UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

NACIONAL-PROFMAT

IVONZIL JOSÉ SOARES JUNIOR

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO: APLICADA AO ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2015

IVONZIL JOSÉ SOARES JUNIOR

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO: APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão apresentado como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Professora Drª Adriana Luiza do Prado

CURITIBA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

IVONZIL JOSÉ SOARES JUNIOR

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO: APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão aprovado como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora.

Profª. Drª Adriana Luiza do Prado

Orientador – Departamento de Ciências Exatas UFPR

Prof Dr Aldemir José da Silva Pinto

Departamento de Ciências Exatas UFPR

Profª Drª Olga Harumi Saito

Departamento acadêmico de matemática UTFPR

Curitiba, 26 de março de 2015.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Lista de Símbolos

$\equiv$ O que vem depois é definição do que vem antes

$\forall$ Para todo ou qualquer que seja

$\exists$ Existe

; Tal que

$\Rightarrow$ Implica

$\in$ Pertence

$<$ Menor que

$\leq$ Menor ou igual a

$>$ Maior que

$\geq$ Maior ou igual a

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais

$/$ Tal que

Resumo

O respectivo trabalho procura trazer uma proposta da relação entre as funções e as sequências em especial as progressões geométricas. Ele contribui com um estudo mais aprofundado a ser utilizado no ensino médio. Primeiramente apresenta-se as sequências numéricas, suas definições, propriedades, teoremas e alguns exemplos, como a sequência de Fibonacci e o número de Euller. Fazendo o mesmo na área das funções. A seguir, mostra-se as progressões geométricas relacionando essas sequências com as funções e não como um conteúdo isolado para apenas a aplicação de fórmulas matemáticas. Neste momento trata-se suas definições, algumas lendas como a do jogo de xadrez, os fractais do matemático Georg Cantor bem como o desenvolvimento da matemática financeira, suas fórmulas derivadas das progressões geométricas, taxas equivalentes, o cálculo do valor de uma parcela quando conhecido o valor principal, taxa de juros e o período (ou número de parcelas). Finaliza-se com um histórico da música e sua relação com as progressões geométricas.

Palavra-Chave: Sequências, Funções, Progressões geométricas, fractais, jogo de xadrez, taxas equivalentes.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Drª Adriana Luiza do Prado pela dedicação e palavras difíceis, que tive que ouvir, em prol do meu crescimento.

Além disso, agradeço ao grande amigo e coautor desse trabalho Jean Farias Duarte, pela importante ajuda.

Em especial à minha querida esposa Juliana pela compreensão de horas e noites em espera da minha presença.

Também dedico aos meus pais, Ivonzil e Cecilia pelo grande incentivo a todo o meu estudo e vida.

A uma grande amiga a professora Josiane.

Assim como a todos os professores do Profmat, em especial ao Professor Dr Aldemir.

E a capes que apoia o programa e nos auxiliou com bolsas de estudo.

Sumário

1 Introdução

Segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio [5], elaborado pelo Ministério da Educação no ano de 2006, ele trata o conhecimento a ser desenvolvido no assunto progressões como:

> As progressões aritméticas e geométricas podem ser definidas como, respectivamente, função afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não reconhece as funções já estudadas. Devem se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem o simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo...").

Tendo em vista essas orientações, o que se observa na maioria dos livros didáticos para o ensino médio é que tratam o assunto sequências e progressões como um capitulo a parte do assunto funções. O trabalho apresentado terá com o objetivo trazer algumas opções para o docente trabalhar o assunto, tratando o tópico como sequência, relacionando o conceito de funções e mostrando algumas aplicações destas relações, isso é: buscando unificar os dois assuntos em questão.

Encontram-se registros de sequências na história desde o Egito antigo, cerca 3000 anos antes da era cristã. Com o problema das cheias do rio Nilo, os egípcios perceberam que as inundações se davam em períodos iguais o que representa uma sequência de um determinado fato. Segundo Boyer [1] na Babilônia antiga tem-se o registro da soma dos termos de uma progressão geométrica na tabela Plimpton 322, outro registro de sequências é o papiro de Rhind que no problema 79 do papiro traz a progressão geométrica escrita da seguinte forma:

"7 casas, "49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas e 16 807 hectares"

Ainda segundo Boyer [1] a Escola Pitagórica demonstra interesse pelo tema principalmente com os números figurados que podem ser representados por construção geométrica, entre eles, os números triangulares $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \dots)$ e os números quadrados $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{9}, \mathbf{16}, \dots)$.

Com a história das sequências verifica-se que seus estudos serão de grande relevância para a resolução dos mais diversos problemas e no desenvolvimento do conhecimento matemático. Assim, segundo Lima [11] defini-se uma sequência de números reais como uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3,4, \dots\}$, e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representada por $\mathrm{x_n}$ e chamado de termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência. Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou simplesmente $(\mathrm{x_n})$ para indicar a sequência x.

A função x não é necessariamente injetora, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$**,** o conjunto $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ pode ser finito, apesar da notação adotada, pode ser finito ou até mesmo se reduzir a um único elemento, como nas sequências constantes. Quando a sequência (x_n) for injetora, ou seja, $m \neq n$ implica que $x_m \neq x_n$, então ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Enquanto constrói-se o conhecimento, o individuo estará, em todos os momentos observando os fenômenos da natureza e buscando as presentes regularidades, ou seja, de padrões para melhor entender tais fenômenos.

As previsões de fenômenos poderão ajudar em decisões que podem ser mais eficientes, por isso os pesquisadores tentam transformar esses padrões em representações matemáticas, para tornar melhor os procedimentos de tomada de decisão. Podendo ser utilizado em problemas do cotidiano, como o de comprar determinado produto: “Qual será a melhor forma de pagamento?”, até problemas mais complexos, como o entendimento de sequências musicais, “Existe um padrão correto entre essas sequências musicais?”.

Estas investigações de padrões não deveriam ficar restrita aos cientistas pesquisadores e às cadeiras acadêmicas das universidades, a escola também pode sim ter este papel, de construir o conhecimento ou pelo menos instigar o aluno a ter o prazer pela pesquisa, compreendendo assim os conteúdos e relacionando-os às ideias. Para que com isso possa-se trazer para a sala de aula algo que norteie a matemática com o dia a dia e suas implicações, descobrindo relações, encontrando conexões e fazendo generalizações dos temas abordados.

Na busca de conteúdos adequados para desenvolver uma colaboração com o processo de ensino aprendizagem, optou-se pelo tema sequências que é abordado em geral no primeiro ano do ensino médio, como um capitulo à parte e comumente trabalhado dissociado de outros temas vistos no mesmo ano letivo, em muitos momentos trabalhados como uma mera aplicação de fórmulas.

As sequências são utilizadas a todo o momento, seja na numeração das casas, nos dias da semana ou mesmo em sala de aula quando é feita a chamada dos alunos, todas essas sequências seguem um padrão para a sua construção. Uma forma de se introduzir o tema sequências, dentre as quais se destacam as progressões aritméticas e geométricas, se refere ao estudo de padrões matemáticos, utilizando fatos que ocorrem no dia a dia do aluno, ou utilizando a história da Matemática com o estudo de sequências conhecidas ou ainda nas aplicações financeiras vivenciadas pela sociedade.

Pode se destacar, que toda sequência obedece a uma “lei de formação”, ou uma regra que permita dizer, para todo $n \in \mathbb{N}$, qual é o seu n-ésimo termo, o que pode ser obtido por meio de observação de padrões, associações de ideias e generalizações. Como no exemplo da chamada em sala de aula, na qual a numeração dos alunos é colocada através de ordem alfabética. Da mesma forma as fórmulas de soma de progressões aritméticas e de progressões geométricas, podem ser obtidas de maneira quase que intuitivas que a seguir serão observadas, generalizadas até chegar à abstração.

È importante destacar que o respectivo trabalho nos capítulos 2 e 3 foi feito em conjunto com o colega Jean Farias Duarte.

2 Sequências e séries numéricas

No inicio do ensino médio são abordados os conceitos de conjuntos numéricos, intervalos na reta real, números reais, funções e sequências. Como o presente trabalho tem o objetivo de relacionar o conceito de funções ao de sequências, inicialmente serão abordados alguns conceitos necessários para o desenvolvimento do mesmo.

2.1 Corpo

Definição 2.1: Um **corpo** é um conjunto C, com duas operações, denominadas adição e multiplicação $(+: C \times \mathrm{C} \to \mathrm{C}\,,\ \cdot : C \times \mathrm{C} \to \mathrm{C})$, que satisfazem determinadas condições. Ou seja, sendo os elementos $x, y, z \in C$, definidas as operações de adição e de multiplicação, onde cada par de elementos operados pertence a C, tem-se as seguintes propriedades:

Tabela 1: Propriedades do Corpo.

	Adição	**Multiplicação**
Associativa	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Comutativa	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Elemento Neutro	$\exists\, 0\ \in C, 0 + x = x$	$\exists\, 1\ \in C, 1 \cdot x = x$
Inverso	$x + (-x) = 0$	$\forall\, x\ \neq 0 \in C, x^{-1} \cdot x = 1$

Fonte: Autor.

Exemplo 2.1: O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, que são os todos os números na forma $\frac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, é um corpo, com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p\prime}{q\prime} = \frac{p.q' + p'.q}{q \cdot q\prime}$ (adição) e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p\prime}{q\prime} = \frac{p.p'}{q \cdot q\prime}$ (multiplicação), e são válidos as propriedades da adição e da multiplicação.

2.2 Corpo ordenado.

<u>Definição</u> 2.2: Um **corpo** $(C,+,\cdot)$ é **ordenado** se contiver um subconjunto P com as seguintes propriedades:

P1- $x, y, \in P$, tem-se que $\begin{cases} x+y \ \in P \\ x \cdot y \in P \end{cases}$.

P2- dado $x \ \in P$, exatamente uma das três alternativas ocorre, ou $x = 0$, ou $x \ \in P$ ou $-x \ \in P$.

Exemplo 2.2: Como visto no exemplo 2.1, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo. Agora será mostrado que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Dado um $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pode-se considerar sempre $q > 0$, pois $q < 0 = -q$. Assumindo que seja sempre positivo o denominador q, valem as relações seguintes: $\frac{p}{q} < 0$, ou $\frac{p}{q} = 0$, ou $\frac{p}{q} = 0$. Assim temos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

2.3 Intervalos.

Para explorar a compreensão do que são cotas superiores e inferiores, buscando-se entender quando um conjunto ou intervalo tem um maior ou um menor elemento. Destaca-se inicialmente os intervalos.

<u>Definição</u> 2.3: Sejam a e b dois números reais, sendo $a < b$. Denomina-se **intervalo fechado** de extremos a e b ao conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$, e representa-se por $[a, b]$.

<u>Definição</u> 2.4: Denomina-se **intervalo aberto** de extremos a e b, $a < b$, ao conjunto de números reais x tais que $a < x < b$ e representa-se por (a, b).

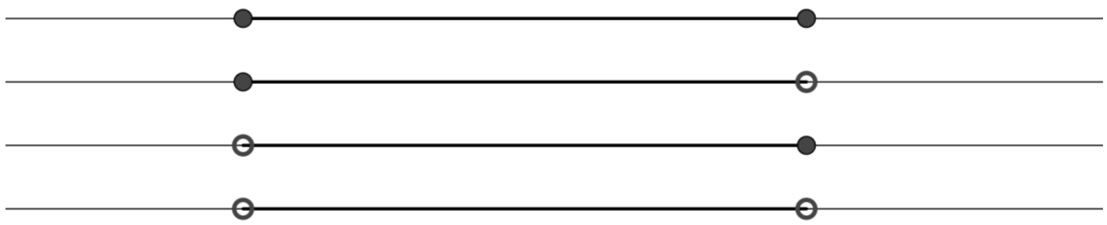
Assim pode-se defini-los como sendo:

<u>Intervalos Limitados</u>:

- Fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$;
- Fechado à esquerda: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$;
- Fechado à direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$;
- Aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.

Podem-se representar os intervalos como sendo segmentos de reta contidos na reta dos números reais como mostra a figura 1.

Figura 1: Intervalos Limitados



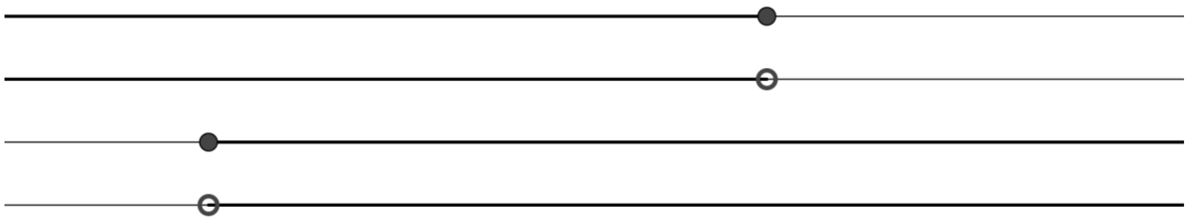
Fonte: Autor.

<u>Intervalos Ilimitados</u>:

- Semirreta direita fechada, de origem: b $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$
- Semirreta direita aberta, de origem: b $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
- Semirreta esquerda fechada, de origem: a $[a, +\infty) = x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$
- Semirreta esquerda aberta, de origem: a $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$
- Intervalo aberto: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ este intervalo também conhecido como intervalo total.

Geometricamente, tem-se na figura 2 a representação dos intervalos ilimitados.

Figura 2: Intervalo Ilimitado.



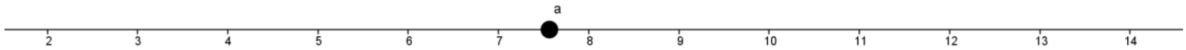
Fonte: Autor.

Intervalo degenerado:

- $[a, a]$: este intervalo consiste em um único ponto $\boldsymbol{a}$.

Geometricamente tem-se a marcação de um ponto na reta dos reais, mostrado na figura 3.

Figura 3: Intervalo Degenerado.



Fonte: Autor.

Proposição 2.1 - Todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito.

***Prova**:*

Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado tem-se que, se $x < y$, então, $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Assim, se I for um intervalo de extremos a, b, com $a < b$, pode-se obter infinitos elementos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ em I, sendo:

$x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}$, ..., $x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}$. Assim obtém-se $a < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < b$. Logo, tem-se infinitos elementos entre a e b.

2.4 Desigualdades

Sendo $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos elementos positivos do corpo ordenado $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}^+$contém todos os racionais positivos.

Definição 2.5: Sendo $x \in \mathbb{R}$, o **valor absoluto** de x, representado por $|x|$ é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0; \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, para qualquer real x, tem-se:

$$|x| = |-x|.$$

Decorrem imediatamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades:

P1- $|x| \geq 0$;

P2- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

P3- $|x| = |-x|$;

P4- $|x| \geq x$.

Teorema 2.1: Seja c um real qualquer. Então, $|c| = \sqrt{c^2}$.

Prova:

Imediata, se $c \geq 0$. Se $c < 0$, então $c^2 = |c|^2$ e, portanto, $\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|$.

Proposição 2.2: Quaisquer que sejam os números reais a, b e x, tem-se:

1. $|x|^2 = |x^2| = x^2$;

2. $|ab| = |a|\,|b|$;

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular);

4. Se $a > 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

5. $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Prova:

1. Sendo $x^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$|x^2| = x^2$, pela definição de valor absoluto.

Resta mostrar que $|x^2| = x^2$.

Se $x \geq 0$, temos $|x| = x$ e, portanto, $|x^2| = x^2$.

Se $x < 0$, |x| = $-x$ e, portanto, $|x^2| = (-x)^2 = x^2$.

2. Do item 1 tem-se que:

$|a \cdot b|^2 = (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$, ou seja, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

3. Usando o fato de $|x| \geq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Ou seja, $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$.

Assim obtém-se $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4. Supondo que $|x| \leq a$. Se $x \geq 0$, temos $x = |x| \leq a$. Sendo $x \geq 0$, é claro que $x \geq -a$, de modo que, neste caso, $-a \leq x \leq a$.

Se $x \leq 0$, então $x \leq a$ e $-x = |x| \leq a$. Mas $-x \leq a$ é equivalente a $x \geq -a$, de modo que $-a \leq x \leq a$.

Portanto, prova-se que $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$. Para provar a recíproca, distingue-se os casos $x \geq 0$ e $x < 0$.

Suponha que $-a \leq x \leq a$. Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em $x \leq a$ e $x \geq -a$.

Se $x \geq 0,\ |x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá $|x| \leq a$.

Se $x < 0,\ |x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos $|x| \leq a$.

Logo, $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$.

5. Usando a desigualdade triangular, tem-se:

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Assim tem-se

$|a| - |b| \leq |a - b|$. (I)

Pelo mesmo motivo, tem-se $|b| - |a| \leq |b - a|$.

Logo, $|a - b| = |b - a|$.

Consequentemente, $|b| - |a| \leq |a - b|$ ou $|a - b| \geq -(|a| - |b|)$. (II)

De (I) e (II) e a partir do item 4 conclui-se que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2.5 Vizinhança de um Ponto

Note que, como $\mathbb{R}$ esta sendo associado a uma reta, é comum o uso de expressões, como o número real x ou o ponto x, para identificar um elemento de $\mathbb{R}$.

Definição 2.6: Dado um número real x, denomina-se **vizinhança** de x, a qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$, contendo x. Fixado um ponto de $\mathbb{R}$, observa-se que tal ponto possui uma infinidade de vizinhanças, representadas por $V(x)$.

Observe que uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}$ é um conjunto linear. Por exemplo, dado o número real 2, uma vizinhança de 2 é, por exemplo, o intervalo $(1, 3)$.
Há infinitas vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$.

As vizinhanças de um ponto possuem as seguintes propriedades:
P1- se $V(x)$ e $V'(x)$ forem vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$ então a intersecção $V(x) \cap V'(x)$ é vizinhança de x. Note que o símbolo $\cap$ significa uma operação definida entre conjuntos. Assim, dados dois conjuntos V e V', denomina-se intersecção de V com V', representando-a por $V \cap V'$, ao conjunto formado pelos objetos que pertencem a V e V'. Logo, quando $V = (1, 3)$ e $V' = (-1, 2)$, temos $V \cap V = (1, 2)$;

P2- se $V(x)$ for uma vizinhança de x e $y \in V(x)$ então existe uma vizinhança $V(y) \subseteq V(x)$. Note que o símbolo $\subseteq$ $é$ uma relação binária entre os conjuntos V e V'. Diz-se que $V \subseteq V'$ quando todo objeto de V pertence a V'. Por exemplo, $V = (1,2)$ e $V' = (0,2)$ tem-se $V \subset V'$;

P3- Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, existe uma $V(x)$ e uma $V(y)$ tais que $V(x)$ e $V(y)$ não possuem pontos em comum. Escreve-se simbolicamente $V(x) \cap V(y)$ igual ao conjunto vazio ou a parte vazia de $\mathbb{R}$.

2.6 Ínfimo e supremo

Seja A um subconjunto dos números reais.

<u>Definição</u> 2.7: A é **limitado superiormente** quando existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $a \in A$. Cada $x \in \mathbb{R}$ com esta propriedade é chamado de uma **cota superior de A.**

Exemplo 2.3: Seja A um subconjunto dos números reais, tal que $A = \{\ldots, 1, 2, 3, 4\}$, tem-se que a cota superior de A é igual a 4, pois $\forall\, a \in A, 4 \geq a$.

<u>Definição</u> 2.8: Se A é **limitado inferiormente** quando existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq a$ para todo $a \in A$. Assim um elemento $y \in \mathbb{R}$ com essa propriedade é chamado de **cota inferior de A**, segundo [10].

Exemplo 2.4: Seja A um subconjunto dos números reais, tal que $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, tem-se que a cota inferior de A é 1, pois $\forall\, a \in A, 1 \leq a$.

Como demostrado na Proposição 2.1, o fato de todo intervalo não degenerado ser um conjunto infinito no conjunto dos reais e definidas as cotas superior e inferior, define-se os conceitos de extremo e ínfimo.

Dado o corpo ordenado $\mathbb{R}$ e sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$, com A limitado superiormente.

<u>Definição</u> 2.9: Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se **supremo** do subconjunto A é a menor das cotas superiores de A em $\mathbb{R}$. Para que b seja determinado como supremo é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- Para todo $x \in A$, tem-se $x \leq b$;
- Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in A$, então $b \leq c$

***Propriedade**:* Se dois elementos $b\ e\ b'$ em $\mathbb{R}$ satisfazem as condições citadas, tem-se que $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja $b = b'$. Portanto, **o supremo do conjunto**, quando existe é único e é denotado como $sup\ A$.

<u>Definição</u> 2.10: Seja $a \in \mathbb{R}$, chama-se **ínfimo** do subconjunto A limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de A em $\mathbb{R}$. Para que a seja determinado como **ínfimo** é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- para todo $y \in A$, tem-se $a \leq y$;
- se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in A$, então $c \leq a$.

***Propriedade*:** Se dois elementos $c\ e\ c'$ em $\mathbb{R}$ satisfazem as condições citadas, tem-se que $c \leq c'$ e $c' \leq c$, ou seja $c = c'$. Portanto, o ínfimo do conjunto, quando existe é único e é denotado como $inf\ A$.

Uma importante consequência da definição de supremo é dada como:

Propriedade de Arquimedes. Sendo $x > 0$ e y, dois números reais quaisquer, então, existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$, segundo [5]

Prova:

Supondo por absurdo, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, temos $nx \leq y$. Consideremos então o conjunto $A = \{nx\}$. Sendo A não vazio, pois $1 \cdot x = x \in A$, e limitado superiormente por y, logo admite supremo. Seja s o supremo de A.

Como $x > 0, s - x < s$; assim, evidentemente $s - x$ não é cota superior de A; logo existe um número natural m tal que $s - x < mx$ e daı $s < (m + 1)x$ que é uma contradição.

Logo, $nx > y$ para algum natural n.

Após estas definições fica, de uma maneira intuitiva, ao aluno determinar o ínfimo e o supremo em um intervalo fechado ou ainda nas sequências numéricas.

Exemplo 2.5: Seja $Y \in Q$ a sequência definida como $\frac{1}{2^n}$ com $n \in \mathbb{N}$.

Afirma-se que $inf\ Y = 0$ e $sup\ Y = \frac{1}{2}$, primeiro, temos $\frac{1}{2} \in Y$ e $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$ para todo $n > 1$. Logo $\frac{1}{2}$ é o maior elemento de Y, consequentemente $sup\ Y = \frac{1}{2}$. Como $0 < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, observamos que 0 é cota inferior de Y. Agora falta mostrar que nenhum número racional $c > 0$ é cota inferior de Y. Sendo Q arquimedíano, dado $c > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c} - 1$ ou ainda $1 + n > \frac{1}{c}$.

Pela desigualdade de Bernoulli, tem-se $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > \frac{1}{c}$, ou seja, $\frac{1}{2^n} < c$. Logo nenhum $c > 0$ é cota inferior de Y e, portanto, $inf\ Y = 0$.

O exemplo 2.5 também pode ser tratado como uma função, e o seu gráfico pode explorar os conceitos de ínfimo e supremo de uma maneira visual ao discente.

Dado $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definida como $f(n) = \frac{1}{2^n}$, construindo uma tabela com os discentes, tem-se que:

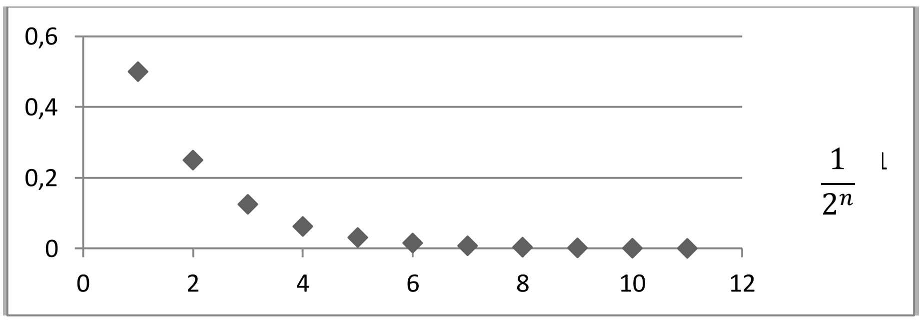
Tabela 2: Pontos de uma sequência.

$n \in \mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,007813	0,003906

Fonte: Autor.

Com a marcação dos pontos da tabela 2 no gráfico representado na figura 4, observa-se que os pontos ficam cada vez mais próximos de zero e superiormente "sai" de $\frac{1}{2}$. Que são os extremos da função.

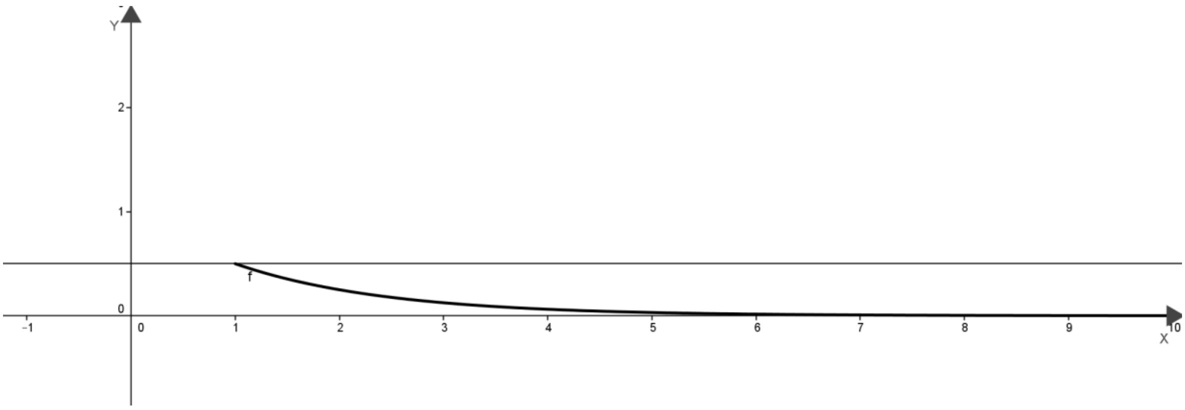
Figura 4: Pontos de uma sequência.



Fonte: Autor.

Se determinarmos o domínio da função sendo $x > 1,\ x \in \mathbb{R}^{+}$, tem o gráfico da figura 5.

Figura 5: Gráfico ínfimo e supremo.



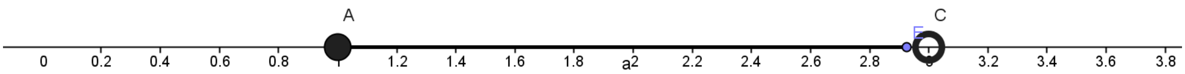
Fonte: Autor.

Exemplo 2.6: Pode-se trabalhar utilizando um subconjunto A dos números reais, onde ele não admitir um máximo, entretanto, poderá admitir uma menor cota superior.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x < 3\}$$

Observe que o subconjunto A não admite um máximo, porém sua cota superior é igual a 3, ou seja, $sup\ A = 3$. Utilizando a visualização para explorar o tema observe o intervalo na reta dos reais na figura 6.

Figura 6: Intervalo.



Fonte: Autor.

Postulado de Dedekind: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo, segundo [5]

Todo corpo ordenado K possui um subconjunto, que pode-se identificar com o conjunto $\mathbb{Q}$. Como K um corpo ordenado, ele contém o número 1 e, sendo ele fechado em relação à soma, contém todos os naturais: 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, . . .

Sendo K um corpo ordenado, ele contém 0 e o simétrico de cada natural, portanto, ele contém um subconjunto que se pode identificar com os inteiros. Sendo K um corpo ordenado, ele contém os inversos dos inteiros não nulos e produtos destes com inteiros, ou seja, ele contém um subconjunto que podemos identificar com os racionais. Em particular, sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado, ele contém um subconjunto que pode-se identificar como os racionais.

O postulado de Dedekind determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. Podemos simplificar e simplesmente dizer que $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$. A reta r é um modelo geométrico para a representação do corpo $\mathbb{R}$.

2.7 Sequências

Definição 2.11: Uma **sequência** de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3, \cdots\}$ e associando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n, ou $n - ésimo$ termo da sequência.

Notação: $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n), é usado para indicar a sequência x, para os seus termos usa-se a notação $x(\mathbb{N}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.

Exemplo 2.7: Uma sequência formada por números pares $(x_n) = (2, 4, 6, 8. \dots)$, definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = 2n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.

Observação: A função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva: pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. O conjunto $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ pode ser finito, ou até mesmo ser reduzido a um único elemento, como é o caso de uma sequência constante, em que $x_n = a \,/\, a \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.8: Uma sequência formada por $(x_n) = (2, 2, 2, 2. \dots)$, definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = 2, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$.

Observação: Quando a sequência (x_n) for injetiva, isto é, quando $m \neq n$ implicar $x_m \neq x_n$, diz-se que ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Exemplo 2.9: Uma sequência formada por números ímpares $(x_n) = (1, 3, 5, \dots)$, onde é definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = 2n - 1, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$.

Definição 2.12: Uma **sequência** (x_n) é **limitada** quando o conjunto dos seus elementos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo da forma $[-c, c]$, com $c > 0$ (intervalo simétrico). Para ver isto, basta tomar $c = \max\ \{|a|, |b|\}$. Com a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, se vê que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí resulta que (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.

Exemplo 2.10: Uma sequência formada por $(x_n) = (2, 4, 6, 8)$, onde é limitada ao intervalo fechado $[2, 8]$

Observação: Quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Definição 2.13: Uma sequência (x_n) diz-se **limitada superiormente** quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $(-\infty, b]$.

Exemplo 2.11: Uma sequência definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = -2n, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$, tem-se $(x_n) = (-2, -4, -6, -8, \dots)$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $(-\infty, -2]$.

Definição 2.14: Diz-se que (x_n) é **limitada inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$, ou seja, $x_n \in [a, +\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.12: Uma sequência definida como sendo uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, tem-se $(x_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $[1,0]$.

Definição 2.15: Uma sequência (x_n) é **limitada** se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Exemplo 2.13: $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto define a sequência constante $(2,2,\cdots,2,\cdots)$; ela é evidentemente limitada, pois $x(\mathbb{N}) = \{2\}$, não-decrescente e também não-crescente.

Exemplo 2.14: $x_n = 1$ para n par e $x_n = 2$ para n ímpar. A sequência assim definida é $(2,1,2,1,\cdots)$. Seu conjunto de valores é $x(\mathbb{N}) = \{1,2\}$. Ela é limitada e não é monótona.

Definição 2.16: Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma sequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ ou $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a **subsequência** $x' = x \,/\, \mathbb{N}'$, segundo [10]

Exemplo 2.15: A sequência (x_n) dos números naturais onde os termos de ordem par, ou seja, a subsequência (x_{2n}) é a sequência dos números pares, é uma subsequência dos números $\mathbb{N}$.

As sequências mais estudadas no ensino médio são as progressões aritméticas e geométricas, neste capitulo será feita apenas a sua definição trabalhando suas propriedades posteriormente.

Definição 2.17: Uma **progressão geométrica (P.G.)** é uma sequência $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \dots)$, onde cada termo, a partir do segundo, é o produto $x_{n+1} = x_n . q$ do termo anterior multiplicado por uma constante $\boldsymbol{q}$ chamada de razão da P.G, com o termo geral igual a $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n = x_1 . q^{n-1}$, conforme [9].

Exemplo 2.16: A sequência $x_n = (2, 4, 8, 16, 32, \dots,)$ onde $x_1 = 2$ e a razão igual $q = 2$.

Definição 2.18: Uma **progressão aritmética (P.A)** é uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante r, chamada razão da P.A, com o termo geral igual a $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r$, conforme [7]

Exemplo 2.17: A sequência $x_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots,)$ onde $x_1 = 2$ e a razão igual $r = 2$.

Definição 2.19**:** Uma **progressão aritmética de segunda ordem** é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária, conforme [9].

Exemplo 2.18: A sequência $(x_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre seus termos

$$x_1 = 3 - 1$$
$$x_2 = 6 - 3$$
$$x_3 = 10 - 6$$
$$x_4 = 15 - 10$$
$$x_5 = 21 - 15$$

.

.

.

$\Delta x_n = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ é uma progressão aritmética não estacionária.

2.7.1 Limite de uma sequência

Para dizer que o número real a é limite da sequência (x_n) significa afirmar que quanto maior for o valor de n, mais próximos de a se, está. Para ser mais preciso, e estipulando-se um "erro" $\varepsilon > 0$, encontrar-se um n_0 tal que todos os termos as sequência x_n que possui índice n maior do que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε.

Exemplo 2.19: Seja a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, o limite da sequência $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ é 0.

Realmente, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Logo $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

O índice n_0, evidentemente, deve depender de ε, sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de ε, necessite-se tomar n_0 cada vez maior. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 2.20: Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = lim\, x_n$, ou $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$, segundo [10]

Simbólica, tem-se:

$$limx_n = a. \equiv . \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Assim, pode-se ler a definição escrita, como sendo:

"$\lim x_n = a$ quer dizer que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$".

Constata-se que se $lim\, x_n = a$ o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a e raio $\varepsilon > 0$, comporta todos os termos de x_n da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices n. De fato, dado o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, como $lim\, x_n = a$, obtem-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Portanto, fora desse intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$.

Reciprocamente se, qualquer intervalo de centro a contém todos os x_n, salvo talvez para um número finito de índices n então $lim\, x_n = a$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ conterá todos os x_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_0 o maior índice n tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja $|x_n - a| < \varepsilon$, isto prova que $\lim x_n = a$.

Deste modo, dado uma sequência x_n se o $\lim x_n = a$, se diz que esta sequência converge para a, e escreve-se $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Caso contrário quando para nenhum número real a, se tenha $\lim x_n = a$, a sequência chama-se divergente.

Agora mostrar-se que uma sequência, não pode possuir dois limites distintos.

Teorema 2.2: (Unicidade do limite). Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ então $a = b$, conforme [10].

Prova:

Seja $\lim x_n = a$. Mostrar- se que para qualquer número real $b \neq a$, não se tem $\lim x_n = b$. Inicialmente, tomemos $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ é claro que $\varepsilon > 0$ e que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ e\ (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos. (Se existisse $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ se teria $|a-x| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, onde $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, um absurdo.) Ora, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não é $\lim x_n = b$.

Teorema 2.3: Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência (pela definição 2.16) de (x_n) converge para o limite de a.

Prova:

Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ uma subsequência de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Como os índices da subsequência formam um conjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então $n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow \left|x_{n_i} - a\right| < \varepsilon$. Logo $\lim\ x_{n_i} = a$.

A recíproca nem sempre é verdadeira, como por exemplo para a sequência $x_n = (-1)^n$. Tem-se que x_n é limitada, mas é divergente pois para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos que $x_n - a > \varepsilon$ ou $|x_{n+1} - a| > \varepsilon, \forall\ a\ \in \mathbb{R}, n\ \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4: Toda sequência convergente é limitada.

Prova:

Seja $lim\, x_n = a$ e atribuindo $\varepsilon = 1$, observa-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ou seja $x_n \in (a-1, a+1)$. Seja o conjunto finito $F = \left\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\right\}$. Sejam c o menor e d o maior elemento de F. Nos leva que todos os termos da sequência x_n estão contidos no intervalo $[c, d]$; logo a sequência é limitada.

Teorema 2.5: Toda sequência monótona limitada é convergente, segundo [10].

Prova:

Dado uma sequência limitada e não decrescente, ou seja, $x_n = \{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots\}$. Tomando-se $a = \sup\{x_n\ /\ n = 1,2,\cdots\}$. Temos que $a = \lim\ x_n$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_n$. Devido a sequência ser monótona, então $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, nota-se que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos de fato $\lim x_n = a$, como se queria demonstrar.

Agora reexaminando alguns exemplos anteriores do ponto de vista de convergência, tem-se.

Exemplo 2.20: Toda sequência constante $(b, b, \cdots, b, \cdots)$ é evidentemente convergente e tem limite b . Em particular, $\lim 1 = 1$.

Exemplo 2.21: A sequência $(2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots)$ não converge porque não é limitada.

Exemplo 2.22: A sequência $(2, 1, 2, 1, \cdots)$ é divergente, pois admite duas subsequências (constantes) que convergem para limites diferentes.

2.7.2 Propriedades aritméticas dos limites

Analisa-se o comportamento dos limites de sequências em relação às operações (soma, multiplicação, divisão, etc.) e às desigualdades.

Teorema 2.6: Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então $\lim x_n \,.\, y_n = 0$ (mesmo que não exista $\lim\ y_n$).

Prova:

Existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim x_n = 0$, pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |x_n . y_n| = |x_n| . |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} . c = \varepsilon$. Isto mostra que $x_n . y_n \to 0$.

Exemplo 2.21: Pode-se usar o exemplo dado anteriormente, Para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos $lim \frac{sen(nx)}{n} = 0$. De fato, $\frac{sen(nx)}{n} = se(nx) . \frac{1}{n}$, com $|sen(nx)| < 1$ e $\frac{1}{n} \to 0$, então $\lim x_n \,.\, y_n = 0$.

Teorema 2.7: Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então de acordo com [10], tem-se.

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$;
2. $\lim(x_n . y_n) = a . b$;

3. $lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}\ se\ b \neq 0;$

4. $lim\frac{1}{x_n} = \frac{1}{lim x_n}$.

Prova 1:

Dado $\varepsilon > 0$ existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_0$ implica: $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Isso prova que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. O caso da diferença é análogo.

***Prova 2**:*

Tem-se $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Ora (x_n) é uma sequência limitada (Teorema 2.4) e $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, pelo Teorema 2.6, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. Por motivo semelhante, $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Assim pela parte 1, já demonstrada, tem-se $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0$, donde $lim\ x_n y_n = ab$.

Prova 3:

Em primeiro lugar, note que, como $y_n b \to b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \frac{b^2}{2}$. Basta tomar $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ e achar o n_0 correspondente. Segue-se que, para todo $n > n_0$, $\frac{1}{y_n b}$ é um número (positivo) inferior a $\frac{2}{b^2}$. Logo, a sequência $(\frac{1}{y_n b})$ é limitada. Ora, tem-se $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}$. Como $\lim_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, segue-se pelo Teorema 2.6 que $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$, e portanto $\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

***Prova 4**:*

Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \leq \lim y_n$. Com efeito, se fosse $\lim x_n > \lim y_n$, então se tem $0 < lim x_n - \lim y_n = \lim\,(x_n - y_n)$ e, daí, tem-se $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande.

Segue ainda algumas propriedades de limite.

Propriedade 1: Se (x_n) é uma sucessão convergente, então a sucessão $(|x_n|)$ dos valores absolutos é também convergente, e $\lim|x_n| = |\lim\ x_n|$.

Propriedade 2: Se (x_n) é uma sucessão convergente tal que $x_n \neq 0$ para todo n, e $\lim\ x_n \neq 0$, então a sucessão $(\frac{1}{x_n})$ é convergente, e $\lim(\frac{1}{x_n}) = \frac{1}{\lim\ x_n}$.

Propriedade 3: Se (x_n) e (y_n) forem duas sucessões convergentes e $x_n \leq y_n$, para todo n, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Propriedade 4: Se (x_n) e (y_n) forem duas sucessões convergentes e $x_n \leq y_n$, para todo n, (ou para n maior do que um certo n_0), e (x_n) tender para $+\infty$, então (y_n) também tenderá para $+\infty$, conforme [5].

Exemplo 2.23: Examinando-se a sequência de números reais positivos $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, onde $a > 0$. Ela é decrescente se $a > 1$ e crescente se $0 < a < 1$, sendo limitada em qualquer hipótese. Existe, portanto $l = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$, pode se garantir que $l > 0$. Com efeito, se $0 < a < 1$, então $l = \sup\left\{a^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\right\} \geq a$. Se for $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$, para todo n, logo $l = inf\, a^{1/n} \geq 1$. Afirma-se que se tem $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Para provar isso, consideramos a subsequência $\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}\right) = \left(a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \cdots\right)$. O Teorema 2.3 e o item 2 do Teorema 2.7, assim tem-se:

$$l = \lim a^{1/n(n+1)} = \lim a^{\frac{\frac{1}{n-1}}{n+1}} = \lim \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\lim\ a^{1/n}}{\lim\ a^{1/(n+1)}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Exemplo 2.24: Mostrando-se agora que $\lim \sqrt[b]{n} = \lim n^{1/n} = 1$. Sabemos que este limite existe porque a sequência é monótona decrescente a partir do seu terceiro termo. Escrevendo $l = lim\, n^{1/n}$, vemos que $l = \inf\{n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}$. Como $n^{1/n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $l \geq 1$. Em particular, $l > 0$. Considerando a subsequência $(2n)^{\frac{1}{2n}}$, temos

$$l = \lim\ [(2n)^{\frac{1}{2n}}]^2 = \lim\ [\left(2n\right)^{\frac{1}{n}}\Big] = \lim\left[2^{\frac{1}{n}}.n^{\frac{1}{n}}\right] = \lim 2^{1/n}.\lim n^{1/n} = l.$$

Como $l \neq 0$, de $l^2 = l$ concluímos $l = 1$.

Exemplo 2.25: Seja a sequência $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{n-1}{n}$, com $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \frac{n-1}{n}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 1 = 1$.

Exemplo 2.26: Considere a sequência $b_n = \frac{n^2-4}{n^2+3n+1}, n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Como $b_n = \frac{n^2-4}{n^2+3n+1} = \frac{1-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$, então se pode escrever $b_n = \frac{x_n}{y_n}$, onde $x_n = 1 - \frac{4}{n^2}$ e $y_n = 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$. Assim como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{4}{n^2} = 0$, pelo Teorema 2.7 item 1, temos $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{4}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 1 - 0 = 1$, logo $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Para o $\lim_{n\to\infty} y_n$ temos, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1$, então, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{1} = 1$.

Teorema 2.8: Seja (x_n) uma sequência convergente. Então, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo n.

Prova:

Seja r o limite da sequência. Então, dado ε, digamos $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que $|x_n - r| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Temos $|x_n| - |r| \leq \big||x_n| - |r|\big| \leq |x_n - r| < 1$. Logo, $|x_n| < |r| + 1$ para todo $n \geq n_0$. Seja agora k' o maior dos números $|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0-1}|$. É claro, pois, que se tomarmos k como sendo o maior dos dois números, k' e $|r| + 1$, então $|x_n| \leq k$ para todo n, como queríamos provar.

Exemplo 2.27: Sequência (x^n) onde $x \in \mathbb{R}$.

Observação: O princípio da indução é o método utilizado para demonstração envolvendo os números naturais. Pode ser descrito assim: “uma propriedade P vale para $n = 1$ e, supõe-se P válida para um K e conseguir concluir que vale para $K + 1$”.

Então P é válida para todos os números naturais.

Lema 2.1: (Desigualdade de Bernoulli) Se r é um número real tal que $r > -1$, então

$$1 + nr \leq (1 + r)^n, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

Prova: (por indução).

Para $n = 1$, temos $1 + 1r \leq (1 + r)^1 \Rightarrow 1 + r = 1 + r$. Agora supondo ser verdade para algum n_0 e para $n_0 + 1$. (Assim feito, o princípio da indução nos dirá que é verdade para todo n.) Sendo $n = n_0$, e multiplicando-se ambos os membros por $1 + r$, vem:

$$(1 + n_0 r)(1 + r) \leq (1 + r)^{n_0+1}, \quad (2)$$

que fornece,

$$1+(n_0+1)r+n_0r^2 \leq (1+r)^{n_0+1}. \quad (3)$$

Assim a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1) Analisando-se agora os casos de convergência de (x^n).

- **Caso 1**. $x > 1$. Então $x = 1 + r$, onde $r > 0$. Pela desigualdade (2) acima temos $x^n = (1+r)^n \geq 1 + nr$.

Pela propriedade 4 dos limites, segue-se que $x^n \to +\infty$.

- **Caso 2**. $x < -1$. Neste caso os termos ficam alternam de sinal, e tendem em valor absoluto para $+\infty$. A sucessão diverge neste caso.
- **Caso 3**. $x = -1$. A sequência é: $-1,1,-1,1,\cdots$, é divergente.
- **Caso 4**. $x = 1$. A sequência é: $1,1,1,1,\cdots$, e convergente.
- **Caso 5**. $x = 0$. A sequência é: $0,0,0,0,\cdots$, e convergente.
- **Caso 6**. $0 < x < 1$. Então $x = \frac{1}{1+r}$, onde $r > 0$. Então, pela desigualdade (2), escreve-se:

$$0 < x^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}.$$

Pela propriedade 3 dos limites, segue-se que $\lim x^n = 0$.

- **Caso 7**. $-1 < x < 0$. Neste caso os termos da sequência alternam de sinal, mas a sequência converge para 0.

2) Sequência $(\sqrt[n]{x})$, onde $x \in \mathbb{R}^+$.

- **Caso 1**. $x > 1$. Neste caso $\sqrt[n]{x} > 1$ e assim.

$\sqrt[n]{x} = 1 + y_n$, onde $y_n > 0$, e varia para cada n, obtem-se $x = (1+y_n)^n \geq 1 + ny_n$, onde usamos a desigualdade (2) acima.

Então obtermos $0 < y_n \leq \frac{x-1}{n}$.

Pela propriedade 3 dos limites, concluí-se que $\lim y_n = 0$, então a sequência $(\sqrt[n]{x})$ converge para 1, pois $\lim\left(\sqrt[n]{x}\right) = 1 + \lim y_n = 1$.

- **Caso 2**. $0 < x < 1$. Neste caso $\left(\sqrt[n]{x}\right) < 1$ assim

$\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+c_n}$, onde $c_n > 0$, e varia com n. De $\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+c_n}$ e (2) obtêm-se $x = \frac{1}{(1+c_n)^n} \leq \frac{1}{1+nc_n}$. De onde se segue $0 < c_n \leq (\frac{1}{x} - 1)\frac{1}{n}$.

Portanto, $c_n \to 0$, quando $n \to \infty$. E daí $(\sqrt[n]{x})$ converge para 1, pois $\lim\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+\lim\, c_n} = 1$.

3) Sequência $\left(\sqrt[n]{n}\right)$, necessitamos da seguinte desigualdade.

Lema 2.2. Se r é um número real tal que $r \geq 0$, então,

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)r^2/2. \quad (4)$$

Prova: (por indução)

Para $n = 1, (1+r)^1 \geq 1 + 1r + \frac{1(1-1)r^2}{2} \Rightarrow 1 + r \geq 1 + r$. Agora supondo algum n_0 e para $n+1$ (o que provará para todo n). Tomando (4) com $n = n_0$ e multiplicando ambos os membros por $1+r$, tem-se:

$$(1+r)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0+1)r + \frac{n_0(n_0+1)r^2}{2} + n_0(n_0-1)r^3/2. \quad (5)$$

Como o último termo no segundo membro de (5) é positivo, podemos eliminá-lo e a desigualdade em (5) fica preservada. Mas, então, teremos precisamente (4) para $n = n_0 + 1$. O lema está provado.

Observação. É claro que, sendo $r \geq 0$, a desigualdade (4) implica

$$(1+r)^n \geq n(n-1)r^2/2. \quad (6)$$

Voltando a sequência $\left(\sqrt[n]{n}\right)$, escrevemos:

$$\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1 + h_n, \; h_n > 0. \quad (7)$$

Aplicando (6) temos:

$$n = (1+h_n)^n \geq n(n-1){h_n}^2/2.$$

O que segue $0 < h_n \leq (\frac{2}{n-1})^{\frac{1}{2}}$.

Pela propriedade 3 dos limites, temos que $\lim h_n = 0$. Como o $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1 + \lim h_n$, concluímos que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

2.7.3 Sequências Monótonas.

<u>Definição</u> 2.21: Uma sequência (x_n) é monótona não decrescente se $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$. E não crescente se $x_1 \geq x_2 \geq \cdots$.

Usa-se a nomenclatura não decrescente (ou não crescente) para enfatizar que alguns termos podem ser iguais. Os nomes crescente e decrescente são reservados para os casos em que todos os termos são diferentes: $x_1 < x_2 < \cdots$. e, $x_1 > x_2 > \cdots$.respectivamente. Exemplos de sequências crescentes são $(x_n) = (n)$ e $(x_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$, conforme [5]

Teorema 2.9: Seja (x_n) uma sequência não decrescente tal que o conjunto $\{x_n\}$ tem uma cota superior. Então, (x_n) é convergente e seu limite é o supremo do conjunto $\{x_n\}$.

Prova:

Dado uma sequência x_n e sendo m o $\sup de \{x_n\}$, Mostrando-se que (x_n) converge para m. Dado um $\varepsilon > 0$, existe x_{n_0}, tal que $x_{n_0} > m - \varepsilon$. Como a sequência é monótona não decrescente, segue-se que $x_n > m - \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $|x_n - m| < \varepsilon$ o que continua que a sequência (x_n) converge para m.

Exemplo 2.28: Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$, converge para 2, segundo [5]

Sendo: $X_n = \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Temos inicialmente que mostrar que a sequência é não decrescente:

Prova: (Por indução)

Como $x_1 < x_2$, tem-se ainda que:

$2 < 2 + \sqrt{2}$ (aplicando a raiz em ambos os membros da desigualdade), obtem-se:

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Supondo verdadeiro que $X_n < X_{n+1}$, para certo $n \geq 1$, temos:

$$X_{n+1} < X_{n+2}.$$

De fato $\sqrt{2 + X_n} < \sqrt{2 + X_{n+1}} \Leftrightarrow X_n < X_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como a sequência é crescente, ou seja, não decrescente, resta mostrar que ela tem uma cota superior.

Se $X_n \leq 2$ para um $n \geq 1$, então $\sqrt{2 + X_n} \leq \sqrt{2+2} \Leftrightarrow X_{n+1} \leq 2$, portanto

$$X_n \leq 2.$$

Assim tem-se que: $\exists\ a \in \mathbb{R}$ / $X_n \to a$, $X_{n+1} = \sqrt{2 + X_n}$, tem-se:

$$(X_{n+1})^2 = 2 + X_n;$$

$$a^2 = 2 + a,$$

$a^2 - a - 2 = 0 \ \to \begin{cases} a' = 2 \\ a'' = -1 \end{cases}$. Portanto, a cota superior é igual a 2.

Logo, pelo Teorema 2.9 a sequência converge para 2.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Para se afirmar que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ seja limitado, é necessário que exista um $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in A$. Assim um conjunto é limitado se ele estiver contido em algum intervalo. Ou ainda, se ele tiver cota inferior e cota superior.

Teorema 2.10: (Bolzano-Weierstrass.) Toda sucessão limitada (x_n) contém uma subsequência convergente, segundo [5].

Prova:

Seja um conjunto B de reais, tal que o conjunto $\{x_n\}$ é limitado, então existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo n. Deste modo, $-k$ é cota inferior para o conjunto B. Assim, pelo postulado de Dedekind, B tem ínfimo; seja m tal ínfimo. Podemos construir uma subsequência (x_{nj}) de (x_n) de modo que $x_{n_j} \to m$. O intervalo $(m-1, m+1)$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n, pois, caso contrário, $m - 1$ estaria em B e, portanto, m não seria o ínfimo de B; tomando um desses termos de x_n, como por exemplo x_{n_1}, temos, $|x_{n_1} - m| < 1$.

Note que o intervalo $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n, como mostrado no caso precedente; seja x_{n_2} um tal termo e tal que $n_2 > n_1$. (Observe que x_{n_2}pode ser igual a x_{n_1}.) Então, $|x_{n_2} - m| < 1/2$.

Assim por diante, tomamos $x_{n_j} \in (m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j})$ e tal que $n_j > n_{j-1} > \cdots > n_2 > n_1$, constrói-se uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) de modo que $x_{n_j} \to m$, quando $j \to \infty$, pois $\left|x_{n_j} - m\right| < \frac{1}{j}$, o que completa a demonstração do teorema.

Sendo (x_n) uma sequência e c um número real. Podemos dizer que c é um ponto de acumulação desta sequência (x_n) se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um número infinito de inteiros n de modo que $|x_n - c| < \varepsilon$. Pode-se concluir que c é um ponto de acumulação da sucessão (x_n), se houver uma subsequência convergindo para c.

Exemplo 2.29: A sequência $3, 3, 3, \ldots$ tem um único ponto de acumulação: 3;

Exemplo 2.30: A sequência $1,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \ldots$,tem dois pontos de acumulação: 1 e 0;

Exemplo 2.31: A sequência $1,2,1,3,1,4, \ldots$ tem um ponto de acumulação: 1.

Tomando-se A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um real c é um ponto de acumulação do conjunto A se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um número infinito de $y \in A$ tais que $|y - c| < \varepsilon$. É evidente que conjuntos A com um número finito de pontos não podem ter pontos de acumulação. Do mesmo modo existem conjuntos infinitos que não têm pontos de acumulação; por ex.,$\{1,2,3, \cdots\}$. Entretanto vale o seguinte resultado.

Proposição 2.3: Todo conjunto infinito limitado A de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação, conforme [5].

Prova:

Se um conjunto A é infinito então existe uma aplicação injetiva de $\mathbb{N}$ em A, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos um $x_n \geq x_m$ para $n \neq m$. Podemos demonstrar a proposição considerando a sequência (x_n) e aplicando o Teorema de Bolzano Weierstrass assim conclui-se que existe um ponto de acumulação c da sequência (x_n). Deste modo percebe-se que c também e ponto de acumulação de A.

Exemplo 2.32: Os pontos de acumulação do conjunto $[0,2] = \{\, x \ \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 2\}$ são todos os pontos de $[0,2]$.

Exemplo 2.33: Os pontos de acumulação do conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ 0 < x < 2\}$ são todos os pontos de $[0,2]$.

Exemplo 2.34: O conjunto $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots\}$ tem um único ponto de acumulação: 0

2.8 Séries Numéricas

Neste momento, se tratará de atribuir um sentido a igualdade do tipo $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1$, onde o primeiro membro é uma soma de infinitas parcelas. O que se procura é o seu limite, quando n tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$. Desta forma dado arbitrariamente um $\varepsilon>0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$, a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, difere de 1 por meio de ε, segundo [5].

Assim sendo se definira as somas infinitas através de limites.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots$, onde os termos x_n são números reais dados.

Essa expressão é chamada de uma série numérica. Associada essa sequência de (A_n), chamada sequência das reduzidas ou das somas parciais, que é assim definida:

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + \cdots + x_n.$$

Se a sequência (A_n) tiver um limite S, se diz que a série (1) converge, e que sua soma é S. Se a sucessão (A_n) não tiver limite, neste caso se diz que a série (1) diverge. Quando a série convergir, escreve-se:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Exemplo 2.35: Para escrevermos a dizima periódica, em forma de fração, podemos interpreta-la como a soma de termos uma progressão geométrica de infinitos termos, seja a dizima 0,1111..., temos:

$$S_1 = 0{,}1 = \frac{1}{10};$$

$$S_2 = 0{,}1 + 0{,}01 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2};$$

$$S_3 = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3};$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Para se calcular o valor dessa série precisamos encontrar o limite dessa sequência. Assim temos que $S_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}$. Multiplicando S_n por $\frac{1}{10}$, vem $\frac{1}{10} S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}$, subtraindo as duas equações $\frac{9}{10} S_n = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$. Calcula-se o $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}$.

Teorema 2.11: A série $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, converge se, e somente se, dado$\varepsilon > 0$, existir n_0 (que pode depender de ε) tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} x_j\right| < \varepsilon$ para todos $m \geq n \geq n_0$.

Teorema 2.12: (Série alternadas) Seja (x_n) uma sequência de números reais não negativos, tais que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$ e $\lim x_n = 0$. Então a série $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots$ converge.

Prova: Inicialmente, percebe-se que as reduzidas de ordem par formam uma sequência não decrescente. Então, $S_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n})$, e como $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$, então cada expressão entre parênteses são negativas.

Do mesmo modo, a sequência das reduzidas de ordem ímpar é não crescente. $S_{2n+1} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \cdots - (x_{2n} - x_{2n+1})$, onde as expressões em cada parêntese são não-negativas. E ainda, observa-se que a sequência (S_{2n}) é limitada superiormente, pois $S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_1$, assim S_1 é cota superior para essa sequência. Da mesma maneira, a sequência (S_{2n+1}) é limitada inferiormente, visto que $S_{2n+1} \geq S_{2n+2} \geq S_2$, o que nos dá S_2 como cota inferior para a sequência das reduzidas de ordem ímpar. Conclui-se que $\lim S_{2n} = r$ e $\lim S_{2n+1} = s$. Como $\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim x_{2n+1}$, segue-se que $r = s$, o que demonstra o teorema.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é majorada por uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, se existir x_0 tal que, para todo $n > n_0$, se tenha $|x_n| \leq y_n$. É comum dizer-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é uma majorante da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Teorema 2.13: A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ será convergente se ela possuir uma série majorante $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que converge.

Prova:

Basta observar que $\left|\sum_{j=n}^{m} x_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} \left|x_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} y_j$, para $n_0 \leq n \leq m$, e aplicar o Teorema 2.11.

Teorema 2.14: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ convergir, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também convergirá, conforme [5]. Para a Prova basta aplicar o Teorema 2.13.

Teorema 2.15: (Teste da razão ou teste de D'Alembert) Seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ agora suponha que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ exista. Sendo l tal limite, então:

(i) a série converge absolutamente se $l < 1$;

(ii) a série diverge se $l > 1$; (iii) o teste é inconcludente se $l = 1,$ segundo [5].

Prova:

(i) Seja que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq y,$ para $n \geq n_0,\ (1)$

onde y é qualquer real de modo que $l < y < 1$.

De (1) obtemos

$$\left|x_{n_0+1}\right| \leq y\left|x_{n_0}\right|;$$

$$\left|x_{n_0+2}\right| \leq y\left|x_{n_0+1}\right|;$$

.

.

.

$$\left|x_{n_0+p}\right| \leq y\left|x_{n_0+p-1}\right|;$$

$$\left|x_{n_0+p}\right| \leq y^p\left|x_{n_0}\right|.$$

Esta desigualdade mostra que a série $\sum_{p=1}^{\infty}\left|x_{n_0+p}\right|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{p=1}^{\infty}\left|x_{n_0}\right|y^p = \left|x_{n_0}\right|\sum_{p=1}^{\infty} y^p$. Como $y < 1$, segue-se pelo Teorema 2.13, que a série $\sum_{p=1}^{\infty}|x_n|$ converge.

(ii) Como $l > 1$, segue-se que existe n_0 tal que, para $m \geq n_0$, tem-se $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$. Assim $|x_{n+1}| \geq |x_n|$, para $n \geq n_0$. Portanto, (x_n) não pode convergir para 0. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ deve divergir.

(iii) Para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2}$, temos $l = 1$. Mas nestes casos note que, a primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

Teorema 2.16: (Teste da raiz ou teste de Cauchy) Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e suponha que $\lim \sqrt[n]{|x_n|}$ exista. Seja l esse limite. Então (i) a série converge absolutamente se $l < 1$; (ii) a série diverge se $l > 1$; (iii) o teste é inconcludente se $l = 1$, conforme [5].

Prova:

(i) Seja $\lim \sqrt[n]{|x_n|}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $\sqrt[n]{|x_n|} \leq y$, em que $y \in \mathbb{R}$ tal que, $l < y < 1$. Como $\sqrt[n]{|x_n|} \leq y \Rightarrow |x_n| \leq y^n$, para $n \geq n_0$. O que nos mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Como $y < 1$, segue-se pelo Teorema 2.13, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge.

(ii) Se $l > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$ tem-se $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ o que nos dá $|x_n| \geq 1$ para $n \geq n_0$ e portanto a sucessão (x_n) não tende a zero, daí conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

(iii) No caso em que $l = 1$ para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. A primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

<u>Observação</u>: Uma somatória, onde uma parte de cada parcela cancela uma parte da anterior, é conhecida como soma telescópica. Ou seja, sendo (X_n) uma sequência, e considerando a somatória abaixo:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j$$

Desenvolvendo a somatória, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - \sum_{j=1}^{n} X_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{i=2}^{n+1} X_i - \sum_{j=1}^{n} X_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{i=2}^{n} (X_i + X_{n+1} - X_1) - \sum_{j=1}^{n} X_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = X_{n+1} - X_1.$$

Tal somatória $X_{n+1} - X_1$, é dita soma telescópica.

3. Funções

Um dos principais conceitos estudados no ensino médio, é o conceito de funções neste capítulo, com isso apresenta-se alguns conceitos necessários para desenvolver a inter-relação entre progressão aritmética e funções.

Definição 3.1: Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \to B$, onde se lê "função de A em B" é um conjunto de instruções que determina como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, onde $y = f(x)$.

O conjunto A é denominado domínio da função, representado como $Dom\,(f)$, B o contra domínio da função f, denotado como $CD(f)$. E, para cada $x \in A$, chama-se de imagem da função f, os elementos de $y \in B$ que são associados a $x \in A$ na relação entre A e B, que representaremos por $Im(f)$, conforme [8].

Como exemplos de funções pode-se relacionar algumas situações em diferentes conceitos matemáticos.

Exemplo 3.1: A área da circunferência S, que depende apenas do seu raio r, assim sua área pode ser escrita como:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, temos: S(r) = \pi \cdot r^2$$

Exemplo 3.2: Uma aplicação financeira, em regime de juros compostos e com taxa de juros i fixa, onde C_0 é o capital inicial, t é o tempo em meses, assim temos o capital final C em função do tempo de aplicação, como sendo a função:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

$$C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Exemplo 3.3: Supondo que uma pessoa trabalhe como representante de uma empresa que se dedica à criação de jogos para computador. Seu salário $f(n)$ é de $R\$\ 2000{,}00$ fixos por mês, acrescidos de $R\$\ 15{,}00$ por jogo vendido n.

A função do seu salario em relação ao número de jogos que vendeu é dada por:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(n) = 15.n + 2000.$$

Observe que o domínio esta restrito ao número de dias do mês.

Para uma função real de variável real pode-se estabelecer os seguintes conceitos:

Definição 3.2: A **função** f diz-se **injetiva** se para todos os pontos do domínio $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplo 3.4: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 3x + 2$ é injetiva, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 3.3: A **função** f diz-se **crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Exemplo 3.5: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 2x$ é crescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definição 3.4: A **função** f diz-se **estritamente crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 3.6: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 3x - 2$ é estritamente crescente, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 3.5: A **função** f diz-se **decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo 3.7: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x + 2$ é decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definição 3.6: A **função** f diz-se **estritamente decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 3.8: A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x$ é estritamente decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 3.7: A função f diz-se **monótona** se é crescente ou decrescente no seu domínio.

Exemplo 3.9: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x + 2$ é decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$. Assim a função é monótona.

Definição 3.8: A função f diz-se **estritamente monótona** se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio.

Exemplo 3.10: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x$ é decrescente, pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Assim ela é estritamente monótona.

3.1 Produto cartesiano

Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um elemento x, chamado de primeira coordenada de p e um elemento y, chamado segunda coordenada de p.

Para A e B dois conjuntos não vazios.

Definição 3.9: O **produto cartesiano** de A por B é definido como sendo o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Indica-se o produto cartesiano de A por B por $A \times B$. Simbolicamente, temos:

$$A \times B = \{(x, y) \ /\ x \epsilon A \text{ e } y \in B\}.$$

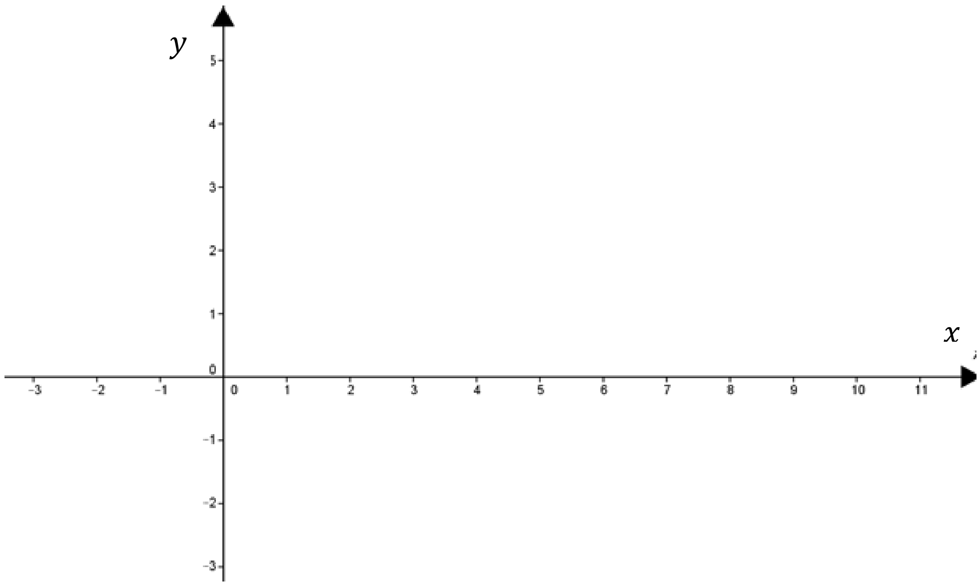
Exemplo 3.11: Sejam A e B dois conjuntos não vazios, com $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$ o seu produto cartesiano $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5)\}$.

3.1.1 O Plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$

Os egípcios utilizavam um sistema de referência com duas retas perpendiculares em seus projetos e construções, já os romanos, dividiam os campos por meio de linhas retas paralelas entre si, perpendiculares a uma linha de referência. Mas foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês que em sua obra “La Geométrie” introduziu a noção de coordenadas no plano, ao estabelecer dois eixos fixos que se interceptam em um ponto chamado origem do sistema, Descartes introduziu formas euclidianas dentro de um plano bidimensional, determinados por duas retas perpendicular entre si, mais tarde chamado de plano cartesiano, em homenagem a esse matemático, como relatado em [1].

Os elementos $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, são os pares ordenados de números reais. Eles surgem com as coordenadas cartesianas de um ponto P do plano ($x =$ abscissa, $y =$ ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais Ox e Oy, que se interceptam no ponto O, chamado origem do sistema de eixos cartesianos.

Figura 7: Plano Cartesiano.



Fonte: Autor.

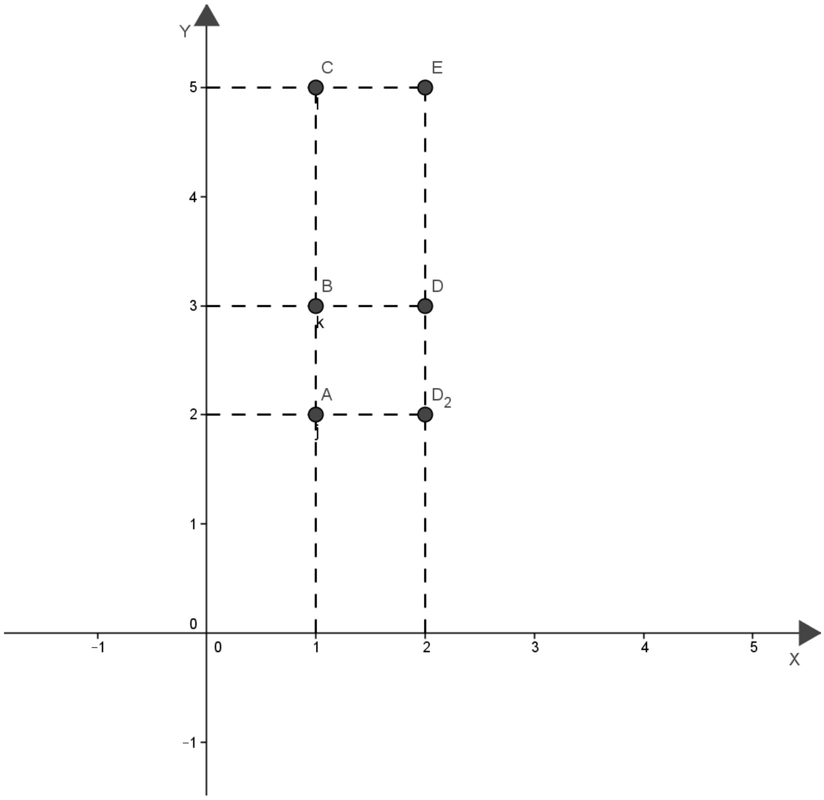
3.1.2 Representação gráfica do Produto Cartesiano

Sejam duas retas ortogonais e sobre a reta horizontal representemos o conjunto A e sobre a reta vertical, o conjunto B. Tracemos paralelas as retas pelos pontos que representam os elementos de A e de B. Os pares ordenados serão representados pelas interseções dessas paralelas. Temos o gráfico de $A \times B$, isto é, sua representação gráfica.

Exemplo 3.12: A representação gráfica do produto cartesiano

$A \times B = \{A = (1,2), B = (1,3), C = (1,5), D = (2,2), E = (2,3), F = (2,5)\}$ é dada por:

Figura 8: Produto Cartesiano.



Fonte: Autor.

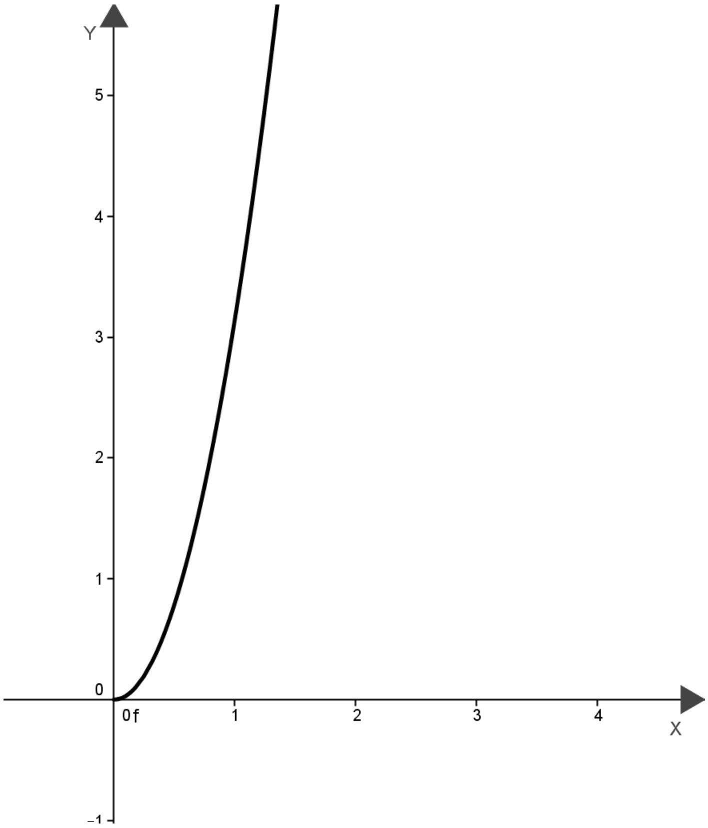
3.2 Gráficos de Funções

A representação geométrica de uma função com uma variável real é dada por seu gráfico no plano coordenado xOy, conforme [8].

<u>Definição</u> 3.10: O **gráfico de uma função** $y = f(x)$ é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, dado por $G(f) = \{(x,y) \mid y = f(x), \forall\, x \in Dom(f)\}$.

Exemplo 3.13: Geometricamente $G(f)$ do exemplo 3.1, citado como exemplo de uma função e definida como $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, com $S(r) = \pi \cdot r^2$, pode ser construído relacionando os pontos do $Dom(f)$ com os pontos da $Im(f)$.

Figura 9: Gráfico da função área.



Fonte: Autor.

Dentre as funções que são estudadas no ensino médio, convém destacar-se as funções afim e quadrática para se embasar os estudos de progressões aritméticas.

3.3 Função afim

Uma das funções utilizadas para expressar algumas situações do cotidiano é a função afim, como o exemplo 3.2, citado como uma situação descrita de função.

<u>Definição</u> 3.11: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de afim quando existem constantes a, b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor b, chamado de valor inicial, pois para $f(0)$ o valor de $f(0) = b$.

O valor de $a,$ pode ser determinado conhecido dois pares ordenados da função.$(x_1, f(x_1))$ e $((x_2, f(x_2))$, assim temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b.$$

Assim, obtem-se:

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_2 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = a$$

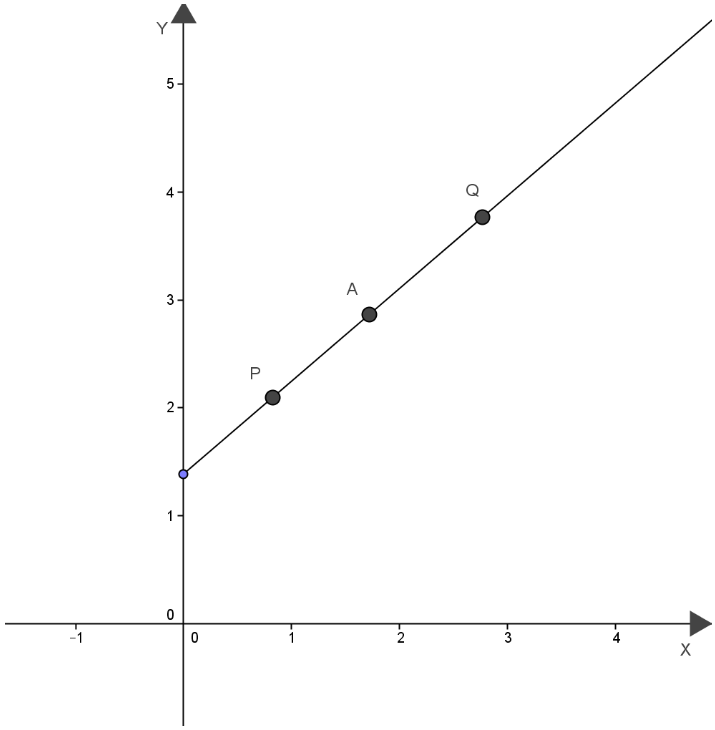
Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x+h)}$ é chamado de **taxa de variação da função** f no intervalo de extremos $x, x + h$.

Exemplo 3.14: O preço a pagar em uma corrida de taxi é dado por uma função afim na forma $f(x) = ax + b$, onde a é o valor do quilometro rodado, b o valor da bandeira e $f(x)$ o preço a ser pago, convém ressaltar que nesta caso o domínio são os números reais positivos $\mathbb{R}^+$, pois não tem-se quilômetros rodados negativo, pois os números negativos representam apenas o sentido do movimento, assim:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$

Explorando o conceito graficamente na figura 10, tem-se:

Figura 10: Gráfico de uma função afim.



Fonte: Autor.

O gráfico de uma função afim é uma reta, para isto basta mostrar que três pontos quaisquer da reta são colineares, segundo [8].

Dados as coordenadas dos pontos iguais a:

$$P = (x_1, ax_1 + b)$$

$$A = (x_2, ax_2 + b)$$

$$Q = (x_3, ax_3 + b)$$

Para que eles sejam colineares, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(A,Q), d(P,Q), d(P,A)$ seja igual à soma dos outros dois, supondo que $x_1 < x_2 < x_3$, pela expressão da distância entre dois pontos tem-se:

$$d(A,Q) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2.(1 + a^2)} = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2.(1 + a^2)} = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P,A) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2.(1 + a^2)} = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Então tem-se que a distância $d(P, Q) = d(P, A) + d(A, Q)$.

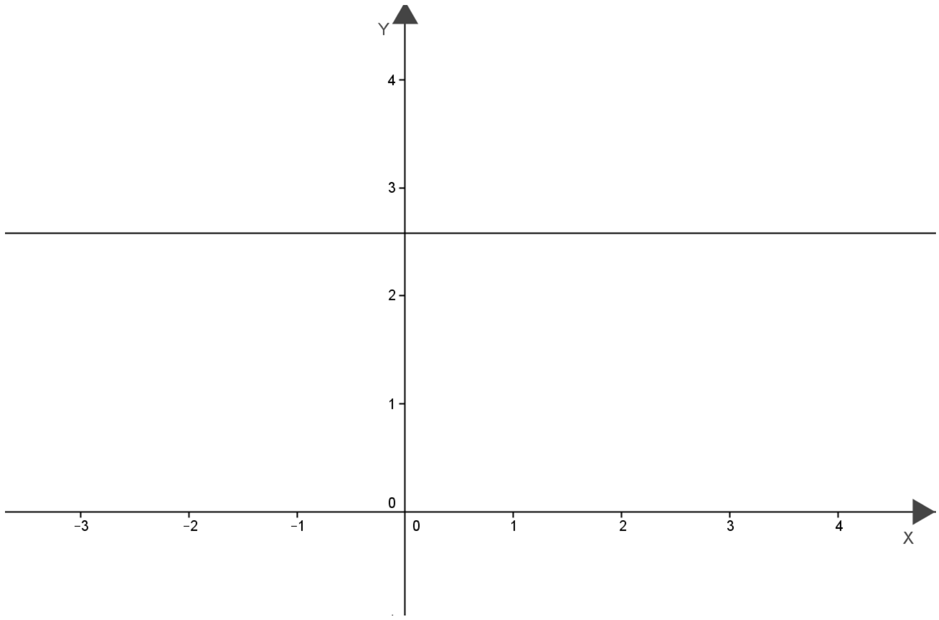
Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, faz interseção com o eixo OY, ou seja o ponto $T = (0, b)$.

O coeficiente a da função também pode ser chamado de coeficiente angular da reta ou inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas, pode-se obter a através das coordenadas de dois, tomando os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Como já mostrado $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}$, onde P_1 e P_2 são pontos quaisquer da reta e b a interseção da reta no eixo das ordenadas. Assim pode-se afirmar que toda reta r não perpendicular ao eixo das abcissas é uma função afim.

Podem-se destacar alguns casos particulares da função afim.

- Quando $a = 0$, tem-se uma função constante onde a reta é paralela ao eixo das abcissas, mostrado na figura 11,

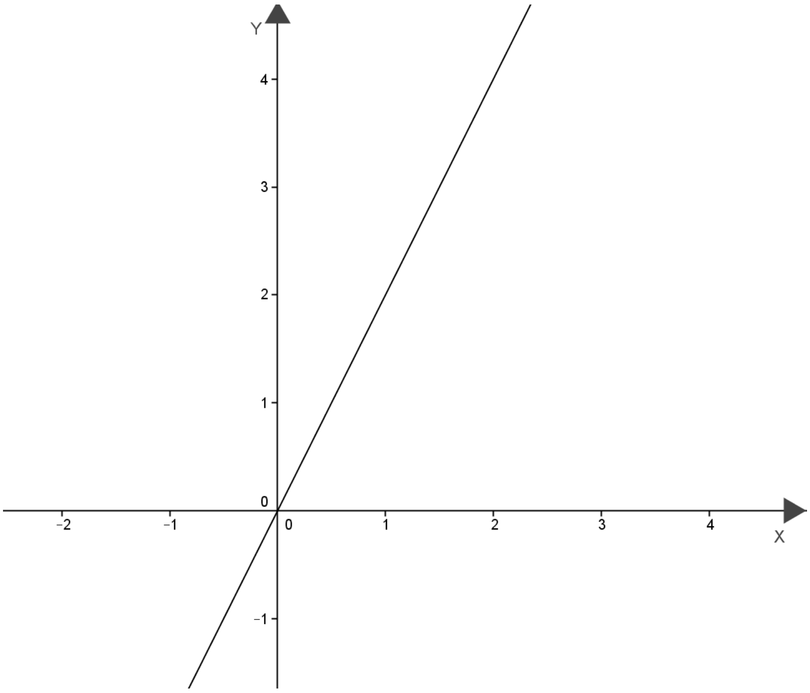
Figura 11: Gráfico da função constante.



Fonte: Autor.

- quando $b = 0$, tem-se uma função linear onde o gráfico é uma reta passando pela origem $(0, 0)$, mostrado na figura 12.

Figura 12: Gráfico da função linear.



Fonte: Autor.

Teorema 3.1: Teorema Fundamental da proporcionalidade.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são validas, segundo [8].

i. $f(nx) = nf(x), \forall\, n \in \mathbb{Z}\; e\; x \in \mathbb{R}$,
ii. Se $a = f(1)$, tem se $f(x) = ax, \forall\, x \in \mathbb{R}$,
iii. $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x\; e\; y\; \in \mathbb{R}$.

Prova:

Provando-se as implicações (i)→(ii), (ii)→(iii) e (iii)→(i). Afim de demostrar que (i) →(ii), prova-se inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, a hipótese (i) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se:

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x).$$

Logo,

$$f(r \cdot x) = \frac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0)$, a monotonicidade indica que $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo.

Além disso, $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostra-se agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supondo por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Admitindo que $f(x) < ax$, tem-se $\frac{f(x)}{a} < x$:

Tomando-se um número racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$, então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deve-se ter $f(r) < f(x)$.

Esta contradição completa a prova de que (i)→(ii).

Para mostrar que (ii)→ (iii) tomando-se $a = f(1)$, com $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

E, finalmente por indução pode-se demonstra que (iii)→ (i) .

Seja $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Tomando $x = y$ tem-se $f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, ou seja, a proposição é válida para $k = 2$.

Supondo a proposição válida para um certo k natural temos $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, mas $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Logo, $f((k + 1) \cdot x) = f(k \cdot x + x) = f(k \cdot x) + f(x) = k \cdot f(x) + f(x) = (k + 1) \cdot f(x)$.

Como tem-se $f(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \leftrightarrow f(-x) = -f(x)$. Tomando-se $m = -n$ com n natural tem-se $f(m \cdot x) = f(-n \cdot x) = f\big(n \cdot (-x)\big) = n \cdot f(-x) = n \cdot \big(f(-x)\big) = m \cdot f(x)$, verificando a validade da proposição para todo inteiro.

3.3.1 Caracterização de uma função afim

Para modelar um problema matemático é necessário saber qual tipo de função a situação descreve, assim é necessário caracteriza-la.

Teorema 3.2: Caracterização de Função Afim.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótono e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, e não de x, então f é uma função afim [8].

Prova:

Supondo que a função f seja crescente, tem-se que para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x)$$

$$\varphi(h+k) = f\big((x+h)+K\big) - f(x+K) + f(x+K) - f(x)$$

$$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, considerando $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+K) - f(x) = a \cdot h$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = a \cdot h + b$, ou seja, $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

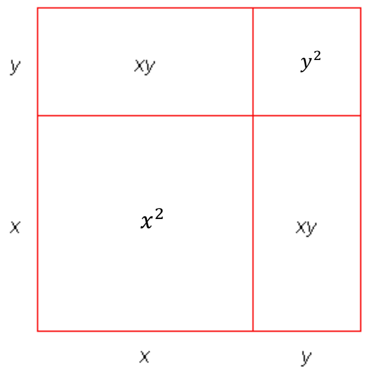
3.4 Função quadrática

Outra função que pode representar modelos matemáticos são as funções quadráticas, como o exemplo da área da circunferência.

<u>Definição</u> 3.12: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **quadrática** quando existem reais a, b e c com $a \neq 0$ de tal forma que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [8].

Exemplo 3.15: Na interpretação do produto $x \cdot y$ de dois números como sendo a área de um retângulo onde os lados medem x e y unidades de medida de comprimento, como mostra a figura13.

Figura 13: Área de um quadrado com lado igual a $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.



Fonte: Autor.

Como o quadrado de um número x pode ser entendido como a área de um quadrado cujo lado mede x unidades de comprimento, tem-se que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, assim pode-se escrever a área de um quadrado com lado igual a $(x+y)$ unidades de medida de comprimento como sendo.

A área de um quadrado com lado x unidades de medida de comprimento, mais a área de dois retângulos de lados x e y unidades de medida de comprimento, mais a área do quadrado de lado igual a y unidades de comprimento.

Observando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

$$ax^2 + bx = -c.$$

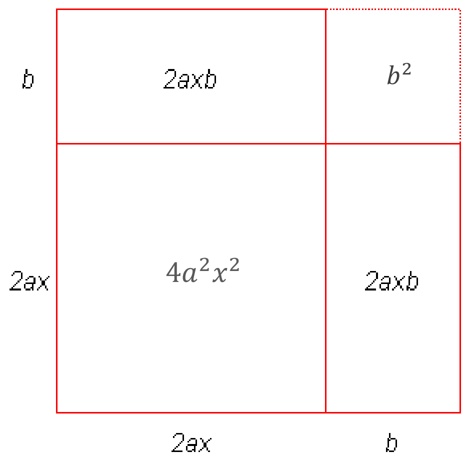
Multiplicando ambos os membros da igualdade por $4a$, tem-se:

$$4a \cdot (ax^2 + bx) = 4a \cdot (-c)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Observando o lado esquerdo da equação temos que $4a^2x^2 + 4abx$ pode ser interpretado como a soma da área de um quadrado de lado $2ax$ com a área de dois retângulos de lados b e $2ax$, figura 14.

Figura 14: Completamento de quadrados.



Fonte: Autor.

Fazendo um comparativo entre a primeira situação do quadro com lado igual a $(x + y)$, com o quadrado de lado igual a $(2ax + b)$, falta o termo b^2.

Assim se completa-se o quadrado de lado b, tem-se que:

$$4a^2x^2 + 4abx \ + b^2 = -4ac + b^2.$$

Agora, a equação representa a área de um quadrado com lado igual a $(2ax + b)$, ou seja,

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2,$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0.$$

Assim tem-se:

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = \frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação tem-se que:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como a raiz pode assumir valores positivos e negativos, obtém-se:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, (Fórmula de resolução de equações do 2º grau).

A fórmula de resolução de equações do 2º grau é usada para determinar as raízes da função, conforme apresentado em [4].

3.4.1 Caracterização das Funções Quadráticas

O que caracteriza uma função quadrática, segundo o teorema de caracterização das funções quadráticas apresentado em [9] que diz:

Teorema 3.3: A fim de que a função contínua f seja quadrática é necessário e suficiente que toda a progressão aritmética não constante $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$, ..., $f(x_n) = y_n$.

Prova:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda PA não constante numa PA de segunda ordem não degenerada, ou seja, $(fx_2 - fx_1), (fx_3 - fx_2), \ldots, (fx_{n+1} - fx_n), \ldots.$ é uma PA. Definindo $h(x) = f(x) - f(0)$, obtem-se uma função com as mesmas propriedades de f e com a propriedade adicional de que $h(0) = 0$ [9].

Considerando a PA $(1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$, a sequência $(h(1), h(2), \ldots, h(n), \ldots)$, por hipótese, é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Logo, existem constantes $a, b\ e\ c \in R$, $a \neq 0$, tais que:

$$h(n) = an^2 + bn + c, \forall n \in N.$$

Como $g(0) = 0$, então $c = 0$ e $h(n) = an^2 + bn$, $\forall n \in N$.

Considere, agora, a PA cujos termos são números racionais,

$$(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots)$$

em que $n, p \in \mathbb{N}$ e p é constante. Analogamente, ao caso anterior, existem constantes $a' \neq 0\ e\ b'$ tais que

$$h\left(\frac{n}{p}\right) = a'\,n^2 + b'\,n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$an^2 + bn = h(n) = h\left(\frac{np}{p}\right) = a'\,(np)^2 + b' = (a'\,p^2\,)n^2 + (b'\,p)n.$$

Portanto,

$$ax^2 + bx = (a\,'\,p^2\,)x^2 + (b'\,p)x, \forall x = n.$$

Logo, $a = a\,'p^2$ e $b = b'\,p$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}, b' = \frac{b}{p}$ e, para quaisquer números naturais n e p vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}\,n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Assim, tem-se que as funções contínuas $h(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $h(r) = ar^2 + br, \forall r \in \mathbb{Q}$. Segue que $h(x) = ax2 + bx, \forall x \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, tomando a PA $(-1,-2,-3,\dots)$ conclui-se que $h(x) = ax^2 + bx, \forall x \leq 0$. Como $h(x) = f(x) - f(0)$, tem-se que $f(x) = h(x) + c$, onde $c = f(0)$, ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou ainda, como toda função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é escrita na forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

No caso em que os elementos do seu domínio está restrito aos números naturais, tem-se que:

$$f(x_1) \to y_1,$$

$$f(x_2) \to y_2,$$

$$f(x_3) \to y_3,$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) \to y_n.$$

Formando o conjunto imagem $I = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ então se observa-se que as diferenças:

$$d_1 = y_2 - y_1,$$

$$d_2 = y_3 - y_2,$$

$$d_3 = y_4 - y_3,$$

$$\vdots$$

$$d_n = y_n - y_{n-1}.$$

Assim tem-se que a sequência das diferenças $D_n = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois, $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \cdots = d_n - d_{n-1}$, ou seja, é a razão da progressão.

3.3 Função Exponencial

Potências de Expoente Racional

Dado $a \in \mathbb{R}^{+}$ e $n \in \mathbb{N}$ a potência a^n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Onde a é a base e n o expoente. Para $n = 1$, tem-se $a^1 = a$. A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a.a^n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

Em ambos os membros tem-se o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Daí segue-se que para $m_1, m_2, \cdots, m_k$ quaisquer, vale:

$$a^{m_1}.a^{m_2}.\cdots.a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_k}.$$

Sendo $m_1 = \cdots = m_k = m$, todos iguais a m, segue-se que $a^{m_1}.a^{m_2}.\cdots.a^{m_k} = a^m.a^m.\cdots.a^m$ com k fatores a^m, daí $(a^m)^k = a^{mk}$. Sendo $a > 1$ e multiplicando ambos os membros dessa igualdade por a^n, obtém-se $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots .$$

E ainda, se

$$0 < a < 1 \ \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots .$$

Assim, quando $a > 1$ a sequência a^n é crescente, se $0 < a < 1$ a sequência a^n é decrescente e quando $a = 1$ a sequência a^n é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Existem sequências que são limitadas superiormente, por exemplo:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \cdots, \frac{n}{n+2}, \cdots .$$

onde tem-se

$$\frac{n}{n+2} < 1,$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entretanto, se $a > 1$, a sequência formada pelas potências $a^n, n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente pois, por maior que seja um número real c, mesmo assim existe $a^n > c$.

Para provar isto, escreve-se $a = 1 + d, c > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, tem-se $a^n = 1 + nd$. Tomando $n > (c-1)d$, segue $1 + nd > c$, ou seja, $a^n > c$.

Dada uma sequência crescente (a^n) ilimitada superiormente, escreve-se $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$, para $a > 1$. Do mesmo modo, se $0 < a < 1$ então as potências sucessivas de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva assim, existe um número $c > 0$, tal que $a^n < c$ para $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, quando $0 < a < 1$.

Considere agora $n \in \mathbb{Z}$, e mantendo a regra fundamental $a^m.a^n = a^{m+n}$. Qual deve ser o valor de a^0?

Sabendo que $a^0.a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, tem-se $a^0.a = a$, e ainda $\frac{a^0.a}{a} = 1$, o que implica em $a^0 = 1$.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, assim $a^{-n}.a^{-n} = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(n) = a^n, n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental $f(m+n) = f(m) + f(n)$, é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Quando $r = m/n$ um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{N}$) observe o que ocorre à potência a^r.

$$(a^r)^n = a^r.a^r.\cdots.a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Assim a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$. Desta forma, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão contidas em $\mathbb{R}^+$, desde que $a \neq 1$.

Lema 3.1: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Prova:

Dados $0 < \alpha < \beta$, deve-se achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, supõe-se a e α maiores do que 1. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < (1 + \tfrac{\beta-\alpha}{a^M})^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente:

$$1 < a^{1/n} < 1 + \tfrac{\beta-\alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M\left(a^{1/n} - 1\right) < \beta - \alpha.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \le M \Rightarrow 0 < a^{m/n}\left(a^{1/n} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \cdots, a^M$$

São extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ com $a \neq 1$. A função exponencial de base $a, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada por $f(x) = a^x$, e assim definida pelas seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x . a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1), ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$, neste caso f não pode assumir o valor 0, desde que não seja identicamente nula. De fato, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$f(x) = f\left(x_0 + (x - x_0)\right) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0,$$

Logo, f será identicamente nula.

De outra maneira se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0.$$

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades 1) e 2) então para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1).f(1).\cdots.f(1) = a.a.\cdots.a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta daí, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

Pela propriedade 3) quando $a > 1$ a função é crescente e para $0 < a < 1$ a função é decrescente.

Deste modo, existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Supondo $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x, r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s, s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, diga-se $A < B$, com a propriedade acima. Se existirem tais A e B tem-se

$$r < x < s, r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s.$$

E, então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 3.1.

Assim, definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, verificou-se que são válidas as propriedades 1),2) e 3) enunciadas. Além disso, temos ainda:

4) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

De fato, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o Lema 3.1.

Seja $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$.

5) A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. De outra maneira: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Prova:

Escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0} - a^x| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Como podemos tomar a^h bem próximo de 1, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Deste modo a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim_{x \to x_0}|a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.

Essa afirmação nos diz que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.(Todo número real positivo é uma potência de a.) Para prová-la usamos o Lema apresentado, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$ portanto $\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$. Supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Assim podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x permite assegurar que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$. Deste modo, (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja $\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$, como queríamos demonstrar.

Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x).f(y)$.

(A injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre de sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então: $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ (portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.)

Tem-se ainda

$\lim_{x \to \infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$

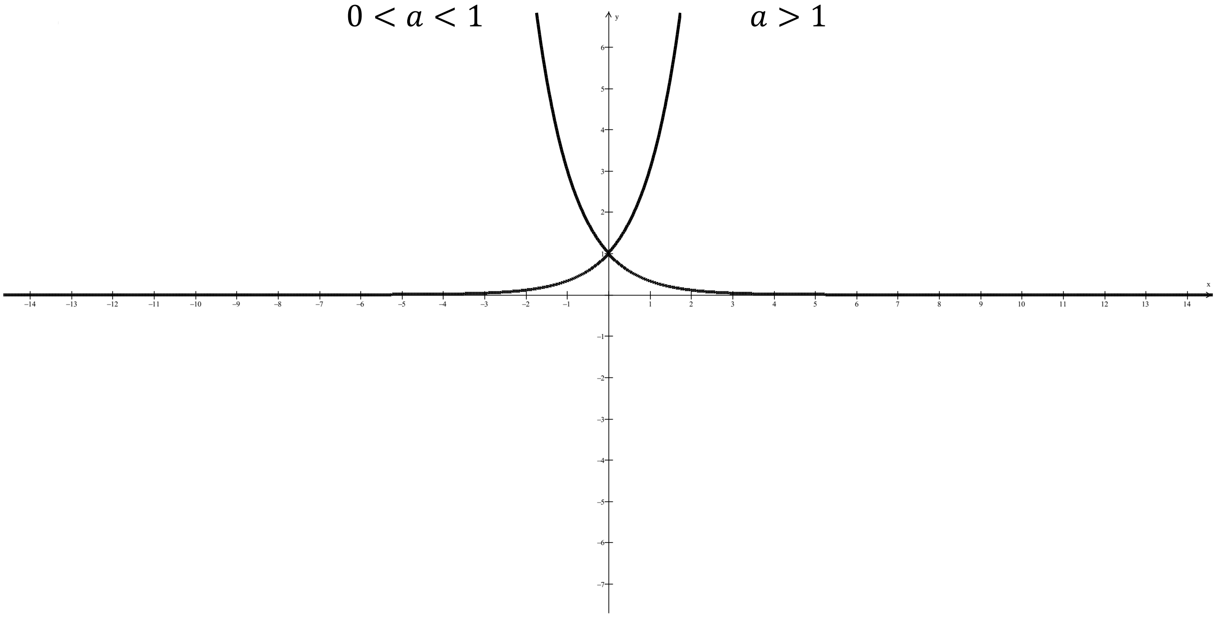
$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$

$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ se $a > 1$ e

$\lim_{x \to \infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$.

A figura exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$

Figura 15 Gráfico da função exponencial



Fonte: Autores

Quando $a > 1$, verifica-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ para x negativo apresenta um crescimento bastante lento. Já para x positivo, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; note que para valores positivos muito grande de x, a tangente é quase vertical.

3.3.1 Caracterização da Função Exponencial

Teorema 3.3: **Teorema de Caracterização da função exponencial**.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Prova:

Para mostrar que (1)⇒(2), seja $r = \frac{m}{n}$ um número racional (com $m \in \mathbb{Z}$ e n ∈ $\mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. De fato, como $nr = m$, podemos escrever:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

Logo, $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Por outro lado usando $f(1) = a$, temos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora consideremos que f seja crescente, então temos $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente.) Então, pelo Lema, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, assim, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, assim $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1)⇒(2).

Outra maneira de enunciar o Teorema de caracterização, seria substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração (1)⇒(2) muda apenas no caso x irracional. Então tem-se $x = \lim_{n\to\infty} r_n = r_n, r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$ g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

Dependem apenas de h, mas não de x.

Teorema 3.4: Caracterização das funções de tipo exponencial.

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer; o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Assim, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, temos $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova:

Admitindo que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{g(0)}$, onde $b = g(0)$, segue-se $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, como f é continua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e $f(0) = 1$. Então, usando $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = \frac{f(0+h)}{f(0)} = \frac{f(0).f(h)}{f(0)} = \frac{1.f(h)}{1} = f(h)$, logo $\varphi(h) =$

$f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Segue-se pelo Teorema 3.3 item 2 que $f(x) = a^x$, e como $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, assim $g(x) = bf(x)$, então $g(x) = ba^x$ como queríamos demonstrar.

3.3.2 Função Exponencial e Progressões.

Seja $f: R \to R, f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \cdots, f(x_n) = ba^{x_n}, \cdots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_{n+h}} = ba^{x_n}.a^h$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

Teorema 3.5: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva, (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, y_n = f(x_n)$. Então $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova:

Tomando $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, assim definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$, é monótona injetiva, sendo assim transforma progressões aritméticas em progressões geométricas tendo $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética de razão $-x$, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Daí tem-se $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \cdots, nx$ é uma progressão aritmética cuja razão x, logo $1, g(x), g(2x), \cdots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, de razão $g(x)$. Então seu $(n+1) - ésimo$ termo é $g(nx) = g(x)^n$. Do mesmo modo se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Segue-se pelo Teorema 3.3 item 2 que, usando $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Inter-relação entre progressões geométricas e funções

No início do primeiro ano do ensino médio é abordado o tema funções onde é estudado o conceito geral de função, a função afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e o complemento de funções. Na maioria dos livros didáticos do ensino médio o conceito de progressões aritméticas e progressões geométricas não estão relacionados com funções, e sim como um capítulo isolado. Ao decorrer deste trabalho procuramos fazer esta relação, pois as progressões são funções com domínio no conjunto dos números naturais.

4.1Sequências famosas

Ao longo da história da matemática algumas sequências ficaram bem conhecidas dos estudiosos, curiosos e do público em geral, tais como a sequência de Fibonacci e o número de Euler. São tópicos que podem auxiliar na introdução do tema sequências e instigar o discente na busca de construção de padrões, fortalecendo o processo de ensino aprendizagem no ambiente escolar.

4.1.1Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175-1250) nasceu na cidade Pisa na Itália, ficou conhecido como Fibonacci, por uma contração de filho de Bonacci. Seu pai foi um comerciante, que devido a sua atividade fazia varias viagens, principalmente a grandes centros comerciais da Europa, África e Ásia. As atividades do pai despertou em Fibonacci um grande interesse por cálculos aritméticos. Acompanhando o pai nas viagens, ele entrou em contato com a matemática desenvolvida pelos orientais e árabes.

Fibonacci escreveu seu famoso livro *Liber Abaci*, em 1202, que tem grande importância pelo fato de introduzir, na Europa, os algarismos indo-arábicos. Neste livro, Fibonacci explica a leitura e a escrita destes novos algarismos e traz vários problemas de álgebra, geometria e também problemas envolvendo juros, permuta de mercadorias e moeda.

Figura 16: Leonardo de Pisa

Fonte: QUEM É FIBONACCI [15].

O mais famoso destes, foi o problema dos coelhos, “Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês?”, que deu origem à sequência de Fibonacci. Existe hoje uma literatura muito grande a respeito da sequência de Fibonacci e suas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, citada em [1].

A sequência de Fibonacci é: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots, \mathrm{x_n}, \ldots)$, definida como:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \text{ para } \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \text{com } \mathrm{n} > 2 \text{ e } \mathrm{x_1} = \mathrm{x_2} = 1.$$

Para solucionar o problema dos coelhos deve-se resolver a seguinte soma:

$$\mathrm{x_1} + \mathrm{x_2} + \mathrm{x_3} + \ldots + \mathrm{x_{12}} = \mathrm{S_{12}}.$$

Generalizando, tem-se:

$$\mathrm{x_1} + \mathrm{x_2} + \mathrm{x_3} + \ldots + \mathrm{x_n} = \mathrm{S_n}.$$

Reescrevendo os termos da sequência tem-se que:

$$x_1 = x_3 - x_2,$$

$$x_2 = x_4 - x_3,$$

$$x_3 = x_5 - x_4,$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$x_n = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Efetuando a soma telescópica tem-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = x_{n+2} - x_2,$$

assim

$$S_n = x_{n+2} - x_2.$$

Como $x_2 = 1 \therefore$

$$S_n = x_{n+2} - 1.$$

Prova:

Para $n = 1$

$$x_1 = x_2 - 1 \rightarrow 1 = 2 - 1 \text{ (verdadeiro).}$$

Supondo verdadeiro para k;

$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \ldots + \mathrm{x}_\mathrm{k} = \mathrm{x}_{\mathrm{k}+2} - \mathrm{x}_2,$$

Deve-se provar que é válido para k+1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} = x_{k+2} - 1 + x_{k+1},$$

$$S_{k+1} = x_{k+3} - 1.$$

Portanto é valido para todo natural.

Ao longo dos anos, foram estudadas varias outras propriedades sobre o tema tais como:

- dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são primos entre si
- na sequência de Fibonacci, tem-se que x_n divide x_m se e somente se, n divide m.

Há outras propriedades e fatos que podem ser abordados com os discentes a serem consultados no livro Elementos da Aritmética, no capítulo 6, na referência [6] do trabalho, onde se encontram as provas das propriedades citadas.

Explorando-se as propriedades sobre a sequência de Fibonacci, pode-se pedir aos alunos para calcular o mínimo múltiplo comum entre dois números consecutivos ou o máximo divisor comum entre esses números e, então discutir as respostas e mostrar que é válida a propriedade. Propor também a questão da divisibilidade dos termos da sequência sugerindo a divisão de termos, discutindo os resultados, quando a divisão é exata. Assim pode se fazer uma exploração do tema relacionando temas que foram vistos nas series finais do ensino fundamental e buscar uma construção mais efetiva do tema.

4.1.2 Número de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basel, Suíça, foi discente de Johann Bernoulli (1667-1748) na universidade local. Passou a maior parte de sua vida em São Petersburgo (1727-1741 e de 1766 até sua morte) e em Berlim (1741-1766). Aos 20 anos, Euler recebeu uma menção honrosa da Academia de Ciências de Paris, em 1727 começou sua carreira profissional como físico na Academia de São Petersburgo, na Rússia, onde conheceu Christian Goldbach, que lhe chamou a atenção para os problemas trabalhados por Fermat. Em 1771, Euler ficou cego, porém não diminui sua produção acadêmica, tanto que quarenta e oito anos após sua morte ainda eram publicados artigos seus nos anais da Academia de São Petersburgo, conforme [1].

Figura 17: Leonhoard Euler.

Fonte: Arte & Cultura [14].

A produção científica de Euler é extensa e variada, produziu materiais em diversas áreas do conhecimento, tais como, matemática, física, astronomia, entre outras. O mais influente de seus trabalhos na área da matemática foi *Introcutio in analysin infinitorum*, obra publicada em 1748, nesse trabalho, Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas e, pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e e da função exponencial e^x.

O numero $\boldsymbol{e}$ ou simplesmente numero de Euler é na verdade o $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, a expressão significa que, fazendo sucessivamente $n = 1, 2, 3, \ldots,$ temos:

$$1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots$$

Aproximando-se cada vez mais de e, bastando para isso que se tome n suficientemente grande.

Ainda pode-se escrever $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$. Esta série foi descoberta por Isaac Newton (1642-1727), em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, esse número irracional é usado como base do logaritmo de Napier, segundo [11].

Podemos utilizar o raciocínio de limite na prática, de maneira intuitiva com os discentes, em uma aplicação financeira, pois os juros são creditados com intervalos inteiros de tempo. Assim, o montante acumulado é modelado por uma função exponencial, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, onde i é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então o montante, $M(t)$, após t unidades de tempo é dado por:

$$M(t) = C.(1+i)^t \text{ onde,}$$

$C =$ capital inicialmente investido e t representa o tempo em períodos inteiros.

Porém, quando uma quantia inicial C é aplicada a uma taxa de juros j em uma unidade de tempo e os juros é creditada n vezes durante esta unidade de tempo, então o montante acumulado é dado por:

$$M(t) = C.\left(1+\frac{j}{n}\right)^{nt}$$

Para obter-se o montante a juros creditados continuamente tomando-se o limite da expressão anterior com n tendendo a infinito, obtendo:

$$\lim_{n\to\infty} C.\left(1+\frac{j}{n}\right)^{jn} = C.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{nj} = C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{n}\right]^{j} =$$

$$C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{n.\frac{n}{j}}\right]^{j} = C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{\frac{n}{j}}\right]^{j.n} = C.e^{j.n}$$

Substituindo n por t tem-se:

$$M(t) = C.e^{jt}.$$

Para explorar um pouco mais a ideia, facilitando a compreensão do aluno, trabalha-se com um exemplo usual do sistema bancário. Em um financiamento bancário onde a taxa de juros $j = 8\%$ a.a (ao ano) e supondo um capital investido inicial $C = R\$\ 100,00$, com auxilio de um aplicativo de planilha, tem-se a Tabela 3:

Tabela 3: Capitalização contínua.

Capitalização continua			
Capitalização	N	j/n	$(1+\frac{j}{n})^{nt}$
Anual	1	0,08	1,08
Semestral	2	0,04	1,0816
Trimestral	4	0,02	1,0824
Bimestral	6	0,013333	1,0827
Mensal	2	0,006667	1,083
Semanal	2	0,001538	1,0832
Diária	60	0,000222	1,0832

Fonte: Autor.

Considerando a mesmo exemplo bancário, porem com uma taxa $j = 100\%$ e um capital $C = R\$\ 1,00$, tem-se na tabela 4:

Tabela 4: Capitalização contínua, com taxa de 100%.

Capitalização continua			
Capitalização	n	$\frac{j}{n}$	$C.(1+\frac{j}{n})^{n}$
Anual	1	1	2
Semestral	2	0,5	2,25
Trimestral	4	0,25	2,44140625
Bimestral	6	0,166667	2,521626372
Mensal	12	0,083333	2,61303529
Semanal	52	0,019231	2,692596954
Diária	360	0,002778	2,714516025
Horário	8760	0,000114	2,718126692
Por minuto	525600	$1,9.10^{-6}$	2,718279243
Por segundo	31536000	$3,17.10^{-8}$	2,718281781

Fonte: Autor.

Desta forma, pode ser mostrado ao discente de maneira intuitiva que o limite de $e \cong 2,718281781$, utilizando um recurso que é empregado diariamente no sistema bancário.

4.2 Progressões Geométricas

Uma progressão geométrica é uma sequência $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \ldots, \mathbf{x_n}, \ldots)$, onde cada termo, a partir do segundo é o produto $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n . q}$ do termo anterior multiplicado por uma constante $\boldsymbol{q}$ chamada de razão da PG, ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte, é sempre a mesma, ou ainda:

$$\boldsymbol{x_2 = x_1 \,.\, q,}$$

$$\boldsymbol{x_3 = x_2 \,.\, q = x_1 . q . q = x_1 q^2,}$$

$$\boldsymbol{x_4 = x_3 \,.\, q = x_1 . q^2 . q = x_1 . q^3,}$$

.

.

.

$$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} \,.\, q} = ?$$

Se substituir até x_n encontra-se uma fórmula geral. Porém pode-se efetuar produtos dos dois lados das equações, obtem-se:

$$\boldsymbol{x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} q^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{x_n = x_1 \,.\, q^{n-1}}$$

Este modo de multiplicar ambos os lados é conhecido como produto telescópico. A fórmula encontrada para x_n pelo produto telescópico ou pelo processo de substituição deduzindo x_n, é chamada de termo geral da PG como aparece em muitos livros didáticos.

Exemplo: Seja $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 8, \cdots$, qual deve ser o valor de x_n =?.

Observe que tem-se uma sequência em que o segundo termo é o dobro do primeiro e assim sucessivamente, pelo método visto temos então $x_n = 2.2^{n-1} = 2^n$.

Definição 4.1: Chama-se de progressão geométrica crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente, $a_n < a_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

- $\boldsymbol{a_1} > 0\; e\; q > 1$, como na PG $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{16})$, em que $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{1}\; \boldsymbol{e}\; \boldsymbol{q} = \mathbf{2}$.
- $\boldsymbol{a_1} < 0\; e\; 0 < q < 1$, como na PG $(-\mathbf{16}, -\mathbf{8}, -\mathbf{4}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1})$, em que:

$\boldsymbol{a_1} = -\mathbf{16}\; \boldsymbol{e}\; \boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Definição 4.2: Uma progressão geométrica decrescente é quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo precedente, $a_n > a_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

- $\boldsymbol{a_1} > 0\; e\; 0 < q < 1$, como na PG $(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}})$, em que $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{1}\; \boldsymbol{e}\; \boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
- $\boldsymbol{a_1} < 0\; e\; q > 1$, como na PG $(-\mathbf{16}, -\mathbf{32}, -\mathbf{64}, -\mathbf{128}, -\mathbf{256})$, em que $\boldsymbol{a_1} = -\mathbf{16}\; \boldsymbol{e}\; \boldsymbol{q} = \mathbf{2}$.

Definição 4.3: Uma progressão geométrica é constante quando todos os seus termos são iguais.

Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja igual a $\mathbf{1}$, como em $(\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6})$.

Definição 4.4: Progressão geométrica alternante: quando cada termo a partir do segundo, possui sinal oposto ao termo imediatamente anterior.

Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja negativa, como por exemplo, $(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{4}, -\mathbf{8}, \mathbf{16}, -\mathbf{32})$, em que a razão é $-\mathbf{2}$.

Como citado anteriormente defini-se uma sequência como sendo uma função $\boldsymbol{x}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$**.** Assim podemos dizer que uma PG é uma função $\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{x_1} . \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n-1}}.$$

Pode-se observar que se trata de uma função exponencial, para caracterização da função exponencial usa-se o teorema apresentado em Lima [9].

Teorema 4.1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo n, $n \in Z\ e\ todo\ x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}, onde\ a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x).f(y)\ para\ quaisquer\ x, y \in \mathbb{R}$.

Diz que uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se a > 1 , g é crescente e se $0 < a < 1$ g é decrescente. Se a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para qualquer $x, h \in \mathbb{R}$,os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \frac{ba^{x+y}-ba^x}{ba^x} = \frac{ba^x a^h - ba^x}{ba^x} = \frac{ba^x(a^h-1)}{ba^x} = a^h - 1$$

e

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^x} = \frac{ba^x a^h}{ba^x} = a^h$$

Dependem apenas de h, mas não de x.

4.2.1 Funções exponenciais e progressões

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores[11]

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \cdots, f(x_n) = ba^{x_n}, \cdots$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_{n+h}} = ba^{x_n}.a^h$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

É importante salientar aos alunos que a PG é uma sequência e quando se tratar se uma sequência pequena a melhor forma de resolver e escrevê-las termo a termo e quando necessário somá-los sem o uso de fórmulas.

E ainda que uma PG é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Por exemplo: A sequência $(1,2,4,8,16,32,\dots)$ é uma PG. Neste caso a taxa de crescimento é de 100% o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior.

É claro então, que numa P.G, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1+i$, em que i é a taxa de crescimento e $1+i$ é a razão, representado por q.

Logo, $q = 1+i$.

Observe neste exemplo: A sequência $(1,4,16,64,\dots)$, é uma P.G. de razão $q = 4$ e sua taxa de crescimento $4 = 1 + i$, ou seja, $i = 300\%$.

4.2.2 Soma dos termos de uma PG.

Dada a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n)$, a soma S_n dos seus n primeiros termos é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Esta soma pode ser escrita de outra forma, utilizando o termo geral da P.G:

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Multiplicando toda a equação por q, tem-se:

$$S_n.q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Subtraindo esta equação da anterior, tem-se:

$$S_n.q = \qquad a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n,$$

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1},$$

$$S_n.(q-1) = a_1q^n - a_1,$$

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{(q-1)},$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}.$$

Em que:

- S_n é a soma dos n primeiros termos;
- a_1 é o primeiro termo;
- q é a razão;
- n é o número de termos.

Nas PG, em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{0 - 1}{q - 1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{-1}{q - 1},$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1}{1 - q},$$

Exemplo: Sendo x um número positivo calcule:

$$\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdots}}}}$$

Observe que a sequência é $(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{8}}, x^{\frac{1}{16}}, \ldots)$, utilizando a propriedade da potenciação, se tem $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}$. Observando o expoente verifica-se uma progressão geométrica com razão igual a $\frac{1}{2}$ e infinitos termos, assim a soma dos termos da P.G é igual a $S_n = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Portanto:

$$x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots} = x^1 = x.$$

4.2.3 Produto dos termos da Progressão Geométrica

Outro conceito que pode ser trabalhado com o discente, podendo ser útil na construção do conhecimento e na busca de padrões é o produto dos termos de uma PG finta. Conforme [7]

Dado uma progressão geométrica finita $(x_n) = (x_1,\, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, pode propor aos alunos que determinem o produto P_n dos n termos da sequência.

Reescrevendo os termos da sequência da PG, tem-se:

$$x_2 = x_1 \,.\, q,$$

$$x_3 = x_1 \,.\, q^2,$$

$$x_4 = x_1 \,.\, q^3,$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_1 \,.\, q^{n-1}$$

Assim temos o produto dos termos da progressão geométrica, como sendo:

$$P_n = x_1 \cdot (x_1 \,.\, q) \cdot (x_1 \,.\, q^2) \cdot (x_1 \,.\, q^3) \cdot \ldots \cdot (x_1 \,.\, q^{n-1}).$$

Colocando x_1 em evidência, tem-se:

$$P_n = {x_1}^n \cdot (q) \cdot (q^2) \cdot (q^3) \cdot \ldots \cdot (q^{n-1}).$$

Usando a propriedade da potenciação, obtem-se:

$$P_n = {x_1}^n \cdot \left(q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\right).$$

Observe que no expoente da razão tem-se a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1 e $(n-1)$ termos, como já definido os termos da PA, tem-se:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n).\, n}{2} = \frac{(1 + (n-1)).\,(n-1)}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Portanto o produto dos n termos de uma progressão geométrica è igual a:

$$P_n = {x_1}^n \cdot \left(q^{\left[\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right]}\right).$$

4.3 Formas de abordagem de Progressões Geométricas

Procurando novamente busca de padrões de determinados temas, para uma investigação dos alunos onde se possa chegar a uma generalização do conteúdo progressões geométricas, mostra-se algumas situações para que o docente possa aplicar em sala de aula, com intuito de ser um facilitador do processo de ensino e aprendizagem.

4.3.1 Lenda

De acordo com uma antiga lenda, o rei Shirham da Índia ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, Sissa Bem Dahir, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse. Sissa, então, simplesmente disse ao soberano: “Dê-me apenas 1 grão de trigo pela 1ª casa do tabuleiro, 2 grãos de trigo pela 2ª casa, 4 grãos pela 3ª casa, 8 grãos pela 4ª casa e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro”. O rei considerou bastante simples e, sem esconder seu desgosto, ordenou aos seus auxiliares que tal pedido fosse cumprido. É claro que o rei não tinha ideia de que essa recompensa era impagável. Conforme [19]

Figuro 17: Tabuleiro de Xadrez

Fonte: Xeque e Mate [20]

Mesmo nos dias atuais, com toda a produção mundial de trigo, o comprimento da proposta seria inviável. De acordo com as primeiras estimativas da Organização das Nações Unidas para a Alimentação e Agricultura (FAO), a produção mundial de trigo em 2011 ascende a 676 milhões de toneladas, o que equivale a 15 548 000 000 000 000 grãos.

Já o pedido de Sissa era exatamente $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} = 2^{64} – 1$ = 18 446 744 073 709 551 615 grãos.

Na divisão 18 446 744 073 709 551 615/15 548 000 000 000 000 = 1186,43, constata-se que seriam necessários mais de 1186 anos de produção mundial para atender ao pedido de Sissa.

4.3.2 Fractais

O matemático Georg Cantor (1845 - 1918), nasceu na Rússia, mas viveu a maior parte do tempo na Alemanha. Construiu um fractal que consiste em dividir um segmento de medida L = 1 em três partes iguais e depois retirar a parte central. A repetição sucessiva desse processo em cada intervalo leva à formação do chamado conjunto de Cantor. Segundo [19]

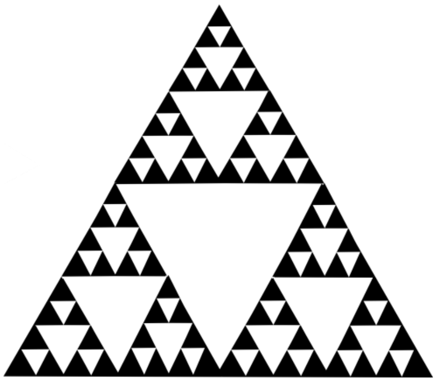
Figura 19: Fractal de Georg Cantor

Fonte: Autor

Observe as etapas da formação do conjunto de Cantor. A primeira etapa tem um segmento, a segunda tem dois e a terceira quatro e assim sucessivamente, formando uma progressão geométrica.

Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) dedicou-se por muitos anos ao estudo de espaços abstratos e, muito antes de se falar em fractais, descreveu a figura mostrada abaixo, atualmente conhecida como triângulo de Sierpinski.

Figura 20: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Triângulo de Sierpinski [17]

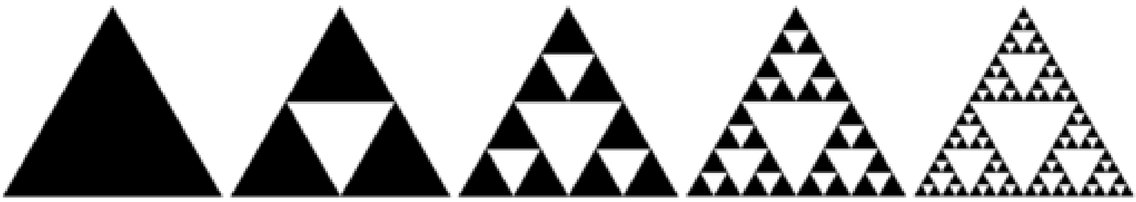
É possível construir esse triângulo seguindo, repetidas vezes, o mesmo procedimento: retirar o triângulo central de um triângulo equilátero.

Considere o triângulo equilátero preto da figura 21(a) e retire dele um triângulo central, também equilátero e com vértices localizados nos pontos médios de seus lados. O resultado será a figura 21(b), com três triângulos equiláteros pretos.

Aplicando o mesmo procedimento para os triângulos pretos da figura 21(b), o resultado será a figura 21(c), com nove triângulos equiláteros.

Repetindo esse processo, após um número infinito de repetições, chega-se ao triângulo de Sierpinski.

Figura 21: Triângulo de Sierpinski



(a) (b) (c) (d) (e)

Fonte:Triângulo de Sierpinski[17]

Neste caso pode observar que a quantidade de triângulos pretos na sequência estão em PG $(1, 3, 9, 27, \dots)$, de razão $q = 3$.

E que suas áreas também formam uma PG, pois na figura 21(a) temos a área A.

Na figura 21(b), divide-se a área anterior em quatro e retira-se o triângulo central. Assim, a área que sobra é $\frac{3}{4}$ da área anterior. Portanto a área é igual $\frac{3A}{4}$.

Na figura 21(c), divide-se a área anterior em quatro e retira-se o triângulo central. Assim, a área que sobra é $\frac{3}{4}$ da área anterior. Portanto a área é igual $\frac{9A}{16}$.

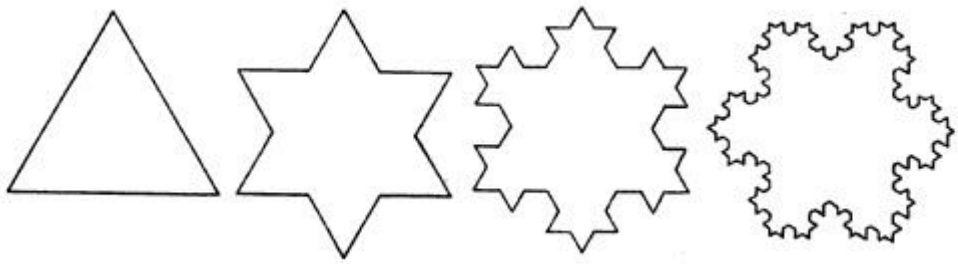
E assim, sucessivamente, formando a PG ($\boldsymbol{A}$, $\frac{3A}{4}, \frac{9A}{16}, \ldots$), de razão q = $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo que pode ser explorado com os alunos, nesta linha de fractais é o exemplo de um fractal bastante conhecido é a Curva de Koch também chamada Curva do Floco de Neve.

Ela pode ser construída do seguinte modo:

- No estágio 1, ela é um triângulo equilátero de lado 1;
- O estágio $n + 1$ é um polígono obtido a partir do estágio n , dividindo cada lado em três segmentos iguais e construindo externamente um triângulo equilátero que tem como base o segmento do meio e removendo a seguir esta base. Abaixo se ilustram os polígonos obtidos nos estágios 1, 2, 3 e 4 da construção da Curva de Koch.

Figura 22: Curva de Koch



Fonte:Matemática para todos [18]

4.3.3 Matemática Financeira

Nos dias atuais muitas vezes influenciados pelos meios de comunicação, desde jovens consome-se cada vez mais e uma das aplicações de progressões geométricas está na matemática financeira. Segundo [4]

Com relação aos juros compostos, seus cálculos baseiam-se nos seguintes elementos:

- Capital: valor inicial de um financiamento ou empréstimo, representado pela letra C;
- Taxa de juro: razão entre os juros pagos ou recebidos, durante um intervalo de tempo, será representado pela letra J;
- Tempo: período considerado na aplicação ou financiamento, representado pela letra n;
- Montante: valor final de um financiamento ou empréstimo, representado pela letra M.

Nos juros compostos, a taxa de juros incide sobre a dívida acumulada no início de cada período, e não apenas sobre o capital inicial.

Seja x um capital aplicado, a uma taxa de crescimento D, por um período n, tem-se:

$$x_1 = x + xD = x(1+D);$$

$$x_2 = x_1 + x_1D = x(1+D) + x(1+D)D =$$
$$x(1+D)(1+D) = x(1+D)^2;$$

$$x_3 = x_2 + x_2D = x(1+D)^2 + x(1+D)^2D =$$
$$x(1+D)^2.(1+D) = x(1+D)^3;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-1}D = x(1+D)^{n-1} + x(1+D)^{n-1}D =$$
$$x(1+D)^{n-1}.(1+D) = x(1+D)^n.$$

Efetuando o produto telescópico, tem-se:

$$x_1.x_2.x_3.\cdots.x_{n-1}.x_n = x(1+D).x_1(1+D)^2.x_2(1+D)^3.\cdots.x_{n-1}(1+D)^n$$
$$x_n = x(1+D).(1+D)^2.(1+D)^3.\cdots.(1+D)^n;$$
$$x_n = x(1+D)^n.$$

Observe que os termos $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, formam uma PG de razão $(1+D)$.

A fórmula apresentada para o cálculo de juros compostos na maioria dos livros didáticos é $M = C(1+i)^n$.

Algumas curiosidades:

1. Uma determinada pessoa deposita R$ 300,00, com taxa anual nominal de 15%. Que quantia terá daqui a um ano?

$$M = 300.(1 + 0{,}15)^1$$
$$M = 345\ Reais.$$

No entanto, a taxa nominal é a taxa composta mensalmente, assim:

$$M = 300\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12}$$

$$M = 348{,}22\ Reais.$$

E se a taxa fosse composta diariamente, obtem-se:

$$M = 300\left(1+\frac{0{,}15}{360}\right)^{360}$$

$$= 348{,}53\ Reais.$$

Observação: Nota-se que o valor aumenta, quanto maior sejam as divisões do ano, pode-se ainda ser também em horas, minutos e segundos.

2. A taxa nominal é uma taxa composta mensalmente, sendo x um capital investido a uma taxa de juros D, temos:

$$x(1+D) = x(1+\tfrac{J}{12})^{12},$$

$$1+D = \left(1+\tfrac{J}{12}\right)^{12},$$

$$D = (1+\frac{J}{12})^{12} - 1.$$

Portanto quando se refere a uma taxa anual de 15%, está a se considerar a taxa efetiva de:

$$D = (1+\tfrac{0{,}15}{12})^{12} - 1 = 0{,}1607 = 16{,}07\% \text{ a.m}$$

Sendo uma taxa anual capitalizada mensalmente, seu valor mensal será sempre maior que o anual.

4.3.3.1 Taxas Equivalentes

Dada uma taxa I, com $I > 0$, relativa a um período de tempo T e i a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = n \cdot t$, então $1 + I = (1+i)^n$.

Prova. Seja C_0 o valor inicial de uma grandeza, após um período de tempo T, o valor da grandeza será $C_0 \cdot (1+I)^T$, como $T = n \cdot t$. Assim, o valor da grandeza é $C_0 \cdot (1+i)^n$.

Logo, $C_0 \cdot (1+I)^T = C_0 \cdot (1+i)^n$ e $1 + I = (1+i)^n$.

Exemplificando, se a população de um país cresce 5% ao ano, quanto crescerá em 20 anos?

Supondo que a população inicial é igual 1 tem-se que:

$$1 + I = (1 + \frac{5}{100})^{20},$$

$$1 + I = 2{,}653297705 = I = 1{,}653297705, \text{ ou seja, } I \cong 165{,}33\%.$$

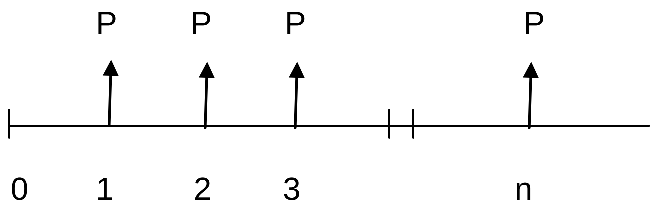
4.3.3.2 Valor de uma Parcela

Pode-se trabalhar com os discentes a conexão das progressões geométricas com a matemática financeira, uma delas é o caso de sendo conhecida a taxa de juros e o número de pagamentos a serem realizados, podemos então calcular o valor da parcela segundo [10]. Para isso à demonstração da fórmula.

Teorema 4.2. O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Prova:

Figura 23: Valor da parcela 1



Fonte: Autor

O valor da série na época 0 é:

$$\boldsymbol{A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}}.$$

Que é a soma de n termos de uma progressão geométrica. Assim:

$$A = \frac{P}{(1+i)}\ \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-\frac{1}{1+i}} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Para facilitar aos alunos o cálculo das parcelas pode-se expressar essa fórmula como:

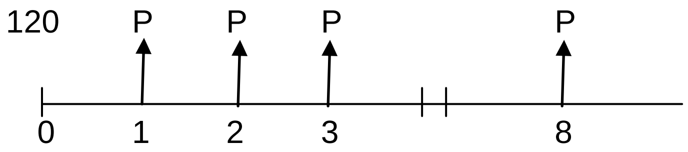
$$P = \frac{iA}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Fazendo esta demonstração para os alunos, pode se além de relacionar as progressões com a matemática financeira, serve como uma educação financeira aos alunos do ensino médio, pois com um simples auxilio de uma calculadora científica e sabendo a taxa de juros aplicada por uma loja e a quantidade de parcelas, o mesmo pode calcular o valor da parcela assim como ver se realmente está sendo cobrado devidamente.

Exemplo. Um bem, cujo preço à vista é R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Resolução:

Figura 24: Valor da parcela 2



Fonte: Autor

$$120 = P\,\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08},$$

$$P = 120\,\frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-8}} = 20{,}88.$$

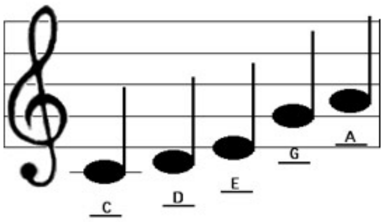
Por curiosidade multiplicando o valor da parcela pelo número de meses a pagar obtem-se R$ 167,04.

4.3.4 Musica.

Sendo a música, independentemente do ritmo, uma atividade presente no dia-dia de qualquer pessoa é conveniente mostrar aos alunos a relação direta dela com a matemática, onde podemos explorar alguns conceitos das progressões geométricas.

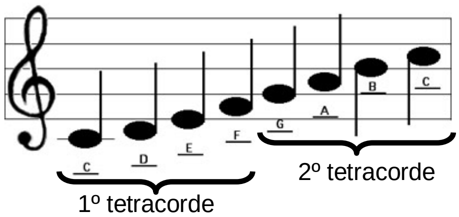
Durante muitos anos foi se observando a evolução da música. Na antiguidade muitos povos tiveram os sons organizados em escalas, fórmulas e formas sonoras. Os chineses desenvolveram as escalas pentatônicas (2500 a.C.), intervalos de cinco notas. Os gregos desenvolveram tetracordes, e depois escalas heptatônicas (sete tons). Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Eratóstenes, desenvolveram escalas diferentes mas com algumas semelhanças. Os árabes desenvolveram escalas com 17 sons e os hindus com 22 sons.

Figura 25: Escala pentatônica



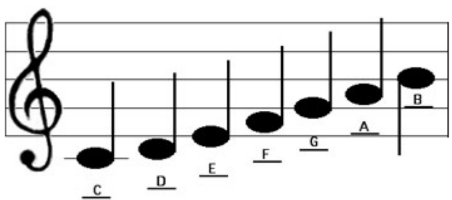
Fonte: Tudo sobre música [21]

Figura 26: tetracordes



Fonte: Tudo sobre música [21]

Figura 27: Escalas heptatônicas



Fonte: Tudo sobre música [21]

Nos três casos, temos A= Lá, B= Si, C= Dó, D= Ré, E= Mi, F= Fá e G= Sol.

Conta-se que Pitágoras em uma de suas caminhadas, ao passar por uma oficina, ouviu o som de cinco martelos batendo em uma bigorna. Entusiasmado com o som produzido e acreditando que era proveniente das forças das mãos, ele fez experimentos trocando os martelos, mas observou que o som produzido continuava o mesmo. Após retirar um dos martelos que produzia um som desagradável, constatou que o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de uma unidade de peso desconhecida.

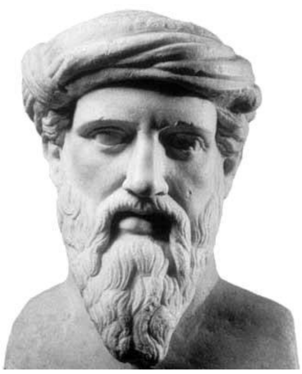
Estas razões deram origem a um instrumento chamado de monocórdio (mono= um, córdio= corda), possivelmente inventado por Pitágoras, que era formado por uma caixa de madeira com apenas uma corda, que pressionada em determinados pontos produzia sons de alturas diferentes. Isso fez com que observassem que cada nota dependia do comprimento da corda que a produz.

Figura 28: Monocordio

Fonte: Clickgrátis [22]

Realizando seus experimentos, Pitágoras observou que se pressionando a corda á metade do comprimento da mesma, esta produzia um som reconhecido como sendo o mesmo som da corda solta, porém mais agudo, o que musicalmente chamamos de oitava. Procedendo da mesma forma e exercendo a pressão a $\frac{2}{3}$, este novo som possuía relação com o inicial, a corda solta, e este novo som é conhecido por quinta, e a pressão exercida a $\frac{3}{4}$, conhecemos por uma quarta. A partir desta experiência, estes intervalos passaram a ser denominados por consonâncias pitagóricas.

Figura 29: Pitágoras

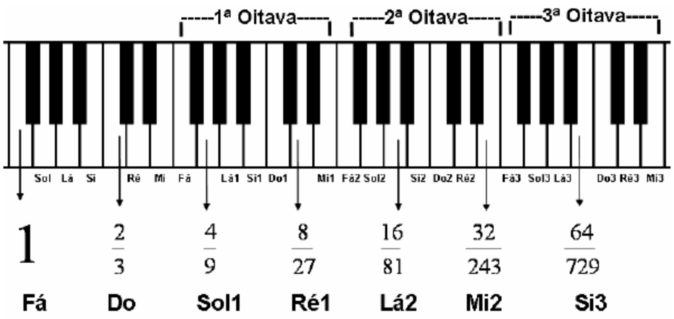


Fonte: Gênius, Filósofos e Espiritualistas do mundo [23]

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas por intervalos de oitava apresentavam certa semelhança, podendo ser definida como uma classe de equivalência, onde duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for um número inteiro de oitavas, podendo reduzir distintas oitavas a apenas uma, possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava de origem segundo Abdounur [24].

A partir disso, fizeram a divisão desta oitava em sons que determinaram o alfabeto sonoro. Sendo possível pela simplicidade nas razões de quintas e oitavas, criando então a escala com sete notas, através de sucessivas divisões por quintas, formando-se uma PG $(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{81}}, \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{243}}, \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{729}})$ de razão $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$, conforme a figura 30:

Figura 30: Notas musicais



Fonte: Tudo sobre música [21]

Assim está formada a sequência fá, dó, sol, ré lá, mí, si, constituída por quintas puras. É claro que é importante salientar aos alunos que este é o principio do estudo da música, mas mostrar que temos um exemplo claro de progressões geométricas. Segue no apêndice um relato da evolução da música.

5 Considerações finais.

Considerando que o ensino na disciplina de Matemática tem passado por grandes desafios ao longo dos tempos, com a era tecnológica, é papel do professor mostrar aos estudantes as diversas maneiras de incorporar a matemática a sua vida diária e propor diferentes tratamentos de determinados temas, observando também que as Progressões Geométricas são apenas funções e que podem e devem ser abordadas em conjunto.

Segundo os Parâmetros Curriculares nacionais: A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar pensamentos e o racicínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiano e para muitas tarefas específicas em que quase todas as atividades humanas. Ou seja, o ensino médio procura preparar o educando para a vida, seja para preparar a sequência dos estudos ou para ter capacidade de resolver problemas cotidianos, assim sendo, desenvolver a habilidade de fazer observações e tomar as decisões mais adequadas e sensatas para o momento de sua vida.

Em virtude de diferentes desafios ao processo de ensino e aprendizagem e ao papel do professor dentro da escola, o presente trabalho, propõe a abordagem do tema sequências e funções, em especial as progressões geométricas, procurando diferentes formas de abordagem. Utilizando a história da Matemática, resolução de problemas, interdisplinaridadee, até mesmo curiosidades relacionadas à matemática financeira e à música, com o intuito de proporcionar ao aluno motivação ao introduzir ou desenvolver o assunto.

Por fim, pode-se mostrar ao aluno que ele pode aprender relacionando assuntos de maneira mais fácil e prática sem usar as fórmulas convencionais e sim usar um raciocínio lógico, que tem tudo a ver com o processo educacional de maneira em que se apresenta o contexto atual.

O Profmat proporcionou um grande enriquecimento no conhecimento dos conteúdos do ensino médio. Principalmente na maneira de trabalhar com os alunos no dia-dia, constatado em algumas situações ainda no decorrer do curso. O presente trabalho pode e será utilizado efetivamente ao longo dos anos de docente, e ainda ser compartilhado por muitos outros colegas.

6 Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B.; **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. 4 reimp. – São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio .** Brasília: SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> acesso em 16/12/2014.

[3] BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio,** volume 2. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book volume2> acesso em 16/12/2014.

[4] DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações** – São Paulo: Editora Ática, 2011.

[5] FIGUEREDO, D. G.; **Análise I**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Cientifícos Editora S.A.2 edª, 1996.

[6] HEFEZ, A.; **Elementos de aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011

[7] IEZZI, G.; **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol.4. Editora Atual. São Paulo. 1977.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[9] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio**, vol.2, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[10] LIMA, E. L.; **Curso de análise,** vol.1. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[11] LIMA, E. L.; **Logaritmos**, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[12] Revista FAFIBE Online, **Revistas Online**. Disponível em < www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/9/18052011 154859.pdf> acesso em 15/01/15.

[13] Site, **Olimpogo**. Disponível em <http://www.olimpogo.com.br/resolucoes /ufg/2009/imgqst/UFG2dia2009.pdf> acesso em 08/01/2015

[14] Site, **Arte & Cultura**, Disponível em < http:/arte7cultura.blogspot.com.br> acesso em 15/03/2015

[15] Site, **QUEM É FIBONACCI**, Disponível em < http:/www.educ.fc.ul.pt/icm/ icm99/icm41/quemefib.htm > acesso em 15/03/2015

[16] UFScar, **Questões de Vestibular.** Disponível em <http://www.provasdevestibular.com.br/ufscar/#2009> acesso em 07/01/2015.

[17] Site, **Triângulo de Sierpinski**. Disponível em <: http://www.educ.fc.ul. pt/icm/icm99/icm48/sierpinski> acesso em 07/01/2015

[18] Blog, **Matemática para todos**. Disponível em < http://matematica paratodos-fernanda.blogspot.com.br/2011/11/construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve> acesso em 05/01/2015

[19] Lafayette e Marco Aurélio F. Barbosa, **Sistema de Ensino**, FTD 2012

[20] Site, **Xeque e Mate**. Disponível em < http://www.xequeemate.com/?p=234> acesso em 06/01/2015

[21] Site, **Tudo sobre Musica**. Disponível em< http://tudosobremusicajlsantostw.blogspot.com.br/2013/04/teoria-musical-escalas-maiores-e-menores.html> acesso em 06/01/2015

[22] Site, **Clickgrátis**. Disponível em< http://www.clickgratis.com.br/fotos-imagens/monocordio/> acesso em 06/01/2015

[23] Site, **Gênios, Filosófos e Espiritualistas do mundo**. Disponível em< https://sites.google.com/site/geniosdomundo/frases-por-autor/frases-de-pitagoras> acesso em 06/01/2015

[24] O.J. Abdounur, **Matemática e Música**: O pensamento analógico na construção de significados, São Paulo, escrituras, 2003

Apêndice

Após o princípio do estudo da música apresentado no trabalho, muitos outros Filósofos, Matemáticos e Físicos passam a estudar a música, podendo citar entre eles o escritor romano Boetius (480-524 d.C) que publicou em cinco volumes o *De Institutione Música*, em que considera a música uma força que impregnava todo o universo e um princípio unificador tanto do corpo e alma do homem quanto as partes do seu corpo.

Desenvolvido no século VIII e IX d.C., o Cantochão é visto como uma das formas musicais mais antigas, constituído de uma única melodia limitada pelo intervalo de uma oitava.

Nos dois séculos seguintes o canto evoluiu para o *Organum Livre*. Nesta época cabe ressaltar a importância de Guido d' Arezzo (955-1050 d.C.) que utilizava novos métodos de notação e ensino, este exerceu papel decisivo na constituição de nossa teoria musical. Já no Renascimento caracterizou-se pela evolução da polifonia, superposição de melodias, e consequente desenvolvimento da harmonia.

Realizando especulações matemáticas relativas a esta área, Ludovico Fogliani (1470-1539) forneceu fortes subsídios para que Gioseffe Zarlino (1517-1590) organizasse em sua obra Inztituzioni Armonique (1558) a base da educação científico-cultural em toda Europa durante dois séculos. Dando continuidade o espanhol Francisco Salinas (1513-1590), bem como o padre e matemático Marin Mersenne (1588-1648) que, dedicando-se ainda à acústica, apresenta-se como primeiro teórico a fundamentar o estudo de harmonia no fenômeno da ressonância. Mantendo correspondência com René Descartes (1596-1650), Mersenne discutiu problemas e aspectos pouco claros do Compedium Musicae escrito pelo filósofo francês em 1618. Descartes estabeleceu, referidos conceitos estéticos de influência marcante ao tratado de harmonia, escrito por Jean Philippe Rameau (1683-1764) cem anos mais tarde.

Galileu Galilei escreveu em 1638 que nem o comprimento, nem a tensão e nem a densidade linear de cordas apresentava-se como razão direta e imediata subjacente a intervalos musicais, mas razões dos números de vibrações e impactos de ondas sonoras que atingem o tímpano.

Classificado como onda, o som ganhou uma nova perspectiva com Huygens (1629-1695) a teoria ondulatória tornando possível o melhor entendimento e representação dos fenômenos musicais. Entre os contribuintes para a relação matemática com a música no século XVII, encontra-se Leonhard Euler (1707-1783), Jean Lê Rond d' Alembert (1717-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Segundo Euler, o ouvido tendia a simplificar a razão percebida, especialmente quando tons dissonantes seguiam-se após uma progressão harmônica.

A conexão mais precisa entre altura de som musical e frequência, velocidade de um movimento vibratório, ocorreria no século XVIII com D'Alembert. Ele afirmou que um som natural não era puro, mas complexo, sendo obtido pela superposição de diversos harmônicos de uma série. Mersenne considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão não somente dos instrumentos de corda, mas de toda ciência musical, revela certa preocupação com o Temperamento quando divide a oitava em 12 partes iguais, obtendo nesse último caso o monocórdio harmônico da igualdade composto por 11 números irracionais resultantes de médias proporcionais. Rameau afirmou que a nota superior de um intervalo de oitava é réplica da inferior e que na flauta, o surgimento de tal intervalo dependia apenas da força do sopro. Introduziu em sua obra a ideia de equivalência de oitavas ao afirmar que qualquer número multiplicado geometricamente por alguma potência de 2, representa o mesmo som. Nesse sentido, os intervalos de oitavas simples, dupla, tripla, entre outras, apresentam-se basicamente com mesmos intervalos, assim como a quinta, a décima segunda, etc.

Do ponto de vista matemático, o problema consistia em encontrar um fator f correspondente ao intervalo de semitom que, após multiplicar 12 vezes uma frequência f_0 correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente à frequência 2. Se chamar de i o intervalo entre cada semitom temperado, um intervalo de quinta (7 semitons) é i^7, um intervalo de quarta (5 semitons) é i^5, um intervalo de segunda maior (2 semitons) é i^2, e assim por diante. O intervalo de oitava (12 semitons), dado por i^{12} tem a relação de $2:1$, portanto:

$$i = 2^{\frac{1}{12}} = 1{,}05946309 \ldots.$$

Esse é o valor do intervalo de um semitom temperado. Similarmente pode-se calcular outro intervalo de escala usando-se a expressão $i^n = 2^{\frac{n}{12}}$, onde n é o número de semitons contido no intervalo. Considerando a nota Dó com frequência 1, obtem-se as outras notas da gama temperada:

Tabela 5: Notas musicais

Nota	Sistema Temperado	Razão intervelar	Números de Semitons	Intervalo
Do	$2^{\frac{0}{12}} = 1$	1	0	Uníssono
Do# = Ré $\boldsymbol{b}$	$2^{\frac{1}{12}}$	1,059463	1	Segunda Menor
Ré	$2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}$	1,122460	2	Segunda Maior
Ré# = Mi $\boldsymbol{b}$	$2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}$	1,189207	3	Terça Menor
Mi	$2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$	1,259921	4	Terça Maior
Fá	$2^{\frac{5}{12}}$	1,334839	5	Quarta Justa
Fá# = Sol $\boldsymbol{b}$	$2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}$	1,414213	6	Quinta Diminuta
Sol	$2^{\frac{7}{12}}$	1,498307	7	Quinta Justa
Sol# = Lá $\boldsymbol{b}$	$2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}}$	1,587401	8	Sexta Menor
Lá	$2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}$	1,681792	9	Sexta Maior
Lá# = Si $\boldsymbol{b}$	$2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}}$	1,781797	10	Sétima Menor
Si	$2^{\frac{11}{12}}$	1,887748	11	Sétima Maior
Do	$2^{\frac{12}{12}} = 2$	2	12	Oitava

Fonte: Autores

Estes valores de frequência da sequência de notas de uma oitava formam uma progressão geométrica, cuja razão é igual $2^{\frac{n}{12}}$. Essa progressão é usada como base na construção de todos os instrumentos de cordas.