2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Um Modelo Matemático da Dinâmica de Propagação de Plantas Anuais

Alcione Lucinda Fernandes [1]
José Angel Dávalos Chuquipoma[2]

Resumo: O presente trabalho tem a finalidade de estudar a propagação anual de plantas em um determinado ecossistema, o problema é abordado sob o ponto de vista da modelagem matemática como instrumento de motivação para que os alunos de ensino médio possam interpretá-lo e compreendê-lo. Utilizando a teoria de equações de diferenças lineares de segunda ordem é possível obter um modelo que descreve a dinâmica populacional de plantas em qualquer geração com e também sem a presença de uma família de predadores.

Palavras-chave: equação de diferenças lineares de segunda ordem, modelagem matemática, propagação anual de plantas.

1 Introdução

A variedade de fenômenos presentes no decorrer de nossa história tem sido um fator importante pelo o qual a humanidade vem se superando através das gerações. Com o objetivo de ir além do desconhecido, estes fenômenos têm permitido que o homem construa o seu próprio conhecimento dentro de suas limitações, isto é, criar conhecimentos ante seus problemas da vida cotidiana. Pode-se dizer então que esta é uma forma de como as pessoas constituem o sujeito do processo cognitivo, que, dependendo de nossas capacidades, vamos estabelecendo um conjunto de informações, ideias e abstrações da realidade, cujo comportamento desejamos analisar e interpretar numa linguagem lógica, com características similares à magnitude do problema. Conceitualmente, isto é definido como modelo de um problema.

O objetivo neste trabalho é desenvolver e analisar um modelo matemático que descreva a dinâmica da propagação de plantas anuais na presença de predadores, é estimar a quantidade

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: alcionepq@hotmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br

de plantas presentes em uma determinada geração. São chamadas plantas anuais aquelas que completam seu ciclo de vida, ou seja, nascem, crescem, reproduzem e morrem no período de um ano. De acordo com EDELSTEIN-KESNET [1988], a propagação de plantas pode ser dada pela produção de sementes no final do seu período de crescimento vegetativo (pode-se dizer mês de Janeiro), após o qual elas morrem. Além disso, apenas uma fração das sementes sobrevivem durante o inverno (em condições extremas), e aquelas que sobrevivem germinam no início da estação (pode-se dizer mês de Setembro), dando origem a uma nova geração de plantas. Segundo BASSANEZI [2011], determinadas plantas produzem sementes no final do verão quando então morrem. Uma parte destas sementes sobrevivem no inverno e algumas delas germinam, dando origem a uma nova geração de plantas e a fração que germina depende da idade das sementes.

Dando continuidade ao desenvolvimento do trabalho, a Seção 2 foi iniciada com um estudo sobre aspectos básicos do processo da modelagem matemática. Nesse sentido, no trabalho pretende-se colocar em prática um dos objetivos principais da modelagem matemática que consiste em aplicar os conhecimentos obtidos na formulação de novos problemas que a envolvem.

Posteriormente, na Seção 3, foi apresentada a ferramenta matemática que permitirá estudar o problema colocado, isto é, o conjunto de conhecimentos teóricos que vai interpretar o modelo. Dadas as características das variáveis de tipo discreto que estão envolvidas no problema, precisa-se da teoria de equações de diferenças para poder lidar com a propagação de plantas anuais.

Por último, na Seção 4, foi formulado e desenvolvido o problema da dinâmica de plantas anuais. Obtendo o modelo matemático e utilizando a teoria de equações de diferenças foram analisados diversos aspectos de tipo analítico que são comparados com o que acontece na realidade. O objetivo será, mostrar aos alunos do ensino médio que utilizando aspectos da modelagem matemática é possível compreender e modelar o problema da dinâmica de propagação de plantas anuais.

2 Modelagem Matemática

Nesta seção apresenta-se uma breve e significativa introdução dos principais elementos da modelagem matemática, sua interpretação, as etapas que conformam sua contextualização e sua aplicação nos diversos problemas concretos do dia a dia.

Segundo a interpretação de BASSANEZI [2002], "a *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Pode-se chamar simplesmente de *modelo matemático*, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. A modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas:

1. *Experimentação*: É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção dos dados. Os métodos experimentais, quase sempre, são ditados pela própria natureza do experimento e objeto da pesquisa. Entretanto, a contribuição de um matemático nesta fase, pode ser fundamental para direcionar a pesquisa, no sentido de facilitar posteriormente o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental pode dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos. Muitas vezes, novas técnicas de pesquisa empírica exercem pressão sobre o foco de interesse da teoria e permitem uma melhor seleção das variáveis essenciais envolvidas no fenômeno.

2. *Abstração*: É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:

a. Seleção das variáveis;

b. Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando;

c. Formulação de hipóteses;

d. Simplificação.

3. *Resolução*: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente - e como num dicionário, a linguagem matemática admite "sinônimos" que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural.

4. *Validação*: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto.

5. *Modificação*: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. O aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado. Um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos uma vez que os fatos conduzem constantemente a novas situações, qualquer teoria é passível de modificações e a própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade.

3 Equações de Diferenças Lineares

A forma normal de uma equação de diferenças *linear não homogênea* de ordem k é dada por

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = f(n), \tag{1}$$

em que $a_i(n)$ e $f(n)$ são funções definidas para todo $n \geq n_0$ e $a_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Se $f(n)$ é identicamente zero, então (1) é chamada *equação homogênea.* A equação (1) pode ser escrita na forma

$$x(n+k) = -a_1(n)x(n+k-1) - ... - a_k(n)x(n) + f(n). \tag{2}$$

Fazendo $n = 0$ em (2), se obtém $x(k)$ em termos de $x(k-1), x(k-2), ..., x(0)$. Explicitamente, se pode ter

$$x(k) = -a_1(0)x(k-1) - a_2(0)x(k-2) - ... - a_k(0)x(0) + f(0).$$

Uma vez calculado $x(k)$, pode-se ir para a próxima etapa e avaliar $x(k+1)$ escolhendo $n = 1$ em (2). Isso resulta em

$$x(k+1) = -a_1(1)x(k) - a_2(1)x(k-1) - ... - a_k(1)x(1) + f(1).$$

Ao repetir o processo acima, é possível avaliar todo $x(n)$ para $n \geq k$. Agora voltando para (1) para formalmente definir sua solução. Uma sequência $\{x(n)\}_{n_0}^{\infty}$ ou simplesmente $x(n)$ diz-se ser uma *solução* de (1) se ele satisfaz a equação. Observe que, se for especificado os dados iniciais da equação, volta-se para o *problema de valor inicial* correspondente

$$x(k+n) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = f(n), \tag{3}$$

$$x(n_0) = b_0, \quad x(n_0+1) = b_1, ..., x(n_0+k-1) = b_{k-1}, \tag{4}$$

onde os b_i são números reais. Tendo em vista a discussão acima, é concluído o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *O problema de valor inicial* (3) *e* (4) *tem uma única solução* $x(n)$.

Prova: Tendo em conta as k condições iniciais $\{x(n_0), x(n_0+1), ..., x(n_0+k-1)\}$, de (3) tem-se para $n = n_0$:

$$x(k+n_0) = -a_1(n_0)x(n_0+k-1) - ... - a_k(n_0)x(n_0) - f(n_0) = -a_1(n_0)b_{k-1} - ... - a_k(n_0)b_0 - f(n_0),$$

do anterior observa-se que para qualquer $n \geq n_0 + k$ usando o processo recursivo é possível determinar a sequência $x(n)$. Portanto para qualquer número natural n existe a solução $\{x_n\} = \{x(n_0), x(n_0+1), ..., x(n_0+k-1), x(n_0+k), ..., x(n), ...\}$, provando desta forma a existência da solução do problema de valor inicial (3) e (4).

Para provar a unicidade procede-se da seguinte forma. Seja $\widetilde{x}(n)$ uma outra solução de (3) e (4), isto é:

$$\widetilde{x}(k+n) + a_1(n)\widetilde{x}(n+k-1) + ... + a_k(n)\widetilde{x}(n) = f(n), \tag{5}$$

$$\widetilde{x}(n_0) = b_0, \quad \widetilde{x}(n_0+1) = b_1, ..., \widetilde{x}(n_0+k-1) = b_{k-1}, \tag{6}$$

de (5) obtem-se para $n = n_0$

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(k+n_0) &= -a_1(n_0)\widetilde{x}(n_0+k-1) - ... - a_k(n_0)\widetilde{x}(n_0) - f(n_0) \\ &= -a_1(n_0)b_{k-1} - ... - a_k(n_0)b_0 - f(n_0) \\ &= x(k+n_0), \end{aligned}$$

logo $\widetilde{x}(k+n_0) = x(k+n_0)$, de forma análoga e usando o processo recursivo mais uma vez prova-se para todo natural n a unicidade de soluções, isto é $\widetilde{x}(n) = x(n)$.

A questão ainda é, será que é possível encontrar uma solução em forma fechada para (1) ou (3)?. Ao contrário das bem comportadas equações lineares de primeira ordem, a obtenção de uma solução de forma fechada de (1) é uma tarefa desafiadora. No entanto, se os coeficientes a_i em (1) são constantes, então a solução da equação pode ser obtida, como se vê a seguir.

Desenvolvendo aspectos básicos da teoria geral de equações de diferenças *homogêneas* lineares de ordem k da forma

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(k) = 0. \tag{7}$$

Para iniciar a exposição deve-se introduzir três importantes definições.

Definição 3.1 *As funções $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$ são ditas linearmente dependentes para $n \geq n_0$ se existem constantes $c_1, c_2, ..., c_r$, não todas zero, tais que,*

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Se $c_j \neq 0$, então dividindo a última igualdade por c_j obtem-se

$$\begin{aligned} f_j(n) &= -\frac{c_1}{c_j} f_1(n) - \frac{c_2}{c_j} f_2(n) - ... - \frac{c_r}{c_j} f_r(n) \\ &= -\sum_{i \neq j} \frac{c_i}{c_j} f_i(n). \end{aligned} \tag{8}$$

A equação (8) diz simplesmente que cada f_j com coeficiente diferente de zero é uma *combinação linear* dos outros f_i. Assim, duas funções $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente dependentes se um deles é multiplo do outro, isto é, $f_1(n) = cf_2(n)$, para alguma constante a. A negação de dependência linear é independência linear. Explicitamente, isto significa que as funções $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$ são ditas linearmente independentes se

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0$$

para todo $n \geq n_0$, então se deve ter $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$.

Exemplo 1: Dados os números reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ diferentes de zero com $\lambda_i \neq \lambda_j$, as funções $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_i(n) = \lambda_i^n$ são linearmente independentes para todo $n \geq 0$. Com efeito, se

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0,$$

para algumas constantes $c_i, i = 1, 2, ..., r$, então

$$c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + ... + c_r \lambda_r^n = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{9}$$

Então pode-se gerar as r equações:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + ... + c_r &= 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + ... + c_r\lambda_r &= 0 \\ &\vdots \\ c_1\lambda_1^{r-1} + c_2\lambda_2^{r-1} + ... + c_r\lambda_r^{r-1} &= 0. \end{cases}$$

Com ajuda da álgebra linear temos que $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$ é uma solução trivial do sistema de equações acima, se, e somente se, o determinante da matriz formada pelos coeficientes $\lambda_i^k \neq 0, k = 0, 1, 2, ..., r-1$ do sistema é diferente de zero, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Usando o método de indução sobre r é possível provar que o determinante é $\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, provando assim a independência linear das funções.

Definição 3.2 *Um conjunto de k soluções linearmente independentes de (7) é chamado um conjunto fundamental de soluções.*

O seguinte teorema garante a existência de um conjunto fundamental de soluções de uma equação de diferenças linear homogênea, a sua demonstração pode ser encontrada em ELAYDI [2000].

Teorema 3.2 *Se $a_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, então (7) tem um conjunto fundamental de soluções para $n \geq n_0$.*

Pode-se observar que existem infinitos conjuntos fundamentais de soluções de (7). O resultado seguinte apresenta um método de geração de conjuntos fundamentais a partir de um conjunto conhecido.

Lema 3.1 *Se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são duas soluções de (7), então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ é uma solução de (7).*

(ii) *$\widetilde{x}(n) = ax_1(n)$ é uma solução de (7) para qualquer constante a.*

Prova: (i)

$$\begin{aligned} x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(k) &= [x_1(n+k) + x_2(n+k)] \\ &+ a_1(n)[x_1(n+k-1) + x_2(n+k-1)] \\ &+ ... + a_k(n)[(x_1(k) + x_2(k)] \\ &= [x_1(n+k) + a_1(n)x_1(n+k-1) + ... + a_k(n)x_1(k)] \\ &+ [x_2(n+k) + a_1(n)x_2(n+k-1) + ... + a_k(n)x_2(k)] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

assim $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ é solução de (7).

(ii) Sendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(n+k) + a_1(n)\widetilde{x}(n+k-1) + ... + a_k(n)\widetilde{x}(k) &= ax_1(n+k) + a_1(n)ax_1(n+k-1) \\
&+ \quad ... + a_k(n)ax_1(k) \\
&= a[x_1(n+k) + a_1(n)x_1(n+k-1) \\
&+ \quad ... + a_k(n)x_1(k)] \\
&= a.0 \ = \ 0
\end{aligned}$$

tem-se que $\widetilde{x}(n) = ax_1(n)$ é solução de (7).

Do lema anterior se pode concluir o seguinte *Princípio de Superposição*:
Se $x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ são soluções de (7), então

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + ... + a_rx_r(n)$$

é também uma solução de (7). De outro lado se $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (7) e se $x(n)$ é qualquer solução de (7), então existem constantes $a_1, a_2, ..., a_k$ tal que $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i(n)$. A discussão acima leva a definir a *solução geral* de (7).

Definição 3.3 *Se* $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ *é um conjunto fundamental de soluções de* (7), *então a solução geral de* (7) *é dada por*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i(n),$$

para constantes arbitrárias a_i.

Vale notar que qualquer solução de (7) pode ser obtida a partir da solução geral, por uma escolha apropriada das constantes $a_i, \ i = 1, 2, ..., k$.

3.1 Equação Homogênea Linear com Coeficientes Constantes

Considerando a equação de diferenças linear de ordem k

$$x(n+k) + a_1x(n+k-1) + a_2x(n+k-2) + ... + a_kx(n) = 0, \tag{10}$$

onde a_i são constantes e $a_k \neq 0$. O objetivo agora é encontrar um conjunto fundamental de soluções e, consequentemente, a solução geral de (10). O procedimento pode desafiar e motivar o aluno do ensino médio. Suponha que as soluções de (10) sejam da forma

$$x(n) = \lambda^n,$$

onde λ é uma constante. Substituindo este valor em (10), obtem-se

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0. \tag{11}$$

Isso é chamado de *equação característica* de (10), e sua raíz λ é chamada de *raíz característica*. Observe que sendo $a_k \neq 0$, nenhuma das raízes características é zero.

Pode-se concluir a seção apresentando as seguintes situações:

- *Caso (a)*. Suponha que as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ são distintas. Como foi visto no Exemplo 1 o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ é linearmente independente e assim forma um conjunto fundamental de soluções, isso é como consequência das raízes serem diferentes, ELAYDI [2000]. Portanto a solução geral de (10) é

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i\lambda_i^n, \qquad c_i \text{ constante.} \tag{12}$$

- *Caso (b)*. Suponha que as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ são distintas com multiplicidade $m_1, m_2, ..., m_r$ com $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$, respectivamente. Neste caso (10) admite como solução ELAYDI [2000]:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n(c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + ... + c_{i,m_{i-1}}n^{m_i-1}), \qquad c_{ij} \text{ constante.} \tag{13}$$

- *Caso (c)*. Suponha que as raízes da equação característica sejam complexas. Para mostrar a solução neste caso vamos a supor que a equação de diferenças é de segunda ordem:

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0,$$

  cujas raízes complexas são $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. ELAYDI [2000] mostra que as funções $(\alpha + i\beta)^n$ e $(\alpha - i\beta)^n$ são linearmente independentes. Portanto a solução geral da equação de segunda ordem será

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

  Recordando que o ponto (α, β) no plano complexo corresponde ao número complexo $\alpha + i\beta$. Em coordenadas polares tem-se,

$$\alpha = r\cos\theta, \qquad \beta = r \operatorname{sen}\theta, \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

  Portanto,

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1(r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta)^n + c_2(r\cos\theta - ir\operatorname{sen}\theta)^n \\ &= r^n[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}(n\theta)] \\ &= r^n[a_1\cos(n\theta) + a_2\operatorname{sen}(n\theta)], \end{aligned} \tag{14}$$

em que $a_1 = c_1 + c_2$ e $a_2 = i(c_1 - c_2)$. Aqui se pode utilizar o Teorema De Moivre's: $[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta)$.

Seja

$$\cos\omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \qquad \text{sen } \omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \qquad \omega = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right).$$

Então (14) é

$$\begin{aligned} x(n) &= r^n\sqrt{a_1 + a_2}[\cos\omega\cos(n\theta) + \text{sen } \omega \text{ sen } (n\theta)] \\ &= r^n\sqrt{a_1 + a_2}\cos(n\theta - \omega) \\ x(n) &= Ar^n\cos(n\theta - \omega). \end{aligned} \tag{15}$$

4 Formulação do Problema

Nesta seção, foi formulado um modelo matemático em termos de equação de diferenças, cuja solução define o número de plantas em função de cada geração n. Primeiro, é necessário obter uma expressão para o número de plantas em função do número de sementes produzidas no período de um e dois anos, e do número de plantas mortas pela presença de um predador. A propagação anual de plantas é dada através de um ciclo de vida que se inicia com o florescimento delas, posteriormente se origina a germinação, para finalmente morrer e deixar sua genética nas novas sementes no final de cada verão dando origem a uma nova geração de plantas. Como é natural, devido a diversos fatores, nem todas as sementes conseguem germinar (predadores, doenças, etc.), ou outras germinam depois do ciclo de vida, isto é um ano. Neste trabalho as ideias seguidas foram as de EDELSTEIN-KESNET [1988] e ELAYDI [2000]. O problema principal na propagação de plantas anuais é o fato das sementes permanecerem adormecidas por períodos de anos antes da germinação.

O estudo foi iniciado considerando as seguintes hipóteses: *as sementes germinam somente até a idade de dois anos, sendo que a maioria germina com um ano, e a presença de predadores aumenta de forma proporcional à fração de sementes que germinam com dois anos de idade.* Foram definidos os seguintes parâmetros:

γ = Número de sementes produzidas por planta em janeiro;
α = fração de sementes de um ano de idade, que germinam em outubro;
β = fração de sementes de dois anos de idade, que germinam em outubro;
σ = fração de sementes que sobrevivem em cada inverno;
θ = taxa de mortalidade das plantas pela presença de predadores.

Das hipóteses tem-se que β/α é pequeno. Se $p(n)$ denota o número de plantas presentes na generação n, então pode-se inferir também da hipótese que

$$p(n) = \begin{cases} \text{plantas provenientes de sementes de um ano de idade} \\ \qquad\qquad\qquad + \\ \text{plantas provenientes de sementes de dois anos de idade} \\ \qquad\qquad\qquad - \\ \text{plantas mortas pelos predadores.} \end{cases}$$

Se ainda for denotado por $s_1(n)$ (respectivamente, $s_2(n)$) o número de sementes de um ano de idade (dois anos de idade) em Setembro (antes da germinação), então o número de plantas presentes no tempo n é

$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n) - q(n), \tag{16}$$

em que $q(n)$ é o número de plantas que morreram no tempo n.

Observa-se que o número de sementes deixadas após a germinação pode ser escrito como:

sementes deixadas = (fração não germinadas)×(número original de sementes em Setembro).

Isto dá origem a duas equações:

$$\tilde{s}_1(n) = (1-\alpha)s_1(n), \tag{17}$$

$$\tilde{s}_2(n) = (1-\beta)s_2(n), \tag{18}$$

em que $\tilde{s}_1(n)$ (respectivamente $\tilde{s}_2(n)$) é o número de sementes de um ano (de dois anos de idade) deixadas em Outubro, após algumas terem germinado. Novas sementes $s_0(n)$ (0-anos de idade) são produzidas em Janeiro à taxa de γ por planta, Figura 1.

$$s_0(n) = \gamma p(n). \tag{19}$$

Após o inverno, as sementes $s_0(n)$ que eram novas na geração n estarão com um ano de idade na próxima geração $n+1$, e uma fração $\sigma s_0(n)$ delas sobreviverá. Portanto

$$s_1(n+1) = \sigma s_0(n),$$

ou utilizando a fórmula (19), obtem-se

$$s_1(n+1) = \sigma\gamma p(n). \tag{20}$$

Similarmente,

$$s_2(n+1) = \sigma\tilde{s}_1(n),$$

que por (17) produz

$$s_2(n+1) = \sigma(1-\alpha)s_1(n),$$

e por (20) tem-se

$$s_2(n+1) = \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1). \tag{21}$$

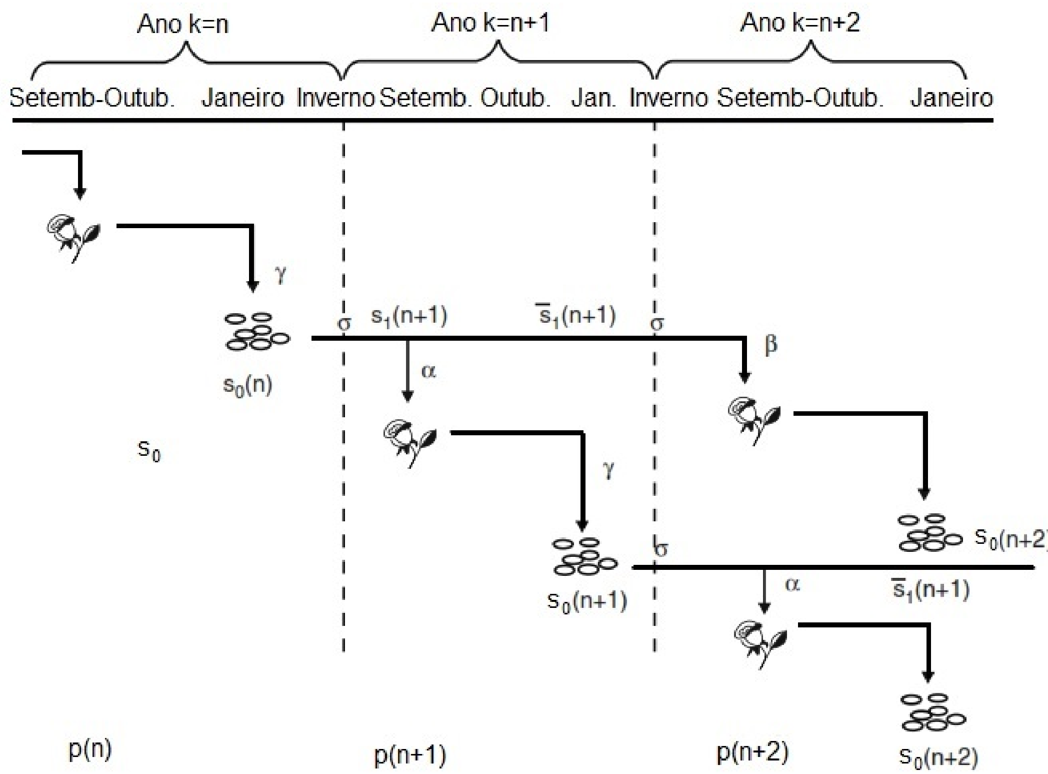

Figura 1: Propagação de Plantas Anuais (adaptada de ELAYDI [2000]).

Substituindo $s_1(n+1), s_2(n+2)$ pelas expressões (20) e (21) na fórmula (16) obtem-se

$$p(n+1) = \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n-1) - q(n+1),$$

ou equivalentemente a equação de diferenças de segunda ordem

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n) - q(n+2). \tag{22}$$

Supondo que a taxa de mortalidade das plantas originada pelos predadores é $\theta = \dfrac{\beta}{2}$, então o número de plantas mortas será aproximadamente

$$q(n) = \frac{\beta}{2}s_2(n). \tag{23}$$

Então a equação de diferença de segunda ordem que modela o problema é dada por

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n) - \frac{\beta}{2}s_2(n+2),$$

de (21) obtem-se na última igualdade

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n) - \frac{\beta}{2}\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n),$$

ou seja

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \frac{\beta}{2}\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n). \qquad (24)$$

A equação característica de (24) é dada por

$$k^2 - \alpha\gamma\sigma k - \frac{\beta}{2}\gamma\sigma^2(1-\alpha) = 0$$

com raízes características

$$k_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right],$$

$$k_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right].$$

Sendo a taxa $\alpha < 1$, observa-se que k_1 e k_2 são raízes reais. Logo, da teoria de equações de diferenças vistas na seção anterior, tem-se que a solução da equação (22) é

$$p(n) = c_1 k_1^n + c_2 k_2^n, \qquad \text{em que } c_1, c_2 \text{ são constantes arbitrárias.} \qquad (25)$$

Agora analizando o comportamento da solução (25) de tal forma que seja compatível com o modelo matemático de propagação de plantas anuais. Observa-se que as raízes, k_1 e k_2 são tais que: $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$. Mas, para garantir uma boa propagação, isto é; $p(n)$ deve aumentar indefinidamente quando n cresce indefinidamente, é preciso ter $k_1 > 1$. É claro que não se pode fazer o mesmo com k_2, pois sendo negativo leva a uma variação (oscilação) indesejável no tamanho da população de plantas. Portanto, pode-se inferir que

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right] > 1,$$

ou

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados e simplificando obtem-se

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \frac{\beta}{2}\sigma^2(1-\alpha)}. \qquad (26)$$

Se $\beta = 0$, isto é, se não houver sementes de dois anos de idade que germinarem em Setembro, então a condição (26) seria

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma}. \qquad (27)$$

A condição (27) afirma que a propagação das plantas ocorre se, o produto entre a fração de sementes produzidas por cada planta em Janeiro, a fração de sementes de um ano de idade que germinam em Setembro e a fração de sementes que sobrevivem a um determinado inverno é superior a 1.

Mostrando agora uma aplicação do problema: Uma espécie de plantas anuais que se encaixa nas condições das hipóteses já mensionadas anteriormente e com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \gamma &= 100 \\ \alpha &= 0,5 \ = \ 50\% \\ \beta &= 0,25125 \ = \ 25,125\% \\ \sigma &= 0,4 \ = \ 40\%. \end{aligned}$$

Logo de (21) e de (23) obtem-se

$$q(n) = \frac{\beta}{2} s_2(n) = \frac{\beta}{2}\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n) = \frac{0,25125}{2}(0,4)^2 100(1-0,5)p(n) = 1,005\ p(n).$$

Sendo $q(n) = p(n) + 0,005p(n) \geq p(n)$ para os parâmetros definidos anteriormente, tem-se que neste caso que a população de plantas será extinta .

Por outro lado se for assumida a não existência de predadores, isto é $q(n) = 0$, ve-se de (24) que o modelo matemático do problema coincide com o apresentado em ELAYDI [2000]:

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n). \tag{28}$$

Logo as raízes características neste caso serão

$$k_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right],$$

$$k_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right].$$

Substituindo os valores dos parâmetros obtem-se

$$k_1 = \frac{0,5\ .\ 100\ .0,4}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\ .\ 0,25125}{100\ .\ (0,5)^2}(1-\ 0,5)}\right] = 20,1.$$

e

$$k_2 = 10\ .\ (-0,01)\ =\ -0,1.$$

Então, nesse caso o número de plantas em uma geração n pode ser calculado por:

$$p(n) = c_1(20,1)^n + c_2(-0,1)^n, \qquad \text{onde } c_1, c_2 \text{ são constantes arbitrárias.} \tag{29}$$

A seguir é analisado o comportamento da população de plantas anuais com uma população inicial de $p(0) = 100$ plantas: Assim, 100 plantas produzirão 10000 sementes, dessas 40% resistem ao inverno (4000 sementes), das quais 50% germinam totalizando 2000 plantas no primeiro ano ($p(1) = 2000$). Estas 2000 plantas produzirão 200000 sementes das quais 40% (80000 sementes) resistirão ao inverno e 50% (40000) serão novas plantas no segundo ano. Agora para o segundo ano ainda tem-se 50% das 4000 sementes (2000) remanescentes do primeiro ano das quais 40% (800) resistirão pois passarão por mais um inverno e dessas 25,125% germinarão (201 plantas). Então no segundo ano a população de plantas será $40000 + 201 = 40201$ plantas, o que é facilmente verificado na solução geral:

$$p(n) = \frac{10050}{101}(20,1)^n + \frac{50}{101}(-0,1)^n, \tag{30}$$

uma vez que $p(0) = 100$ (número de plantas no ano zero) e $p(1) = 2000$ (número de plantas no ano 1), levam às constantes $c_1 = \dfrac{10050}{101} \approx 99,5$ e $c_2 = \dfrac{50}{101} \approx 0,5$.

5 Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo da dinâmica da propagação de plantas anuais. Através de equações de diferenças empregando uma modelagem matemática, pode-se concluir que é possível calcular a quantidade de plantas em uma determinada geração conhecendo alguns parâmetros particulares.

Foram analisados dois casos, no primeiro foi assumido a existência de predadores e a hipótese de que o número de plantas mortas se comporta de forma proporcional à fração de sementes que germinam com dois anos de idade. Neste caso foi provado que a população de plantas anuais se extingue para os respectivos valores dos parâmetros. No segundo caso foram apresentados os resultados para a propagação de plantas sem a presença de predadores, com os mesmos valores dos parâmetros do caso anterior e foi concluído que há uma boa propagação de plantas anuais, esse modelo coincide com ELAYDI [2000].

É importante lembrar que se os parâmetros forem outros, o resultado deve ser analisado para verificar se há ou não a extinção das plantas (etapa de validação na modelagem).
De outro lado foi dada uma atenção especial para a modelagem matemática como ferramenta importante e com um amplo e considerável potencial na resolução de problemas. É possível concluir também que a modelagem matemática pode ser bem explorada e utilizada nas atividades realizadas pelo professor em sala de aula nos diferentes níveis de aprendizado.

A aplicação da matemática ensinada em sala de aula costuma ser objeto de discussões e encarada por muitos alunos como uma quantidade de operações e regras desvinculadas da realidade. O desenvolvimento desse trabalho colabora para que essa realidade possa ser modificada, pois fazendo uso em situações do cotidiano, a matemática contribui para facilitar a compreensão do mundo em que vivemos. Com um bom planejamento e com temas apropriados pode-se levar as pessoas a estudar a matemática de forma prazerosa.

A matemática deve ser estudada e utilizada para contribuir na formação das pessoas, sendo uma importante ferramenta na evolução da humanidade. É papel das escolas e especialmente dos professores de matemática valorizar a sua aplicação, mostrando que se pode fazer uso dessa importante ciência para compreender melhor a nossa vida.

6 Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro e a SBM por oportunizar esse curso.

Aos colegas de curso que sempre contribuíram nos momentos em que as dificuldades surgiam e aos professores do PROFMAT/UFSJ mediadores importantes nessa caminhada.

Ao meu orientador José A. Dávalos Chuquipoma, pessoa de bom coração e que sem a qual não seria possível concluir esse trabalho.

À toda minha família pelo apoio incondicional, respeitando minha ausência em momentos importantes em que estava me dedicando aos estudos.

À escola Dr. Antônio Batista do Nascimento, SRE/Barbacena e SEE/MG, pelo apoio e também por serem a porta de entrada para o PROFMAT.

Aos alunos, fonte de inspiração aos quais pretendo levar conhecimentos adquiridos nesse curso.

Especialmente aos meus pais Zina e Betinho, incentivadores desde o início e por terem me indicado um bom caminho, mostrando que é possível educar mais com exemplos do que com palavras.

As pessoas morrem mas seus exemplos são eternos. Obrigado pai.

Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BATSCHELET, E. Introdução à Matemática para biocientistas. São Paulo: Interciência, 1978.

BIEMBENGUT, Maria Salett. HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2005.

EDELSTEIN-KESNET, L. Mathematical Models in Biology, Random House, New York, 1988.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

ELAYDI, Saber. An Introduction to Difference Equations. Third Edition. Springer. Santo Antonio, Texas, 2000.

<http://www.brasilescola.com/matematica/introducao-funcao.htm>. Acesso em: 12 fev. 2013.

<http://www3.ime.uerj.br/ calculo/LivroX/maxmin.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2013.

<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/>. Acesso em: fev. 2013.

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo /capitulos/cap34.html>. Acesso em: jan. 2013.

<http://www.pedagogia.com.br/artigos/modelagemmatematica/index.php?pagina=2>. Acesso em: fev. 2013.

<http://www3.ime.uerj.br/ calculo/Livro/maxmin.pdf>. Acesso em: fev. 2013.

<http://www.ime.uerj.br/ calculo/LivroIX/maxmin.pdf>. Acesso em: fev. 2013.