UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL JATAÍ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio

Íris Martins de Moura

JATAÍ – GOIÁS – BRASIL
2014

ÍRIS MARTINS DE MOURA

Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva

JATAÍ – GOIÁS – BRASIL
2014

Ficha catalográfica elaborada
automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Moura, Íris Martins de
Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio [manuscrito] / Íris Martins de Moura. - 2014.
68 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí , Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2014.
Bibliografia.
Inclui siglas, símbolos, tabelas, algoritmos.

1. Matrizes. 2. Aplicações. 3. Resolução de Problemas. I. Silva, Dr. Gecirlei Francisco da, orient. II. Título.

ÍRIS MARTINS DE MOURA

Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora constituída pelos professores:

____

Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva - Orientador

____

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza – IFG/ Goiânia

____

Profª. Drª. Luciana Aparecida Elias – UFG/ Jataí

Íris Martins de Moura graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – Campus Jataí em 2003. Cursou Pós-Graduação "Lato Sensu" em Didática do Ensino Superior pela Universidade Estadual de Mato Grosso – Campus de Alto Araguaia – MT em 2010.

Atualmente é professora efetiva da Secretaria Estadual de Educação de Goiás no município de Mineiros, e professora efetiva da Secretaria Municipal de Educação de Mineiros - GO.

Dedico este trabalho à minha amiga e companheira Tatiane; por ser essa pessoa tão especial e a principal responsável pela conclusão deste, pois, sempre esteve presente comigo nos momentos de angustia, de desespero, até mesmo, nas viagens cansativas e entediantes, sempre me incentivando e me apoiando para não desistir

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, pela Fé, Força e Coragem que me deste durante toda caminhada de minha vida.

A todos os professores, colegas e amigos de curso, pelo apoio, compreensão e amizade.

À CAPES pelo incentivo e oportunidade criada, para que fosse possível a realização desse sonho.

E em especial, ao meu professor e orientador o Dr. Gecirlei Francisco da Silva pela orientação, pela paciência, força e acima de tudo, pelo incentivo para a realização desse trabalho.

Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio

RESUMO: Diante da atual realidade do ensino de Matemática aos alunos do Ensino Médio este trabalho foi elaborado como uma proposta de metodologia de ensino, tendo o intuito de colaborar com professores e alunos, através de sugestões de aplicabilidades práticas e inovadoras de resolução de problemas de matrizes segundo os conceitos de George Polya. Para tanto, foi realizado um levantamento da história, das conceituações e exemplificações dos tipos comuns e especiais de Matrizes, das operações matemáticas existentes nas mesmas e finalmente, de Resolução de Problemas; posteriormente, foi elaborada uma seqüência de exemplos de problemas voltados às situações práticas do cotidiano dos alunos, procurando despertar a curiosidade e possibilitando aos mesmos uma oportunidade para discussão, exploração e compreensão dos conteúdos de Matrizes através da resolução de problemas.

Palavras-chave: Matrizes; Aplicações; Resolução de Problemas.

Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio

ABSTRACT: Given the current reality of teaching mathematics to high school students this work was prepared as a proposed teaching methodology, with the aim of collaborating with teachers and students, through practical and innovative suggestions for applicability to solving problems of matrices according to the George Polya concepts. To this end, a survey of the history, concepts and examples of common and special types of matrices, mathematics of operations existing in them and finally Troubleshooting was performed; subsequently drew up a string of examples of problems facing the practical situations of the daily life of students, seeking to arouse curiosity and enables them an opportunity for discussion, exploration and understanding of the contents of matrices by solving problems.

Keywords: Matrix; applications; Troubleshooting.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A realização deste trabalho tem como intuito expor e enfatizar aos professores de Matemática do Ensino Médio maneiras, formas e exemplificações diversificadas do uso prático de Matrizes em sala de aula. Essa didática tende inserir a aplicação de Matrizes no cotidiano dos alunos, servindo como ferramenta prática e adicional no processo ensino-aprendizagem, visto que este conteúdo, muitas vezes, é trabalhado apenas de forma teórica. Apresentando aos alunos, de forma clara e objetiva, a origem, a definição, as propriedades, os tipos e formas de matrizes, através da resolução de exercícios, sugerindo aplicações práticas e diferentes maneiras de solucioná-las em sala de aula; sem nos esquecermos de relacionar essas aplicações de matrizes com o cotidiano dos alunos, focando sempre numa melhor formação do indivíduo. Assim, tentamos desmistificar o conteúdo de matrizes, mostrando o quão útil as mesmas são em nosso dia a dia. Essa necessidade de aplicações práticas de Matrizes, direcionadas à nossa realidade, é historicamente, existente. É possível encontrarmos registros de desenvolvimento desse estudo, desde a antiguidade.

A partir do segundo capítulo conhecemos um pouco das Matrizes através de sua história e de sua atualidade. No terceiro capítulo apresentamos de uma maneira sucinta e objetiva as inúmeras conceituações e exemplificações de Matrizes; neste capítulo, procuramos auxiliar o professor de Matemática ao expor, tais conteúdos na forma teórica, aos seus alunos em sala de aula. Em seguida, no quarto capítulo, definimos e exemplificamos cada uma das operações matemáticas utilizadas em Matrizes, tais como: a igualdade de matrizes, a adição de matrizes, a multiplicação de uma matriz por um número real, a subtração de matrizes e ainda, a multiplicação de matrizes. Já no quinto capítulo procuramos destacar outros dois tipos de Matrizes: a matriz transposta e a matriz inversa; com o intuito de expandir o material didático e direcioná-lo de forma resumida aos professores de Matemática. Enquanto que no sexto e no sétimo capítulos são ressaltados, respectivamente, as transformações de matrizes: operações elementares por linha, matriz na forma escalonada; e os tipos especiais de matrizes: matriz ortogonal e matriz de permutação. Entretanto, é no oitavo capítulo que tratamos diretamente da conceituação de Resolução de Problemas, ressaltando o método e a aplicação de Resolução de Problemas desenvolvidos por Polya. Neste capítulo, em um segundo momento, é disposto um Roteiro de Aula, no que se refere à apresentação, resolução e aplicações práticas de Matrizes no cotidiano real dos alunos. Para tanto, são expostos 10 exemplos de problemas relacionados a Matrizes. Os quais devem ser trabalhados de formas contextualizadas ao cotidiano dos alunos e adequados aos conteúdos do Ensino Médio, tornando assim, as aulas de Matemática mais dinâmicas, atraentes e produtivas, tanto para os alunos quanto para os professores. Tratamos ainda, do avançado da tecnologia, do desinteresse dos alunos em aprender e das dificuldades encontradas pelos professores ao trabalharem com Matrizes.

Finalmente, concluímos nosso trabalho expondo nossas conclusões finais adquiridas após o término de nossa pesquisa e da realização dos 10 exemplos de problemas voltados às Matrizes desenvolvidos no último capítulo. Ao final deste as referências bibliográficas também são expostas objetivando assim, o acesso dos professores de Matemática a materiais didáticos direcionados especificamente a este conteúdo.

II - CONHECENDO MATRIZES

2.1 - Sua História

As Matrizes surgiram devido à necessidade de resolução de sistemas lineares. Desde a antiguidade, os chineses, com seu gosto especial por diagramas, representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, eles acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, este que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares.

Assim, o primeiro aparecimento de Matrizes se deu em 1683, com o japonês Seki Kowa (1637-1708), que usou a ideia de determinante em seus trabalhos sobre sistemas lineares; afirmados na obra: Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, um texto datado, provavelmente, no século III a.C..

Contudo, o primeiro uso implícito da noção de matriz se deu através de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790; e o primeiro a nomeá-la foi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que as chamou de tabelas. Porém, foi somente em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de Matriz.

Sylvester procurou usar o significado original da palavra Matriz, isto é, local onde algo se gera ou cria:

> "(...) um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas (...)" (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pág. 363-370).

Posteriormente, ainda em 1850, seu parceiro Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês, passou a divulgar o nome, Matriz, iniciando demonstrações de sua utilidade; tais divulgações se deram, por exemplo, através de sua obra: *Memoir on the Theory of Matrices* (1858), passando a ser considerado então, o pai das Matrizes.

Podemos encontrar registros de que o primeiro curso de Teoria das Matrizes, ou de sua versão mais abstrata, a Álgebra Linear, foi voltado ao Teorema Espectral. Esse teorema e alguns resultados auxiliares já eram conhecidos antes de Cayley começar a estudar as matrizes. Já que, a maior parte dos resultados básicos da Teoria de Matrizes foi descoberta quando os matemáticos dos séculos XVIII e XIX passaram a investigar a Teoria das Formas Quadráticas. Nos dias de hoje, são indispensáveis para estudarmos essas formas através de notação e metodologia matricial.

Saber como, pouco a pouco, foram sendo construídos os conceitos e as notações matemáticas, serve para compreendermos melhor certos erros dos nossos alunos e podermos por em prática situações didáticas mais adequadas para uma apropriação progressiva de certos conceitos.

2.2 - Sua Atualidade

Atualmente, com o advento da computação e a crescente necessidade de guardar muitas informações, as matrizes adquiriram grande importância, por contribuírem, consideravelmente, em vários direcionamentos de assuntos e estudos que fazemos em nosso dia a dia.

Segundo Lopes (2008), podemos encontrar matrizes em diversos setores sociais. As usuais transformações de tabelas que utilizamos como instrumento de estudo das matrizes são realizadas com uma importância significativa no campo das aplicações em Matemática, especialmente na Álgebra Linear e computação gráfica; assim como na economia, na engenharia, na física, na informática, e entre tantas outras áreas.

Encontrados exemplos clássicos de matrizes na informática e em seus programas; nos quais, elas aparecem como auxílio de cálculos matemáticos, editores de imagem, ou até mesmo no próprio teclado, onde sua configuração é realizada por um sistema de matrizes. Na economia, por exemplo, as matrizes auxiliam como grande ferramenta na interpretação de gráficos que podem ser originados de tabelas, que por sua vez, também usamos matrizes. Já na economia temos as organizações comerciais que fazem uso de tabelas, ou seja, também trabalham com matrizes. Já na engenharia, os engenheiros civis fazem, constantemente, o uso de matrizes, sendo estas, consideradas de extrema importância, para a divisão dos metros e distribuição de materiais na construção de uma estrutura de sustentação (laje), por exemplo.

Enquanto que na Física o uso da mesma é feito a partir de tabelas relacionando o deslocamento e o tempo.

É devido afirmar ainda, que mesmo diante de tamanho avanço tecnológico em que vivemos, as matrizes continuam sendo utilizadas em nosso cotidiano nos mais diversos meios; podendo seu uso ser observado também na organização de dados, de tabelas de campeonato esportivo, de calendários, de fichas de apostas da loteria e até mesmo, em telas de computadores, já que estes são formados por pixels, gerados, curiosamente, através de uma matriz.

Observamos que a combinação das matrizes com os meios tecnológicos nos possibilita inúmeras facilidades, inclusive nos cinemas. Já que em muitas animações cinematográficas observamos seu uso desde o movimento dos personagens até mesmo em seu quadro de fundo; pois, estes podem ser criados por softwares, que combinam pixels em formas geométricas, que são armazenadas e manipuladas; e que, posteriormente, codificam informações como posição, movimento, cor e textura de cada pixel, assim, são utilizadas vetores, matrizes e aproximações poligonais de superfícies para determinar a característica de cada pixel. Dessa forma, um simples quadro de um filme criado no computador tem mais de dois milhões de pixels, que torna indispensável o uso de computadores para realização de todos os cálculos necessários. Por sua vez, muitos programas de computador também utilizam as matrizes para codificação de dados.

Diante do exposto, podemos afirmar que utilizando exemplos voltados ao cinema e a programas para computadores, entre outros exemplos, o professor de Matemática pode comprovar aos seus alunos que as matrizes fazem parte da realidade dos mesmos, e que se quiserem atuar nos ramos da tecnologia e de programações, devem compreender e saber aplicar verdadeiramente o conceito de matrizes.

III - CONCEITUAÇÕES E EXEMPLIFICAÇÕES DE MATRIZES

3.1 - Conceituação

Comumente, para auxiliar na representação de informações ou facilitar cálculos complexos utilizamos, na Matemática, tabelas numéricas retangulares; essas tabelas, compostas de certa quantidade de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais), representadas por letras maiúsculas e seus respectivos elementos por letras minúsculas, são dispostas normalmente, entre colchetes ou parênteses e recebem o nome de matrizes. Os elementos que compõe uma matriz podem ou não, ser números reais ou complexos ou ainda, expressões algébricas, sendo denominados de entradas da matriz. É relevante enfatizar que neste trabalho utilizamos somente matrizes reais.

Como já foi dito anteriormente, por contribuir de forma prática em análises de diversos dados, podemos notar o real crescimento da utilização de matrizes nas mais diversas áreas; dentre tantas, podemos salientar seu uso na Computação Gráfica, na Engenharia, na Física e na Administração.

Assim, para uma melhor compreensão sobre conceito de Matrizes, observemos e analisemos os seguintes dados do IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, direcionados ao 9° ano da rede pública do Ensino Fundamental da Região Centro-Oeste.

TABELA-1: Dados do IBGE resultados e metas do IDEB

	IDEB Observado					Metas Projetadas							
Estado	**2005**	**2007**	**2009**	**2011**	**2013**	**2007**	**2009**	**2011**	**2013**	**2015**	**2017**	**2019**	**2021**
Distrito Federal	3.3	3.5	3.9	3.9	3.9	3.3	3.4	3.7	4.1	4.5	4.8	5.0	5.3
Goiás	3.3	3.5	3.7	3.9	4.5	3.3	3.5	3.7	4.1	4.5	4.8	5.0	5.3
Mato Grosso	3.0	3.7	4.2	4.3	4.2	3.0	3.1	3.4	3.8	4.2	4.4	4.7	5.0
Mato Grosso do Sul	3.1	3.7	3.9	3.8	3.9	3.2	3.3	3.6	4.0	4.4	4.6	4.9	5.2

Fonte: INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. http://ideb.inep.gov.br

Através da Tabela-1 concluímos que os dados marcados de verde representam os Estados que conseguiram atingir a meta programada para o respectivo ano; temos, por exemplo, o Estado de Goiás localizado na segunda linha, que atingiu sua meta para o ano de 2013 com a nota 4,5 que está na 5ª coluna, pois, a meta projetada para este Estado em 2013 está na 9ª coluna, que era 4,1. Estas localizações podem ser escritas da forma a_{25} e a_{29}, que explicamos à frente.

Diante disso, podemos representar os dados da Tabela-1 na forma de Matriz, ou seja, os dados observados podem ser dispostos da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 3{,}3 & 3{,}5 & 3{,}9 & 3{,}9 & 3{,}9 \\ 3{,}3 & 3{,}5 & 3{,}7 & 3{,}9 & 4{,}5 \\ 3{,}0 & 3{,}7 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}2 \\ 3{,}1 & 3{,}7 & 3{,}9 & 3{,}8 & 3{,}9 \end{bmatrix}$$

No qual o $a_{25} = 4{,}5$, dado referente ao Estado de Goiás, como dito anteriormente.

Representação Genérica:

MATRIZ do tipo **m** x **n** (lê-se **m** por **n**) é toda tabela retangular de m · n números reais dispostos em **m** linhas e em **n** colunas.

Genericamente, uma matriz **A** de ordem **m** x **n**, ou seja, com **m** linhas e **n** colunas, é exposta da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

com m e n $\in N^*$.

Ou ainda, abreviadamente, **A=**$(a_{ij})_{m\,x\,n}$**,** onde, **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa na matriz, $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$.

3. 2 – Conhecendo Alguns Tipos De Matrizes

3.2.1 - Matriz Linha e Matriz Coluna

Matriz Linha é a matriz que possui uma única linha. Linha: 1 x **n**.

Exemplificação de Matriz Linha: $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{1\,X\,3}$.

Matriz Coluna é a matriz que possui uma única coluna. Coluna: **m** x 1

Exemplificação de Matriz Coluna: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix}_{4\,X\,1}$.

3.2.2 - Matriz Nula

É a Matriz que possui todos os seus elementos nulos, ou seja, $\mathbf{a_{ij} = 0}$**,** para todo i e j. Notação: $O_{m\,x\,n}$.

Exemplificação de Matriz Nula: $O_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.2.3 - Matriz Quadrada

É a Matriz na qual o número de linhas é igual ao número colunas, ou seja, **n** x **n**; sendo esse tipo matriz quadrada classificada como matriz de ordem **n**. A Matriz quadrada possui a diagonal principal e a diagonal secundária.

Diagonal principal é o conjunto dos elementos que possuem índices iguais, ou seja, todos os elementos a_{ij}, tais que i = j.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}_{5\ x\ 5}$$

Diagonal secundária é o conjunto dos elementos que possuem a soma dos dois índices iguais a n + 1, ou seja, todos os elementos a_{ij},tais que i+j = n+1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}_{5\ x\ 5}$$

Assim:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: Matriz quadrada 2 x 2, portanto, de ordem 2, onde os elementos 3 e 0 fazem parte da diagonal principal, e os elementos 4 e -1 da diagonal secundária.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \\ 12 & 13 & 18 \end{bmatrix}$: Matriz quadrada 3 x 3, portanto, de ordem 3, onde os elementos 2, 8 e 18 fazem parte da diagonal principal, e os elementos 10, 8 e 12 fazem parte da diagonal secundária.

3.2.4 - Matriz Diagonal

Matriz quadrada A = (a_{ij}) em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $\mathbf{a_{ij} = 0}$ **para** $\mathbf{i \neq j}$ é denominada **Matriz Diagonal**.

Exemplificação: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}_{2X\ 2}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3X\ 3}$.

Enquanto que, em uma Matriz Diagonal A = (a_{ij}) em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, para i = j e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, a mesma é chamada de **Matriz Escalar**.

$$\text{Exemplificação: } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2X2} \qquad B= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3X3} .$$

3.2.5 - Matriz Triangular Superior e Matriz Triangular Inferior

Uma matriz quadrada de ordem **n** é denominada **Matriz Triangular** quando todos os seus elementos, acima ou abaixo, da diagonal principal forem nulos, valendo ressaltar que pode haver zero na diagonal. Desse modo, podemos classificá-la em:

Matriz Triangular Superior quando, os elementos abaixo da diagonal principal forem todos nulos, ou seja, $\mathbf{a_{ij} = 0}$ **para** $\mathbf{i > j}$.

$$\text{Exemplificação : } A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2x2} \quad \text{e} \quad B= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3x3} .$$

Matriz Triangular Inferior quando, os elementos acima da diagonal principal forem todos nulos, $\mathbf{a_{ij} = 0}$ **para** $\mathbf{i < j}$.

$$\text{Exemplificação : } C= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}_{2x2} \quad \text{e} \quad D= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} .$$

3.2.6 - Matriz Identidade

É uma matriz quadrada cujo os elementos da diagonal principal são iguais a **1** e todos os demais, são iguais a **0**, ou seja, $\mathbf{a_{ij} = 0}$ para $\mathbf{i \neq j}$ **e** $\mathbf{a_{ij} = 1}$ para $\mathbf{i = j}$.

Exemplificação: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x\ 2}$ $\qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x\ 3}$.

IV - AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS EM MATRIZES

4.1 - Igualdade de Matrizes

Dadas as matrizes **A** e **B** de mesma ordem. Se cada elemento de **A** for igual ao elemento correspondente de B, as matrizes A e B são ditas iguais.

Notação: Dadas $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} = \mathrm{b}_{\mathrm{ij}} \text{ para todo } 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} \text{ e todo } 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo:

Se $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{c} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, e A = B, então c = 0 e b = 3.

4.2 - Multiplicação de uma Matriz por um Número Real

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem mxn, e um número real k, temos que k.A é uma matriz $B = (b_{ij})$ também de ordem mxn, tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$.

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades: Sejam α e β números reais e, A e B matrizes de mesma ordem, então,

(i) $\alpha\,.(\beta.A) = (\alpha.\beta)$.A;

(ii) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B;$

(iii) $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A;$

(iv) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$, enunciamos nos próximos capítulos a Matriz Transposta, denotada por A^t;

(v) 1.A = A;

(vi)-1. A = - A.

4.3 - Adição de Matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem mxn, temos que a soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem mxn, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplos: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Propriedades:

Sejam as matrizes A, B e C de mesma ordem, então valem as seguintes propriedades:

(i) Comutativa: A + B = B + A;

(ii) Associativa: A + (B + C) = (A + B) +C;

(iii) Elemento Neutro: A + 0 = A;

(iv) Elemento Oposto: A + (-A) = 0.

Assim, estes resultados afirmam que a ordem em que as matrizes são somadas não é importante. Devemos salientar este fato, pois, ao considerarmos a multiplicação de matrizes, temos que a lei comutativa não é mais verdadeira, embora, a lei associativa ainda seja válida. A ordem em que as matrizes são multiplicadas é extremamente importante.

4.4 - Subtração de Matrizes

A **diferença** entre as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem mxn, é a soma da matriz A com a oposta de B, ou seja, $A + (-B)$. Dessa forma, é importante, primeiramente, entendermos o conceito de Matriz Oposta.

4.4.1 - Matriz Oposta

A **matriz oposta** da matriz $A = (a_{ij})$, do tipo m x n, é a matriz $B = (b_{ij})$, do tipo m x n, que satisfaz a condição $A + B = O_{mxn}$.

Indicamos a matriz oposta de A por -A.

Observemos:

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -9 \end{bmatrix}_{2X3}$, sua oposta: -A= $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -8 \\ -7 & -2 & 9 \end{bmatrix}_{2X3}$.

Dessa forma, sabendo o que é matriz oposta, vamos então calcular A - B:

Sejam: A= $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -9 \end{bmatrix}_{2X3}$ e B= $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & 10 & 5 \end{bmatrix}_{2X3}$.

Temos: A - B = A + (-B) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & +6 & -7 \\ -1 & -10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & -14 \end{bmatrix}$.

4.5 - Multiplicação de Matrizes

Uma matriz **1** x **n** ou **n** x **1** é também chamada de um vetor de dimensão **n** ou simplesmente de vetor.

O produto escalar ou produto interno de dois vetores de dimensões **n**

$a = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é definido por:

$$\boldsymbol{a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i}.$$

Sendo assim, na Multiplicação de Matrizes do tipo **m** x **n**, teremos vários produtos escalares. O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,p}$ e $B = (b_{ij})_{p\,x\,n}$ será representada pela matriz $\boldsymbol{C = (c_{ij})_{m\,x\,n}}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido através da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna de **B**.

Elementos correspondentes de matrizes do mesmo tipo **m** x **n**, são os elementos que ocupam a mesma posição nas duas matrizes.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Decorrência da definição:

A matriz produto **A.B** existe apenas quando o número de colunas da primeira matriz **A** é igual ao número de linhas da segunda matriz **B**.

Assim: $A_{m\,x\,p}$ e $B_{p\,x\,n} \Rightarrow (A.B)_{m\,x\,n}$.

Notemos que a matriz produto tem o número de linhas m do primeiro fator e o número de colunas n do segundo fator.

Exemplificação:

1) Se $A_{3\,x\,2}$ e $B_{2\,x\,5}$, então $(A.B)_{3\,x\,5}$;
2) Se $A_{4\,x\,1}$ e $B_{2\,x\,3}$, então não existe produto;
3) Se $A_{4\,x\,2}$ e $B_{2\,x\,1}$, então $(A.B)_{4\,x1}$.

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} \quad \text{e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} \text{, então}$$

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 2.1+3.(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1.(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4.(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-6) & 4+0 & 6+12 \\ 0+(-2) & 0+0 & 0+4 \\ -1+(-8) & -2+0 & -3+16 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}.$$

Propriedades:

Verificadas as condições de existência, para a multiplicação de matrizes são válidas as seguintes propriedades:

(i) Associativa: (A.B).C = A.(B .C);

(ii) Distributiva: A.(B+C) = A.B + A.C, (à esquerda)

(A+B).C = A.C + B.C, (à direita);

(iii) Elemento Neutro: Sendo **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, tem se:

$\boldsymbol{A.I_n = I_n.A = A}$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Sendo **A** uma matriz qualquer do tipo **m x n**, então:

$\boldsymbol{A.I_n = A}$ e $\boldsymbol{I_m.A = A}$

Atenção:

Não valem as seguintes propriedades:

(i) Comutativa, pois, em geral, **A.B** $\neq$ **B.A;**

(ii) Sendo $O_{m\,x\,n}$ uma matriz nula, **A.B =** $O_{m\,x\,n}$ não implica, necessariamente, que:

A = $O_{m\,x\,n}$ ou **B =** $O_{m\,x\,n}$.

Exemplificação:

(i) Conforme citado por Lima 2006, pág. 134

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ temos:

A.B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 26 \\ 15 & 47 & 62 \\ 24 & 74 & 98 \end{bmatrix}$;

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 41 & 49 & 57 \\ 52 & 62 & 73 \end{bmatrix}.$$

Portanto **A.B ≠ B.A**.

(ii) Conforme citado por Paiva 2013, pág. 103

Sendo as matrizes $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ temos:

$$B.C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\boldsymbol{B.C = O_{mxn}}$ **com as matrizes B e C não nulas**.

V- OUTRAS MATRIZES

5.1 - Matriz Transposta

Se **A** é uma matriz **m** x **n** qualquer, então, a transposta de A, denotada por $\boldsymbol{A^t}$, é definida como a matriz **n** x **m**, que resulta da transformação das linhas em colunas; dessa forma, a primeira coluna de $\boldsymbol{A^t}$ é a primeira linha de A, a segunda coluna de $\boldsymbol{A^t}$é a segunda linha de A, assim, consecutivamente. Portanto, a transposta de **A** é obtida quando transformamos as linhas de A por suas colunas e vice-versa.

Exemplificação: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ enquanto que sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Vale ressaltar ainda, que quando uma matriz quadrada **A** é igual à sua matriz transposta $\boldsymbol{A^t}$ **(A =** $\boldsymbol{A^t}$), é dito que A é uma **Matriz Simétrica**, ou seja, os elementos dessa matriz são simétricos em relação à diagonal principal, se $\boldsymbol{A = (a_{ij})_n}$ então $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$; enquanto que se temos **A = -** $\boldsymbol{A^t}$, é dito que essa matriz **A** é **Anti-Simétrica**.

Exemplificação de Matriz Simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3x\ 3} \qquad \boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3x\ 3}.$$

Exemplificação Matriz Anti-Simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad -\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}_{3x\ 3}.$$

Propriedades da Matriz Transposta:

Considerando que A e B são matrizes conformes para a operação indicada e k $\in R$, então:

(i) $A = B \Leftrightarrow A^t = B^t$;

(ii) $(A^t)^t = A$;

(iii) $(k.A)^t = k.A^t$ (k real);

(iv) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(v) $(A.B)^t = B^t.A^t$ (no produto de A.B, inverte a ordem).

Exemplificação: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ cujas transpostas são $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ então:

$$(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})^t = \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 23 & 15 \\ 31 & 24 \\ 39 & 33 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{31} & \mathbf{39} \\ \mathbf{15} & \mathbf{24} & \mathbf{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^t.\boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{31} & \mathbf{39} \\ \mathbf{15} & \mathbf{24} & \mathbf{33} \end{bmatrix}$$

Portanto $(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{B}^t.\boldsymbol{A}^t$ **,** vale ressaltar que nesse exemplo nem seria possível efetuar a multiplicação $A^t.B^t$, pois não o número de colunas de A^té diferente do número de linhas de B^t.

5.2 - Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada **A**, de ordem **n**, chamamos de matriz inversa de **A** uma matriz quadrada **B** de ordem **n** tal que **A.B = B.A = I$_{\mathbf{n}}$**. Denotamos a matriz inversa de A por A^{-1}. Quando existe a matriz inversa de **A**, dizemos que **A** é uma **matriz invertível** ou **não-singular** ou **inversível**.

Exemplificação Matriz Inversa: Verifiquemos se tal fato ocorre, e, em caso afirmativo, determinemos a matriz inversa de A = $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução: Pela definição temos, **A.** $\boldsymbol{A^{-1}}$ **=**$\boldsymbol{A^{-1}}$**.A = I$_n$.**

A. $\boldsymbol{A^{-1}}$ **= I$_n$.**

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a+8c & 5b+8d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas,

$$\begin{cases} 5a+8c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3 \; e \; c=2$$

$$\begin{cases} 5b+8d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow b=8 \; e \; d=-5$$

Então, $\boldsymbol{A^{-1}}$= $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{A^{-1}}$**.A = I$_n$.**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a+2b & 8a+3b \\ 5c+2d & 8c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas,

$$\begin{cases} 5a+2b=1 \\ 8a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3 \; e \; b=8$$

$$\begin{cases} 5c+2d=0 \\ 8c+3d=1 \end{cases} \Rightarrow c=2 \; e \; d=-5$$

Então, $\boldsymbol{A^{-1}}$= $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

Logo **A.** $\boldsymbol{A^{-1}}$ **=**$\boldsymbol{A^{-1}}$**.A = $\mathbf{I_n}$**.

Propriedades:

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem n.

(i) Se A é invertível, então A^{-1} é também invertível e $(A^{-1})^{-1}$ = A;

(ii) Se A e B são invertíveis, então A.B também é invertível e $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

VI - TRANSFORMAÇÃO DE MATRIZ

6.1 - Operações Elementares por Linha

Seja uma matriz do tipo **m** x **n**. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a $L - ésima$ linha de A. Definimos as transformações elementares sobre as linhas da matriz A como se segue:

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

(i) Multiplicar uma linha L_i por uma constante não nula, indicamos por $L_i \leftrightarrow k.\ L_i$;

(ii) Permutar duas linhas L_i e L_t, indicaremos por $L_i \leftrightarrow\ L_t$;

(iii) Substituir uma linha L_i pela adição desta mesma linha com outra linha L_t multiplicada por um valor real k não nulo, indicamos por $L_i \leftrightarrow\ L_i + k.\ L_t$.

Sendo assim, uma matriz A m x n é matriz equivalente por linhas à uma matriz B m x n se B for obtida aplicando-se uma seqüência finita de operações elementares nas linhas de A.

Exemplificação:

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas já que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{L_2 \to L_2 - 2L_1} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - 3L_1} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - L_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Propriedades (referente às Matrizes Equivalentes por Linhas)**:**

(i) Se *A é* equivalente por linhas a *B*, então *B é* equivalente por linhas a *A;*

(ii) Se A é equivalente por linhas *a B e B é* equivalente por linhas a *C*, então *A* é equivalente por linhas a *C*.

6.2 - Matriz na Forma Escalonada

Uma matriz está na forma escalonada quando:

(i) o primeiro elemento não-nulo de cada linha não nula é 1;

(ii) se a linha k não consiste apenas de zeros, o número de zeros no inicio da linha k+1 é maior que o número de zeros no inicio da linha k;

(iii) se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas;

(iv) o primeiro elemento não-nulo de cada linha é o único elemento diferente de zero na sua coluna.

Exemplificação: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para colocar uma matriz **A** de ordem **m** x **n** na forma escalonada por linhas utilizamos as operações elementares sobre as linhas da matriz **A**.

Exemplificação:

A forma escalonada da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ já que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{L_2 \to L_2 - 4L_1} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - 7L_1} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}_{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 + 6L_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{L_1 \to L_1 - 2L_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VII - TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

7.1 - Matriz Ortogonal

Uma matriz real A é **ortogonal** se AA^T = A^TA = I. Nota-se que uma matriz ortogonal A é necessariamente quadrada e inversível, com inversa. $A^{-1} = A^T$.

Exemplificação descrita por Kuerten 2001

Seja $A = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$. Então:

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 1/9 \\ -4/9 & -7/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81} . \begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81} . \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

De modo análogo se prova que A^TA é verdadeira, como provado no exemplo de matriz inversa.

7.2 - Matriz de Permutação

Uma **matriz de permutação** é uma matriz obtida através da permutação das linhas (ou colunas) da matriz identidade.

Exemplificação de Matriz de Permutação: $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Pois: Dada I= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, trocando a linha 1 com a linha 2 da matriz identidade, temos: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, que é a matriz P_1.

Em geral, se P é uma matriz de permutação **n** x **n**, B é uma matriz n x r e A é uma matriz m x n, então, a multiplicação PB efetua uma permutação nas linhas de B e a multiplicação AP efetua uma permutação nas colunas de A.

Seja B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ e P = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, assim: PB = $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplificação:

Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e P = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, portanto, AP = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

VIII - APRESENTAÇÃO, RESOLUÇÃO E APLICAÇÕES PRÁTICAS DE MATRIZES NO COTIDIANO DO ALUNO DO ENSINO MÉDIO

8.1- Resolução de Problemas: uma visão teórica

Vivemos em uma era em que as mudanças sociais, culturais e econômicas são notáveis; em que a informação e a tecnologia, apesar de estarem em constante mudança, continuam ocupando um lugar em destaque, deixando o conhecimento cada vez mais exposto às mudanças nas mais variadas fontes. Saber manipular dados é uma habilidade indispensável para quem procura uma vaga em nosso competitivo mercado de trabalho. Assim, precisamos de indivíduos conscientes, com um nível cultural adequado ao exercício da cidadania, da democracia e da liberdade; que saibam tanto selecionar tais conhecimentos quanto que sejam capazes de acompanhar tais desenvolvimentos através de habilidades e competências.

Diante do exposto, podemos ressaltar que tal realidade acabou mudando a escola, na qual os modelos educacionais conservadores, que não conseguem mais acompanhar essa correria desenfreada, não são mais suficientes e nem mesmo, necessários. Sendo assim, se quisermos alunos capazes de discernir conceitos e avaliar com criticidade questões voltadas ao seu próprio cotidiano, é preciso, urgentemente, que despertemos, nos mesmos, o interesse e a curiosidade em saber mais, cada vez mais. E uma das principais formas de atingirmos tais objetivos é apresentar aos nossos alunos, de uma forma prática, a importância e aplicabilidade dos conteúdos de Matemática expostos em sala de aula.

Assim, vale ressaltarmos que a escola de hoje não deve ficar restrita apenas ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. Devemos considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. Contudo, o trabalho disciplinar pode e deve contribuir para tal desenvolvimento do aluno.

Sabemos que há muito tempo a Matemática vem deixando de ser considerada simplesmente uma ciência de formalização de estruturas, de teorização, de sistematização e do raciocínio lógico formal. Pois, não há dúvidas de que o processo ensino-aprendizagem é mais eficaz quando o conteúdo tem uma significação maior para o aluno. Sem desconsiderar esses atributos, que possuem sua importância, é fundamental que o conhecimento matemático parta, sempre que possível, de situações concretas vivenciadas pelo aluno, em suas experiências, em suas expectativas e em seus questionamentos diários.

Diante desta perspectiva o PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002) e o PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), retomam e reafirmam o discurso da LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que o ensino da Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

> "(...) o ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar prendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. (...)" (LDB 9394/96, em seu Título II Art. 35)

Devemos ressaltar que no Brasil, o ensino de Matemática, no que se refere à resolução de problemas, possui um caráter tradicional. Na maioria das vezes, percebemos, nesses problemas matemáticos, a ausência de um contexto significativo para o aluno ou de uma linguagem condizente com a utilizada em seu dia-a-dia.

De acordo com os PCN (2000, p. 40), os alunos devem perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras com as quais é possível modelar a realidade e interpretá-la. A Matemática deve também ser vista como ciência, na qual suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos possuem a função de construir nos Parâmetros Curriculares Nacionais novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Assim, os artigos da Lei nº 9394/96, os PCN 's e as Diretrizes Curriculares Nacionais propõem, em resumo, um ensino de qualidade buscando a formação de um cidadão crítico e consciente, integrado ao contexto sócio-político-econômico - cultural da sociedade em que este vive.

Dessa forma, optamos em não trabalharmos, maciçamente, na Matemática somente exercícios que exijam fórmulas e memorizações, e sim, em expor propostas inovadoras, buscando abrir espaço para questões mais atuais, modernas, abertas e acima de tudo, contextualizadas a realidade do aluno; avaliando assim, sua capacidade em ler um texto, interpretá-lo e finalmente, em tirar suas próprias conclusões; pois, como já foi dito, tal proposta desenvolve no aluno o senso crítico, possibilitando a formação de um cidadão mais consciente e participativo na sociedade.

De acordo com Brasil (1997):

> "O compromisso com a construção da cidadania pede necessariamente uma prática educacional voltada para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades em relação à vida pessoal, coletiva e ambiental. Nessa perspectiva é que foram incorporadas como Temas Transversais as questões da Ética, da Pluralidade Cultural, do Meio Ambiente, da Saúde e da Orientação Sexual." (PCN, 1997; 15)

Nesse sentido, a escola desempenha um papel fundamental na formação de alunos competentes, que sejam capazes de relacionar adequadamente várias informações, conhecimentos e habilidades para enfrentar e resolver situações-problema.

Diante da atual realidade escolar, tal mudança, se faz necessária; caso contrário, nós, professores de Matemática do Ensino Médio, estaremos fadados apenas em desenvolver as práticas matemáticas tradicionais, sem obter nenhuma resposta, resultado ou desempenho real dos alunos.

> "É necessário, portanto, que os interessados em educação matemática (pesquisadores e professores da matemática escolar) façam uma revisão e um exame crítico da situação atual; analisando também os currículos e os programas dos cursos de formação de professores. (BRITO, p. 222, 2001)"

Segundo o matemático húngaro George Polya (1887-1985), através de sua obra clássica "A arte de resolver problemas", os professores são apontados como grandes responsáveis pela aversão e pela indiferença existentes entre os alunos à Matemática:

> [...] a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a

> detestar a Matemática [...]. Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986).

Recentemente, testes de rendimentos aplicados aos alunos pelos Governos, tanto Estadual quanto Federal, tais como a Prova Brasil e o SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Brasileiro), entre tantos outros, indicam um baixo desempenho e rendimento na área de Matemática, que tem sido apontada como a disciplina que mais contribui, significativamente, na elevação das taxas de retenção.

Ressaltemos novamente a LDB (Lei nº 9.394/96), a qual afirma que o ensino médio tem como finalidades centrais tanto a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, quanto o intuito de garantir a continuidade de estudos, seja ele voltado à preparação para o trabalho ou para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e/ou a compreensão dos processos produtivos.

De acordo com o enfoque dado por Polya (1986) resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado; é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão; é a realização específica da inteligência, e esta, é o dom específico do homem. Assim, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta ou errada. Entretanto, a inteligência é, essencialmente, a habilidade de se resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra cabeças e toda e qualquer sorte de problemas.

O autor segue afirmando que o aluno desenvolve sua inteligência usando-a e aprende a resolver problemas resolvendo-os. Dessa forma devemos apresentar esses conteúdos sempre procurando associar a teoria com situações problemas ou aplicações que remetam à prática, permitindo e garantindo aos alunos que eles não vejam os conteúdos de Matemática de forma dissociada da prática.

Aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que apenas memorizar resultados, pois, a aquisição do conhecimento matemático está vinculada diretamente ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático; esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas.

No entanto, acreditamos que a resolução de problemas é algo muito mais complexo do que se parece. No qual, o que realmente importa é o caminho que o aluno utiliza para chegar ao resultado, pois, isso o estimula a questionar sua própria resposta, comparando caminhos diferentes para obter a solução desejada, assim, colocando em prática as sugestões de Polya. Já que a resolução de problemas leva o aluno a desenvolver um raciocínio lógico-dedutivo, a estabelecer relações, a fazer conjecturas e ainda, analogias.

Podemos ressaltar outros autores, como por exemplo, F. B. Abbott (ABBOTT, 2011), que afirma que a resolução de problemas pode efetivamente contribuir para o ensino de Matemática no Ensino Médio; e ainda, M. A. Saldanha e M. Y. Noguti (SALDANHA e NOGUTI, 2012), no trabalho "Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de Matemática nas escolas do CASE", onde reafirmam que o método de Polya, pode ser utilizado de modo eficaz no ambiente escolar do Ensino Médio.

Diante disso, realizamos como proposta pedagógica, aos professores de matemática do Ensino Médio, um roteiro de aulas diferenciadas, com formas e maneiras contextualizadas de trabalharmos resolução de problemas direcionados a aplicação prática de matrizes, uma vez que esta envolve a compreensão de uma determinada situação, a identificação de seus dados, mobilização de conhecimentos, construção de uma estratégia ou um conjunto de procedimentos, organização e perseverança na busca da resolução; e ainda, uma análise constante do processo de resolução e da validade da resposta e, se for o caso, a formação de outras situações-problema voltadas à realidade do cotidiano de cada aluno. Sendo essa seqüência semelhante a que o matemático Polya estabelece como necessária para resolver um problema. Como antes ressaltado, segundo ele, são quatro as etapas principais: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano; e fazer o retrospecto ou verificação.

É importante salientarmos que o primeiro passo na solução de problemas consiste na compreensão dos mesmos. É preciso esclarecer que compreender um problema não significa somente compreender as palavras, a linguagem e os símbolos com os quais ele é apresentado, e sim, adquirir uma disposição para buscar a solução.

Para o autor, após termos compreendido o problema devemos conceber um plano que nos ajude a resolvê-lo, ou seja, devemos fazer a conexão entre os dados do problema e o que ele pede. Geralmente, os planos, as metas e as submetas que o aluno pode estabelecer em sua busca durante o desenvolvimento do problema são denominados estratégias ou procedimentos heurísticos de solução de problemas, enquanto que os procedimentos de transformação da informação requeridos por esses planos, metas e submetas são denominados regras, algoritmos ou operações.

Existe uma grande variedade de estratégias a serem seguidas diante de um problema. Dante (1999) propõe vários caminhos, entre eles podemos citar: a representação do problema; a tentativa e o erro; a redução ao que tem menos ou ao que tem mais; a representação geométrica; e a representação algébrica.

Em seguida, segundo Polya, após termos delineado um plano, o terceiro passo para solucionar uma tarefa é, logicamente, executar esse mesmo plano, transformando o problema por meio das regras conhecidas. É evidente, que a solução de problemas não segue sempre uma seqüência de regras rígidas. Pois, muitas vezes, o estabelecimento de um plano e a sua execução, faz com que nos coloquemos diante de novos problemas, ou seja, cada vez que uma submeta é devidamente atingida surgi um novo problema, que se transforma em uma questão tão diferente da inicial que nos obriga a começar novamente o processo de solução.

E finalmente, o processo de solução de um problema termina quando o objetivo estabelecido é alcançado e quando a análise da solução é obtida. Esta última etapa tem dois objetivos, sendo que o primeiro é de levar o aluno a questionar a resposta encontrada e verificar se ela alcançou ou não a meta, e se deve, por isso, revisar o seu procedimento; e o segundo objetivo serve para ajudar o aluno a tornar-se consciente das estratégias e regras empregadas, e, dessa forma, melhorar a sua capacidade heurística.

A teoria de Polya influenciou diversos estudos e autores sobre como ensinar a pensar e como resolver problemas, como é o caso de Dante (1999) já citado anteriormente, e Varizo (1993), que propõe no quadro abaixo, um esquema de atividades de resolução de problemas para serem desenvolvidas em sala de aula.

TABELA 02. Síntese de atividades desenvolvidas numa sessão de resolução de problemas

Etapas	Resultados	Procedimentos possíveis do professor	Ações possíveis do aluno
1 – Apresentação do problema	O aluno compreende o enunciado do problema.	Orienta a discussão e o questionamento, elaborando perguntas.	- Lê o problema; - Ouve a leitura; - Escreve o problema; - Recorda informações; - Faz perguntas.
2 – Esforço de solução	O aluno propõe e	- Orienta o esforço do	- Faz conjecturas;

	desenvolve pelo menos uma estratégia	aluno; - Encoraja o aluno com palavras de incentivo; - Faz sugestões.	- Faz analogias; - Propõe estratégias; - Discute com o(s) colega(s).
3 – Desenvolvimento da solução	O aluno coloca em execução seu plano de solução.	Acompanha o trabalho do aluno.	- Calcula; - Deduz; - Certifica-se da precisão do raciocínio.
4 – Discussão do problema	Os alunos discutem seus esforços.	- Oferece condições para os alunos conhecerem as soluções dos colegas; - Orienta o debate; - Orienta para que façam generalizações.	- Apresenta seu processo de solução para os colegas; - Ouve e expressa opinião; - Generaliza.

O autor Varizo (1993), que cita Polya, também defende a idéia de que o professor, quando trabalha com resolução de problemas, deve levar em consideração as condições sócio-culturais e psicológicas dos alunos; e que a resolução de problemas é um processo, no qual a atenção está voltada às estratégias, aos métodos, aos procedimentos heurísticos utilizadas para chegar à solução de problemas; Varizo (1993) segue afirmando: o que realmente interessa e importa é o raciocínio desenvolvido pelo aluno e não somente a resposta dada por ele. Contudo, apesar de todas essas justificativas, ainda encontramos professores que acreditam que solucionar problemas é apenas chegar a uma resposta correta.

Vale ressaltar que toda atividade ao envolver algum tipo de desafio intelectual é considerada uma resolução de problema. Dessa forma, procuramos sugerir apenas exemplos de atividades a serem resolvidas em sala de aula, que exijam não apenas a aplicação direta de fórmulas ou algoritmos, contudo, que estejam direcionados diretamente ao dia a dia. Na maioria das atividades propostas procuramos desenvolver habilidades mais significativas, levando o aluno a pensar, comparar, criar, generalizar, criticar, de preferência a partir de situações novas, e significativas de seu cotidiano; pois, na Matemática o importante é entendermos como os fundamentos são construídos e aplicados pelos seus usuários.

Quando os alunos dominam certos conceitos matemáticos, como por exemplo, as operações aritméticas envolvidas, o uso da tecnologia serve como instrumento de apoio, que torna mais simples e rápido o aprendizado de novos conceitos. Pois, ao resolver um problema de nada adiantará ao aluno saber apenas o conhecimento teórico se ele não conseguir atingir a primeira etapa proposta por Polya. Assim, uma adequada combinação entre a compreensão e a assimilação de conceitos teóricos, podem ser o meio mais eficaz para a formação científica do aluno, podendo dessa forma, auxiliá-lo nos primeiros passos para a dura competição do mercado de trabalho nos dias de hoje.

Como o nosso objetivo é a compreensão e a resolução de problemas de Matrizes, então, sugerimos exercícios que levem o aluno a fazer conjecturas e que desenvolvam estratégias para a resolução dos mesmos. No decorrer de nossa pesquisa nos deparamos com diversos trabalhos que abordam tal conteúdo. Dentre tantos, encontramos a monografia de Protasio Kraieske (1999), que ressalta a importância de se dar subsidio ao professor de matemática, para que este possa preparar suas aulas de uma maneira diferenciada e ir ao encontro com o verdadeiro entendimento do aluno, quando este conseguir entender a finalidade do estudo das matrizes e suas respectivas operações em sua vida.

8.2 - Propostas Práticas de Aplicações de Matrizes

Lamentavelmente, ainda há em nossa sociedade uma cultura generalizada de que a Matemática é uma ciência extremamente difícil e que esta, está voltada apenas para poucos, porém, todos podem e devem aprendê-la. Esse equívoco ocorre já que a maioria da população não a compreende, assim, poucos se dedicam a aprender suas reais aplicações e muitos acreditam poder viver sem ela, julgando-a como inútil em suas vidas.

Pensamentos como estes existem devido ao fato de que as ciências exatas são consideradas bem mais complexas que outras. Provavelmente, seu formalismo e seu rigor, bem como, alguns professores, contribuem diretamente para tal aversão. Como afirmamos no capítulo anterior, grande parte desse desinteresse dos alunos se deve à falta de conteúdo e/ou ao despreparo dos professores de Matemática. Já que muitas vezes os educadores não demonstram aos mesmos a verdadeira aplicabilidade do conteúdo. Assim, é necessário eliminar tal estigma.

> [...] a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática [...]. Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986).

É esperado que, ao final do ensino médio, os alunos saibam usar e aplicar a Matemática para resolver problemas práticos de seu cotidiano e para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; que compreendam que esta é uma ciência com características próprias e que a mesma, se organiza via teoremas e demonstrações; que percebam ainda, tal ciência como um conhecimento social, historicamente construído; e que finalmente, saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico de nossa sociedade.

Diante da atual realidade, este trabalho visa apontar como as matrizes podem ser aplicadas de maneiras práticas em sala de aula. Pois, de nada adianta ensinar ao aluno o que é e como funciona uma matriz, se não mostrarmos ao menos, para que ela serve e qual sua utilidade prática no dia-a-dia e na realidade de cada um. Pois, geralmente, os alunos concluem o ensino médio sem saber a real definição e utilização de Matrizes em suas vidas.

Dessa forma, a utilização destas práticas de resolução de problemas de matrizes propõe uma mudança radical, tanto dos professores quanto dos alunos, no modo de agir e de compreender tais problemas; propõe ainda, que seja desenvolvido nos alunos, verdadeiramente, o gosto e o interesse em aprender. Vale ressaltar que essa proposta, através da contextualização, visa proporcionar aos alunos uma aproximação, maior e real, entre a teoria e a prática, afim de que este aprenda praticando e inovando.

Quando questionados sobre a aplicação de problemas de matrizes, poucos professores conseguem responder de forma satisfatória, assim, procurando contribuir ao debate sobre as orientações curriculares, notamos a necessidade de inovação no uso de formas e maneiras diversificadas de aplicações práticas de Matrizes em sala de aula aos alunos do ensino médio.

No que concerne ao processo de ensino-aprendizagem de matrizes, podemos inferir que este se caracteriza pela utilização de regras que, de um modo geral, vem se apresentando completamente desvinculadas da realidade dos alunos. Assim como o ensino de matrizes que vem se apresentando em total descompasso com os avanços tecnológicos e com os estudos já realizados e apresentados pela Psicologia Educacional. (SANCHES, 2002, p.6).

Conforme o autor citado, percebemos ainda, que poucos são os livros didáticos adequados para auxiliar o ensino de matemática, particularmente de matrizes, dado que muitos apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e apenas, exercícios repetitivos, prejudicando assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos. Esta dificuldade encontrada pelos professores de Matemática deve ser vista como um estímulo, para que estes busquem novos métodos e, sobretudo, formas práticas da utilização de matrizes no cotidiano dos alunos.

Assim, concluímos que o desenvolvimento de projetos interdisciplinares é um dos meios para a efetivação da mudança na postura do professor de Matemática frente ao tradicional. A utilização do contexto histórico dos conteúdos é outra forma de se integrar disciplinas e mostrar aos alunos que os conteúdos não existem por si só; estão de alguma forma, interligados e contextualizados, tanto com as civilizações e pensadores da antiguidade, os filósofos, quanto com o cotidiano e realidade de cada um, provando assim, que desenvolvimento da matemática é contínuo e nunca deixará de existir.

> "O objetivo da aplicação é estabelecer vínculo do conhecimento com a vida de modo a suscitar independência de pensamento e atitude crítica e criativa expressando a sua compreensão da prática social. Ou seja, a função pedagógica didática é a de avançar da teoria à prática, é colocar os conhecimentos disponíveis a serviço da interpretação e análise da realidade. (...)" (Libâneo, 1994, p. 189).

Baseando-nos em conceitos e em propostas de Resolução de Problemas, expostas por Polya sobre a compreensão de problema, e que podem ser feitos sem exigir maior conhecimento matemático, além dos quais já são apresentados no Ensino Médio, apresentamos aos professores de Matemática do Ensino Médio, 10 sugestões de problemas voltados diretamente à aplicação prática de Matrizes em sala de aula a alunos do ensino médio.

Sugestão 1:

No dia 25 de fevereiro de 2013, em uma coletiva de imprensa, acompanhado pelas seguintes autoridades: Secretário de Vigilância em Saúde, Jarbas Barbosa; Secretário Executivo do CONASS - Conselho Nacional dos Secretários de Saúde, Jurandi Frutuoso; Secretário Executivo do CONASEMS - Conselho Nacional de Secretarias Municipais de Saúde, José Ênio; Coordenador Nacional do Programa da Dengue, Giovanini Coelho; o Ministro da Saúde Alexandre Padilha anunciou os novos dados da Dengue no Brasil até a 7ª semana epidemiológica (*até 16 de fevereiro 2013).

TABELA 03. Comparativo de casos notificados 2012 e 2013*

UF	CASOS NOTIFICADOS		INCIDÊNCIA (nº de casos por 100 mil habitantes)		Percentual de aumento
	2012	2013	2012	2013	
Norte	11.446	18.435	70	112,8	61%
RO	514	3.711	32,3	233,4	622%
AC	688	3.116	90,7	410,7	353%
AM	1.883	4.866	52,4	135,5	158%
RR	218	155	46,4	33	-29%
PA	4.819	1.985	61,6	25,4	-59%
AP	78	181	11,2	25,9	132%
TO	3.246	4.421	229	311,8	36%
Nordeste	24.574	11.943	45,6	22,2	-51%
MA	1.128	313	16,8	4,7	-72%
PI	1.154	346	36,5	10,9	-70%
CE	3.481	1.711	40,4	19,9	-51%
RN	2.310	955	71,6	29,6	-59%
PB	244	522	6,4	13,7	114%
PE	6.837	476	76,6	5,3	-93%
AL	2.316	378	73,2	11,9	-84%
SE	835	199	39,6	9,4	-76%
BA	6.269	7.043	44,2	49,7	12%
Sudeste	25.062	80.876	30,7	99,2	223%
MG	3.755	35.334	18,9	178	841%
ES	1.445	9.013	40,4	251,9	524%
RJ	16.398	14.838	101	91,4	-10%
SP	3.464	21.691	8,3	51,8	526%
Sul	423	12.420	1,5	44,8	2836%
PR	361	12.040	3,4	113,8	3235%
SC	30	172	0,5	2,7	473%
RS	32	208	0,3	1,9	550%
Centro-Oeste	8.984	80.976	62,3	561,4	801%
MS	865	42.015	34,5	1677,2	4757%
MT	3.791	10.765	121,7	345,5	184%
GO	4.080	27.376	66,3	444,8	571%
DF	248	820	9,4	31	231%
Total	70.489	204.650	36,3	105,5	190%

Fonte: Ministério da Saúde

Qual Estado da região Centro-Oeste teve maior índice de caso de Dengue em 2012? E o menor do Brasil em 2013?

Solução:

Para respondermos este problema devemos analisar tanto às linhas, para saber o Estado, quanto às colunas, para verificação do ano; ao fazermos essa análise utilizamos, quase que inconscientemente o conceito de Matrizes.

Contando apenas os estados, verificamos que o estado com maior índice em 2012, está na linha 26 com a segunda coluna, sendo Goiás com 4080 casos.

Enquanto que o Estado com menor índice em 2013 está na linha 4, terceira coluna, ou seja, o estado de Roraima.

Sugestão 2:

(ENEM-MEC) - Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, elas precisaram se comunicar por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro abaixo, o número **1** indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número **0** indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo. Assim,

	Aldo	*Beto*	*Carlos*	*Dino*	*Ênio*
Aldo	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
Beto	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
Carlos	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
Dino	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
Ênio	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

O número mínimo de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Solução:

O único que sabe o telefone do Carlos é o Ênio, e o único que sabe o telefone do Ênio é o Dino. Como Aldo sabe o telefone do Dino, então a menor seqüência de telefonemas será:

Dino → Ênio → Carlos

Ou seja, o número mínimo de telefonemas é 3.

Sugestão 3:

Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para jogar no Playground, do shopping de sua cidade, tanto no sábado quanto no domingo. No lugar onde eles foram jogar, era necessário comprar fichas para cada partida. As matrizes a seguir resumem quantas fichas cada um comprou e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado

D refere-se às despesas de domingo

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de fichas que **i** pagou para **j**, sendo Antônio o número **1**, Bernardo o número **2** e Cláudio o número **3** (a_{ij} representa o elemento da linha **i**, coluna **j** de cada matriz).

Assim, no sábado Antônio pagou **4** fichas para ele próprio, **1**ficha para Bernardo e **4** para Cláudio (primeira linha da matriz **S**).

a) Quem jogou mais partidas no fim de semana?

b) Quantas fichas Cláudio ficou devendo a Antônio?

Solução:

a) Como as linhas correspondem a quem comprou as fichas e as colunas a quem jogou, então, a primeira coluna representa as partidas que Antônio jogou; a segunda corresponde as que Bernardo jogou e a terceira as que Cláudio jogou.

Portanto, Antonio jogou **7** vezes no sábado e **7** vezes no domingo, totalizando assim, **14** partidas; Bernardo jogou **4** vezes no sábado e **9** no domingo, totalizando **13** partidas e enquanto que Cláudio jogou **9** sábado e **6** no domingo, totalizando **15** partidas. Isso significa que então que quem jogou mais vezes foi o Cláudio.

b) Em cada uma das matrizes, o elemento $\boldsymbol{a_{13}}$ significa Antônio pagando para Cláudio e o elemento $\boldsymbol{a_{31}}$ representa Cláudio pagando para Antônio.

Então: Antônio pagou para Cláudio: **4** + **3** = **7** fichas

Cláudio pagou para Antônio: **3** + **2** = **5** fichas.

Logo,

Cláudio ficou devendo **2** fichas para Antônio.

Sugestão 4:

Nos meses de Abril e Maio foram pesquisados os preços dos combustíveis: etanol, gasolina e diesel em dois postos de um mesmo bairro.

Preço dos combustíveis em abril (R$/l)

Combustível\Posto	X	Y
Etanol	2,29	2,27
Gasolina	3,49	3,49
Diesel	3,10	3,12

Preço dos combustíveis em maio (R$/l)

Combustível\Posto	X	Y
Etanol	2,32	2,31
Gasolina	3,53	3,55
Diesel	3,12	3,10

Houve redução no preço de algum combustível em um desses postos? Em qual posto e em qual combustível?

Solução:

Para responder tais perguntas devemos comparar cada dado correspondente das tabelas, nos dois meses e então, chegar à resposta correta.

Uma maneira prática para responder essas perguntas é representar os dados das tabelas em forma de matrizes, onde as linhas representaram o preço de cada combustível, e as colunas representaram cada posto.

Chamaremos de **A**, a matriz referente ao mês de Abril e de **M** a matriz referente ao mês de Maio.

Dessa forma temos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2{,}29 & 2{,}27 \\ 3{,}49 & 3{,}49 \\ 3{,}10 & 3{,}12 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2{,}32 & 2{,}31 \\ 3{,}53 & 3{,}55 \\ 3{,}12 & 3{,}10 \end{bmatrix}$$

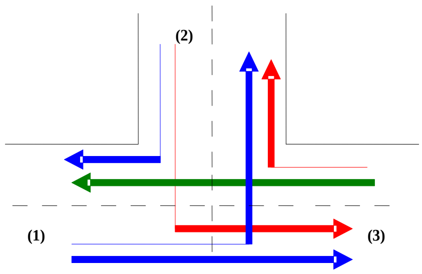
Agora vamos calcular a diferença entre elas e assim, verificar qual dos combustíveis teve redução.

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2{,}32 & 2{,}31 \\ 3{,}53 & 3{,}55 \\ 3{,}12 & 3{,}10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2{,}29 & 2{,}27 \\ 3{,}49 & 3{,}49 \\ 3{,}10 & 3{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}04 \\ 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que o posto que obteve tal redução foi o posto **Y** no combustível **Diesel**.

Sugestão 5:

A ilustração abaixo representa um Cruzamento de duas ruas de mão dupla, cujo fluxo de automóveis nos pontos **(1), (2)** e **(3)** é organizado por três conjuntos de Semáforos.



As matrizes $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$ indicam o tempo, em minutos, durante o qual alguns semáforos se mantêm simultaneamente abertos segundo a sequência dada.

De:

$$\mathbf{M_1} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para: (1) (2) (3)

Inicialmente, durante 1 minuto, ficam verdes os semáforos de (1) para (2), de (1) para (3) e de (2) para (1).

De:

$$\mathbf{M_2} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para: (1) (2) (3)

Em seguida, durante meio minuto ficam verdes os semáforos de (2) para (1), de (2) para (3) e de (3) para (2).

De:

$$\mathbf{M_3} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para: (1) (2) (3)

Por fim, durante meio minuto ficam verdes os semáforos de (3) para (1), de (3) para (2) e de (1) para (3).

Assim, somando-se as matrizes $M_{1,}$ M_2 e $M_{3,}$ teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz M, obtida somando-se $M_{1,}$ M_2 e M_3, termo a termo, mostra o tempo que cada semáforo fica aberto em cada sentido no período de 2 minutos.

De:

$$M = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para: (1) (2) (3)

Para essa matriz observamos, por exemplo, que o semáforo de (2) para (1) fica aberto durante 1 minuto e meio a cada período de 2 minutos.

Se multiplicarmos todos os termos da matriz M por 30, obtemos o tempo, em minutos, que cada semáforo fica aberto no decorrer de 1 hora:

$$30 \text{ x } M = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 45 \\ 45 & 0 & 15 \\ 15 & 30 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso dessas ruas, sabemos que é possível passar até 20 carros por minuto cada vez que os semáforos se abrem. Então, se multiplicarmos por 20 todos os termos da matriz anterior, teremos a quantidade máxima de carros que podem passar por nesse Cruzamento no período de 1 hora:

$$20 \text{ x } 30 \text{ x } M = \begin{bmatrix} 0 & 600 & 900 \\ 900 & 0 & 300 \\ 300 & 600 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se o número de carros em alguma das direções for maior que a quantidade máxima possível, temos então, um engarrafamento, que pode ou não ser resolvido alterando-se os tempos de abertura dos semáforos, isto é, modificando-se os valores nas matrizes $M_{1,}$ M_2 e M_3.

Atenção: Em exemplos como esse o professor consegue de forma prática abordar tanto adição de matrizes quanto multiplicação de um escalar por uma matriz. Além disso o Professor pode e deve chamar a atenção dos alunos para perceber que os elementos da diagonal principal é sempre zero pois, por exemplo, não tem como o carro ir de 1 para 1.

Sugestão 6:

Vejamos parte da tabela de classificação da série A do Campeonato Brasileiro de futebol do Campeonato Brasileiro 2014 - 20ª rodada:

TABELA 04. Classificação do Campeonato Brasileiro 2014 – 20ª Rodada

	Vitórias	**Empates**	**Derrotas**
Cruzeiro	14	4	2
São Paulo	11	6	3
Corinthians	9	9	2
Internacional	10	4	6
Fluminense	9	5	6

Fonte: http://globoesporte.globo.com/futebol/brasileirao-serie-a

Notemos que o número de vitórias, empates e derrotas, de cada time, pode ser representado pela matriz: $A = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 11 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \\ 10 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos **3** pontos para vitória, **1** para empate e **0** para derrota, formando a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Com esses dados analisados é possível calcular o total de pontos de cada equipe, através da multiplicação de matrizes:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 11 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \\ 10 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ 39 \\ 36 \\ 34 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

	Pontuação
Cruzeiro	**46**
São Paulo	**39**
Corinthians	**36**
Internacional	**34**
Fluminense	**32**

Sugestão 7:

Um laboratório fabrica, entre outros, os remédios A, B e C. Para a produção de uma unidade do remédio A, são necessários 3g do ingrediente x, 7 g do ingrediente y e 10 g do ingrediente z.

Com relação ao remédio B, são necessários 2 g de x, 4 g de y e 5 g de z. Para o remédio C, precisamos de 5 g de x,1 g de y e 6g de z.

O consumo dos três remédios nos meses de junho e julho costuma ser:

- Junho: 80 unidades de A, 100 unidades de B e 150 unidades de C;
- Julho: 50 unidades de A, 120 unidades de B e 90 unidades de C.

Com base nesses dados, quantos gramas de x, y e z são necessários para produzir o que é consumido em cada mês?

Solução:

Considerando:

$I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ a matriz que descreve a quantidade de cada ingrediente em cada remédio.

$R = \begin{bmatrix} 80 & 50 \\ 100 & 120 \\ 150 & 90 \end{bmatrix}$ a matriz que descreve o número de unidades de cada remédio consumidas em cada mês.

Assim, em Junho são necessários:

- 3 x 80 + 2 x 100 + 5 x 150 = 1190 gramas de x
- 7 x 80 + 4 x 100 + 1x 150 = 1110 gramas de y
- 10 x 80 + 5 x 100 + 6 x 150 = 2200 gramas de z.

Em julho, são necessários:

- 3 x 50 + 2 x 120 + 5 x 90 = 840 gramas de x
- 7 x 50 + 4 x 120 + 1x 90 = 920 gramas de y
- 10 x 50 + 5 x 120 + 6 x 90 = 1640 gramas de z.

Repare que:

$$I \cdot R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 & 50 \\ 100 & 120 \\ 150 & 90 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \times 80 + 2 \times 10 + 5 \times 150 & 3 \times 50 + 2 \times 120 + 5 \times 90 \\ 7 \times 80 + 4 \times 100 + 1 \times 150 & 7 \times 50 + 4 \times 120 + 1 \times 90 \\ 10 \times 80 + 5 \times 100 + 6 \times 150 & 10 \times 50 + 5 \times 120 + 6 \times 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1190 & 840 \\ 1110 & 920 \\ 2200 & 1640 \end{bmatrix}.$$

Sugestão 8:

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (p). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	**Camisa B**	**Camisa C**
Botões p	**3**	**1**	**3**
Botões G	**6**	**5**	**5**

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de Maio e Junho, é dado pela tabela:

	Maio	**Junho**
Camisa A	**100**	**50**
Camisa B	**50**	**100**
Camisa C	**50**	**50**

Nestas condições, obter a tabela que dá o total de botões usados em Maio e Junho.

Solução:

Vamos escrever as tabelas na forma de matrizes.

Chamemos de tabela X:

	Camisa A	**Camisa B**	**Camisa C**
Botões p	**3**	**1**	**3**
Botões G	**6**	**5**	**5**

Que é representada pela matriz X $=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

E chamemos de tabela Y:

	Maio	**Junho**
Camisa A	**100**	**50**
Camisa B	**50**	**100**
Camisa C	**50**	**50**

Representada pela matriz Y$=\begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}$

Ao realizarmos a multiplicação de matrizes, temos o total de cada tipo de botão utilizados nos meses de Maio e Junho, como vemos a seguir:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 1100 & 1050 \end{bmatrix} = Z.$$

Onde Z é a matriz que pode ser representada pela tabela abaixo, que representa a quantidade de botões que são utilizados nos meses de Maio e Junho.

	Maio	Junho
Botões p	500	400
Botões G	1100	1050

Sugestão 9:

Aplicação à Matrizes da Criptografia

Diante de tantas possibilidades de aplicação prática do estudo de Matrizes voltadas ao nosso cotidiano podemos salientar uma forma diferente e muito interessante de ensinar matrizes inversas e multiplicação de matrizes, à criptografia.

A criptografia é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais uma informação pode ser transformada de sua forma original para outra ilegível, de uma maneira específica e que possa ser conhecida apenas por seu destinatário. A palavra criptografia é derivada de kriptos, que em grego significa oculto, escondido. Contudo, a mesma não tem como objetivo ocultar a existência de uma mensagem, somente de esconder o seu significado.

Podemos ressaltar alguns exemplos de criptografia utilizados em nosso cotidiano para manter o sigilo de dados: transações eletrônicas, serviços disponíveis na internet e movimentações bancárias. Isso ocorre devido à existência de um protocolo específico que recebe o nome de chave, estabelecido, previamente, pelo receptor e pelo transmissor. O texto passa a ser codificado, tornando então, a mensagem incompreensível a terceiros e posteriormente, podendo o receptor torná-la compreensível novamente ao decodificá-la por meio de uma chave, não sofrendo nenhum tipo de alteração em seu significado.

É importante ressaltarmos ainda, que um dos métodos utilizados para criptografar mensagens é realizado através de matrizes. Este método simples e curioso envolve matrizes inversas, no qual, relacionamos as letras do alfabeto e o símbolo #, que representa um espaço em branco, a números primos; qualquer outra numeração dos 27 símbolos tipográficos poderia ser possível, contudo, tanto o remetente quanto o destinatário teriam combiná-la previamente.

Vejamos a seguinte aplicação:

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Como já foi dito, se o número de elementos da mensagem for impar, podemos acrescentar um caractere branco (#), não alterando em nada a mensagem.

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica mostrada acima, obtemos:

C	O	D	I	G	O	#	S	E	C	R	E	T	O
7	53	11	29	19	53	2	71	13	7	67	13	73	53

Suponhamos que a chave utilizada seja uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organizamos a seqüência de números como elementos de uma matriz B com duas linha, ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o remetente usa a matriz A para codificar a mensagem enquanto que o destinatário usa a Matriz A^{-1} para decodificá-la. O objetivo deste método é que a mensagem seja codificada utilizando pares de caracteres, de modo que tabelas de freqüência de letras não ajudem em nada a um decodificador não-amigável. O remetente vai realizar a multiplicação A.B, obtendo a matriz C, que é enviada ao receptor.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$$

Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave por C, ou seja, $A^{-1}.C = B$,

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix} = B$$

Ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}.$$

Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, pode obter a mensagem original.

Isso é possível já que: $A \cdot B = C$

Multiplicando os dois membros à esquerda por A^{-1}, $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot C$.

Aplicando a associativa, a definição de matriz inversa e o elemento neutro:

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = A^{-1}C \quad \Rightarrow \quad I \cdot B = A^{-1}C \Rightarrow B = A^{-1}C.$$

Sugestão 10:

Nosso intuito, ao aplicar este exemplo, é apenas mostrar a importância de escalonar matrizes e não dar ênfase na resolução de sistemas linear, uma vez que esse possui suas próprias definições e propriedades. Uma importante aplicação das matrizes é equacionar problemas com duas ou mais incógnitas.

Por exemplo:

Uma loja de cosméticos oferece três kits de produtos de beleza contendo batom, esmalte e sombra, com os seguintes preços:

- Kit 1: 1 batom, 2 esmaltes e 2 sombras – R$ 16,00
- Kit 2: 2 batons, 1 esmalte e 2 sombras – R$ 15,00
- Kit 3: 2 batons, 2 esmaltes e 3 sombras – R$ 22,00

Determine o preço de uma unidade de cada um desses produtos.

Solução:

Representando o preço de cada unidade de batom por B, de cada unidade de esmalte por E, e o de cada unidade de sombra por S, então, temos que:

$$\begin{cases} B + 2E + 2S = 16 \\ 2B + E + 2S = 15 \\ 2B + 2E + 3S = 22 \end{cases}$$

Depois de equacionar o problema, podemos escrever a matriz que representa essa situação: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & 2 & 15 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \end{bmatrix}$.

Utilizando as transformações elementares nas linhas da matriz e escalonando a matriz, obteremos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & 2 & 15 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \end{bmatrix}_{L_2 \to L_2 - 2L_1} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & -3 & -2 & -17 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - 2L_1} \to$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & -2 & -1 & -10 \end{bmatrix}_{L_3 \to 3L_3 - 2L_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & {}^{2}/_{3} & {}^{17}/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Com isso, temos o valor da sombra já definido por R$ 4,00, como mostra o sistema abaixo.

$$\begin{cases} B + 2E + 25 = 16 \\ E + {}^{2}/_{3}\, S = {}^{17}/_{3} \\ S = 4 \end{cases}$$

Agora, substituindo o valor da sombra na segunda equação, obtemos o valor do esmalte R$3,00, e consequentemente, substituindo os dois valores na primeira equação obteremos o valor do batom, que é de R$ 2,00, finalizando assim o problema.

IX - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho, como proposta de metodologia de ensino, se deu inicialmente com o objetivo de colaborar e auxiliar tanto professores de Matemática quanto alunos do Ensino Médio no processo ensino-aprendizagem do conteúdo de Matrizes; contudo, no decorrer de nossas pesquisas e da construção dos problemas matemáticos ficou evidente que nossa contribuição, aos mesmos, poderia ser ainda maior através do ensinamento das técnicas de resolução de problemas Polya e de aplicabilidades de matrizes de uma maneira inovadora e diferenciada, envolvendo diretamente o cotidiano e a realidade dos alunos.

Essa contribuição se faz necessária devido às constantes mudanças tecnológicas, sociais, culturais e econômicas em que vivemos diariamente. Nas quais o conhecimento acaba ficando cada vez mais exposto a tais transformações, inclusive na escola, em que os modelos educacionais conservadores não conseguem mais acompanhar tamanha evolução, não sendo mais considerados suficientes, nem tão poucos, necessários no processo de ensino-aprendizagem.

Diante dessa realidade concluímos que ao ensinarmos Matemática, nós, professores, estamos contribuindo para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, ainda, à contextualização sociocultural, formando então, indivíduos conscientes, capazes de discernir conceitos e avaliar com criticidade questões voltadas ao seu próprio cotidiano, alunos com nível cultural adequado, que saibam selecionar conhecimentos e que sejam capazes de acompanhar tais desenvolvimentos através de habilidades e competências.

Para tal feito procuramos neste trabalho salientar a origem, a definição, as propriedades, os tipos e formas de Matrizes e de resolução de problemas, sugerindo aplicações práticas e diferenciadas de formas de solucioná-las em sala de aula; sem nos esquecermos de relacionar essas aplicações de matrizes ao cotidiano dos alunos, focando sempre numa melhor formação do indivíduo e procurando desmistificar o conteúdo de matrizes, mostrando o quão útil as mesmas são em nosso dia a dia.

Finalmente, concluímos que após termos ressaltado as técnicas de resolução de problemas sugeridos por Polya juntamente com inovadoras formas de aplicabilidades de exercícios em sala de aula, ao apresentarmos tanto aos professores de Matemática quanto aos alunos do Ensino Médio tais sugestões de aplicação de problemas voltados às Matrizes, nosso objetivo com a realização deste trabalho foi alcançado; pois, idealizamos e realizamos um Roteiro de Aula com sugestões de problemas de Matrizes totalmente direcionados ao cotidiano dos mesmos para serem trabalhados abordando exclusivamente os conteúdos do Ensino Médio.

Assim, podemos ressaltar que essa didática tende inserir a aplicação de Matrizes no cotidiano dos alunos, servindo como ferramenta prática e adicional no processo ensino-aprendizagem, uma vez que propomos que este seja apresentado aos professores do Ensino Médio para ser utilizado como material didático ou ainda para contribuir no desenvolvimento de oficinas de Matemática com o intuito de aperfeiçoamento desses profissionais, visto que este conteúdo, muitas vezes, é trabalhado apenas de forma teórica.

X - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

[2] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos PCNs. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: apresentação dos temas transversais, ética. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[4] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: bases legais. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

[6] BRITO, Márcia Regina F. Psicologia da Educação Matemática. Florianópolis, Editora Insular, 2001.

[7] CAMARGO, Maria.Utilização de matrizes em nosso dia a dia.TrabalhosFeitos.com. Retirado 11, 2011, de http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Tema-Utiliza%C3%A7%C3%A3o-De-Matrizes-Em-Nosso/112580.html. Acesso em 10 de setembro de 2014

[8] DANTE, Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 1999.

[9] KUERTEN,Cristini. Algumas aplicações de matrizes. Trabalho de conclusão de curso no Curso de Matemática habilitação Licenciatura. Universidade Federal De Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, 2001.Disponível: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96804/Cristini_Kuerten.PDF?sequence=1. Acesso: 06 de setembro de 2014.

[10] LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo, Editora Cortez, 1994.

[11] LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio – volume 3. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. Volume 2 – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

[13] POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático/ G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

[14] SANCHES, M.H.F. (2002). Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes. Dissertação (Mestrado em educação matemática) UNICAMP, São Paulo.

[15] VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. O ensino da matemática e a resolução de problemas. Inter-Ação: revista da faculdade de educação da UFG. Goiânia, v. 17, n. 1–2, p. 1 – 21, jan/dez. 1993.

XI - SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

[1] BAGNO, Marcos. Pesquisa na escola: o que é / como se faz. São Paulo: Loyola, 1998.

[2] BARRETO FILHO, Benigno e SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática: aula por aula. V. único. São Paulo: FTD, 2000.

[3] BORDEAUX, Ana Lúcia... [et al.], Matemática, terceira série, ensino médio:livro do professor coordenação João Bosco Pitombeira.-Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376 p.: il. – (Multicurso; Coleção completa; v.6)

[4] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação à Distância. Cadernos da TV Escola: livros etc... . Brasília, 1996.

[5] BRZEZINSKI, Iria (org.) LDB Interpretada: diversos olhares se entrecruzam. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

[6] CARVALHO, Maria Cecília M. de (org.) Construindo o saber: metodologia científica – fundamentos e técnicas. 8. ed. Papirus: São Paulo, 1998.

[7] D'AMBROSIO, U**.** Educação Matemática: Da teoria à prática. Campinas, SP: Papyrus, 4ª ed., 1996 – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

[8] FACCHINI, Walter. Matemática. V. único. São Paulo: Saraiva, 1996.

[9] FERREIRA, Silvia da Rocha Izidoro. Aplicações de Matrizes no ensino médio.57p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Instituto de Ciencias Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.Disponível: http://www.teses.usp.br/index.php?option=com_jumi&fileid=11&Itemid=76&lang=pt-br&filtro=ferreira,%20Silvia Acesso: 11 de setembro de 2014.

[10] GIOVANNI, José Rui et al. Matemática Fundamental. V. único, 2º grau. São Paulo: FTD, 1994.

[11] HEFEZ, Abramo e FERNANDEZ, Cecília de Souza. Introdução à Algebra Linear. Rio de Janeiro: SBM,2012.

[12] IEZZI, Gelson et al. Matemática Ciencia e Aplicações. 2ª série. 2. ed.. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção matemática: ciência e aplicações)

[13] LELLIS, Marcelo e IMENES, Luiz Márcio P. O Ensino de Matemática e a Formação do Cidadão: temas e debates. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. n 5, ano VII, p. 9 – 13, 1994

[14] LIBÂNEO, José Carlos. Organização e gestão da escola: teoria e prática. 4. ed. Goiânia: Alternativa, 2001.

[15] LONGEN, Adilson. Curso Prático de Matemática. Curitiba: Bolsa Nacional do Livro, 1999.

[16] MENEGOLLA, Maximiliano e SANT'ANNA, Ilza Martins. Por que planejar? Como planejar? 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2000.

[17] MONTEIRO, Alexandrina; JR. Geraldo Pompeu**.** A matemática e os temas transversais. São Paulo. Moderna, 2001.

[18] MOURA, Íris Martins de. e FERREIRA, Lydianne Gomes de Assis. A Matemática Financeira e a Cidadania. Trabalho de conclusão de curso no Curso de Matemática habilitação Licenciatura Plena. Universidade Federal De Goiás- Campus Avançado de Jataí - GO, Jataí, 2003.

[19] SÉRGIO, Marcondes Gentil. Matemática. São Paulo: Ática, 2003. V. único. Série: Novo Ensino Médio.

[20] SEVERINO, Antônio Joaquim. Metodologia do trabalho científico. 20. ed. São Paulo: Cortez, 1996.

[21] SEVERINO, Antônio Joaquim. Metodologia do trabalho científico. 21. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

[22] SIQUEIRA FILHO, Aliprecídio José de. Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes. 66f. Dissertação(Mestrado em Matemática) – Universidades Federal do Piauí, Teresina, 2013. Disponível:http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/416/2011_ 00288_ALIPRECIDIO_JOSE_DE_SIQUEIRA_FILHO.pdf?sequence=1. Acesso em 10 de setembro de 2014.

[23] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática ensino médio 2. – 8. ed. – São Paulo: Saraiva, 2013.

[24] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática: 2. – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2013.

[25] VASCONCELLOS, Celso dos S. Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político-pedagógico. 7. ed. São Paulo: Cadernos Pedagógicos do Libertad, 2000.

[26] VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G. e CÔRREA, Marlene Lima Pires. Mini manual Compacto de Matemática: teoria e prática: ensino médio. São Paulo: Rideel, 1999.