralelogramo, devemos mostrar que $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. De fato, consideremos os triângulos ABD e CDB. Observemos que os ângulos $\widehat{ABD}$ e $\widehat{CDB}$ são congruentes, pois $AB//CD$, além disso, $AB = DC$ e $\overline{BD}$ é comum. Logo, os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo caso de congruência LAL com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ e $D \leftrightarrow B$. Segue que $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ e portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. C.Q.D.

Figura 58: Demonstração da Proposição 11.



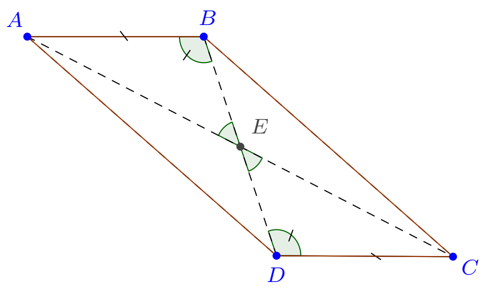
Fonte: Autor, 2014.

Proposição 12. *As diagonais de qualquer paralelogramo se intersectam em seus respectivos pontos médios.*

DEMONSTRAÇÃO

Um paralelogramo é um quadrilátero em que seus lados opostos são paralelos. Seja $ABCD$ um paralelogramo, devemos mostrar que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam em seus respectivos pontos médios. Seja E o ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$. Note que $\overline{AB} = \overline{CD}$, porque são lados opostos do paralelogramo $ABCD$; $\widehat{AEB} \equiv \widehat{CED}$, pois são ângulos opostos pelo vértice, $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CDE}$, pois $AB//CD$, então pelo caso de congruência LAA, $ABE \equiv CDE$. Dessa forma $\overline{AE} = \overline{CE}$ e, portanto, E é ponto médio de $\overline{AC}$. Analogamente concluímos que E é ponto médio de $\overline{BD}$. C.Q.D.

Figura 59: Demonstração da Proposição 12.



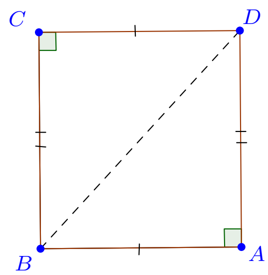
Fonte: Autor, 2014.

Proposição 13. *Em todo retângulo, as diagonais são congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO

Um retângulo é um paralelogramo que possui um ângulo reto. Seja $ABCD$ um retângulo, consideremos os triângulos retângulos ABD e CDB. Note que $AB = CD$ e BD é comum e $\hat{A} = \hat{C}$, pelo caso de congruência LAL temos que $ABC \equiv DCB$, com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow B$. Logo, $AC = BD$ e portanto, as diagonais ABCD são congruentes. C.Q.D.

Figura 60: Demonstração da Proposição 13.



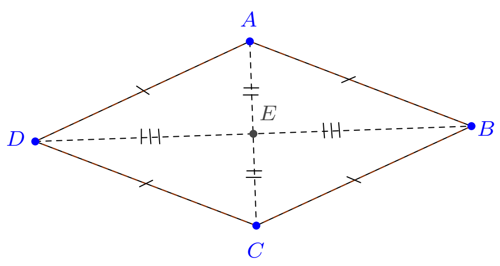
Fonte: Autor, 2014.

Proposição 14. *Em todo losango, as diagonais determinam as bissetrizes dos ângulos internos e são perpendiculares.*

DEMONSTRAÇÃO

Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes. Seja ABCD um losango, logo $AB = BC = CD = DA$. Seja E o ponto de intersecção das diagonais. Pelo caso LLL temos que $ABE \equiv CBE$, com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow B$, $E \leftrightarrow E$. Então, os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{CBE}$ são congruentes. Mas $\widehat{ABE} + \widehat{CBE} \equiv \widehat{ABC}$. Dessa forma, a diagonal $\overline{BC}$ bissecta o ângulo $\widehat{ABC}$ do losango $ABCD$. Analogamente concluímos que as diagonais bissectam os demais ângulos internos. Agora, observemos também que, por esta congruência,$\widehat{AEB} \equiv \widehat{CEB}$. Mas $\widehat{AEB}$ e $\widehat{CEB}$ são suplementares, logo as diagonais se intersectam formando um ângulo reto e portanto, são perpendiculares. C.Q.D.

Figura 61: Demonstração da Proposição 14.



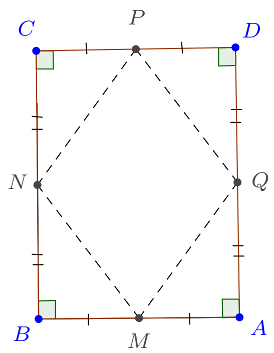
Fonte: Autor, 2014.

Proposição 15. *Em todo retângulo os pontos médios dos lados determinam um losango.*

DEMONSTRAÇÃO

Seja ABCD um retângulo. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Para mostrar que $MNPQ$ é um losango devemos mostrar que seus lados são congruentes. De fato, os ângulos $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCC}$ e $\widehat{CDA}$ são congruentes, pois medem $90°$, como $AQ = DQ = BN = CN$ e $AM = BM = CP = DP$, pelo caso de congruência LAL temos que os triângulos AMQ, BMN, CPN e DPQ são congruentes. Decorre que $MN = NP = PQ = QM$ e então $MNPQ$ é um losango. C.Q.D.

Figura 62: Demonstração da Proposição 15.



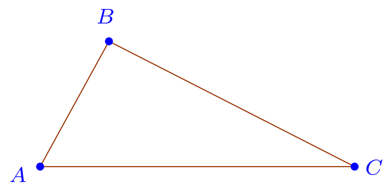
Fonte: Autor, 2014.

APÊNDICE C

Construção de segmentos notáveis em triângulos

Considere o triângulos ABC dado a seguir.

Figura 63: Construção de segmentos notáveis.



Fonte: Autor, 2014.

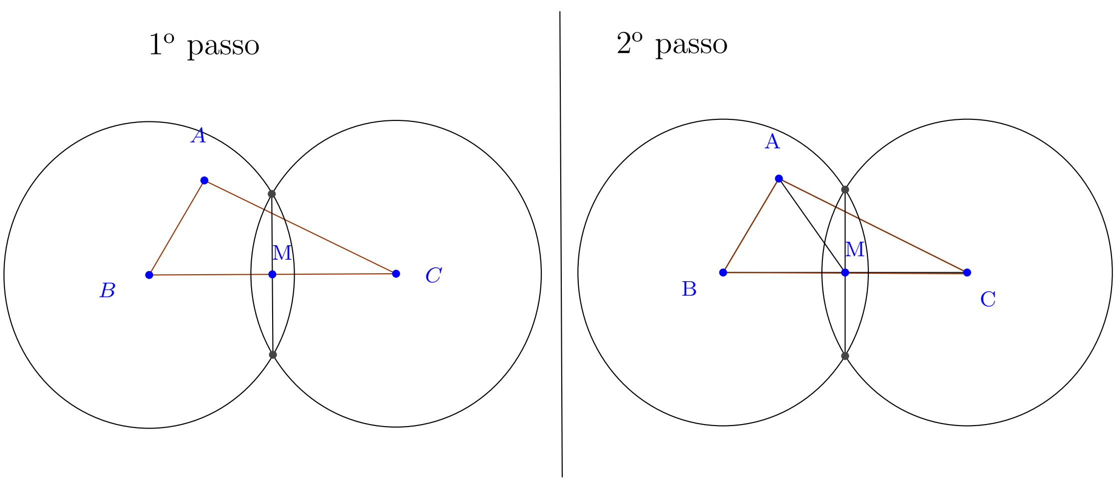
(i) CONSTRUÇÕES DAS MEDIANAS

Seja ABC um triângulo pede-se construir a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo.

1º passo: Construa o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$.

2º passo: $\overline{AM}$ é mediana do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

Figura 64: Construção da mediana do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



Fonte: Autor, 2014.

As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são construídas de forma análoga.

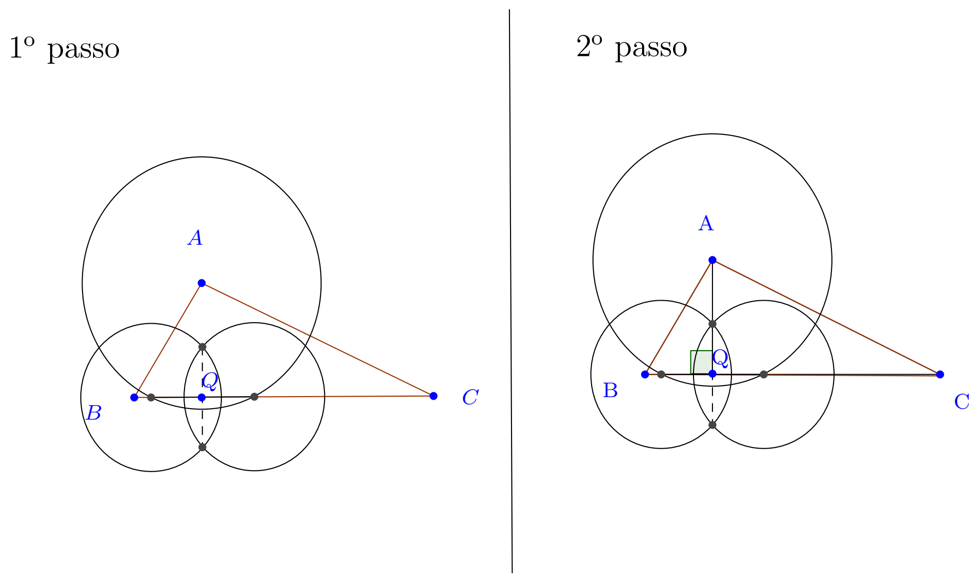
(ii) CONSTRUÇÕES DAS ALTURAS

Construir a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A.

1º passo: Trace a perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{BC}$ passando por A.

2º passo: Na intersecção marque o ponto H. $\overline{AH}$ é altura de ABC relativa ao vértice A.

Figura 65: Construção da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



Fonte: Autor, 2014.

As alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são construídas de forma análoga.

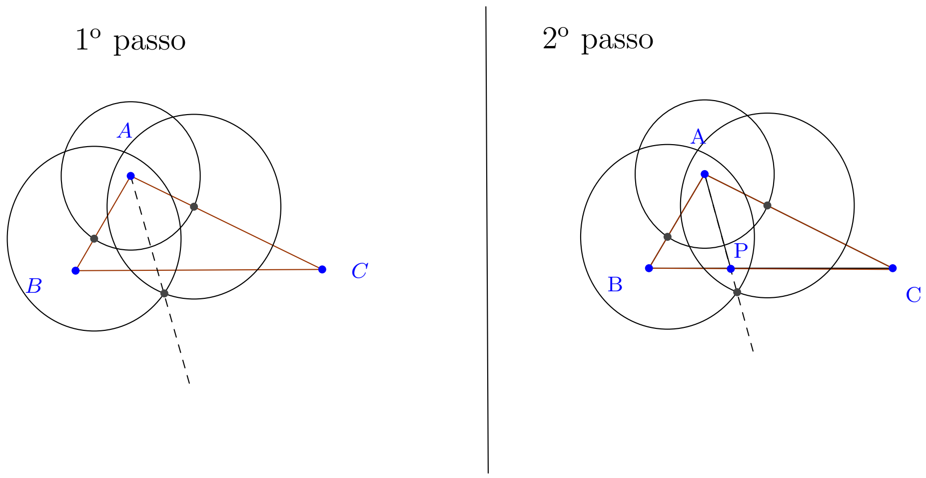
(iii) CONSTRUÇÕES DAS BISSETRIZES INTERNAS

Construir a bissetriz interna do triângulo ABC relativa ao ângulo $\widehat{BAC}$.

1º passo: Construa a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$.

2º passo: Marque o ponto P de intersecção entre a bissetriz e o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC. $\overline{AP}$ é bissetriz do triângulo ABC relativa ao ângulo $\widehat{BAC}$.

Figura 66: Construção da bissetriz interna do triângulo ABC relativa ao ângulo $\widehat{BAC}$.



Fonte: Autor, 2014.

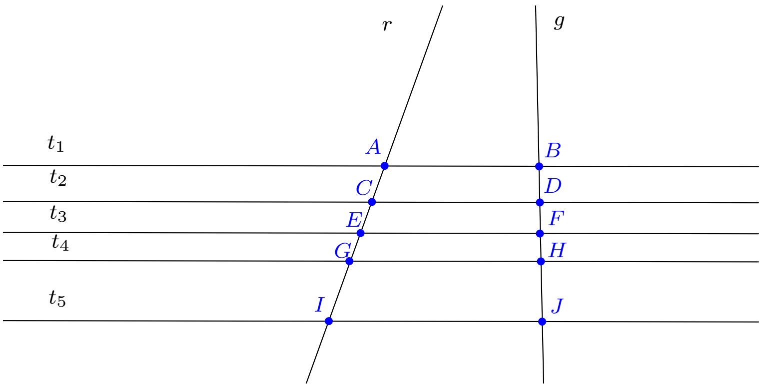
As bissetrizes internas do triângulo ABC relativas aos ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ são construídas de forma análoga.

Observação: a construção de pontos notáveis em triângulos é feita de forma elementar a partir da intersecção dos segmentos notáveis correspondentes. Logo, basta construir a intersecção que define o ponto.

APÊNDICE D
Teorema de Tales

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os segmentos correspondentes da outra. Na figura abaixo temos, por exemplo, $\frac{\overline{AC}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{HJ}}$

Figura 67: Teorema de Tales.



Fonte: Autor, 2014.

APÊNDICE E

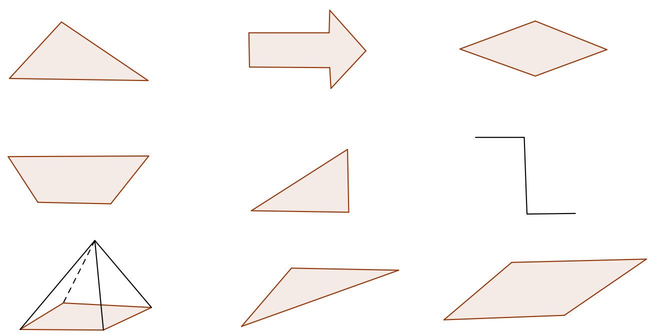
Questões utilizadas na pesquisa de campo

No trabalho de campo utilizamos três questionários, dois deles, os questionários 1 e 2 (expostos aseguir), para avaliar os níveis de compreensão de acordo com a Teoria de Van Hiele antes de ralizarmos as atividades práticas.

QUESTIONÁRIO 1

1- Defina triângulo.

2- Marque um X nas figuras que representam triângulos, depois justifique.



3- O que é um triângulo retângulo?

4- O que é um triângulo isósceles?

5- O que é um triângulo equilátero?

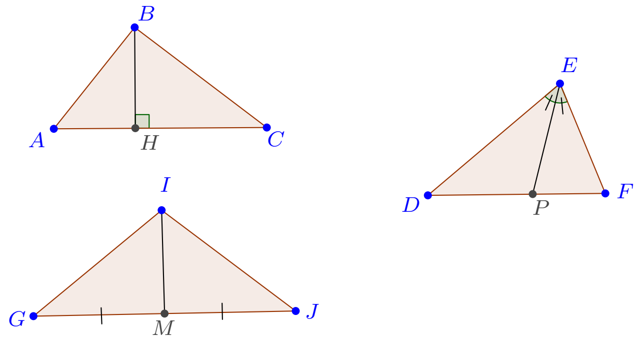
6- Defina bissetriz de um ângulo.

7- O que é a mediatriz de um segmento?

8- Defina altura de um triângulo.

9- Defina mediana de um triângulo.

10- Defina cada segmento marcado abaixo sabendo que BH é perpendicular a AC, os ângulos DEP e FEP são congruentes e que M é ponto médio do segmento GJ.



12- Defina quadrilátero.

13- Defina trapézio.

14- Defina paralelogramo.

15- Defina Retângulo.

16- Defina losango.

17- Defina quadrado.

18- Entre as figuras abaixo, Identifique os quadriláteros que pertencem a cada grupo:

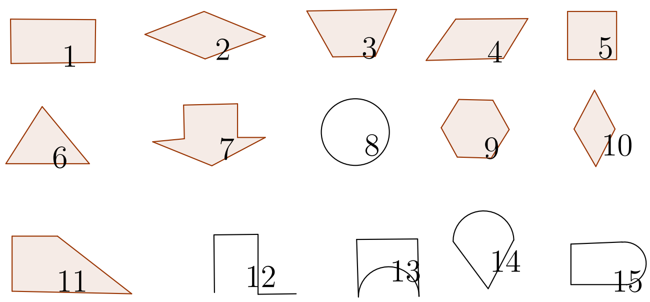
Trapézios ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Paralelogramos ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

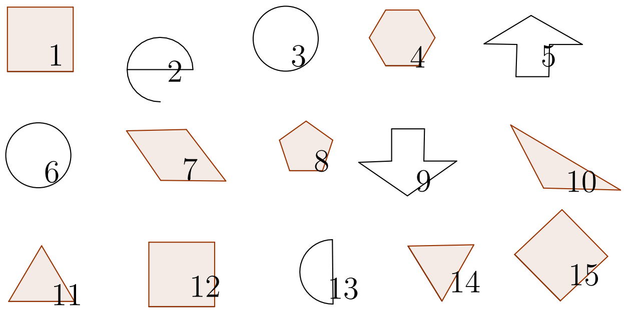
Retângulos ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Losangos ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Quadrados ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

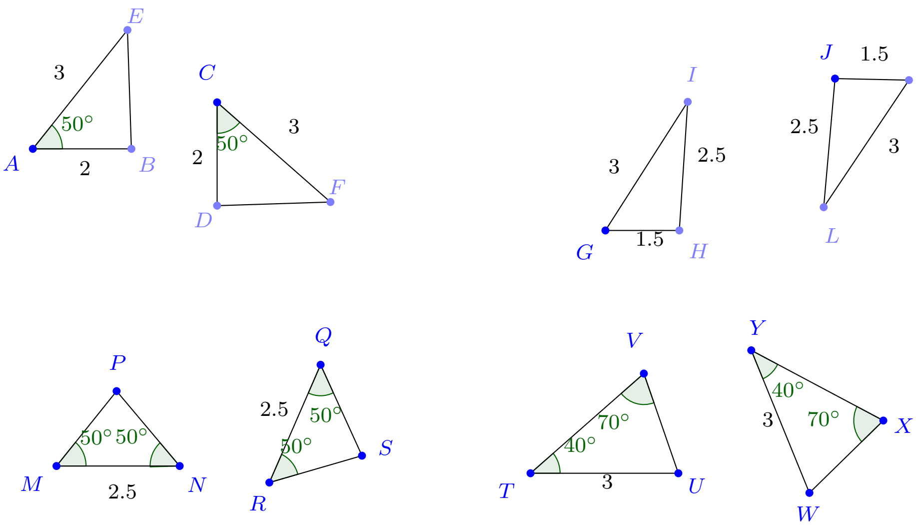


19- O que são figuras geométricas congruentes? Identifique pares de figuras congruentes.

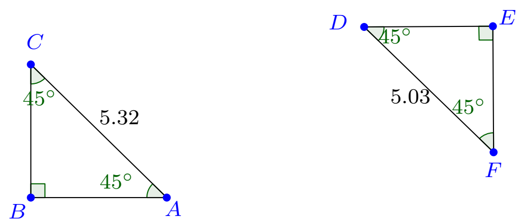


20- O que são triângulos congruentes?

21- Na congruência de triângulos, estudamos quatro casos, são eles: L.L.L., L.A.L., A.L.A. e L.A.A$_O$. Indique o caso de congruência nos pares de triângulos abaixo:



22- Os triângulos abaixo são congruentes? Por quê?



QUESTIONÁRIO 2

1 - O que é um quadrado?

2 - O que é um retângulo?

3 - O que é um losango?

4 - O que é triângulo?

5 - O que é um paralelogramo?

6 - O que é um triângulo isósceles?

7 - O que e um triângulo equilátero?

8 - O que é um triângulo retângulo?

9 - Que nome recebe o paralelogrmo que possui os quatro lados com a mesma medida?

10 - Que nome recebe o paralelogramo que possui um ângulo reto?

11 - Que nome recebe o triângulo que possui dois lados com a mesma medida?

12 - Que nome recebe o triângulo que possui os três lados com a mesma medida?

QUESTIONÁRIO 3

1- Considere os segmentos AB=5 cm e BC=13 cm. Marque a opção que contem um valor para o segmento CA tal que ABC seja um triângulo.

a) 4 cm

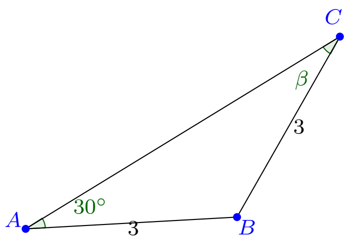
b) 8 cm

c) 16 cm

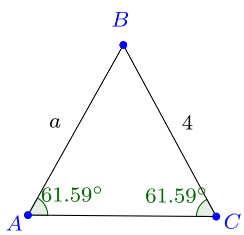
d) 32 cm

2- Se ABC é um triângulo tal que $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 90°$. Qual o valor do ângulo $\hat{C}$?

3- Quanto mede o ângulo β do triângulo ABC abaixo? Justifique.



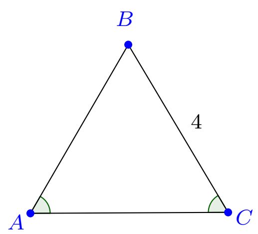
4- Identifique a medida do lado marcado com um x e justifique sua resposta.



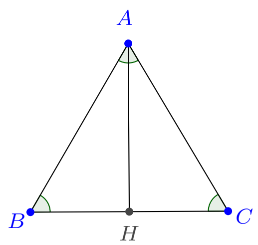
5- Um triângulo é isósceles e um de seus ângulos mede 100°. Quanto medem os outros dois ângulos deste triângulos? Se um dos ângulos de um triângulo isósceles mede 40° quanto medem os outros dois ângulos?

6- Quanto mede cada ângulo interno de um triângulo equilátero?

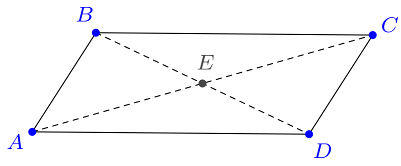
7- Sabendo que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Determine o valor do lado AB do triângulo ABC.



8- O segmento AH é altura do triângulo isósceles ABC. Determine o valor do segmento BH sabendo que BC = 8 cm e do ângulo $\widehat{BAH}$ sabendo que $\hat{A} = 70°$.

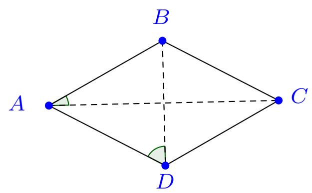


9- Sabendo que AB=3cm, AE=4,5cm e BE=3cm, determine AC, BD e CD.



10- Seja ABCD um retângulo. Qual o comprimento da diagonal AC se a diagonal BD=5cm?

11- Observe o losango abaixo e determine quanto medem os ângulos $\widehat{ACB}$ e $\widehat{ADB}$, sabendo que $\hat{A} = 60°$ e $\hat{B} = 120°$.



12- Explique por que não é possível construir um triângulo cujos lados medem 4cm, 8 cm e 16 cm.

13- Explique por que não é possível construir um triângulo cujos ângulos medem 40°, 80° e 120°.

14- Por que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são congruentes?

15- Por que a mediana relativa a base de um triângulo isósceles também é bissetriz e altura?

16- Por que os lados opostos de qualquer paralelogramo são congruentes?

17- Por que as diagonais de qualquer paralelogramo se intersectam em seus pontos médios?

18- Por que os ângulos oposto de qualquer paralelogramo são congruentes?

19- Por que as diagonais de qualquer retângulo são congruentes?

20- Por que as diagonais de qualquer losango são perpendiculares?