2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UMA ABORDAGEM PRÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso [1]
Francinildo Nobre Ferreira[2]

Resumo: O objetivo deste artigo é apresentar uma proposta didática para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, através de conhecimentos e propriedades relativos a proporcionalidade. Esta metodologia valoriza o pensamento construtivo através da aplicação prática em sala de aula, em lugar de conceitos prontos e simples aplicações de fórmulas. Fundamentado pela experiência em sala de aula com alunos do nono ano do ensino fundamental e, também, com alunos do primeiro ano do ensino médio, sugere uma forma dinâmica de construção dos principais conceitos envolvidos, fazendo com que o aluno, além da formalização desses, possa aplicá-los, utilizando pequenos equipamentos rudimentares construídos por ele próprio. Além disso, aproxima o aluno dos fatos históricos que deram origem a esses conceitos, através de uma breve explanação sobre o surgimento de tabelas trigonométricas e a evolução deste ramo da matemática.

Palavras-chave: Semelhança. Razões trigonométricas. Trigonometria. Teodolito. Astrolábio. Prática pedagógica.

1 Introdução

Frequentemente somos questionados por nossos alunos com relação a utilidade de algum conceito novo para eles. Vez ou outra, surge algum comentário semelhante a: *"se alguém já pensou nisso, eu não preciso pensar de novo..."*. Quando nos propomos a ensinar-lhes um conteúdo, para resgatar-lhes o interesse, faz-se necessário dar-lhes uma resposta. Ignorar seus posicionamentos pode desanimá-los no que diz respeito a aprendizagem. Portanto, fazê-los compreender que, embora sua geração já tenha encontrado muitos resultados prontos, muito ainda há que se descobrir e relacionar _ especialmente no que diz respeito à matemática e suas contribuições nas diversas áreas do conhecimento _ torna-se um facilitador da sua aprendizagem, justifica sua participação e os motiva a querer aprenderem mais sobre algum assunto.

[1] Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: anaberepbcelso@yahoo.com.br
[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: francinildonobre@gmail.com

No ensino da trigonometria no triângulo retângulo há uma infinidade de situações que podem ser propostas com o objetivo de dar significado ao que se está aprendendo. Neste contexto, partindo da semelhança de triângulos, serão definidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente. Faremos, ainda, uma abordagem histórica sobre a trigonometria e sobre alguns instrumentos da antiguidade que contribuíram para seu desenvolvimento e aplicação, como o astrolábio e o teodolito, hoje já superados por avançados equipamentos tecnológicos de alta precisão, mas altamente eficientes em seus princípios básicos no que se referem à compreensão dos resultados por eles alcançados. Finalmente, partiremos para a construção dos protótipos rudimentares, com materiais bastante simples, de forma que os alunos possam colocar em prática toda a teoria apresentada e saborear o prazer da descoberta da funcionalidade de ideias simples.

2 Fundamentação teórica

> De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n.º9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. ([3], 2008, p. 69)

Segundo as Orientações curriculares para o ensino médio, [3], faz-se necessário trabalhar os conteúdos buscando agregar um valor formativo no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Em particular, quando trata das funções trigonométricas, o mesmo sugere uma abordagem ressaltando as propriedades da semelhança de triângulos para definir as razões trigonométricas, inicialmente para ângulos agudos, dando significado a essas definições.

De acordo com Silva e Frota em [11], citando Richit e Maltempi (2010) e Smole e Diniz (2005), a utilização de recursos didáticos diversificados é uma prática que possibilita atingirmos um maior número de alunos ao executarmos uma proposta de aprendizagem.

Ainda em [11], ao citar AIMI (2010), podemos constatar que o conhecimento trigonométrico desenvolveu-se de forma empírica ao longo da história da humanidade, mas frequentemente vem sendo trabalhado de forma pouco construtiva, perdendo significado à medida em que se afasta do empirismo que o originou. O processo de ensino-aprendizagem aqui sugerido busca reaproximar o conhecimento trigonométrico escolar do empirismo que lhe deu origem, atribuindo significados concretos aos conceitos explorados.

A prática docente nos revela que os alunos, quando percebem a aplicação da disciplina em seu cotidiano, demonstram maior interesse. Tal aplicação torna-se melhor compreendida através da modelagem. A modelagem, como destaca Silva e Frota, [11], citando Santos e Bisognin (2007), cria um ambiente favorável à aprendizagem durante a implementação das atividades, pois reorienta o ensino da Matemática.

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. ([1], 2004, p. 24)

De acordo com Bassanezi (2004), diferentes motivos destacam a relevância do uso da Modelagem Matemática em sala de aula, dentre eles os de natureza formativa, os de competência crítica, os de utilidade, os de natureza intrínseca e os de aprendizagem. Tais motivos promovem, entre outras habilidades, a formação de um cidadão crítico, autônomo e capaz de utilizar a matemática como instrumento para a resolução de problemas diversos, além de facilitar o entendimento de conceitos e resultados.

Ao utilizarmos a Modelagem Matemática como metodologia para o ensino de algum conteúdo, construímos um processo sistematizado e aplicado, em que a apropriação da aprendizagem está vinculada ao contexto, tornando-se útil e justificável. Conforme Silva e Frota, em [11], quando cita BARBIERI e BURAK (2005), aulas inspiradas pela Modelagem Matemática permitem que o aluno se envolva em experiências educativas, estabelecendo uma conexão entre o conhecimento e a prática, tendo a oportunidade de perceber que a sistematização de conhecimentos não ocorre por acaso, e sim para suprir as necessidades humanas de uma determinada época e inserida num determinado contexto, como resultado da observação, coleta de dados, levantamento de hipóteses e realização de muitos testes.

A reportagem de Dubes Sônego, em [10], apresenta um artigo na seção sobre Didática, no qual destaca que quanto mais perguntas o homem responde, maior a lista de perguntas sem respostas, mas, na escola, o aluno não tem essa percepção. Intitula o texto em *"Na matemática estamos todos sozinhos"*, sugerindo, que ainda que se tenha o melhor professor, com o melhor discurso, é a prática que possibilita, verdadeiramente, a apropriação do conhecimento a qualquer indivíduo. Há ainda nessa reportagem, uma referência ao livro *Letters to a Young Mathematician*, de Ian Stewart, onde faz, no capítulo 4, a seguinte analogia: *"Se a matemática fosse um prédio, ela se pareceria com uma pirâmide de ponta-cabeça"*, quanto mais alto o prédio vai se tornando, maior o espaço para se construir mais coisas e deixá-lo cada vez mais alto.

Tal analogia, vem reforçar uma das propostas descritas nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio:

> É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. ([4], 1999, p. 252)

3 Conhecimentos preliminares necessários

Nesta seção, propomos uma série de atividades, com o objetivo de diagnosticar conhecimentos prévios e retomar conceitos e propriedades necessários para fundamentar nosso trabalho, como o Teorema de Pitágoras e a Semelhança de Triângulos.

ATIVIDADE 1

Construa, com o auxílio de régua, compasso e ou transferidor, os triângulos descritos a seguir, e classifique cada um deles quanto às medidas de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos.

(a) Lados: $\overline{AB} = 4\ cm$, $\overline{BC} = 4\ cm$ e $\overline{AC} = 4\ cm$;

(b) Lados: $\overline{AB} = 3\ cm$, $\overline{BC} = 4\ cm$ e ângulo $\angle ABC = 90°$;

(c) Lados: $\overline{AB} = 3,5\ cm$, $\overline{BC} = 2\ cm$ e $\overline{AC} = 2\ cm$;

(d) Lados: $\overline{AB} = 2,5\ cm$, $\overline{BC} = 2,5\ cm$ e ângulo $\angle BAC = 45°$;

(e) Ângulos: $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 100°$ e lado $\overline{AB} = 3\ cm$,

OBJETIVO

Verificar se os alunos utilizam corretamente os instrumentos sugeridos, bem como se são capazes de reconhecer os diversos tipos de triângulos.

ATIVIDADE 2

Considerando os triângulos retângulos construídos na atividade 1, identifique os catetos e a hipotenusa de cada um, nomeando-os e escrevendo suas respectivas medidas.

OBJETIVO

Verificar se os alunos reconhecem os lados de um triângulo retângulo e se utilizam corretamente o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 3

Dado um triângulo ABC e um ponto O fora deste, obtenha através da homoteita o triângulo $A'B'C'$, redução do triângulo ABC na escala $1 : 2$, e o triângulo $A"B"C"$, ampliação do triângulo ABC, na escala $3 : 1$.

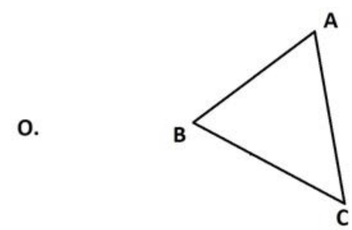


Figura 1: **Atividade 3**

Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Para dar sequência ao desenvolvimento desta atividade, apresentamos a seguir uma possível construção, como mostra a figura 2.

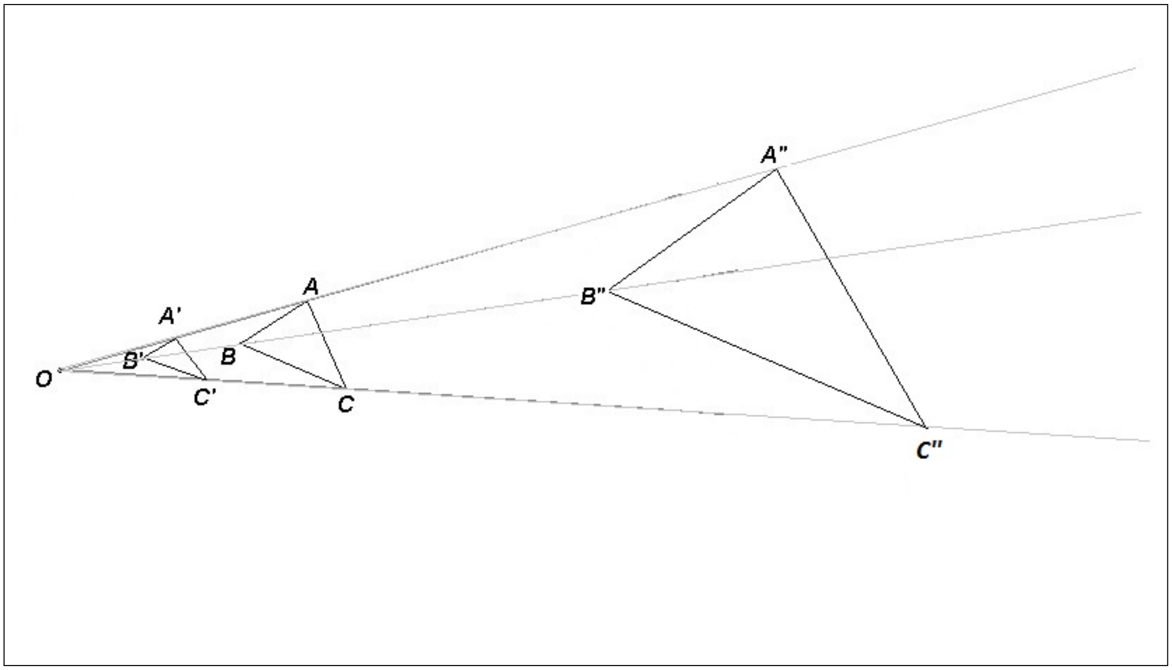


Figura 2: **Ampliação e redução do** $\triangle ABC$
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Considerando a figura 2, meça os lados dos triângulos $A'B'C'$, ABC e $A"B"C"$, e determine as razões a seguir.

$$\frac{A'B'}{AB} \qquad \frac{B'C'}{BC} \qquad \frac{A'C'}{AC}$$

$$\frac{A"B"}{AB} \qquad \frac{B"C"}{BC} \qquad \frac{A"C"}{AC}$$

Meça, a partir da construção anterior, os ângulos que seguem.

$$\angle ABC \qquad \angle BCA \qquad \angle CAB$$

$$\angle A'B'C' \qquad \angle B'C'A' \qquad \angle C'A'B'$$

$$\angle A"B"C" \qquad \angle B"C"A" \qquad \angle C"A"B"$$

Assim, podemos observar que os triângulos $A'B'C'$, ABC e $A"B"C"$, são semelhantes.

Para verificarmos a semelhança entre um par de triângulos, admitiremos os seguintes casos:

1.º caso - a congruência entre dois de seus ângulos correspondentes, **caso AA**.

2.º caso - a proporcionalidade entre os três pares de lados homólogos, **caso LLL**.

3.º caso - a proporcionalidade entre dois pares de lados homólogos e a congruência dos ângulos correspondentes compreendidos entre esses lados , **caso LAL**.

OBJETIVO

Retomar o conceito e as propriedades de semelhança de polígonos, mais especificamente de triângulos, através da homotetia.

ATIVIDADE 4

Dados os pares de triângulos abaixo, identifique, quando forem semelhantes, o caso de semelhança.

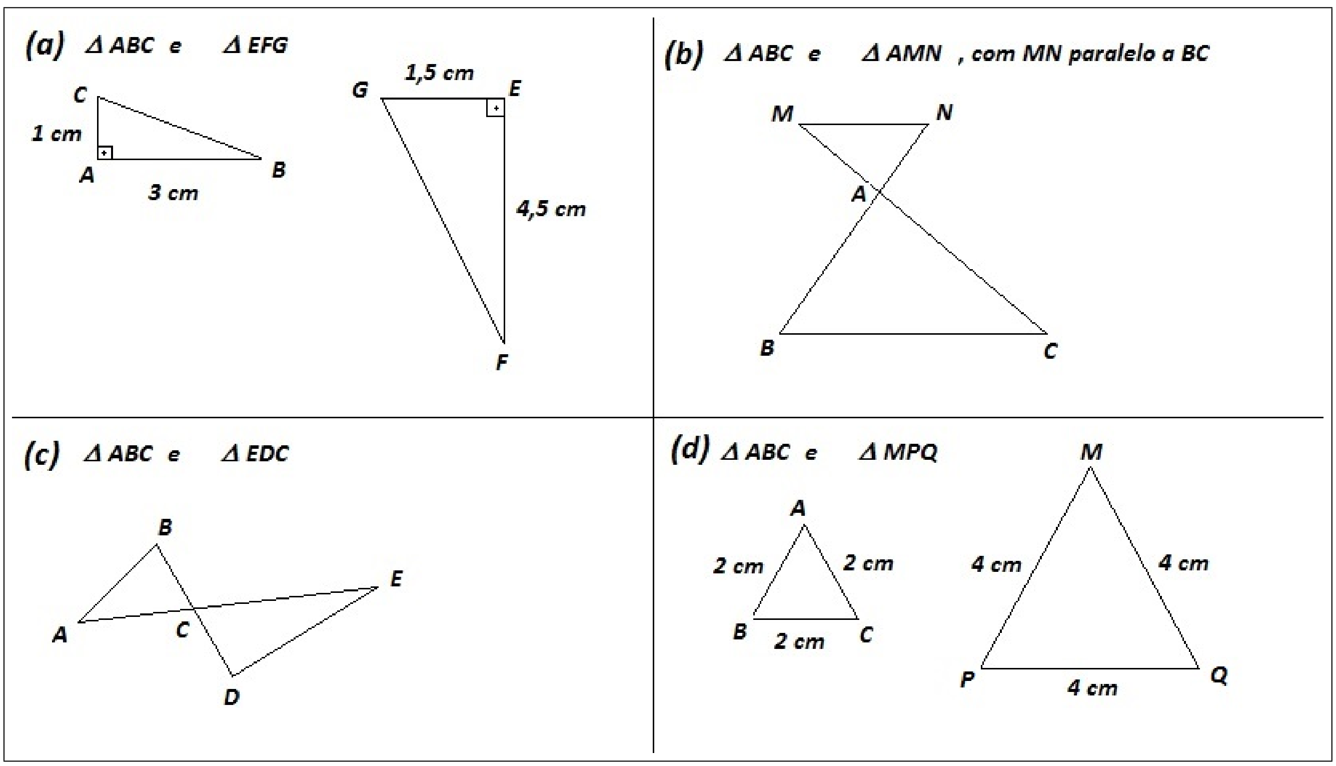


Figura 3: **Identificando casos de semelhança**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

OBJETIVO

Verificar se os alunos reconhecem os casos para a semelhança de triângulos.

ATIVIDADE 5

Resolva as seguintes situações problema.

(a) Utilizando apenas um esquadro de 45° e um canudinho de refrigerante, como você faria para determinar a medida da altura da parede da sua sala de aula, sem poder aproximar-se da parede para medi-la diretamente? (adaptado de [11], p.21)

(b) Determine a altura de uma palmeira, sabendo que a sombra de uma estaca de $1,5\ m$ fincada verticalmente no chão mede $1\ m$ no mesmo instante em que a sombra dessa palmeira mede $3,6\ m$.

(Faça uma figura para representar a situação)

(c) Um pássaro voa em linha reta formando um ângulo constante com a horizontal. Nesse início de trajeto ele sobrevoa uma plantação de eucaliptos, conforme mostra a figura 4. Determine as alturas x e y dos eucaliptos que estão situados, respectivamente, a $3,5\ km$ e a $4\ km$ do ponto que marca o início do vôo.

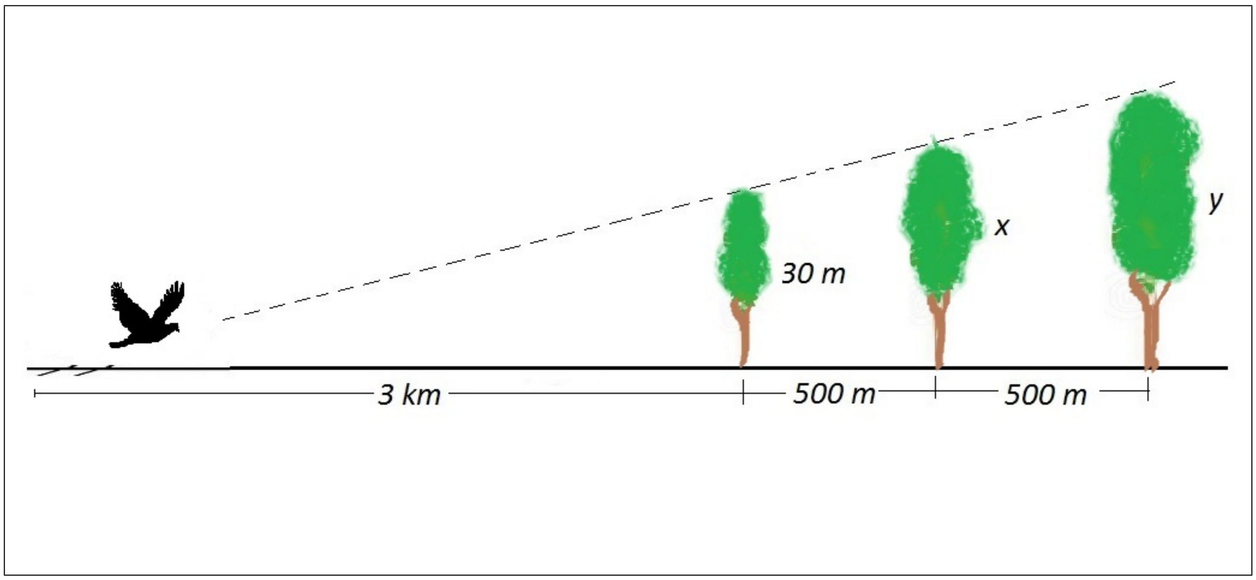


Figura 4: **Aplicando as propriedades da semelhança na resolução de problemas**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

OBJETIVO *Verificar se os conceitos trabalhados sobre proporcionalidade para a semelhança de triângulos são aplicados corretamente na resolução de problemas.*

Após a realização destas atividades, é importante observar as principais dificuldades apresentadas pelo grupo, para dar sequência. Caso haja necessidade, pode ser conveniente realizar uma revisão mais profunda sobre os itens propostos.

4 Definindo as razões trigonométricas do ângulo agudo

Nesta seção, definiremos as razões seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, denominadas razões trigonométricas, conforme encontramos em [6].

Dado um ângulo $\angle AOB = \theta,\ 0° < \theta < 90°$. Sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$, tome os pontos $A_1, A_2, A_3, ...,$ traçando a partir destes, segmentos $\overline{A_1B_1},\ \overline{A_2B_2},\ \overline{A_3B_3}, ...,$ perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{OB}$, obtendo assim, os triângulos semelhantes, $OA_1B_1,\ OA_2B_2,\ OA_3B_3, ...,$ pelo caso AA, conforme a figura 5.

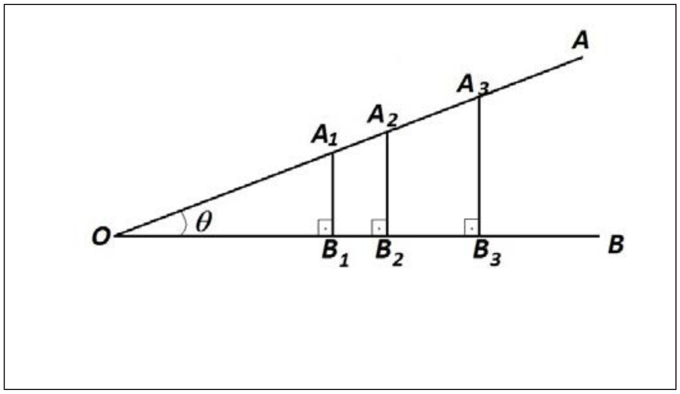


Figura 5: **Triângulos semelhantes**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Podemos então escrever

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = ... = sen\ \theta.$$

Essa relação não depende dos comprimentos dos segmentos envolvidos, mas apenas do ângulo θ, logo é uma função desse ângulo, denominada **seno** de θ, denotada por $sen\ \theta$. Note que o numerador de cada uma das frações representa a medida do cateto oposto ao ângulo θ e o denominador representa a medida da hipotenusa correspondente, em cada um dos triângulos retângulos.

Analogamente, temos também definido o **cosseno** de θ, denotado por $cos\ \theta$, como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo θ e a hipotenusa, ou seja

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = ... = cos\ \theta.$$

E ainda, **tangente** de θ, a qual denotamos por $tg\ \theta$, que corresponde à razão entre o cateto oposto ao ângulo θ e o cateto adjacente a esse ângulo

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = ... = tg\ \theta.$$

Como essas razões são funções do ângulo dado, são chamadas funções trigonométricas. Tais funções são dependentes entre si, de tal forma que duas importantes relações podem ser observadas inicialmente:

Considere o triângulo AOB retângulo em B, com hipotenusa $\overline{OA} = a$, cateto oposto a θ, $\overline{AB} = c$, e cateto adjacente a θ, $\overline{OB} = b$, representado na figura 6.

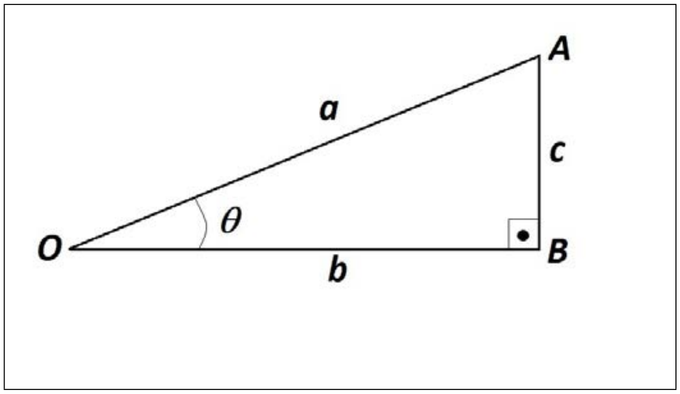


Figura 6: **Relações trigonométricas**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Do Teorema de Pitágoras, temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Considerando a figura 6 e os conceitos de $sen\ \theta$ e $cos\ \theta$, vamos demonstrar a relação $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, denominada relação fundamental:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c^2 + b^2}{a^2}\right) = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Ainda utilizando a figura 6, podemos demonstrar que $tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}$.
De fato,

$$\frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{c}{b} = tg\ \theta.$$

Essas funções de θ são números reais positivos, uma vez que representam a razão entre duas medidas de comprimento e, se uma delas for conhecida, podemos determinar as outras duas.

São válidas, também, outras duas importantes relações, que apresentaremos a seguir.

Seja o $\triangle ABC$, retângulo em A, representado na figura 7:

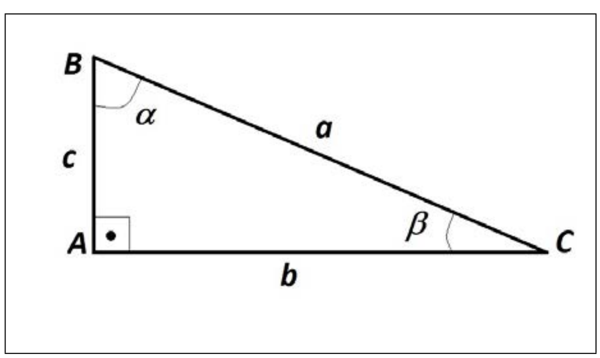


Figura 7: **Ângulos complementares**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Os ângulos α e β são complementares e:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad cos\ \alpha = \frac{c}{a} \qquad tg\ \alpha = \frac{b}{c}$$

$$sen\ \beta = \frac{c}{a} \qquad cos\ \beta = \frac{b}{a} \qquad tg\ \beta = \frac{c}{b}$$

Podemos concluir, analisando a figura e as definições dadas, que:

(i) O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento;
(ii) As tangentes de dois ângulos complementares são inversas.

Com isto, se conhecermos as funções trigonométricas para os ângulos no intervalo $(0°,\ 45°)$, passamos a conhecê-las para seus ângulos complementares, ou seja, temos os valores para tais funções para todos os ângulos agudos.

Os resultados a seguir mostram que se θ é um ângulo cujas funções são conhecidas podemos obter as funções para os ângulos de medidas 2θ e $\frac{\theta}{2}$.

Proposição

(a) Se $\theta \in (0°,\ 45°)$ então, $sen\ 2\theta = 2.sen\ \theta.cos\ \theta$;
(b) Se $\theta \in (0°,\ 90°)$, então $sen\ \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\ \theta}{2}}$.

Para demonstrarmos essa proposição, vamos considerar a figura 8 formada por dois triângulos retângulos em A, $\triangle OAB$ e $\triangle OAC$ congruentes, com

$$\overline{OB} = \overline{OC} = 1\ \ e\ \ \angle AOB = \angle AOC = \theta.$$

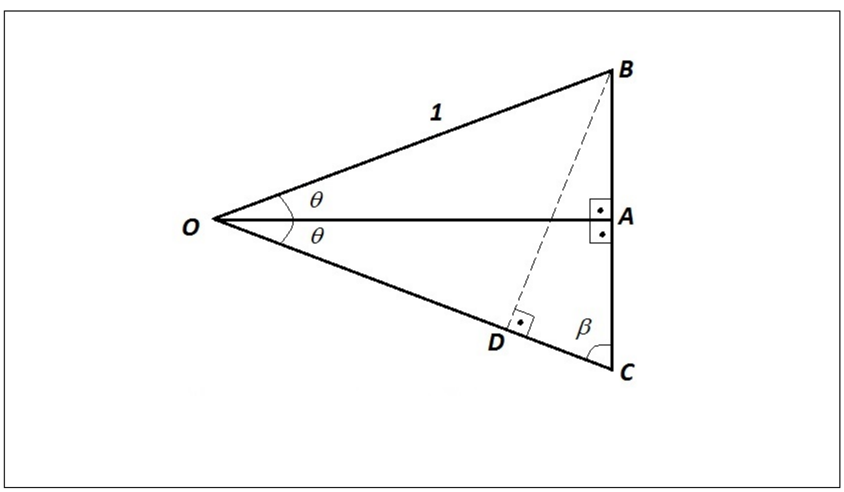


Figura 8: $sen\ 2\theta$ **e** $sen\ \frac{\theta}{2}$
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Logo o $\triangle BOC$ é isósceles, e $\overline{OA}$ é, além de altura, bissetriz e mediana relativas ao lado $\overline{BC}$, portanto, $\overline{AB} = \overline{AC} = sen\ \theta$ e $\overline{OA} = cos\ \theta$. Traçando $\overline{BD}$ perpendicular a $\overline{OC}$ temos ainda que $\overline{BD} = sen\ 2\theta$.

A área do $\triangle OBC$ pode ser expressa por $\frac{\overline{BC}.\overline{OA}}{2}$ e também por $\frac{\overline{OC}.\overline{BD}}{2}$, portanto

$$\overline{OC}.\overline{BD} = \overline{BC}.\overline{OA}$$

$$sen\ 2\theta = 2.sen\ \theta.cos\ \theta$$

O que demonstra o item (a).

Para provar o item (b), note que

$$\overline{OD} + \overline{DC} = 1$$
$$1.cos\ 2\theta + \overline{BC}.cos\ \beta = 1.$$

Como $\overline{BC} = 2.sen\ \theta$ e $cos\ \beta = sen\ \theta$ (pois $\theta + \beta = 90°$), tem-se,

$$cos\ 2\theta + 2sen\ \theta.sen\ \theta = 1$$
$$sen\ \theta = \sqrt{\frac{1 - cos\ 2\theta}{2}}$$

Se substituirmos 2θ por θ, e consequentemente θ por $\frac{\theta}{2}$, obtém-se

$$sen\ \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \theta}{2}}.$$

Concluindo a nossa demonstração.

Esses resultados serão utilizados na próxima seção, quando conheceremos um processo de construção de uma tabela trigonométrica.

5 Uma tabela, muitos números, infinitas aplicações

Como cada ângulo agudo possui um valor único para seno, cosseno e tangente, iniciaremos a construção de uma tabela trigonométrica com boas aproximações decimais, para tais ângulos.

Muitos desses valores, a maioria, são números irracionais, e para efeito de resolução de exercícios, nesta etapa do conhecimento, o cálculo com precisão até a ordem dos centésimos ou milésimos é bastante eficiente e satisfatório.

Faremos uma abordagem para a obtenção dessas funções, em alguns casos particulares, tendo em vista que esses valores são frequentemente apresentados nos livros didáticos sem justificativa.

Para dar início ao processo, vamos determinar o seno e o cosseno do ângulo de 1°, considerando o comprimento do arco subentendido a esse ângulo, em um círculo de raio unitário, uma vez que, por ser bem "pequeno", este se aproxima do seu seno, como podemos observar na figura 9.

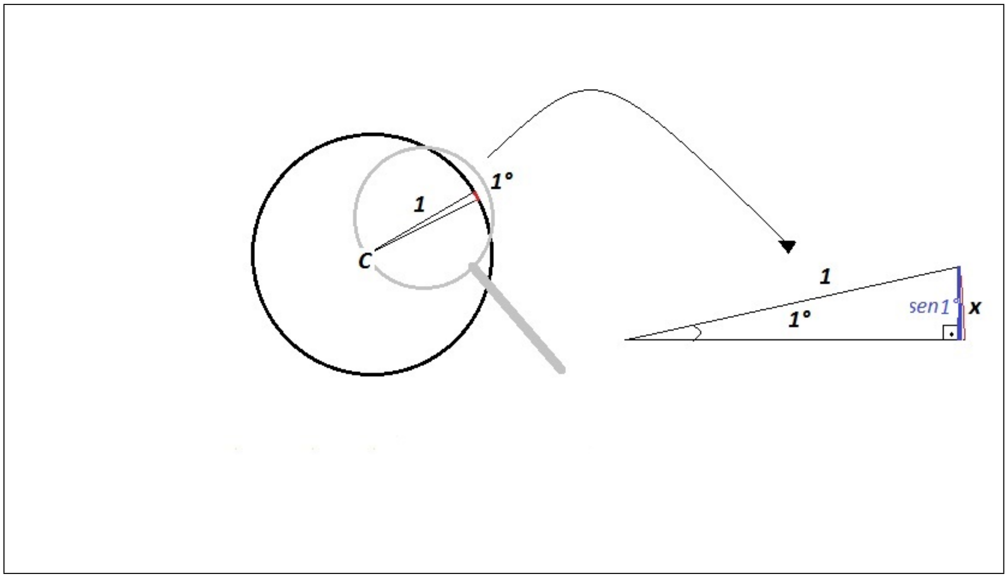


Figura 9: **Valor aproximado para o seno de 1°**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Como o comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2.\pi.r$, fazendo $r = 1$, temos $C = 2.\pi$. Assim , quando dividimos o círculo em 360 partes, o arco x correspondente a 1° terá comprimento $x = \frac{2.\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.

$$x = 0,017453292519943...$$

Quanto maior o número de casas decimais tomadas para $\pi = 3,1415926535897932...$, mais preciso será o comprimento do arco considerado. Observe que o seno assim obtido é uma aproximação um pouquinho maior do que o valor real que corresponde a

$$sen\ 1^\circ = 0,017452406437283...$$

Note que os resultados obtidos para o comprimento do arco correspondente a 1° e o seno deste ângulo coincidem até a 5.ª casa decimal.

Considerando $sen\ 1^\circ \approx 0,01745$, podemos calcular o $cos\ 1^\circ$, usando a relação fundamental.

De fato,

$$cos^2 1^\circ = 1 - sen^2 1^\circ$$

$$cos^2 1^\circ = 1 - (0,01745)^2$$

$$cos^2 1^\circ = 1 - 0,0003045025$$

$$cos^2 1^\circ = 0,9996954975$$

$$cos\ 1^\circ = \sqrt{0,9996954975} \approx 0,9998477371$$

Se consultarmos uma calculadora científica ou uma tabela trigonométrica, veremos que esse último resultado também está bastante próximo do $cos\ 1^\circ = 0,99984769515639123....$ Novamente, considerando até a 5.ª casa decimal, obtemos $cos\ 1^\circ \approx 0,99984$.

Para a tangente de 1°, basta determinar a razão entre o seno e o cosseno:

$$tg\ 1^\circ = \frac{sen 1^\circ}{cos 1^\circ}$$

$$tg\ 1° = \frac{0,01745}{0,99984} \approx 0,01745$$

Sabemos, também, que $sen\ 1° = cos\ 89°$ e $cos\ 1° = sen\ 89°$, então podemos obter:

$$tg\ 89° = \frac{sen\ 89°}{cos\ 89°} \to tg\ 89° = \frac{0,99984}{0,01745} \approx 57,2974.$$

Esse último resultado apresenta aproximação correta até a primeira casa decimal. Para uma melhor aproximação, bastava considerar um maior número de casas decimais desde o início.

Assim, nossa tabela teria o seguinte início

	sen	*cos*	*tg*
$1°$	$0,01745$	$0,99984$	$0,01745$
...	...	...	...
$89°$	$0,99984$	$0,01745$	$57,2974$

Para prosseguirmos nos cálculos de outros ângulos, usaremos a identidade trigonométrica

$$sen\ 2\theta = 2.sen\ \theta.cos\ \theta.$$

Por exemplo, para $sen\ 2°$, tem-se

$$sen\ 2° = 2sen\ 1°cos\ 1°$$
$$sen\ 2° = 2.(0,01745).(0,99984)$$
$$sen\ 2° = 0,034894416 \approx 0,03489.$$

Logo, teremos: $cos\ 2° \approx 0,99939$ e $tg\ 2° \approx 0,03491$.

Analogamente, podemos obter as razões trigonométricas para outros ângulos agudos, como 4°, 8°, 16°, etc.

Ainda em [6], encontramos uma demonstração para o cálculo do seno do ângulo de 18°, a partir do qual podem ser obtidas as funções trigonométricas dos ângulos de 9°, 36°, 72°, entre outros.

5.1 Os ângulos notáveis

Em razão da frequência com que alguns ângulos aparecem nas mais variadas situações, foram obtidas as razões trigonométricas para os mesmos, como é o caso dos ângulos de 30°, 45° e 60°, conhecidos como ângulos notáveis.

Tais razões são obtidas, a partir de um triângulo equilátero e de um quadrado, como veremos a seguir.

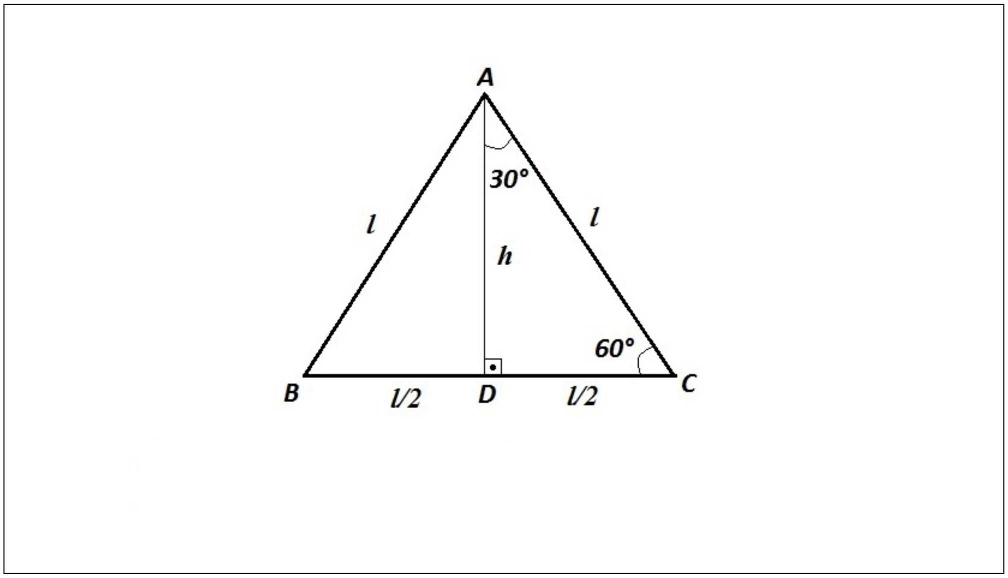


Figura 10: **Razões trigonométricas para 30° e 60°**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Dado o triângulo equilátero ABC da figura 10, cujos lados medem l. Traçando uma de suas alturas $\overline{AD} = h$, tem-se, utilizando o Teorema de Pitágoras, a altura h deste triângulo em função de seu lado, dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Logo, considerando o $\triangle ADC$, retângulo em D, obtemos

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}.$$

Como $sen\ 30° = cos\ 60°$, temos que $cos\ 60° = \frac{1}{2}$.

Da relação fundamental segue que

$$cos\ 30° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A partir daí, obtemos os valores para as tangentes de 30° e 60°, ou seja

$$tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e

$$tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Considere agora o quadrado ABCD de lado l. Trace uma de suas diagonais, por exemplo, $\overline{AC}$ de medida d, como na figura 11 a seguir.

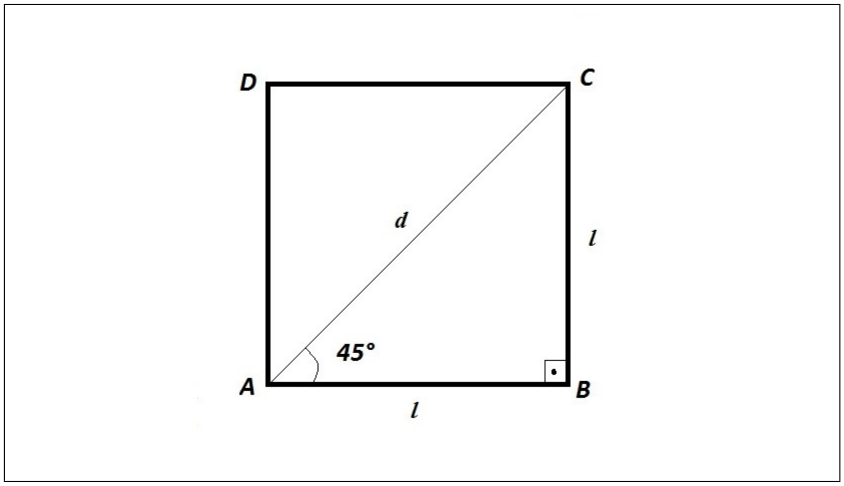


Figura 11: **Razões trigonométricas para 45°**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Novamente, com o auxílio do Teorema de Pitágoras, obtemos d, em função de l, que corresponde a $d = l\sqrt{2}$.

Assim,

$$sen\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Então teremos,

$$sen\ 45° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo,

$$tg\ 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

O que nos permite organizar a seguinte tabela :

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Em razão da extensa aplicação desses ângulos na Física, na Química e na Matemática, essas razões são utilizadas frequentemente na sua forma fracionária, e para os demais ângulos, os dados são comumente fornecidos na sua forma decimal.

Relações matemáticas, como as que acabamos de conhecer, e outras, que dependem de definições a serem posteriormente trabalhadas, como por exemplo, o círculo trigonométrico e as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de ângulos, repetidos testes e o uso de equipamentos cada vez mais precisos, possibilitaram a construção de uma tabela com as funções seno, cosseno e tangente para ângulos agudos.

A seguir, apresentamos uma tabela trigonométrica com aproximação até a 5.ª casa decimal, que usaremos nas atividades propostas, extraída de [8], livro didático adotado pela escola estadual onde atuava numa das ocasiões em que a presente proposta foi aplicada.

$\angle$	*sen*	*cos*	*tg*	$\angle$	*sen*	*cos*	*tg*
$1°$	$0,01745$	$0,99985$	$0,01746$	$46°$	$0,71934$	$0,69466$	$1,03553$
$2°$	$0,03490$	$0,99939$	$0,03492$	$47°$	$0,73135$	$0,68200$	$1,07237$
$3°$	$0,05234$	$0,99863$	$0,05241$	$48°$	$0,74314$	$0,66913$	$1,11061$
$4°$	$0,06976$	$0,99756$	$0,06993$	$49°$	$0,75471$	$0,65606$	$1,15037$
$5°$	$0,08716$	$0,99619$	$0,08749$	$50°$	$0,76604$	$0,64279$	$1,19175$
$6°$	$0,10453$	$0,99452$	$0,10510$	$51°$	$0,77715$	$0,62932$	$1,23499$
$7°$	$0,12187$	$0,99255$	$0,12278$	$52°$	$0,78801$	$0,61566$	$1,27994$
$8°$	$0,13917$	$0,99027$	$0,14054$	$53°$	$0,79864$	$0,60182$	$1,32704$
$9°$	$0,15643$	$0,98769$	$0,15838$	$54°$	$0,80903$	$0,58779$	$1,37638$
$10°$	$0,17365$	$0,98481$	$0,17633$	$55°$	$0,81915$	$0,57358$	$1,42815$
$11°$	$0,19087$	$0,98163$	$0,19438$	$56°$	$0,82904$	$0,55919$	$1,48256$
$12°$	$0,20791$	$0,97815$	$0,21256$	$57°$	$0,83867$	$0,54464$	$1,53986$
$13°$	$0,22495$	$0,97437$	$0,23087$	$58°$	$0,84805$	$0,52992$	$1,60033$
$14°$	$0,24192$	$0,97030$	$0,24933$	$59°$	$0,85717$	$0,51504$	$1,66428$
$15°$	$0,25882$	$0,96593$	$0,26795$	$60°$	$0,86603$	$0,50000$	$1,73205$
$16°$	$0,27564$	$0,96126$	$0,28675$	$61°$	$0,87462$	$0,48481$	$1,80405$
$17°$	$0,29237$	$0,95630$	$0,30573$	$62°$	$0,88295$	$0,46947$	$1,88073$
$18°$	$0,30902$	$0,95106$	$0,32492$	$63°$	$0,89101$	$0,45399$	$1,96261$
$19°$	$0,32557$	$0,94552$	$0,34433$	$64°$	$0,89879$	$0,43837$	$2,05030$
$20°$	$0,34202$	$0,93969$	$0,36397$	$65°$	$0,90631$	$0,42262$	$2,14451$
$21°$	$0,35837$	$0,93358$	$0,38386$	$66°$	$0,91355$	$0,40674$	$2,24604$
$22°$	$0,37461$	$0,92718$	$0,40403$	$67°$	$0,92050$	$0,39073$	$2,35585$
$23°$	$0,39073$	$0,92050$	$0,42447$	$68°$	$0,92718$	$0,37461$	$2,47509$
$24°$	$0,40674$	$0,91355$	$0,44523$	$69°$	$0,93358$	$0,35837$	$2,60509$
$25°$	$0,42262$	$0,90631$	$0,46631$	$70°$	$0,93969$	$0,34202$	$2,74748$
$26°$	$0,43837$	$0,89879$	$0,48773$	$71°$	$0,94552$	$0,32557$	$2,90421$
$27°$	$0,45399$	$0,89101$	$0,50953$	$72°$	$0,95106$	$0,30902$	$3,07768$
$28°$	$0,46947$	$0,88295$	$0,53171$	$73°$	$0,95630$	$0,29237$	$3,27085$
$29°$	$0,48481$	$0,87462$	$0,55431$	$74°$	$0,96126$	$0,27564$	$3,48741$
$30°$	$0,50000$	$0,86603$	$0,57735$	$75°$	$0,96593$	$0,25882$	$3,73205$
$31°$	$0,51504$	$0,85717$	$0,60086$	$76°$	$0,97030$	$0,24192$	$4,01078$
$32°$	$0,52992$	$0,84805$	$0,62487$	$77°$	$0,97437$	$0,22495$	$4,33148$
$33°$	$0,54464$	$0,83867$	$0,64941$	$78°$	$0,97815$	$0,20791$	$4,70463$
$34°$	$0,55919$	$0,82904$	$0,67451$	$79°$	$0,98163$	$0,19087$	$5,14455$
$35°$	$0,57358$	$0,81915$	$0,70021$	$80°$	$0,98481$	$0,17365$	$5,67128$
$36°$	$0,58779$	$0,80903$	$0,72654$	$81°$	$0,98769$	$0,15643$	$6,31375$
$37°$	$0,60182$	$0,79864$	$0,75355$	$82°$	$0,99027$	$0,13917$	$7,11537$
$38°$	$0,61566$	$0,78801$	$0,78129$	$83°$	$0,99255$	$0,12187$	$8,14435$
$39°$	$0,62932$	$0,77715$	$0,80978$	$84°$	$0,99452$	$0,10453$	$9,51436$
$40°$	$0,64279$	$0,76604$	$0,83910$	$85°$	$0,99619$	$0,08716$	$11,43010$
$41°$	$0,65606$	$0,75471$	$0,86929$	$86°$	$0,99756$	$0,06976$	$14,30070$
$42°$	$0,66913$	$0,74314$	$0,90040$	$87°$	$0,99863$	$0,05234$	$19,08110$
$43°$	$0,68200$	$0,73135$	$0,93252$	$88°$	$0,99939$	$0,03490$	$28,63630$
$44°$	$0,69466$	$0,71934$	$0,96569$	$89°$	$0,99985$	$0,01745$	$57,29000$
$45°$	$0,70711$	$0,70711$	$1,00000$	$90°$	$1,00000$	$0,00000$	$---$

Na próxima seção vamos conhecer um pouco da história da trigonometria e perceber como os dados desta tabela possibilitam a determinação de medidas desconhecidas nas mais diversas situações.

6 Um pouco da história da trigonometria

Trigonometria, do grego, significa medida dos ângulos de um triângulo. É uma parte da matemática dedicada ao estudo das relações entre as amplitudes dos ângulos de um triângulo e o comprimento dos segmentos que os determinam.

BOYER, em [5], apresenta preciosas contribuições sobre a construção deste ramo da matemática ao longo dos tempos. Enfatiza o uso na antiguidade de muitos dos teoremas e propriedades que utilizamos na atualidade, mesmo com a falta de conceitos como o de medida de ângulo, por exemplo, e ressalta que, como os demais ramos da matemática, a trigonometria não foi obra de um só homem ou nação.

De Tales de Mileto e o uso das ideias sobre triângulos semelhantes, para a determinação da altura da pirâmide de Quéops, passando por Aristarco e seus estudos sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, por Eratóstenes fazendo uma boa aproximação para a medida do raio da Terra, por Hiparco que compilou, possivelmente, a primeira tabela trigonométrica, por Menelau e sua obra *Sphaerica*, sobre trigonometria esférica, passando pelo *Almagesto*, de Ptolomeu, e ainda as contribuições de Heron, BOYER, nos faz percorrer séculos em pouco tempo de leitura, acompanhando parte da evolução dos conceitos matemáticos no contexto de cada época.

As contribuições e descobertas surgiram, principalmente, entre os egípcios, babilônios, gregos, hindus e árabes, motivadas especialmente, pelo interesse em astronomia, navegação marítima e agrimensura.

Segundo historiadores, o grego Hiparco de Niceia (180 a.C - 125 a.C), considerado o maior astrônomo do mundo, por volta do ano 140 a.C., relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo elaborando, pela primeira vez na história da humanidade, o que hoje equivale a uma tabela de razões trigonométricas para ângulos agudos sendo portanto, chamado "o pai da trigonometria".

Já no século II, o geógrafo e astrônomo grego Ptolomeu (85 - 165), em sua obra *Syntaxis matemática*, certamente a mais significativa da antiguidade, razão pela qual mais tarde na Arábia passou a se chamar *Almagesto* (o maior), estabeleceu, além de outros assuntos, uma tabela de senos, que corresponde a uma tabela de cordas para ângulos de $0^\circ\ a\ 180^\circ$, de meio em meio grau.

GARBI, em [7], menciona os avanços importantes na trigonometria no fim do primeiro milênio, com a introdução dos conceitos de tangente e, possivelmente, de secante e cossecante, por Abul-Wefa (940-998). Esse texto apresenta também as contribuições de Gerardo de Cremona (1114 - 1187) que, tendo estudado árabe, traduziu para o Latim diversas obras, empregando pela primeira vez, no Ocidente, o nome seno (sinus) para meia corda.

Ainda, segundo GARBI, em [7], Johann Müller(1436-1476) ou, *Regiomontanus*, maior matemático alemão, publicou o que pode ser considerado a primeira obra exclusivamente dedicada à Trigonometria - *De Triangulis Omnimodis*. E relata como François Viéte (1540-1603), dispondo de tabelas trigonométricas, resolveu equações incompletas de $3.^o\ grau$, bem como deduziu várias das fórmulas clássicas que usamos hoje no estudo da trigonometria no ensino médio, por exemplo $sen\ 2\theta = 2.sen\ \theta.cos\ \theta$.

Com uma rica e detalhada lista de sugestões bibliográficas, encontramos em [2], a partir da página 189, uma interessante referência sobre a vantagem da trigonometria indiana, em relação à grega, ao considerar a metade da corda dando origem ao seno. A figura 12 ilustra essa importante percepção atribuída aos matemáticos da Índia.

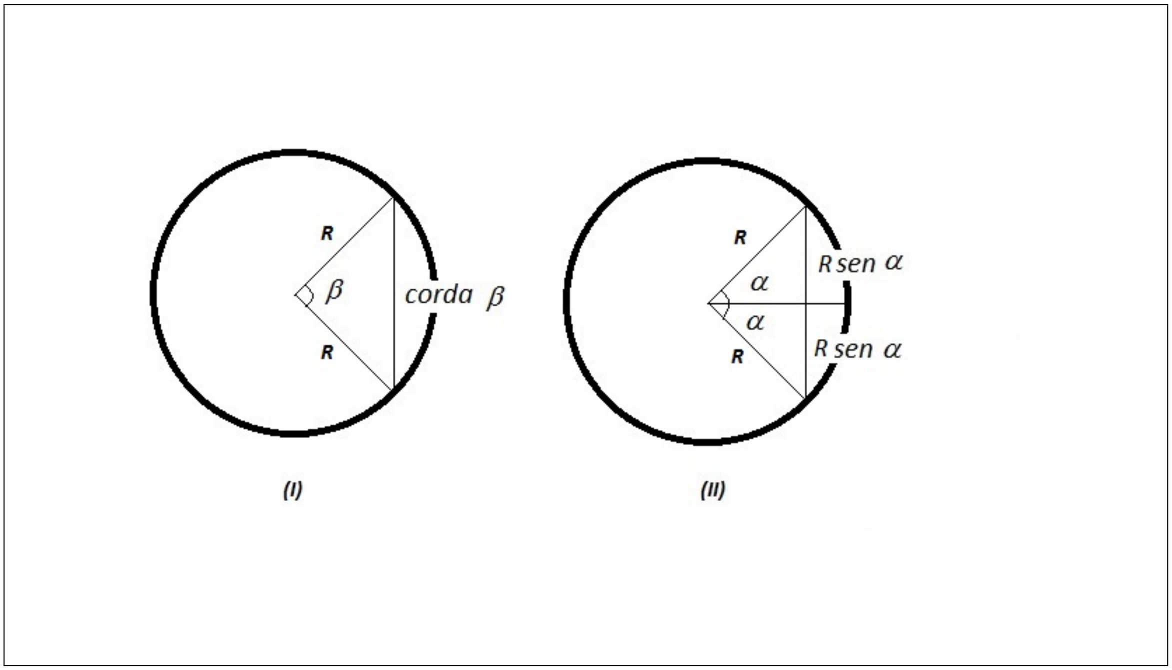


Figura 12: **(I) Corda de um ângulo e (II) Metade da corda do dobro de um ângulo**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Observe que, em (II), se considerarmos $R = 1$, a metade da corda correspondente ao ângulo 2α é exatamente o seno de α.

> Os astrônomos gregos inventaram a trigonometria para ajudá-los a descrever os movimentos dos planetas e astros. Os astrônomos da Índia provavelmente aprenderam essa teoria de Hiparco, um predecessor de Ptolomeu. ([2], 2010, p.26)

Ainda em [2], p.192, consta *"Finalmente, Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) inventou o nome trigonometria e usou-o como título de seu livro, publicado pela primeira vez em 1595"*. Este ramo da matemática ganhou novas perspectivas com a inovação de aplicações fora do campo da astronomia, descrevendo modos de usar a trigonometria para resolver problemas relacionados à medição de terras e à geografia.

7 Astrolábio e Teodolito: instrumentos que possibilitaram a aplicação das razões trigonométricas

As civilizações antigas utilizavam diversos instrumentos que, frente aos recursos tecnológicos dos quais dispomos hoje, eram bastante rudimenares, porém foram importantes para traçar rotas comerciais, delimitar áreas e propriedades, determinar distâncias.

Nesta seção, vamos conhecer um pouco da história de dois destes instrumentos, o astrolábio e o teodolito.

7.1 Conhecendo um pouco da história do Astrolábio

> O astrolábio é um instrumento naval antigo, usado para medir a altura dos astros acima do horizonte. Convenciona-se dizer que o surgimento do astrolábio é o resultado prático de várias teorias matemáticas, desenvolvidas por célebres estudiosos antigos: Euclides, Ptolomeu, Hiparco de Nicéia e Hipátia de Alexandria. ([14], acesso em 17/11/2014)

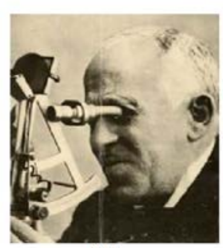
Desenvolvido para determinar a posição dos astros no céu, auxiliava na navegação marítima, mas também podia ser utilizado para resolver problemas geométricos, como calcular a altura de um objeto ou a profundidade de um poço. Era formado por um disco de latão graduado na sua borda, um anel de suspensão e uma espécie de ponteiro.

> O desenvolvimento do astrolábio se dá com o passar dos séculos. Os indivíduos mais influentes da teoria na qual o instrumento se baseia foram Hiparco de Niceia, que definiu a teoria das projeções e a aplicou a problemas astronômicos, e Cláudio Ptolomeu que, em seu trabalho *Planisferium* escreve passagens que sugerem que ele possuía um invento semelhante ao astrolábio. Teão de Alexandria em cerca de 390 DC escreveu um tratado dedicado ao Astrolábio, o qual foi a base de muitos escritos sobre o assunto na idade média. Sua filha, (Hipátia de Alexandria), chegou a criar um astrolábio. Um de seus discípulos, Synesius de Cirene, também possuía um invento de características semelhantes. O astrolábio moderno de metal foi inventado por Abraão Zacuto em Lisboa, a partir de versões árabes pouco precisas.([14], acesso em 17/11/2014)

Ainda em [14], sobre a descrição do manejo desse instrumento que exigia a participação de duas pessoas, o astrolábio consistia de um grande círculo, em cujo interior corria uma régua; enquanto um indivíduo suspendia o astrolábio na altura dos olhos, alinhando a régua com o sol, o outro lia os graus marcados no círculo.

Nas imagens a seguir temos, à esquerda, um astrolábio persa do século XVIII e, à direita, um astrolábio de precisão.

(I)



(II)

Figura 13: **Modelos de astrolábio**

Fonte: (I) disponível em [14], acesso em 17/11/2014; (II) disponível em [12], acesso em 14/12/2014

7.2 Conhecendo um pouco da história do Teodolito

> Jonathan Sisson construiu o primeiro teodolito contendo quatro parafusos niveladores, apesar de sua invenção ser atribuída a Ignácio Porro, inventor de instrumentos óticos, em 1835. Na verdade seu invento foi o taquímetro auto-redutor, um instrumento que possuía os mesmos elementos do teodolito, mas com um dispositivo ótico. Ao longo dos anos foi sendo transformado e a ele agregados sistemas e mecanismos que o tornaram mais preciso em suas medições. O teodolito foi criado para substituir o Círculo de Borda - instrumento utilizado para medir com precisão ângulos horizontais e verticais que permitia medidas mais precisas entre as distâncias de um ponto a outro, da elevação e direção de determinado local. ([13], acesso em 11/11/2014)

De acordo com [13], *"o teodolito é um instrumento ótico utilizado para medir ângulos, tanto horizontais como verticais, em medidas diretas e indiretas de distâncias."*

O teodolito é posicionado em um ponto de forma que esteja nivelado com o eixo de gravidade do local, mira-se com a luneta para um outro ponto e, então, toma-se sua medida angular. Para o cálculo de tais medidas, aplicam-se sistemas de triangulação (método de levantamento baseado na trigonometria). O teodolito eletrônico é mais leve e fácil para transportar do que os teodolitos antigos, além de ser capaz de realizar medições com maior precisão e possuir um dispositivo com ótica de alto rendimento e facilidade de utilização. Com o passar do tempo, o teodolito se tornou um instrumento mais leve e fácil de transportar, com maior alcance e precisão, tornando-o menos propenso a erros nas medidas.

A figura 14 mostra, à esquerda, um modelo de teodolito do século XIX - acervo MAST - e, à direita, um teodolito eletrônico da marca ZEISS.

Figura 14: **Modelos de teodolito**
Fonte: disponível em [13], acesso em 11/11/2014

7.3 Obtendo medidas inascessíveis na atualidade

Embora, não seja esse o foco do presente artigo, apenas a título de curiosidade e conhecimento, segue um pequeno texto que ilustra os avanços alcançados pela tecnologia, no que diz respeito à determinação de distâncias.

Atualmente, os modernos serviços de topografia - *descrição ou delineação minuciosa de uma localidade*, [9] - e geodésia - *ciência que tem por fim a medição e representação da superfície terrestre*, [9] - utilizam o Sistema de Posicionamento Global, GPS, que possibilita a determinação de medidas precisas em tempo real, qualquer que seja a configuração do terreno entre ambos os receptores.

Na figura 15 abaixo, disponível em [13], temos uma ilustração representando como a estação de rastreamento, o satélite e o receptor GPS interagem entre si na passagem dos dados, extraída da apostila on-line de topografia da Professora Maria Cecília Bonato Bradalize - PUC - PR.

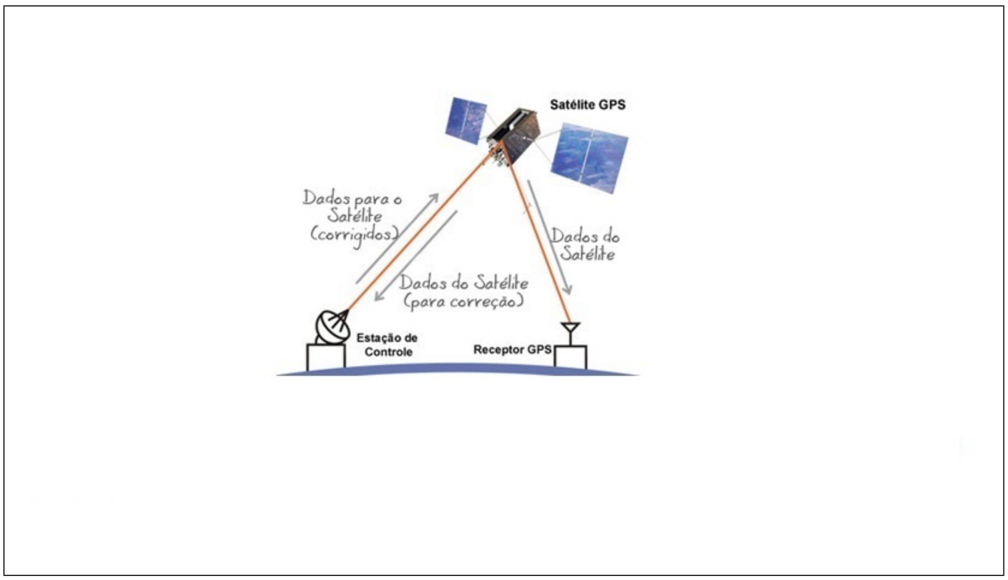


Figura 15: **Esquema de funcionamento de um GPS**
Fonte: disponível em [13], acesso em 11/11/2014

7.4 Construção I - Astrolábio rudimentar

Para construirmos nosso astrolábio vamos precisar dos seguintes materiais:
- Um transferidor de 180°
- Fio de nylon
- Um peso (um clip ou chumbada)
- Um tubo de caneta ou similar
- Fita adesiva ou cola quente.

Como confeccioná-lo?

Com o auxílio de uma agulha aquecida, fazemos um pequeno orifício no centro do transferidor, sobre a linha de fé, por onde passamos um pedaço de fio de nylon de aproximadamente 20 cm e o prendemos nesta extremidade, enquanto na outra colocamos um pequeno peso, para manter o fio esticado. Em seguida, fixamos o tubo de caneta alinhado sobre a base do transferidor, conforme ilustramos na figura 16.

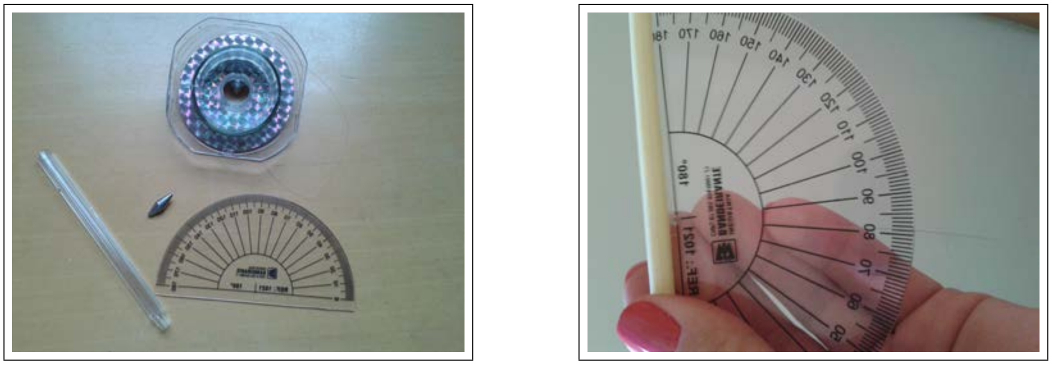


Figura 16: **Materiais para a construção do astrolábio rudimentar**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Como funciona?

Estando o transferidor na posição horizontal o fio de nylon fica alinhado com a marca dos 90° sobre o limbo do transferidor.

À medida em que se eleva o tubo de caneta, como uma espécie de luneta, o fio determina outra leitura sobre o limbo, por exemplo, na figura 17 a seguir, temos uma leitura sobre 50°, o que mostra um giro de 40°, $(90° - 50° = 40°)$.

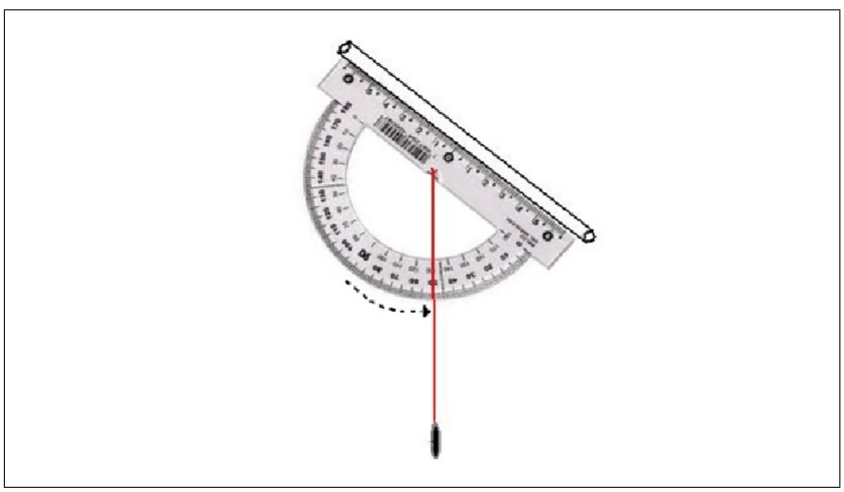


Figura 17: **Ilustrando a leitura de um ângulo num astrolábio**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

7.5 Construção II - Teodolito rudimentar

Para construirmos nosso teodolito vamos precisar dos seguintes materiais:

- Uma cópia de um transferidor de 360°
- Uma base (caixa de papelão ou pedaço de papelão)
- Um copo plástico com tampa (ou pote com tampa) que não seja de rosca
- Um tubo de antena ou similar
- Um pedaço de arame com cerca de 15 cm
- Fita adesiva ou cola quente .

Como confeccioná-lo?

Com o auxílio de uma agulha aquecida, fazemos dois pequenos orifícios próximos à borda do copo para passar o arame, de tal forma que este passe por um diâmetro, que será nosso ponteiro. Também coincidindo com um diâmetro, e paralelamente ao ponteiro, colamos o tubo de antena no fundo do copo, que servirá como uma espécie de luneta. Após colarmos a cópia do transferidor na base, fixamos a tampa do copo em seu centro e está pronto nosso teodolito, como mostra a figura 18.

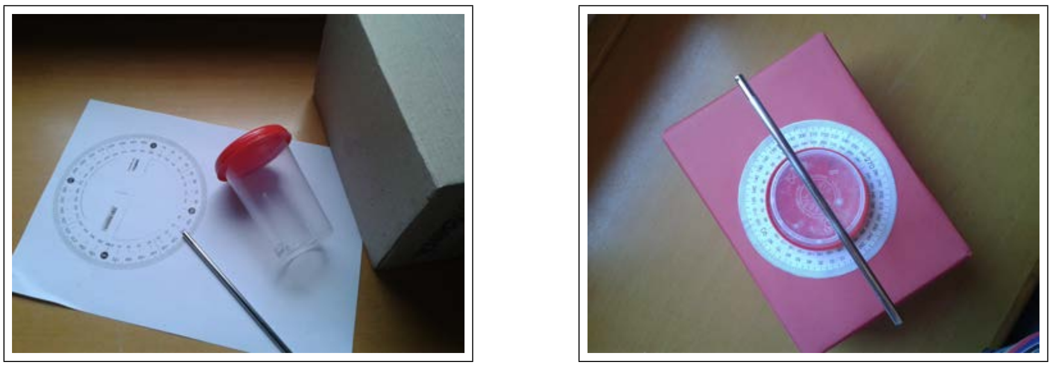


Figura 18: **Materiais para a construção do teodolito rudimentar**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Como funciona?

O instrumento pode ser usado na posição horizontal ou na vertical, conforme a situação, e, preferencialmente colocado sobre uma mesa, cuja altura deve ser posteriormente considerada.
A posição inicial é quando o ponteiro e a luneta apontam para o zero. O ângulo que corresponder ao giro feito por eles, ao se observar um determinado ponto, será o ângulo que permitirá o cálculo de alturas ou distâncias de difícil acesso.

7.6 Atividades práticas: trabalhando com situações reais e criando modelos matemáticos para representá-las

Utilizando os instrumentos construídos, uma trena, uma tabela trigonométrica e calculadora, passaremos agora à aplicação dos conceitos estudados em algumas situações reais.

Os alunos da Escola Estadual Deputado Patrús de Sousa - EEDPS - foram organizados em grupos, efetuaram as medições necessárias e criaram um modelo matemático de cada situação, para poderem resolvê-las.

Foi sugerido, ainda, que utilizassem os dois instrumentos em todas as situções propostas, para podermos discutir sobre erros e aproximações, bem como estabelecermos comparações dos resultados.

SITUAÇÃO 1
Vamos medir a altura da sala de aula?

A figura 19 mostra um grupo de alunos realizando as medições necessárias para determinar a medida da altura da parede de uma das salas de aula. Na imagem, podemos observar que, enquanto um dos membros do grupo tomava a distância do observador até a parede, os demais, usando o astrolábio construído, determinavam o ângulo formado entre o plano horizontal e o ponto mais alto da parede. Outra importante medida a ser considerada, é a que cocrresponde à distância do instrumento até o chão.

Figura 19: **Altura da sala de aula da EEDPS**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

As imagens abaixo mostram as soluções apresentadas pelo grupo. À esquerda, os resultados obtidos utilizando o teodolito e, à direita, os resultados obtidos utilizando o astrolábio.

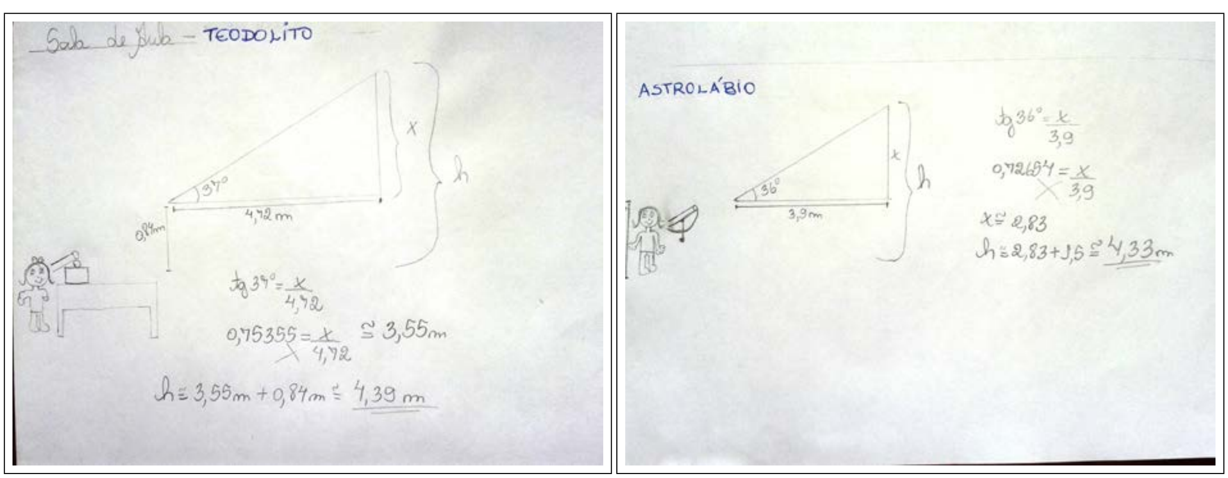


Figura 20: **Soluções apresentadas pelos alunos da EEDPS: altura da sala de aula**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Nessa primeira atividade, os alunos ficaram bastante empolgados com a pequena diferença nos resultados. Já havíamos conversado sobre os possíveis erros nas medições, e que aproximações para as medidas da altura do observador e da distância até a parede fazem com que nosso resultado final seja próximo da medida real, mas, dificilmente, um valor exato.

SITUAÇÃO 2
Vamos medir a altura do prédio da escola?

Na figura 21 podemos observar o grupo se preparando para determinar a altura do prédio da EEDPS, com o auxílio do teodolito construído.

Figura 21: **Alunos calculando a altura do prédio da escola**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Foi questionado ao grupo, antes de efetuarem os cálculos, se saberiam estimar a altura do prédio, baseando-se no resultado da atividade anterior. Aqui, vale observar que o prédio da EEDPS, é uma construção antiga e, portanto, a altura de cada andar para a época era bem maior que os padrões atuais. Alguns alunos deram opiniões bem próximas dos resultados e a diferença observada ao usarmos os dois tipos de instrumentos foi, novamente, bem pequena, conforme podemos constatar na figura 22 .

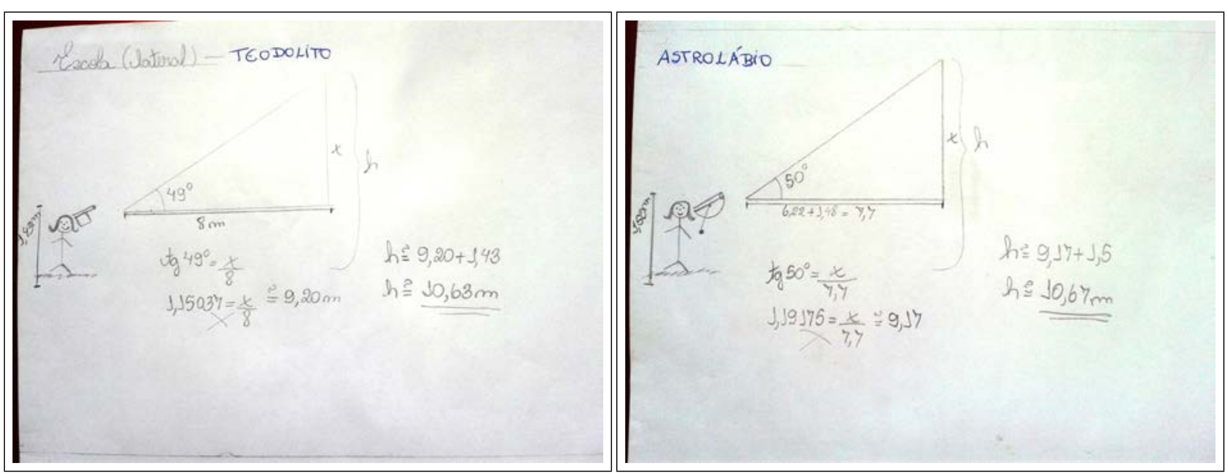


Figura 22: **Soluções apresentadas pelos alunos da EEDPS para a altura da escola**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Ainda, no ambiente escolar, podemos sugerir a medição do comprimento (ou largura) da quadra, saindo um pouco da função tangente, por exemplo, posicionando-se num dos vértices, tomando o ângulo horizontal formado por uma de suas diagonais e um dos outros lados, medindo o comprimento dessa diagonal e, com a função seno ou cosseno, conforme o caso, obtendo a dimensão desejada. Esta situação é interessante, pois a dimensão calculada não é inascessível, portanto pode ser conferida, possibilitando a discussão sobre as aproximações obtidas. Nesse caso, apenas o teodolito pode ser usado, pois o ângulo a ser determinado é horizontal.

Saindo do ambiente da escola!

Para as próximas atividades, buscamos alguns pontos de referência do município no intuito de fazer com que o interesse, despertado pela curiosidade, fosse ainda maior.

SITUAÇÃO 3 Qual será a altura aproximada da torre da Igreja Matriz de Sant'Ana?

As imagens apresentadas na figura 23 mostram o grupo de alunos utilizando os instrumentos construídos para obter o ângulo de visão do topo dessa torre.

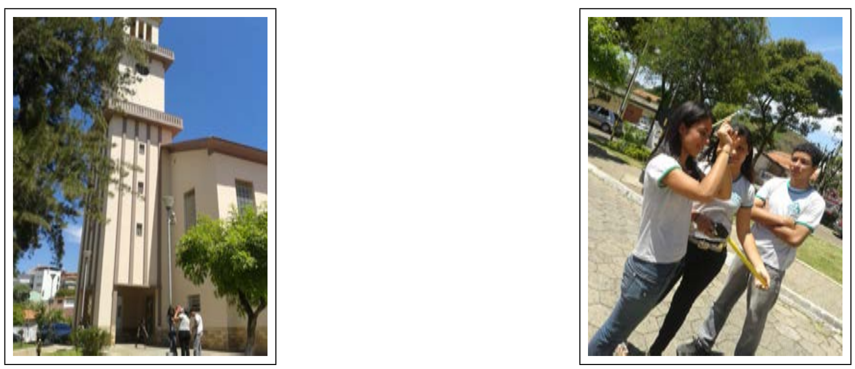


Figura 23: **Alunos determinando a altura da torre da igreja**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

A seguir, as soluções obtidas pelo grupo de alunos na realização dessa atividade.

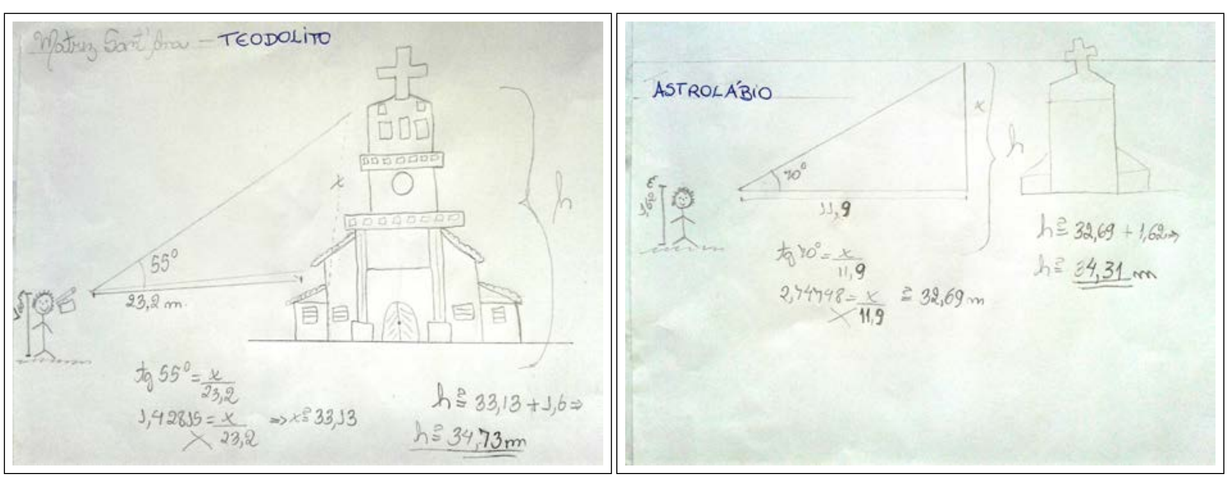


Figura 24: **Soluções apresentadas pelos alunos da EEDPS: altura da torre da igreja**
Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Ao final dessa atividade, os alunos perceberam uma diferença bem maior nos dois resultados, e foram apontados como causas, alguns fatores, como nivelamento do terreno, altura do observador e leitura do ângulo em cada situação.

Com a prática, percebe-se que o grupo realiza os cálculos com maior facilidade e agilidade, demonstrando com isto a apropriação do conhecimento, maior segurança e autonomia na resolução dos problemas propostos.

SITUAÇÃO 4

Que tal medirmos a altura de uma das palmeiras da praça?

Utilizando o teodolito construído, enquanto o aluno observa o ponto mais alto da palmeira, sua companheira se prepara para determinar a altura do ponto de observação até o chão, como podemos observar na figura 25.

Figura 25: **Determinando a altura de uma palmeira**

Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Na figura 26 abaixo, seguem os modelos matemáticos e as soluções obtidas pelos alunos.

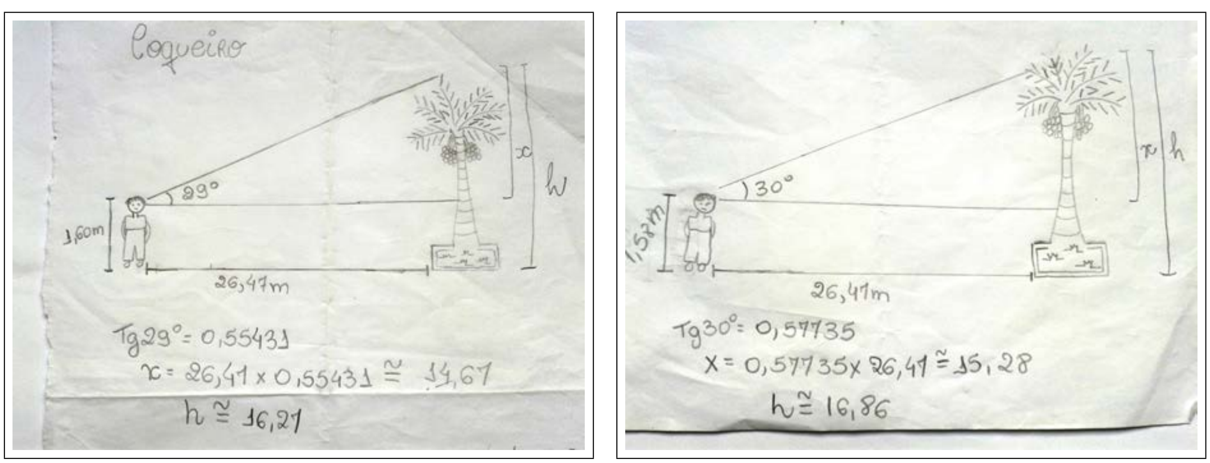


Figura 26: **Soluções apresentadas pelos alunos da EEDPS: altura de uma palmeira**

Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Outras situações como obter a largura de um rio, a altura de um túnel ou o comprimento de uma ponte, havendo a possibilidade, também podem ser exploradas com o uso desses instrumentos.

8 Considerações Finais

Procuramos inserir, na metodologia aplicada, diferentes recursos como por exemplo, a construção do astrolábio e do teodolito, buscando assim, atingirmos um maior número de alunos envolvidos no processo de aprendizagem, porém, outros recursos didáticos não citados neste artigo, como os tecnológicos, softwares matemáticos e jogos, também podem contribuir para uma aprendizagem significativa.

A proposta aqui apresentada foi aplicada para alunos do 9.° ano do ensino fundamental, etapa na qual eles já devem possuir todos os conhecimentos necessários para a execução desta. Porém, ao longo de mais de quinze anos de experiência em sala de aula, em escolas públicas e particulares, muitas vezes percebemos que o professor não consegue esgotar o planejamento anual, em razão do extenso conteúdo, mas, principalmente, das defasagens na aprendizagem apresentadas pela grande maioria de nossos alunos. Sendo assim, a ideia pode ser aplicada também para alunos do 1.º ano do ensino médio. Realizei a construção com alunos desse nível e obtive, igualmente, resultados positivos, em que todos os alunos se envolveram e manifestaram interesse pelo assunto.

Tive também a oportunidade de aplicar o uso do teodolito e do astrolábio, construídos previamente, em turmas que não passaram pela etapa de confecção, obtendo resultados satisfatórios, mas não tão significativos quanto aos atingidos pelas turmas anteriores.

Após a realização das atividades práticas, foi inegável e indiscutível o ganho nos conhecimentos adquiridos pelos alunos, que além de compreenderem os princípios matemáticos envolvidos, mergulharam no contexto histórico e puderam aplicar toda a teoria discutida até aquele momento.

9 Agradecimentos

A Deus, por multiplicar os segundos da minha existência... Sem Vossa misericórdia infinita e Vossa poderosa luz a guiar meus passos, jamais poderia ter alcançado esta graça em minha caminhada. A impressão que tenho é que tudo já foi dito, mas ninguém conseguiu expor claramente a plenitude de ser abençoado por Ti.

Aos meus pais, Lúcia e Vigilato, pelo exemplo de amor e dedicação, pela confiança e pelas oportunidades que sempre ofereceram a mim e aos meus irmãos. Quisera, ao menos, ser merecedora de parte das expectativas depositadas... Meu carinho, gratidão, amor eterno e respeito.

Lu, Ju e Dudu, irmãos queridos de sangue e de alma, a presença de vocês, entenda-se a extensão de vocês, é mais um presente de Deus na minha vida.

Agradeço, em especial, ao meu esposo Marquinho..., grande amor da minha vida! Meu alicerce, exemplo de fé e esperança. Melhor do que ninguém, você acompanhou minha luta e enfrentou junto comigo muitos desafios. Suportou minhas incertezas e inconstâncias. A você, minha admiração e $\heartsuit\infty$.

Meus filhos, Rodrigo e Rafael, saibam que a existência de vocês, anjos na Terra, renova todos os dias o meu ânimo, a perseverança e a disposição para o trabalho e para a vida de que necessito. Foi por vocês, é por vocês, e sempre será por vocês, que continuarei sonhando e acreditando que podemos alcançar nossos maiores desejos. Vocês representam o que de melhor pude fazer nesta vida. Obrigada por tudo! Perdoem-me as ausências físicas e as mudanças de humor. Expressar a dimensão de tanto amor é humanamente impossível.

Agradeço, também, o carinho e o apoio da minha nora Gabriela. Saiba, que você não conquistou apenas o coração do Rodrigo, mas o de todos em nossa casa, e que sua dedicação aos estudos, fonte do seu sucesso, foi para mim exemplo motivador.

Esta conquista tem que ser partilhada e, todos vocês, que contribuíram com o apoio, as orações e as boas vibrações, fazem parte dela.

Aos colegas de sala de aula, por partilharem suas experiências e conhecimentos, deixo meu reconhecimento. Que Deus possa abençoá-los em suas jornadas. Valeu !

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro tão importante para a obtenção deste título e à Prefeitura Municipal de Carandaí, pela valorização do profissional da educação, favorecendo e incentivando sua capacitação.

Quero registrar também, meus agradecimentos à direção e alunos da Escola Estadual Deputado Patrús de Sousa, em Carandaí, por colaborarem na execução das atividades aqui presentes e, em particular, à professora Maria das Graças Nogueira, por suas preciosas contribuições com respeito à redação deste artigo.

Agradeço a eficiência e a disponibilidade dos secretários do PROFMAT, Magda Lombardi e Marcos Luciano Rios, e a toda equipe de professores do PROFMAT da Universidade Federal de São João del Rei, pela dedicação e colaboração em minha formação profissional.

Nobre, muito além do nome, agradeço ao meu orientador, professor Francinildo, a paciência, o apoio, a generosidade, a compreensão e, acima de tudo, ter-me concedido a honra de tê-lo conhecido.

Finalmente, a todos que, de alguma forma, direta ou indireta, fizeram parte da realização deste projeto, ficam o meu reconhecimento e gratidão.

Referências

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto. 389 p. 2004.

[2] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*, tradução Elza Gomide e Helena Castro. 2.ª ed. São Paulo: Blucher. 279 p. 2010.

[3] BRASIL, Ministério da Educação - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/ Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2*. Brasília. 135 p. 2008.

[4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação. 364 p. 1999.

[5] BOYER, Carl B. *História da Matemática*, 2.ed., tradução Elza F. Gomide - São Paulo: Edgard Blücher, 5.ª reimpressão. 494 p. 2003.

[6] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria - Números Complexos*. Terceira edição, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM. 122p. 1992.

[7] GARBI, Gilberto Geraldo. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática* São Paulo: Editora Livraria da Física. 346 p. 2006.

[8] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática Completa*. 2.ª edição renovada - volume 1, FTD. São Paulo, 2005.

[9] PASQUALE. *Dicionário da língua portuguesa comentado pelo professor Pasquale v.1* Barueri, SP: Gold Editora, 2009

[10] REVISTA Cálculo: matemática para todos - São Paulo: Editora Segmento, edição 42, ano 4, p.60-64 jul/2014.

[11] SILVA, Marlizete Franco da; FROTA, Maria Clara Rezende. *Uma sequência didática para a introdução da trigonometria no ensino médio*. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte. 85 p. 2011.

[12] Ciência Hoje. Disponível em : <http://www.cienciahoje.pt/files/31/31732.jpg>. Acesso em 14 dez. 2014. (foto 1922 em blog ex-ogma)

[13] Museu de Astronomia e Ciências Afins. Disponível em: <http://www.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito.html>. Acesso em: 11 nov. 2014.

[14] Wikipedia. Astrolábio. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Astrolabio>. Acesso em: 17 nov. 2014.