

Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal: uma abordagem no ensino de distribuição normal de probabilidade

Andreia Aparecida Costa Silva¹
Alexandre Celestino Leite Almeida²

Resumo: Neste trabalho, apresentamos uma demonstração do Teorema de De Moivre-Laplace, que afirma que, sob certas condições, as probabilidades de uma distribuição de probabilidade binomial podem ser aproximadas razoavelmente por uma distribuição normal. Este trabalho apresenta algumas atividades práticas utilizando a Tábua de Galton, o *software* “*Quincunx*” e o *software* “*Geogebra*”, como metodologias de ensino e aprendizagem da distribuição normal. As atividades práticas propostas neste trabalho visam auxiliar o professor do Ensino Médio na comprovação de alguns resultados teóricos bem como na descoberta de algumas características da curva normal por meio de ensaios investigativos.

Palavras-chave: Distribuição binomial. Distribuição Normal. Tábua de Galton. Quincunx. Geogebra.

1 Introdução

“Quanto maior a multidão e maior a anarquia aparente, mais perfeita é sua variação. É a lei suprema da desrazão. Em qualquer lugar onde uma grande amostra de elementos caóticos seja colhida e escalonada segundo a sua magnitude, uma forma de regularidade insuspeitada e das mais belas prova ter estado latente todo o tempo. Os pontos mais altos da fileira escalonada formam uma curva harmoniosa de proporções invariáveis; e cada elemento, ao ser posicionado, encontra como que um nicho predeterminado, cuidadosamente adaptado para contê-lo”.

Francis Galton

¹Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ - Campus Alto Paraopeba
E-mail: andreia.silva@unifemm.com.br

²Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ
E-mail: celestino@ufs.edu.br

A aproximação normal da distribuição binomial tem relevante valor teórico e prático. Sua importância prática reside no fato de que muitos fenômenos ou variáveis naturais têm um comportamento que segue esse modelo. Esse modelo desempenha um papel preponderante na inferência estatística uma vez que distribuições das médias de amostras de populações normais são também normais e à medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição da média de uma amostra retirada de qualquer distribuição original tende à normalidade. A importância teórica reside no fato de que vários outros modelos probabilísticos, tanto discretos quanto contínuos, podem ser representados pelo modelo normal quando satisfeitas algumas condições de convergência.

Segundo [6], Pierre Simon Laplace³, foi o primeiro a estudar o problema da agregação de várias observações, em 1774. Embora ele tenha dado uma solução própria derivando a que é conhecida como distribuição Laplaciana, ele foi o primeiro a obter o valor da integral $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ em 1782. Foi Laplace também que, em 1810, provou e apresentou à academia Francesa o Teorema Central do Limite (TCL), que enfatizava a importância teórica do modelo. Em 1733, De Moivre apresentou pela primeira vez a função de distribuição normal, a função de distribuição binomial com parâmetros n e p , para grandes valores de n . Esse resultado é um caso especial do Teorema Central do Limite. Essa primeira versão do Teorema Central do Limite foi apresentada no livro “*The Doctrine of Chances*” por DeMoivre. Nessa primeira versão, se apresenta apenas o caso $p = \frac{1}{2}$.

De acordo com [9], anteriormente à lei dos grandes números surgiu o problema de estimar a soma de uma sucessão de variáveis binomiais. A principal dificuldade era calcular a probabilidade quando o número de sucessos de um experimento aleatório estivesse entre dois inteiros a e b . Jacobi Bernoulli demonstrou que esta probabilidade era $\sum_{a < x < b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, sendo essa uma parte da expansão $1 = (p + (1 - p))^m$. O mais difícil era calcular $\binom{m}{k} \frac{m!}{k!(m-k)!}$, pois $m!$ se torna muito grande quando m é muito grande. Bernoulli recorreu a estimativas muito pouco precisas, porém suficientes para provar seu teorema. De Moivre procurou ser mais preciso e demonstrou que $m! \approx B e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}}$, com B constante. Para determinar o valor desta constante construiu a seguinte expansão:

$$\ln(B) = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \dots,$$

e descobriu que B é aproximadamente 2,504. Não ficando satisfeito por não conseguir associar esse número a nenhuma constante matemática conhecida De Moivre pediu ajuda a seu amigo James Stirling (1692-1770), que demonstrou que $B = \sqrt{2\pi}$. Com essa informação De Moivre calculou uma tabela para a função $m!$ com $10 \leq m \leq 900$, e enunciou um resultado que em notação moderna diz que:

$$P \left\{ X = \frac{n}{2} + t \right\} \approx P \left\{ X = \frac{n}{2} \right\} e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)}$$

De Moivre desenhou o gráfico dessa curva, introduzindo o importantíssimo conceito de distribuição normal e demonstrou que essa curva é simétrica em torno do valor máximo de y e que os dois pontos de inflexão estão à uma distância $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ deste máximo.

³nascido em 23 de março de 1749 em Beaumont-en-Auge, França, e falecido em 5 de março de 1827 em Paris, França

Neste trabalho vamos desenvolver a ideia da demonstração histórica do Teorema Central do Limite dada por De Moivre e Laplace baseando na versão dada por [9]. Deve-se notar que numa demonstração por aproximação é importante explicitar os termos residuais para determinar sua precisão.

O método de Laplace para aproximar integrais, que está presente em seu trabalho “*Memoire sur la probabilité des causes*” (1774), ou método de aproximação Laplaciano consiste no seguinte:

“Seja f o integrando que depende de um grande parâmetro, e suponha que f tenha um único máximo muito evidente (em destaque) de tal maneira que a integral sobre um intervalo pequeno em torno deste máximo contribui consideravelmente para o valor da integral”.

Baseado nesta ideia, o método de Laplace consiste em desenvolver em séries apropriadas em torno da abscissa do ponto máximo.

O objetivo deste trabalho é oferecer aos alunos e professores do Ensino Médio e também dos cursos de graduação que possuem a disciplina estatística em seu currículo, um texto que facilite o entendimento intuitivo da distribuição normal. A importância dessa distribuição reside principalmente no fato de que muitos fenômenos naturais apresentam uma distribuição normal ou aproximadamente normal. Além disso, as médias de amostras retiradas de distribuição qualquer tendem a apresentar comportamento normal à medida que o número de observações (tamanho da amostra) aumenta. Neste trabalho, propomos o ensino da distribuição normal com a utilização das seguintes atividades experimentais: simuladores digitais, o *quincunx* e o *software* Geogebra, e um simulador físico, que trataremos por *tábua de Galton*⁴, que foi construído com a finalidade de mostrar experimentalmente que a curva obtida com o experimento se aproxima razoavelmente da curva teórica apresentada aos alunos.

A estruturação deste trabalho é a seguinte:

Na seção 2 (**Nota história da curva normal**): faremos um breve relato das contribuições de De Moivre na obtenção da fórmula da curva normal.

Na seção 3 (**Definições básicas**): apresentamos a terminologia e definições básicas que serão utilizadas na demonstração do Teorema de De Moivre-Laplace bem como nas aplicações em sala de aula que serão propostas neste trabalho.

Na seção 4 (**Teorema de De Moivre-Laplace**): apresentamos a demonstração do Teorema de De Moivre-Laplace.

Finalmente, na seção 5 (**Propostas de Atividades em Sala de Aula**): apresentamos algumas atividades relacionadas ao conteúdo deste trabalho que podem ser realizadas com os alunos da Educação Básica.

⁴a descrição completa deste artefato será feita na seção 5

2 Nota histórica da curva normal

De acordo com [17], a distribuição normal foi introduzida inicialmente pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667–1754) em seu artigo “*Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a + b)^n$ in Seriem expansi*” que foi reimpresso na segunda edição do seu livro “*The Doctrine of Chances*”, de 1738. Ele percebeu que, à medida que o número de eventos do lançamento de moedas aumentava, a distribuição binomial se aproximava de uma curva suave. Seus resultados foram estendidos por Laplace em seu livro “*Théorie Analytique des Probabilités*”, de 1812, num resultado que hoje é conhecido como Teorema de De Moivre–Laplace. Laplace utilizou a distribuição na análise de erros de experimentos. Ele também mostrou que mesmo uma distribuição não sendo normal, a média de repetidas amostras dessa distribuição é aproximadamente normal e que quanto maior for o tamanho da amostra melhor será essa aproximação. O astrônomo, filósofo, físico e matemático Galileo Galilei⁵ já havia notado que esses erros eram simétricos e que os valores pequenos apresentavam uma frequência de ocorrência maior do que os valores grandes.

Por volta de 1721, após ter lido o trabalho de Bernoulli “*Ars Conjectandi*”, De Moivre começou a fazer progressos no trabalho de aproximar os termos da expansão da binomial. Esse trabalho culminou, em 1733, com a publicação do que hoje é conhecida como aproximação normal da binomial. Segundo [3], a primeira publicação sobre esse tópico apareceu em 1730 na sua *Miscellanea Analytica*, ocasião em que ele já tinha quase obtido uma solução completa. Seu trabalho foi finalizado, em 1733, e publicado em latim em uma nota curta separadamente impressa [4]. Mais tarde essa nota foi traduzida para o inglês e incluída de forma sucessivamente mais expandida na segunda e terceira edições da *The Doctrine of Chances* [6].

Em 1730, De Moivre mostrou que a razão entre o termo central meio e a soma de todos os termos do desenvolvimento do binômio $(1 + 1)^n$ era aproximadamente igual a

$$\frac{C_{n/2}^n}{2^n} \approx 2A \frac{(n-1)^n}{n^n \sqrt{n-1}}.$$

De Moivre considerou o logaritmo hiperbólico de A como:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}.$$

De Moivre fez os cálculos com logaritmos hiperbólicos:

$$\ln \left(\frac{C_{n/2}^n}{2^n} \right) \approx \ln \left(\frac{2(n-1)^{n-1/2}}{n^n} \right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}.$$

Como $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n-1)^n}{n^n}$, para $n \rightarrow \infty$, obtemos e^{-1} , pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Portanto: $\ln \left(\frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^n} \right) \rightarrow -1$, quando $n \rightarrow \infty$.

⁵Nascido em 15 de fevereiro de 1564, em Pisa, e falecido em 8 de janeiro de 1642, em Arcetri, próximo de Florença

De Moivre concluiu que a expressão $\frac{C_{n/2}^n}{2^n}$ poderia ser escrita como:

$$\frac{C_{n/2}^n}{2^n} \approx \ln \left(\frac{2(n-1)^{n-1/2}}{n^n} \right) \approx \ln \frac{2}{e\sqrt{(n-1)}} = \ln \frac{2}{\sqrt{(n-1)}} - 1.$$

Denotando logaritmo hiperbólico de B como:

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680}$$

tal expressão mudará para: $\frac{2}{B\sqrt{n}}$. Com a contribuição de James Stirling, mostrando que o valor de B era a raiz quadrada da circunferência de um círculo cujo raio é a unidade, em 1733, De Moivre concluiu que a razão do termo central de $(1+1)^n$ por 2^n era: $\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}$.

De acordo com [6], De Moivre obteve, considerando uma notação atualizada, uma aproximação para $P(X = n/2)$, onde X tem uma distribuição binomial simétrica, ou seja, n tentativas com n par. Em 1739, ele calculou a razão entre um termo afastado do termo do meio por um intervalo l e o termo do meio. Ele obteve $\ln \left[\frac{P(X = \frac{n}{2} + 1)}{P(X = \frac{n}{2})} \right] \approx -\frac{2l^2}{n}$. Essa expressão, que é a altura máxima da curva, pode ser escrita como:

$$\frac{P(X = \frac{n}{2} + l)}{P(X = \frac{n}{2})} = e^{\left(-\frac{2l^2}{n}\right)} \text{ ou } P(X = \frac{n}{2} + l) = P(X = \frac{n}{2}) e^{\left(-\frac{2l^2}{n}\right)}.$$

O resultado anterior, pode ser escrito como: $P(X = \frac{n}{2} + l) \approx \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} e^{\left(-\frac{2l^2}{n}\right)}$. Substituindo o l , utilizado por De Moivre, por x e n por $4\sigma^2$, tem-se, em notação atual, o resultado seguinte:

$$y = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} e^{\left(-\frac{2l^2}{n}\right)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right]}$$

que é a expressão usual da curva normal para a média $\mu = 0$.

3 Definições Básicas

Definição 3.1 (Variável aleatória): Variável aleatória é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

Definição 3.1.1 (Variável aleatória discreta): É uma variável aleatória cujo valor numérico pertence a um conjunto enumerável.

Definição 3.1.2 (Variável aleatória contínua): Uma variável aleatória contínua tem infinitos valores, e esses valores podem ser associados a medidas em uma escala contínua.

Definição 3.2 (Distribuição de probabilidade): Uma distribuição de probabilidade é uma descrição que dá a probabilidade para cada valor da variável aleatória. Ela pode ser expressa na forma de um gráfico, de uma tabela ou de uma equação.

Definição 3.3 (Modelo Bernoulli): Uma sequência de ensaios de Bernoulli é definida por meio das três condições seguintes:

- (i) Em cada ensaio considera-se somente a ocorrência ou não-ocorrência de um certo evento que será denominado sucesso (S) e cuja não ocorrência será denominada falha (F).
- (ii) Os ensaios são independentes.
- (iii) A probabilidade de sucesso, que denotaremos por p , é a mesma em cada ensaio. A probabilidade de falha será denotada por $1 - p$.

Definição 3.4 (Distribuição Binomial): Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p . A variável aleatória X que conta o número total de sucessos tem distribuição binomial com parâmetros n e p se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

com $\binom{n}{k}$ representando o coeficiente binomial calculado por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definição 3.5 (Esperança matemática de variáveis aleatórias discretas): Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_k . Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i p(x_i), \end{aligned}$$

Em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação: $\mu = E(X)$.

Definição 3.6 (Variância de uma variável aleatória discreta): Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_k . Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja:

$$\begin{aligned} Var(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação: $\sigma^2 = Var(X)$.

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

Muitas vezes, denotamos a variância por σ^2 . Extraindo a raiz quadrada da variância obtemos o desvio padrão que é representado por σ .

Definição 3.7 (A esperança e a variância da variável aleatória de Bernoulli):

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Como $E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$, tem-se, a partir da equação:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ que :}$$

$$\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

Definição 3.8 (Função densidade de probabilidade): Dizemos que uma função $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade para uma variável aleatória contínua X , se satisfaz duas condições:

- (i) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (-\infty, \infty)$;
- (ii) A área definida pelo gráfico de f é igual a 1.

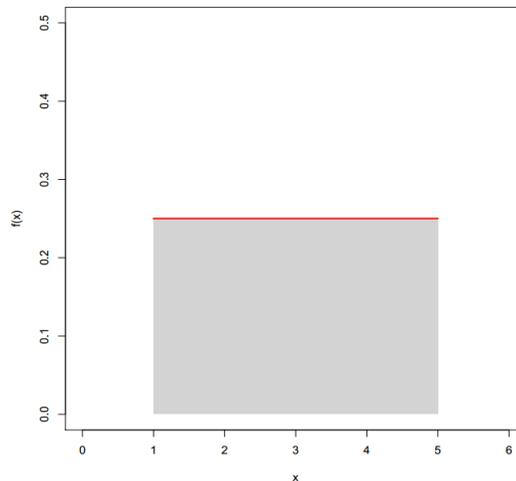


Figura 1: Exemplo de uma função densidade - distribuição uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total é dada por: $A = \Delta \cdot h = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Definição 3.9 (Distribuição normal): Dizemos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição *Normal* com parâmetros μ e σ^2 , se sua função densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

Algumas propriedades da função densidade da Normal podem ser observadas a partir de seu gráfico:

- (i) $f(x)$ é simétrica em relação à μ .
- (ii) $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
- (iii) o valor máximo de $f(x)$ se dá para $x = \mu$.

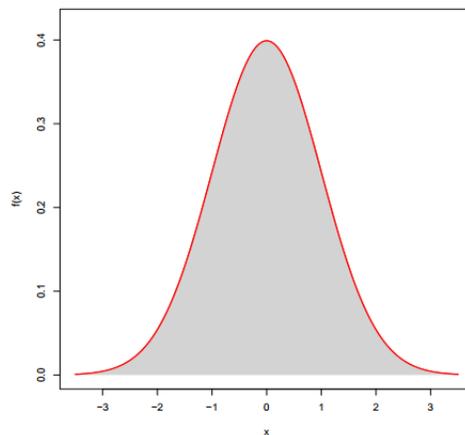


Figura 2: Exemplo de distribuição normal

4 Teorema de De Moivre-Laplace

Adotaremos $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ e que $f = \mathcal{O}(g)$ significa $|f| \leq g$.

Teorema 4.1 (De Moivre-Laplace): *Sejam n , a e b , com $a < b$ três números naturais. Sejam $0 < p < 1$ e $q = 1 - p$. Se*

$$S = \sum_{j=a}^b T_j, \text{ com } T_j = q^n C_j^n \left(\frac{p}{q}\right)^j.$$

Então:

$$S = N(b) - N(a) + \frac{p - q}{6\sqrt{2npq\pi}} \left\{ (1 - b^2)e^{-\frac{1}{2}b^2} - (1 - a^2)e^{-\frac{1}{2}a^2} \right\} + \Delta$$

com

$$|\Delta| \leq \frac{0,13 + 0,18|p - q|}{npq} + e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}.$$

Para demonstrar este teorema, usamos os lemas localizados no Apêndice A.

Demonstração:

Para cada número real x seja:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n T_j e^{2\pi i j x} \quad (1)$$

Pelo Lema (A.2) verificamos que $T_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i j x} dx$.

De onde segue que:

$$S = \sum_{j=a}^b T_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sum_{j=a}^b e^{-2\pi i j x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) D_a^b(x) dx \quad (2)$$

onde

$$D_a^b(x) dx = \sum_{j=a}^b e^{-2\pi i j x} dx. \quad (3)$$

Com o objetivo de obter uma equação ampliada para $D_a^b(x)$, seja $R = e^{-2\pi i x}$. Então:

$$D_a^b(x) = \sum_{j=a}^b R^j = R^a \frac{1 - R^{b-a+1}}{1 - R} = R^a \frac{R^{-\frac{b-a+1}{2}} - R^{\frac{b-a+1}{2}}}{R^{-\frac{1}{2}} - R^{\frac{1}{2}}} \frac{R^{\frac{b-a+1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}}.$$

Portanto:

$$D_a^b(x) = \frac{\text{sen}(b-a+1)\pi x}{\text{sen}(\pi x)} e^{-\pi i x(b-a)}. \quad (4)$$

Pelo Lema (A.3), verificamos que: $f(x) = 1 - 4pq\text{sen}^2(\pi x)^{\frac{n}{2}} e^{i(n\Theta_x)}$.

Dado que S é real, segue da equação (2) que:

$$S = \Re e \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) D_a^b(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)| \Re e (D_a^b(x) (e^{in\Theta_x})) dx.$$

Usando a equação (4), calculamos a parte real de $D_a^b(x) e^{in\Theta_x}$. Podemos escrever

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)| \left(\cos[(n\Theta_x) - (b-a)\pi x] \frac{\text{sen}[(b-a+1)\pi x]}{\text{sen}(\pi x)} \right) dx. \quad (5)$$

Sejam $A = \cos(n\Theta_x - (a+b)\pi x) \text{sen}((b-a+1)\pi x)$, $\alpha = n\Theta_x - (b-a)\pi x$ e $\beta = (b-a+1)\pi x$.

Escrevendo

$$A = \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)}{2},$$

concluimos,

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\left(b + \frac{1}{2} \right) 2\pi x - n\Theta_x \right] \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\left(a - \frac{1}{2} \right) 2\pi x - n\Theta_x \right] \right\}.$$

Sejam λ_1 e λ_2 números tais que:

$$b = np - \frac{1}{2} + \lambda_1 \sqrt{npq} \quad \text{e} \quad a = np + \frac{1}{2} + \lambda_2 \sqrt{npq}. \quad (6)$$

Uma vez que:

$$\begin{aligned} \left(b + \frac{1}{2} \right) 2\pi x - n\Theta_x &= \lambda_1 \sqrt{npq} 2\pi x + n(2\pi p x - \Theta_x), \\ \left(a - \frac{1}{2} \right) 2\pi x - n\Theta_x &= \lambda_2 \sqrt{npq} 2\pi x + n(2\pi p x - \Theta_x), \end{aligned}$$

temos:

$$S = P_1 - P_2 \quad (7)$$

onde P_j é definido por:

$$P_j = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda_j \sqrt{B_n} 2\pi x) + \Phi_x}{\text{sen}(\pi x)} dx \quad (8)$$

e:

$$B_n = npq \quad \text{e} \quad \Phi_x = n(2\pi p x - \Theta_x). \quad (9)$$

Seja τ um número real tal que $0 < \tau < \frac{1}{2}$. Note que o integrando da expressão (8) é uma função par, então:

$$P_j = J_1 + J_2 \quad (10)$$

onde

$$J_1 = \int_0^\tau |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda_j \sqrt{B_n} 2\pi x + \Phi_x)}{\text{sen}(\pi x)} dx \quad (11)$$

e

$$J_2 = \int_\tau^{\frac{1}{2}} |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda_j \sqrt{B_n} 2\pi x + \Phi_x)}{\text{sen}(\pi x)} dx. \quad (12)$$

Mostraremos adiante que J_1 é o termo principal e J_2 só contribui com o termo de erro.

Pelo Lema (A.4) verificamos que $|f(x)| \leq e^{-2B_n(2x)^2}$, se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Segue do Lema (A.5) que $|f(x)| \leq e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 + \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4}$, se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Usando $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2\pi B_n^{\frac{1}{4}}}$, para cada $0 \leq x \leq \tau$, pelo Lema (A.7), verifica-se:

$$|f(x)| = e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \{1 + \mathcal{O}(B_n(2\pi x)^4)\}.$$

Usando a equação (12), o lema (A.8) nos garante que $|J_2| \leq \left(\frac{3}{4} \log \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6\sqrt{B_n}}\right) e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}}$.

O Lema (A.9) nos garante que:

$$J_1 = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x + \Phi_x)}{\pi x} dx + \mathcal{O}\left(\frac{0,0605}{B_n}\right), \quad \text{se } B_n \geq 25.$$

Pelo Lema (A.11), verificamos que:

$$J_1 = J_3^\tau + J_4^\tau + \mathcal{O}\left\{\frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n}\right\}.$$

Considerando

$$J_3^\tau = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx.$$

e

$$J_4^\tau = -\frac{B_n}{3}(p-q) \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx.$$

Como

$$\int_0^\infty e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (13)$$

e

$$\int_0^\infty e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx = \frac{1-\lambda^2}{2B_n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}. \quad (14)$$

Usando que $S = P_1 - P_2$, $P = J_1 + J_2$, e substituindo a equação (13) em

$$J_3^\infty = \underbrace{\int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx}_{J_3^\tau + J_3^\circ} + \int_\tau^\infty \frac{e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2}}{\pi x} dx$$

e a equação (14) em

$$J_4^\infty = \underbrace{-\frac{B_n}{3}(p-q) \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx}_{J_4^\tau + J_4^\circ} + \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 dx$$

e depois, substituindo ambos os resultados acima na equação obtida no lema (A.12), temos:

$$S = \underbrace{N(b) - N(a)}_{\text{obtido de } J_3^\infty} + \underbrace{\frac{p-q}{6\sqrt{2npq\pi}} \left\{ (1-b^2)e^{-\frac{1}{2}b^2} - (1-a^2)e^{-\frac{1}{2}a^2} \right\}}_{\text{obtido de } J_4^\infty} + \underbrace{\triangle}_{\text{Lema(A.12)}}$$

Desta forma está provado o Teorema (4.1). □

5 Propostas de Atividades em Sala de Aula

Com o objetivo de auxiliar os professores na abordagem de conceitos de probabilidade e estatística, em especial na compreensão da forma de uma distribuição de probabilidade através do estudo de histogramas, vamos apresentar três atividades que poderão ser utilizadas em sala de aula. Na primeira atividade, utilizaremos a Tábua de Galton como equipamento experimental. Na segunda atividade, usaremos o *software* “*Quincunx*” para simular de forma bastante interativa a obtenção do modelo normal a partir da obtenção dos histogramas gerados pela distribuição binomial. Na terceira e última atividade, adotaremos o *software* “*Geogebra*” como aplicativo didático para evidenciar por meio de simulação a curva normal. Faremos uma breve introdução à abordagem prática do trabalho, esclarecendo sobre a Tábua de Galton, também conhecida como quincunx, bem como descrevendo a metodologia a ser trabalhada nos experimentos.

Segundo [5], em 1873–1874, Galton projetou um curioso aparelho experimental conhecido como “*quincunx*” ou Tábua de Galton. Essa máquina era um engenhoso modelo físico da teoria dos erros, a qual ele acreditava ser aplicável a muitos fenômenos relacionados à Biologia e à Física. Encerrada através de um vidro, havia uma seção transversal de um funil que se abria para um arranjo de pinos de metal dispostos a intervalos iguais, com comprimentos verticais abaixo dos pinos. Ao cair pelo funil, os chumbinhos de espingarda (ou bolinhas) se distribuíam, aleatoriamente, para a direita ou para a esquerda pelos espaços entre os pinos que representavam, na teoria de Galton, as perturbações aleatórias independentes da natureza. No final do processo, eles se acumulavam nos compartimentos inferiores em pilhas que lembram uma curva normal.

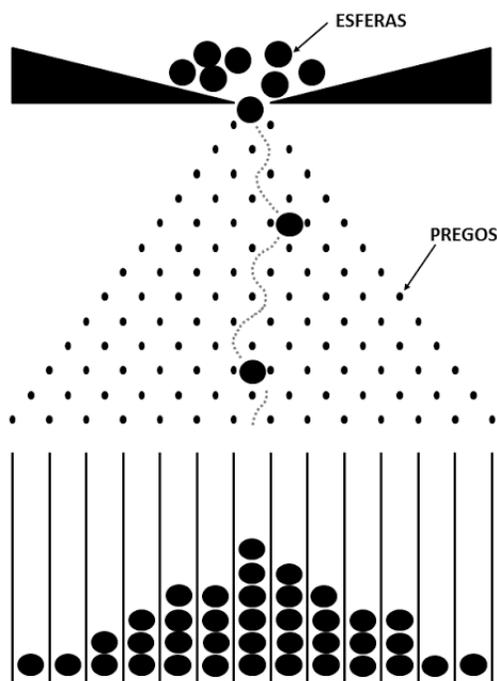


Figura 3: Imagem de uma Tábua de Galton

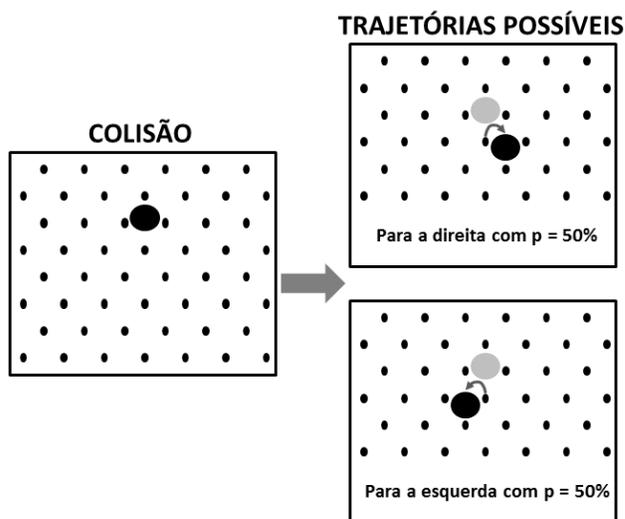


Figura 4: Trajetórias possíveis após cada colisão na Tábua de Galton

Atividade 1 *Tábua de Galton*

A Tábua de Galton constitui-se em um equipamento simples, de fácil exploração, que modela um experimento puramente probabilístico. Consideramos que a Tábua de Galton tem uma grande importância pedagógica na introdução de conceitos de aleatoriedade, probabilidade e distribuição normal. Com a utilização deste equipamento, propomos a seguinte metodologia: Após desenvolvermos com os alunos em sala de aula os conceitos teóricos de probabilidade, distribuição binomial e distribuição normal, apresentamos a Tábua de Galton. Introduzimos um breve relato da contribuição histórica do equipamento, em seguida, fazemos uma demonstração prática do experimento e damos uma objetiva explicação sobre o fenômeno. A atividade pretende mostrar a curva normal por meio da aproximação dos histogramas formados na Tábua de Galton, e ao mesmo tempo estimular a observação e despertar a percepção do aluno, numa atividade que incentiva a atitude observadora e desenvolve a percepção intuitiva dos conceitos e procedimentos que geram a curva normal.

Etapa 1: Soltar 40 bolinhas, com a tábua inclinada sob um ângulo α .

Etapa 2: Registrar o histograma obtido, por meio de foto.

Etapa 3: Representar, numa tabela, a relação entre número da canaleta e o número de bolinhas.

Etapa 4: Calcular a probabilidade P de ocorrência de bolinhas em cada canaleta, usando a equação, $P = \text{número de bolinhas em cada canaleta} / \text{número total de bolinhas}$.

Etapa 5: Plotar o gráfico: número da canaleta *versus* P .

Repetir o processo várias vezes para observar as possíveis mudanças no padrão do histograma formado. Alterar o número de bolinhas e repetir as etapas acima.

Após realizar vários ensaios, tanto com quarenta bolinhas quanto com oitenta bolinhas, obtivemos padrões que se aproximam mais ou menos do que esperávamos como resultado, ou seja, a distribuição normal das bolinhas nas canaletas. As figuras 5 e 6 abaixo, mostram dois dos resultados obtidos, respectivamente para o lançamento de quarenta e oitenta bolinhas.

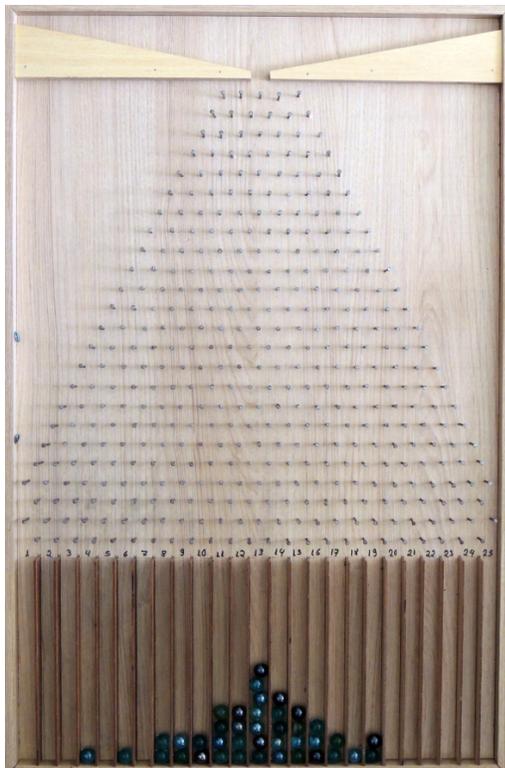


Figura 5: Resultado da simulação com 40 bolinhas

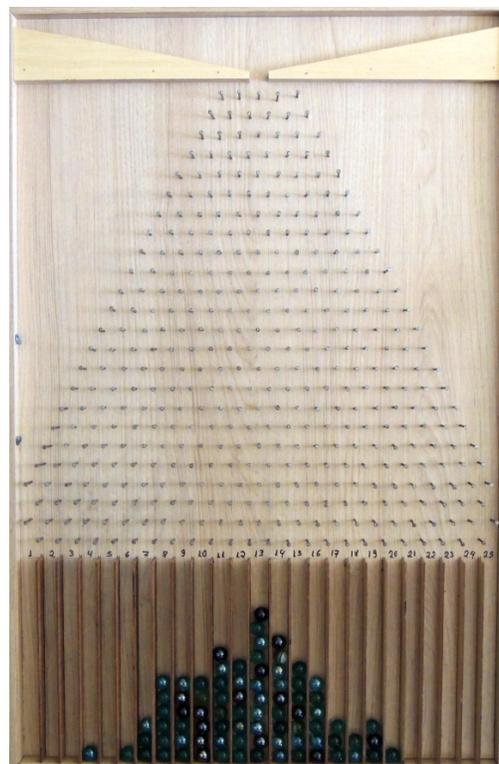


Figura 6: Resultado da simulação com 80 bolinhas

Depois de realizados as etapas propostas acima, sugerimos a discussão com os alunos de algumas questões como:

Questão 1: A quantidade de bolinhas interfere na forma do gráfico?

Questão 2: A quantidade de bolinhas interfere na centralidade do gráfico?

Questão 3: A quantidade de bolinhas interfere no espalhamento do gráfico ao longo das cauletas, ou seja, na dispersão do gráfico?

Questão 4: A inclinação da tábua interfere na forma do gráfico? Sugerimos que esta pergunta seja feita apenas para alunos com um bom conhecimento de Física ou em caso do professor de Física da turma se interessar em fazer um trabalho interdisciplinar.

Atividade 2 *Software Quincunx*

Nesta segunda atividade consideramos os mesmos subsídios teóricos da atividade 1 e partimos dos mesmos objetivos, porém a metodologia proposta se baseia na utilização de um *software* gratuito, que chamaremos “Quincunx”⁶. A realização desta atividade pode ser feita em sala de aula ou no laboratório de informática. A seguir descrevemos as etapas do experimento:

Etapa 1: Adotando a probabilidade de sucesso $p = 50\%$ e fixando o número de colunas

⁶pode ser acessado em: <http://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html>

(rows) $n = 5$, inicie o simulador, observando a contagem do marcador até chegar a marca 50.

Etapa 2: Registre a imagem, copiando a tela “(print screen)”.

Etapa 3: Repita o experimento, adotando a probabilidade de sucesso $p = 50\%$ e fixando o número de colunas $n = 13$, inicie o simulador, observando a contagem do marcador até chegar a marca 50.

Etapa 4: Registre a imagem, copiando a tela “(print screen)”.

Etapa 5: Repita o experimento, adotando a probabilidade de sucesso $p = 50\%$ e fixando o número de colunas $n = 19$, inicie o simulador, observando a contagem do marcador até chegar a marca 50.

Etapa 6: Registre a imagem, copiando a bolinhas “(print screen)”.

Etapa 7: Repita o experimento, adotando a probabilidade de sucesso $p = 50\%$ e fixando o número de colunas $n = 19$, inicie o simulador, observando a contagem do marcador até chegar a marca 200.

Etapa 8: Registre a imagem, copiando a tela “(print screen)”.

As figuras de 7 a 12 exemplificam resultados possíveis de se obter no *software Quincunx* quando se realizam alterações no número de colunas e no número de bolinhas, conforme preconizadas nas etapas listadas nesta atividade. É importante observar que, mesmo realizando simulações idênticas às propostas nas etapas acima, os resultados obtidos também apresentarão variações, assim como as observadas na Atividade 1.

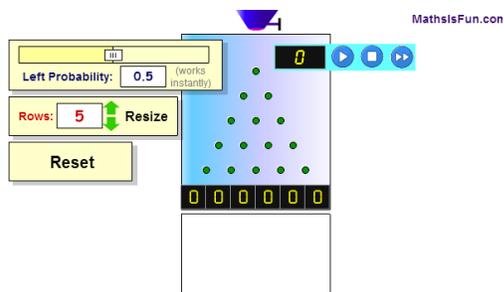


Figura 7: Software Quincunx com 5 classes de agrupamento

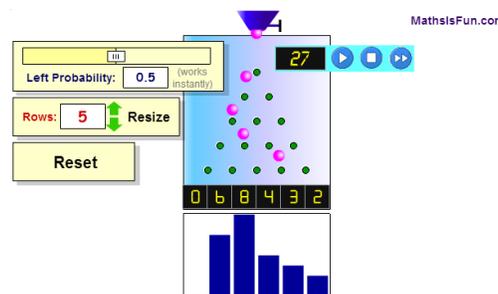


Figura 8: Software Quincunx com 5 classes de agrupamento na contagem da vigésima sétima bolinha

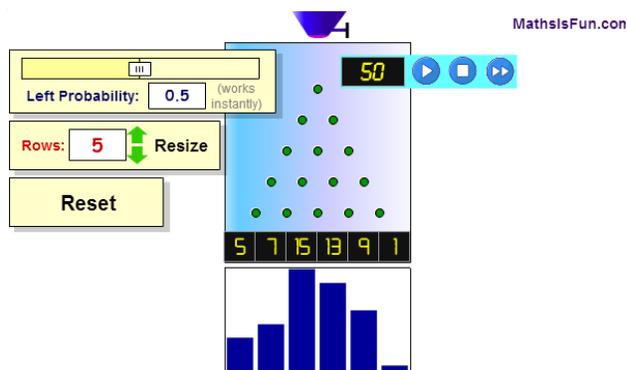


Figura 9: Resultado da Etapa 1

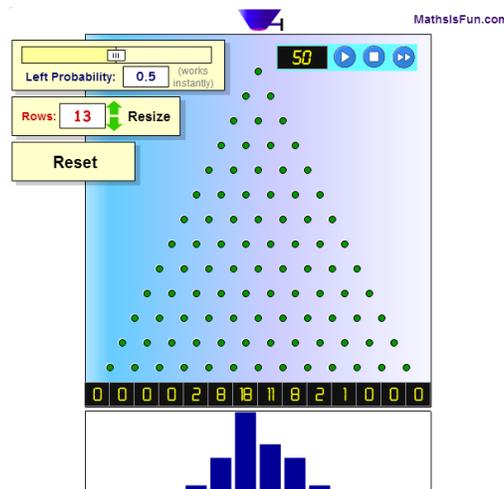


Figura 10: Resultado da Etapa 3

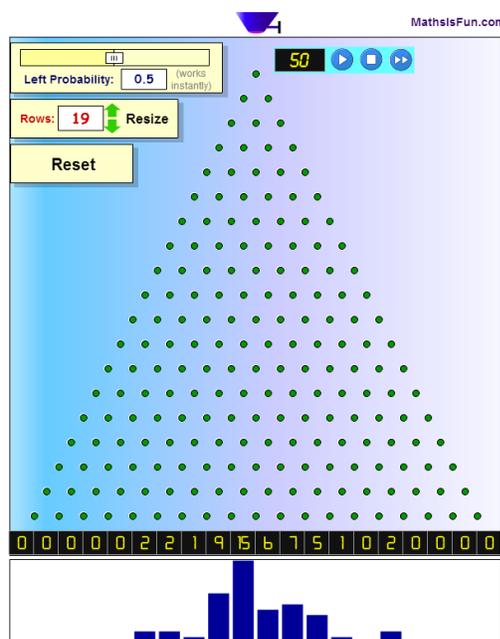


Figura 11: Resultado da Etapa 5

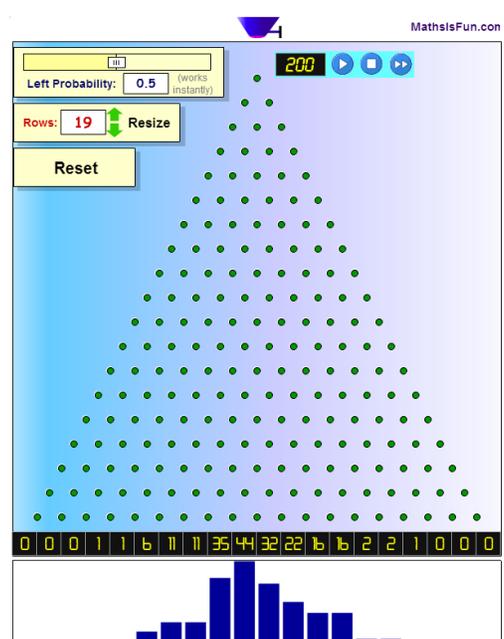


Figura 12: Resultado da Etapa 7

Depois de realizados as etapas propostas acima, sugerimos a discussão com os alunos de algumas questões como:

- Questão 1: A quantidade de colunas/canaletas interfere na forma do gráfico?
- Questão 2: A quantidade de bolinhas interfere na centralidade do gráfico?
- Questão 3: A quantidade de bolinhas interfere no espalhamento do gráfico, ou seja, na dispersão do gráfico?

Atividade 3 Usando o software Geogebra no estudo da curva normal

Nesta terceira atividade, consideramos os mesmos subsídios teóricos da atividade 1 e partimos dos mesmos objetivos, porém a metodologia proposta se baseia na utilização do *software* Geogebra para explorarmos a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, o efeito da média e do desvio padrão na curva normal e a simetria do gráfico da curva normal. A realização desta atividade pode ser feita em sala de aula ou no laboratório de informática. A seguir descrevemos as etapas do experimento:

Etapa 1: Construa, usando o Geogebra, a função $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Etapa 2: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 2 classes, para $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$.

Etapa 3: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 3 classes, para $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$.

Etapa 4: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 9 classes, para $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$.

Etapa 5: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 50 classes, para $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$.

Etapa 6: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 200 classes, para $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$.

Etapa 7: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 50 classes, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Etapa 8: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 50 classes, para $\mu = 0$ e $\sigma = 0,3$.

Etapa 9: Construa, usando o Geogebra, um histograma com 50 classes, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1,5$.

As figuras de 13 a 21 foram obtidas no *software* Geogebra. Elas mostram os resultados que devem ser obtidos ao se realizar as etapas propostas nesta atividade. Verifica-se, agora, que alterando-se os valores da média μ e do desvio padrão σ , bem como o número de classes, modificam-se as características das curvas obtidas.

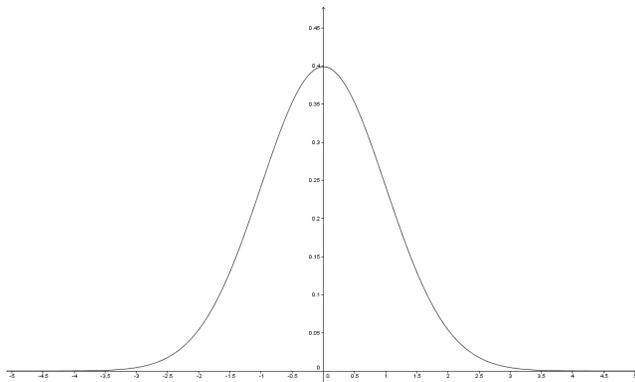


Figura 13: Curva normal com média $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 1$

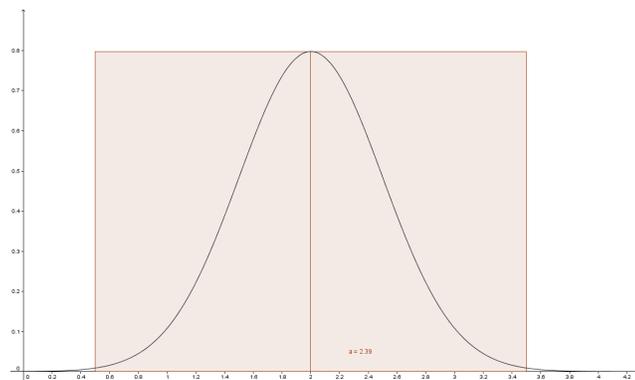


Figura 14: Discretização da curva normal com $\mu = 2$ e desvio $\sigma = 0,5$, usando 2 classes

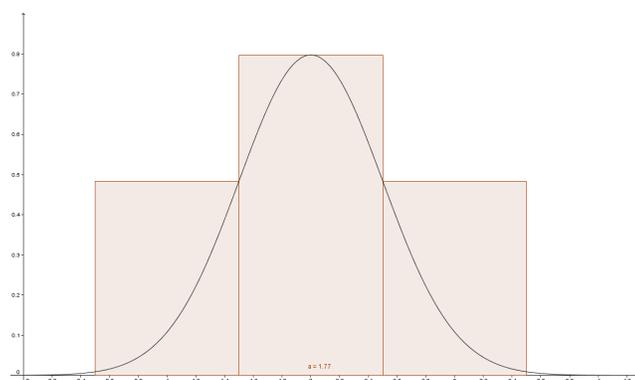


Figura 15: Discretização da curva normal com $\mu = 2$ e desvio $\sigma = 0,5$, usando 3 classes

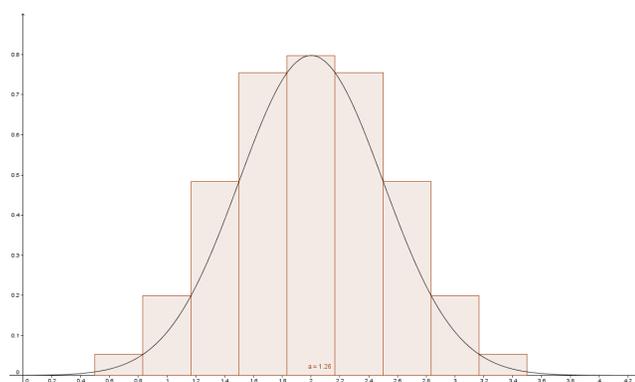


Figura 16: Discretização da curva normal com $\mu = 2$ e desvio $\sigma = 0,5$, usando 9 classes

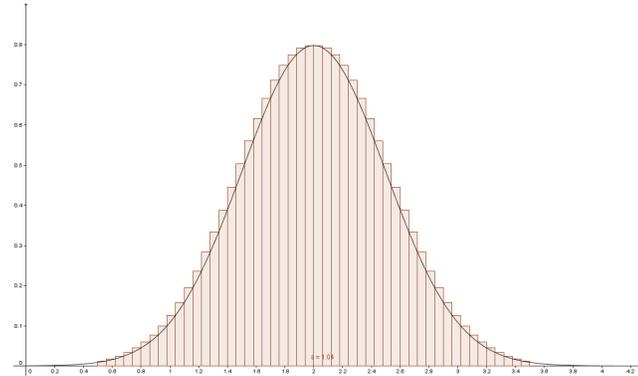


Figura 17: Discretização da curva normal com $\mu = 2$ e desvio $\sigma = 0,5$, usando 50 classes

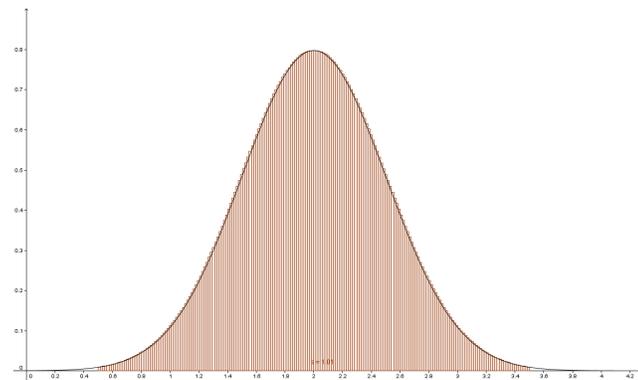


Figura 18: Discretização da curva normal com $\mu = 2$ e desvio $\sigma = 0,5$, usando 200 classes

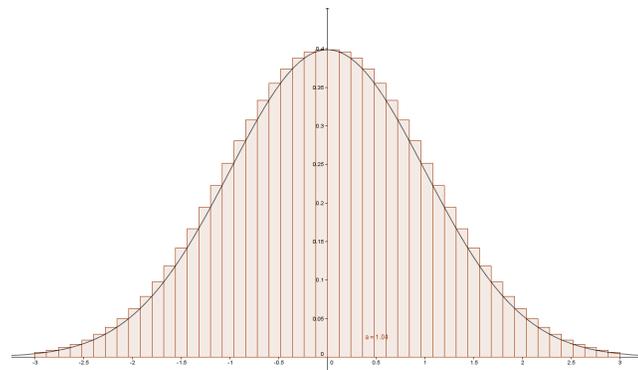


Figura 19: Discretização da curva normal com $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 1$, usando 50 classes

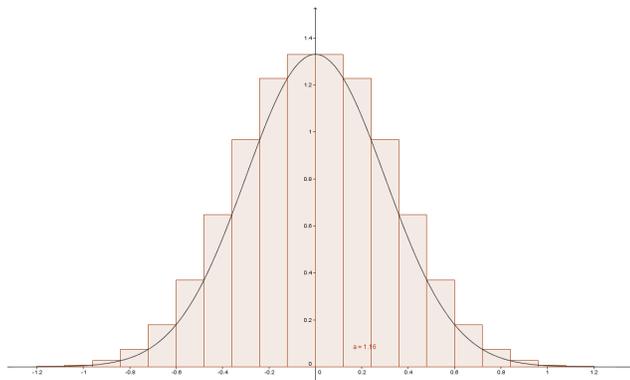


Figura 20: Discretização da curva normal com $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 0,3$, usando 50 classes

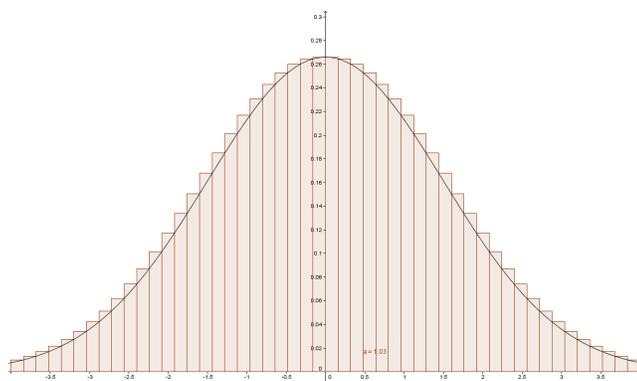


Figura 21: Discretização da curva normal com $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 1,5$, usando 50 classes

Depois de realizados as etapas propostas acima, sugerimos a discussão com os alunos de algumas questões como:

Questão 1: Podemos afirmar que os gráficos obtidos são simétricos?

Questão 2: Onde está localizada a média do gráfico da curva normal? Por quê?

Questão 3: Ao mudarmos a média e a variância, a forma dos histogramas se altera?

Questão 4: Ao mudarmos o número de classes do gráfico, mantendo a média e a variância, a forma dos histogramas se altera?

Questão 5: À medida que aumentamos o número de classes, mantendo a média e a variância, o que observamos quanto à forma do histograma?

Após a realização de cada atividade o professor deverá conversar bastante com os alunos destacando os aspectos conceituais a serem assimilados através da articulação entre a experimentação dos recursos didáticos práticos e da teoria previamente trabalhada com os alunos. Assim, acreditamos que o processo de ensino e aprendizagem do assunto abordado neste trabalho se tornará mais interessante, atraente e eficaz.

6 Considerações Finais

A distribuição normal é um modelo que descreve o comportamento de vários fenômenos aleatórios. Os conteúdos relacionados a este modelo são contemplados nos tópicos de probabilidades e estatística descritiva, ambos presentes no ensino médio e na graduação de alguns cursos superiores. Devido à sua importância tanto teórica como práticas já citadas neste trabalho, consideramos que a metodologia de ensino deste modelo principalmente no ensino médio deve ter um tratamento diferenciado. Neste trabalho apresentamos uma perspectiva didático pedagógica que articula a teoria e a prática, recorrendo à atividades investigativas. Com objetivos definidos e planejamento de uma sequência didática de ações que visem o aprendizado efetivo, o professor poderá motivar os alunos, estimular a autonomia e o trabalho colaborativo, tão importantes na formação acadêmica de jovens e adultos. Quanto a sugestões para outros trabalhos e novos estudos, existem várias possibilidades de aplicações com o uso do *software* Geogebra, do cálculo de probabilidades da distribuição normal por meio de integral definida, das demais distribuições contínuas, do ensino de testes de hipótese, do controle estatístico de processos, do estudo de análise de regressões, bem como do uso do pacote de ferramentas da Estatística Descritiva.

7 Agradecimentos

Agradeço a DEUS por me guiar, iluminar e me dar tranquilidade para seguir em frente com os meus objetivos e não desanimar com as dificuldades. Aos meus pais, pelo amor, pelo exemplo, e pelo contínuo incentivo aos estudos. Ao meu esposo Ramon, pela compreensão em todos os momentos, por sempre me apoiar, pela dedicação e carinho. À minha filha Marina, pela paciência, pelos momentos de descontração e alegria, e por entender a minha ausência. A todos os professores do PROFMAT, polo Ouro Branco, pela dedicação e profissionalismo. Aos colegas pelo companheirismo, amizade e momentos de reflexão. Em especial ao meu orientador Professor Alexandre Celestino Leite Almeida pela competência, disponibilidade, apoio, incentivo e pelas relevantes contribuições para minha formação acadêmica. À coordenação nacional por proporcionar o aprimoramento da formação profissional dos professores da educação básica, à CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho e por fim, à todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

A Apêndice

Lema A.1 *Se verifica que $f(x) = (q + pe^{2\pi ix})^n$, onde $f(x) = \sum_{j=0}^n T_j e^{2\pi i j x}$.*

Demonstração: Basta substituir a expressão de T_j na equação (1). Logo:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n T_j e^{2\pi i j x} = \sum \binom{n}{j} (pe^{2\pi ix})^j q^{n-j}.$$

Usando o binômio de Newton, temos:

$$f(x) = (q + pe^{2\pi ix})^n.$$

□

Lema A.2 *Para cada j , tem-se que:*

$$T_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i j x} dx.$$

Demonstração: Seja k um número inteiro. Observe que:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i k x} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i j x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n T_k e^{2\pi i (k-j)x} dx.$$

Ao intercalar a soma e a integral se obtém:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i j x} dx = \sum_{k=0}^n T_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i (k-j)x} dx = T_j.$$

já que todos os termos da soma são iguais a zero, exceto quando $k = j$.

□

Lema A.3 *Seja $\Theta_x = \arctan\left(\frac{p\text{sen}(2\pi x)}{q + p\cos(2\pi x)}\right)$. Tem-se que:*

$$f(x) = 1 - 4pq\text{sen}^2(\pi x)^{\frac{n}{2}} e^{i(n\Theta_x)}.$$

Demonstração: Pelo Lema (A.1), temos que:

$$|f(x)| = |q + p\cos(2\pi x) + ip\text{sen}(2\pi x)|^n = [p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x)]^{\frac{n}{2}}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos(2\pi x) = 1 - 2\text{sen}^2(\pi x)$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= [p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x)]^{\frac{n}{2}} = [p^2 + q^2 + 2pq(1 - 2\text{sen}^2(\pi x))]^{\frac{n}{2}} \\ &= [1 - 4pq\text{sen}^2(\pi x)]^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} f(x) &= |f(x)| \frac{(q + pe^{2\pi ix})^n}{|q + pe^{2\pi ix}|^n} = |f(x)| \left[\frac{q + p\cos(2\pi x) + ip\text{sen}(2\pi x)}{|q + pe^{2\pi ix}|} \right]^n \\ &= |f(x)| \left[\frac{q + p\cos(2x\pi)}{|q + pe^{2ix\pi}|} + i \frac{p\text{sen}(2x\pi)}{|q + pe^{2ix\pi}|} \right]^n. \end{aligned}$$

O número complexo $\frac{q + p\cos(2x\pi)}{|q + pe^{2ix\pi}|} + i \frac{p\text{sen}(2x\pi)}{|q + pe^{2ix\pi}|}$ tem norma 1, logo, podemos escrever na forma $\cos\Theta_x + i\text{sen}\Theta_x$.

Concluindo que:

$$\begin{aligned} f(x) &= |f(x)| \left[\frac{q + p\cos(2\pi x) + ip\text{sen}(2\pi x)}{|q + pe^{2\pi ix}|} \right]^n \\ &= \{1 - 4pq\text{sen}^2(\pi x)\}^{\frac{n}{2}} (\cos\Theta_x + i\text{sen}\Theta_x)^n \\ &= \{1 - 4pq\text{sen}^2(\pi x)\}^{\frac{n}{2}} (e^{i\Theta_x})^n. \end{aligned}$$

□

Lema A.4 Se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ então $|f(x)| \leq e^{-2B_n(2x)^2}$.

Demonstração: Seja $\rho = |1 - 4pq \operatorname{sen}^2(\pi x)|^{\frac{1}{2}}$. Pelo Lema (A.3) sabe-se que $|f(x)| = \rho^n$. Seja $\alpha = 4pq \operatorname{sen}^2(\pi x)$. Então

$$2 \log \rho = \log |1 - \alpha| = - \int_{1-\alpha}^1 \frac{dy}{y} \leq -\alpha$$

Portanto:

$$\log \rho \leq -2pq \operatorname{sen}^2(\pi x). \quad (15)$$

Para cada $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ verifica-se que $2x \leq \operatorname{sen}(\pi x)$. Logo:

$$\log \rho \leq -2pq(2x)^2 \quad \text{para cada } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$|f(x)| \leq \rho^n \leq e^{-2npq(2x)^2} = e^{-2B_n(2x)^2}.$$

□

Lema A.5 Se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, então $|f(x)| \leq e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 + \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4}$.

Demonstração: Para cada $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, usando a expansão da série de Taylor, temos que $(\pi x)^2 - \frac{(\pi x)^4}{3} \leq \operatorname{sen}^2(\pi x)$.

Da equação (15), obtém-se:

$$\log \rho \leq -2pq \operatorname{sen}^2(\pi x) \leq -2pq(\pi x)^2 + 2pq \frac{(\pi x)^4}{3}.$$

Portanto:

$$|f(x)| \leq \rho^n \leq e^{-2pq n(\pi x)^2 + \frac{2pq n}{3}(\pi x)^4} = e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 + \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4}, \quad \text{já que } B_n = npq.$$

□

Lema A.6 Se $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, então:

$$|f(x)| \geq e^{-\frac{Bn}{2}(2\pi x)^2 - \frac{Bn}{16}(2\pi x)^4}.$$

Demonstração: Se $\alpha = 4pq \operatorname{sen}^2(\pi x)$ e se $\rho = |1 - \alpha|^{\frac{1}{2}}$. Verifica-se que $-\log |1 - \alpha| = \int_0^\alpha \frac{dt}{1-t} = \int_0^\alpha \left(1 + t + \frac{t^2}{1-t}\right) dt$.

Se $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, então $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ e portanto:

$$0 \leq \int_0^\alpha \frac{t^2}{1-t} dt \leq 2 \int_0^\alpha t^2 dt = \frac{2}{3}\alpha^3.$$

Daí, temos que:

$$\log \rho = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^3}{3}\right). \quad (16)$$

Segue que, para cada $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, temos:

$$\operatorname{sen}^2(\pi x) \leq (\pi x)^2 - \frac{3}{10}(\pi x)^4.$$

Multiplicando por $-2pq$, $-2pq\operatorname{sen}^2(\pi x) \geq -2pq(\pi x)^2 + \frac{3pq(\pi x)^4}{5}$, ou seja:

$$-\frac{\alpha}{2} \geq -\frac{pq}{2}(2\pi x)^2 + \frac{3}{80}pq(2\pi x)^4. \quad (17)$$

Por outro lado, para todo $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, verifica-se:

$$\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4(\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^6(\pi x) \leq \frac{7}{25}(\pi x)^4.$$

Como $4pq \leq 1$, então:

$$\frac{1}{4}(4pq)\operatorname{sen}^4(\pi x) + \frac{1}{3}(4pq)^2\operatorname{sen}^6(\pi x) \leq \frac{7}{25}(\pi x)^4.$$

Multiplicando-se por $-4pq$ obtém-se:

$$-\frac{1}{4}(4pq)^2\operatorname{sen}^4(\pi x) - \frac{1}{3}(4pq)^3\operatorname{sen}^6(\pi x) \geq -\frac{28}{25}pq(\pi x)^4.$$

Segue que:

$$-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^3}{3} \geq -\frac{28}{400}pq(2\pi x)^4. \quad (18)$$

De (16), (17) e (18), resulta:

$$\log \rho \geq -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^3}{3} \geq -\frac{pq}{2}(2\pi x)^2 - \frac{67pq}{1200}(2\pi x)^4.$$

Multiplicando-se por n e sabendo-se que $B_n = npq$, obtém-se o lema. □

Adotaremos:

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2\pi B_n^{\frac{1}{4}}}. \quad (19)$$

Lema A.7 Para cada $0 \leq x \leq \tau$, verifica-se:

$$|f(x)| = e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \{1 + \mathcal{O}(B_n(2\pi x)^4)\}.$$

Demonstração: Pelo Lema (A.6), tem-se que:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 - \frac{B_n}{16}(2\pi x)^4} \\ e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| &\geq e^{-\frac{B_n}{16}(2\pi x)^4} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| - 1 \geq e^{-\frac{B_n}{16}(2\pi x)^4} - 1 \geq -\frac{B_n}{16}(2\pi x)^4. \quad (20)$$

já que $e^\xi \geq 1 + \xi$, verifica-se para cada $\xi \in \mathbb{R}$.

Se $x \leq \tau$, então: $2\pi x \leq \frac{\sqrt{3}}{B_n^{\frac{1}{4}}}$, e portanto:

$$\frac{B_n}{24}(2\pi x)^4 \leq \frac{9}{24} = \frac{3}{8}. \quad (21)$$

É possível verificar que para cada $0 \leq \xi \leq \frac{3}{8}$ tem-se $e^\xi - 1 \leq \frac{3}{2}\xi$.

Pelo Lema (A.5), tem-se que:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 + \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4} \\ e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| &\leq e^{\frac{B_n}{24}(2\pi x)^4} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| - 1 \leq e^{\frac{B_n}{24}(2\pi x)^4} - 1 \leq \frac{3}{2} \times \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4 = \frac{B_n}{16}(2\pi x)^4. \quad (22)$$

De (20) e (22) temos que:

$$-\frac{B_n}{16}(2\pi x)^4 \leq e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| - 1 \leq \frac{B_n}{16}(2\pi x)^4$$

que equivale a:

$$\left| e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} |f(x)| - 1 \right| \leq \frac{B_n}{16}(2\pi x)^4 \leq B_n(2\pi x)^4$$

Podemos concluir então que:

$$|f(x)| = e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \{1 + \mathcal{O}(B_n(2\pi x)^4)\}.$$

□

Lema A.8 Se $J_2 = \int_{\tau}^{\frac{1}{2}} |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x + \Phi_x)}{\text{sen}(\pi x)} dx$ e $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2\pi B_n^{\frac{1}{4}}}$, então:

$$|J_2| \leq \left(\frac{3}{4} \log \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6\sqrt{B_n}} \right) e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}}.$$

Demonstração: Se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, então $2x \leq \text{sen}(\pi x)$. Portanto:

$$2|J_2| \leq 2 \int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{\text{sen}(\pi x)} dx \leq \int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx.$$

Seja $\tau_1 = \frac{1}{2}\tau$. Pelo Lema (A.4) tem-se que:

$$\int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq \int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} e^{-2B_n(2x)^2} dx = \int_{2\tau_1}^1 \frac{1}{x} e^{-2B_n x^2} dx.$$

Seja $\tau_2 = 2\tau_1\sqrt{2B_n}$. Então:

$$\int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq \int_{\tau_2}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} dx \leq \int_{\tau_2}^{\infty} \left(\frac{x}{\tau_2} \right)^2 \frac{1}{x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\tau_2^2} e^{-\tau_2^2}.$$

uma vez que $0 < \tau < \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $\left(\frac{x}{\tau} \right)^2 \leq 1$.

Substituindo τ_2 na expressão acima, temos:

$$\int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq \frac{1}{3\sqrt{B_n}} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}} \quad (23)$$

Pelo Lema (A.5), tem-se:

$$\int_{\tau}^{\tau_1} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2 + \frac{B_n}{24}(2\pi x)^4}}{x} dx.$$

Tomando o valor máximo do integrando, obtém-se:

$$\int_{\tau}^{\tau_1} \frac{|f(x)|}{x} dx \leq e^{\frac{3}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{B_n}} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{dx}{x} \leq \frac{3}{2} \log\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}}. \quad (24)$$

considerando que $0 \leq \xi \leq \frac{3}{8}$ tem-se $e^{\xi} - 1 \leq \frac{3}{2}\xi$.

Usando as equações (23) e (24), concluímos portanto que:

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx \\ |J_2| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\tau}^{\tau_1} \frac{|f(x)|}{x} dx + \int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x)|}{x} dx \right) \\ |J_2| &\leq \frac{1}{6\sqrt{B_n}} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}} + \frac{3}{4} \log\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}} \end{aligned}$$

□

Lema A.9 *Suponha que $B_n \geq 25$. Verifica-se que:*

$$J_1 = \int_0^{\tau} e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x + \Phi_x)}{\pi x} dx + \mathcal{O}\left(\frac{0,0605}{B_n}\right).$$

Demonstração: Para cada x tal que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, tem-se:

$$\frac{1}{\text{sen}(\pi x)} = \frac{1}{\pi x} + \mathcal{O}\left\{\frac{(\pi x)^2}{\text{sen}(\pi x)}\right\}.$$

Usando esta expressão para $\frac{1}{\text{sen}(\pi x)}$ na expressão (11) para J_1 , obtém-se:

$$J_1 = \int_0^{\tau} |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) + \Phi_x}{\pi x} dx + \Delta.$$

onde

$$|\Delta| \leq \int_0^{\tau} |f(x)| \frac{(\pi x)^2}{6\text{sen}(\pi x)} dx.$$

Como $\frac{x}{\text{sen}(\pi x)}$ é uma função crescente, então:

$$\frac{x}{\text{sen}(\pi x)} \leq \frac{\tau}{\text{sen}(\pi \tau)} \quad \text{para cada } 0 \leq x \leq \tau.$$

Portanto:

$$|\Delta| \leq \frac{\pi^2 \tau}{6 \text{sen}(\pi \tau)} \int_0^\tau x |f(x)| dx.$$

Pelo Lema (A.5), usando (19) e (21), temos:

$$|f(x)| e^{\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \leq e^{\frac{B_n}{24}(2\pi \tau)^4} \leq e^{\frac{9}{24}} \leq \frac{3}{2},$$

já que $\frac{B_n}{24}(2\pi \tau)^4 \leq \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, lema (A.7).

Portanto:

$$|\Delta| \leq \frac{\pi^2 \tau}{4 \text{sen}(\pi \tau)} \int_0^\infty x e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} dx \leq \frac{\tau}{8 B_n \text{sen}(\pi \tau)} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

Como $B_n \geq 25$, então: $\tau \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{5}}$. Portanto:

$$\frac{\tau}{\text{sen}(\pi \tau)} \leq 0,327e |\Delta| \leq \frac{0,0205}{B_n}$$

Concluimos, portanto que:

$$J_1 = \int_0^\tau |f(x)| \frac{\text{sen}(\lambda \sqrt{B_n} 2\pi x) + \Phi_x}{\pi x} dx + \mathcal{O} \left\{ \frac{0,0205}{B_n} \right\}. \quad (25)$$

Pelo Lema (A.7), obtém-se:

$$J_1 = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda \sqrt{B_n} 2\pi x) + \Phi_x}{\pi x} dx + \mathcal{O} \left\{ \frac{0,0205}{B_n} \right\} + \Delta.$$

Usando (25) e o lema (A.7), temos:

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq \frac{B_n}{8} \int_0^\tau (2\pi x)^3 e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{16\pi B_n} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{8\pi B_n} \end{aligned}$$

Isto termina a prova já que $\frac{1}{8\pi} \leq 0,04$.

□

Lema A.10 Se $\Phi_x = n(2\pi px - \Theta_x)$ e $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(B_n)^{\frac{1}{4}}}$ e $0 \leq x \leq \tau$, então verificam-se as equações:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \mathcal{O} \left\{ \frac{3B_n |p - q|}{16(1 - pq(2\pi\tau)^2)^3} (2\pi x)^3 \right\} \quad e \\ \Phi_x &= -\frac{B_n}{6}(p - q)(2\pi x)^3 + \mathcal{O} \left\{ \frac{B_n |p - q|}{12(1 - pq(2\pi\tau)^2)^4} (2\pi x)^4 \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Seja Θ_x como está mostrado no Lema (A.3), então:

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_x}{dx} &= \frac{2\pi p(p + q\cos(2\pi x))}{p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x)}, \\ \frac{d^2\Theta_x}{dx^2} &= \frac{(2\pi)^2 pq(p - q)\sin(2\pi x)}{(p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x))^2}, \\ \frac{d^3\Theta_x}{dx^3} &= (2\pi)^3 pq(p - q) \frac{4pq + (1 - 2pq)\cos(2\pi x) - 2pq\cos^2(2\pi x)}{(p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x))^3}, \\ \frac{d^4\Theta_x}{dx^4} &= (2\pi)^4 pq(p - q)\sin(2\pi x) \frac{4pq - 1 + 20p^2q^2 + 8pq(1 - 2pq)\cos(2\pi x) - 4p^2q^2\cos^2(2\pi x)}{(p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x))^4}.\end{aligned}$$

Nota-se que:

$$\left. \frac{d\Theta_x}{dx} \right|_0 = 2\pi p, \quad \left. \frac{d^2\Theta_x}{dx^2} \right|_0 = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^3\Theta_x}{dx^3} \right|_0 = (2\pi)^3 pq(p - q).$$

Já que $\Phi_x = n(2\pi px - \Theta_x)$, então, verifica-se que:

$$\Phi_x = -n \frac{x^3}{6} \left. \frac{d^3\Theta_x}{dx^3} \right|_{\xi}. \quad (26)$$

e

$$\Phi_x = -npq(p - q) \frac{(2\pi x)^3}{3!} - n \frac{x^4}{24} \left. \frac{d^4\Theta_x}{dx^4} \right|_{\eta}. \quad (27)$$

com $0 \leq \xi \leq \tau$ e $0 \leq \eta \leq \tau$.

Para cada $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, verifica-se que, $\sin^2(\pi x) \leq (\pi x)^2$. Como $0 \leq x \leq \tau$, então: $\sin^2(\pi x) \leq (\pi\tau)^2$. Portanto:

$$\begin{aligned}1 - pq(2\pi\tau)^2 \leq 1 - 4pq\sin^2(\pi x) &= (p + q)^2 - 4pq\sin^2(\pi x) \\ &= p^2 + q^2 + 2pq - 4pq\sin^2(\pi x) \\ &= p^2 + q^2 + 2pq(1 - 2\sin^2(\pi x)) \\ &= p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x).\end{aligned} \quad (28)$$

Para demonstrar a primeira equação, seja:

$$f_o(p) = 4pq + (1 - 2pq)\cos(2\pi x) - 2pq\cos^2(2\pi x).$$

Então:

$$f'_o(p) = 4(2p - 1)(\cos(2\pi x) + 2)\text{sen}^2(\pi x).$$

Tem-se que: $f'_o(\frac{1}{2}) = 0$. Seja:

$$f_1(x) = f_o(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{\cos(2\pi x) - \cos^2(2\pi x)}{2}.$$

Então: $f'_1(x) = \pi(2\cos(2\pi x) - 1)\text{sen}(2\pi x)$. Note que, se $f'_1(x) = 0$, implica que, $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$. Portanto:

$$f_o(p) \leq f_1(x) \leq 1 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{9}{8}.$$

Portanto, usando (26) e substituindo $\frac{d^3\Theta_x}{dx^3}$, temos:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -n \frac{x^3}{6} \frac{d^3\Theta_x}{dx^3} \Big|_{\xi} \\ \Phi_x &= -n \frac{x^3}{6} (2\pi)^3 pq(p - q) \frac{4pq + (1 - 2pq)\cos(2\pi x) - 2pq\cos^2(2\pi x)}{(p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x))^3} \end{aligned}$$

Logo:

$$|\Phi_x| \leq -npq \frac{(2\pi x)^3}{6} \cdot \frac{|p - q|}{(1 - pq(2\pi\tau)^2)^3} \cdot \frac{9}{8}$$

já que $f_o(p) \leq \frac{9}{8}$ e de (28).

Concluimos portanto que:

$$\Phi_x = \mathcal{O} \left\{ \frac{3B_n |p - q|}{16(1 - pq(2\pi\tau)^2)^3} (2\pi x)^3 \right\}.$$

Para demonstrar a segunda equação, seja:

$$f_o(\xi, \eta) = 4\xi - 1 + 20\xi^2 + 8\xi(1 - 2\xi)\eta - 4\xi^2\eta^2, \text{ com } \xi = pq \text{ e } \eta = \cos(2\pi x).$$

Para cada $0 \leq \eta \leq 1$, esta função é monótona crescente como função de $\xi \in [0, \frac{1}{4}]$. Verifica-se que:

$$-1 = f_o(0, \eta) < f_o\left(\frac{1}{4}, \eta\right) \leq 2. \quad (29)$$

Portanto, usando (27) e substituindo, $\frac{d^4\Theta_x}{dx^4}$, temos:

$$\Phi_x = -npq(p - q) \frac{(2\pi x)^3}{3!} - n \frac{x^4}{24} \frac{d^4\Theta_x}{dx^4} \Big|_{\eta}.$$

$$\Phi_x + npq(p-q) \frac{(2\pi x)^3}{3!} = -n \frac{x^4}{24} \frac{d^4 \Theta_x}{dx^4} \Big|_\eta.$$

$$\left| \Phi_x + \frac{B_n}{6}(p-q)(2\pi x)^3 \right| = -n \cdot \frac{x^4}{24} (2\pi)^4 pq(p-q) \operatorname{sen}(2\pi x) \frac{4pq - 1 + 20p^2q^2 + 8pq(1 - 2pq)\cos(2\pi x) - 4p^2q^2\cos^2(2\pi x)}{(p^2 + q^2 + 2pq\cos(2\pi x))^4}$$

Logo:

$$\left| \Phi_x + \frac{B_n}{6}(p-q)(2\pi x)^3 \right| \leq \frac{(2\pi x)^4}{24} \cdot \frac{2npq|p-q|}{(1-pq(2\pi\tau)^2)^4} |\operatorname{sen}(2\pi x)|$$

usando as equações (28) e (29).

Portanto, concluímos que:

$$\Phi_x = -\frac{B_n}{6}(p-q)(2\pi x)^3 + \mathcal{O} \left\{ \frac{B_n|p-q|}{12(1-pq(2\pi\tau)^2)^4} (2\pi x)^4 \right\}.$$

□

Lema A.11 *Suponha que $B_n \geq 25$. Seja J_1 como no Lema (A.9). Sejam:*

$$J_3^\tau = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\operatorname{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx \quad e$$

$$J_4^\tau = -\frac{B_n}{3}(p-q) \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx.$$

Então:

$$J_1 = J_3^\tau + J_4^\tau + \mathcal{O} \left\{ \frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n} \right\}.$$

Demonstração: Como $\cos \xi = 1 + \mathcal{O} \left\{ \frac{\xi^2}{2} \right\}$, então o Lema (A.10) implica que:

$$\cos \Phi_x = 1 + \mathcal{O} \left\{ \frac{9B_n^2}{512} |p-q|^2 \left(\frac{2\pi x}{1-pq(2\pi\tau)^2} \right)^6 \right\}.$$

Como $\operatorname{sen}(\xi) = \mathcal{O}(\xi)$, então o Lema (A.10) implica que:

$$\operatorname{sen} \Phi_x = -\frac{B_n}{6}(p-q)(2\pi x)^3 + \mathcal{O} \left\{ \frac{B_n|p-q|}{12(1-pq(2\pi\tau)^2)^4} (2\pi x)^4 \right\}.$$

Escrevendo $\alpha = \lambda\sqrt{B_n}2\pi x$ e considerando que:

$$\text{sen}(\alpha + \Phi_x) = \text{sen}(\alpha)\cos\Phi_x + \cos(\alpha)\text{sen}(\Phi_x).$$

Portanto, se J_1 é como no Lema (A.9), então:

$$J_1 = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x + \Phi_x)}{\pi x} dx + \mathcal{O}\left(\frac{0,0605}{B_n}\right)$$

$$J_1 = J_3^\tau + J_4^\tau + \mathcal{O}\left\{\frac{B_n}{6}|p-q|\frac{J_5}{\Omega^4}\right\} + \mathcal{O}\left\{\frac{9B_n^2}{256}|p-q|^2\right\}\frac{J_6}{\Omega^6} + \mathcal{O}\left\{\frac{0,0605}{B_n}\right\}$$

onde tem-se $\Omega = 1 - pq(2\pi\tau)^2$ e também:

$$J_{k+1} = \int_0^\infty e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^k dx \quad \text{para } k = 4, 5.$$

Segue que:

$$J_5 = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}B_n^{\frac{5}{2}}} \quad \text{e} \quad J_6 = \frac{4}{\pi B_n^3}$$

Portanto:

$$J_1 = J_3^\tau + J_4^\tau + \mathcal{O}\left\{\frac{|p-q|}{4\sqrt{2\pi}B_n^{\frac{3}{2}}\Omega^4}\right\} + \mathcal{O}\left\{\frac{9|p-q|^2}{64\pi B_n\Omega^6}\right\} + \mathcal{O}\left\{\frac{0,0605}{B_n}\right\}. \quad (30)$$

Como $B_n \geq 25$, então $(2\pi\tau)^2 \leq \frac{3}{5}$. Visto que $pq \leq \frac{1}{4}$, então:

$$\Omega = 1 - pq(2\pi\tau)^2 \geq 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{20}.$$

Portanto:

$$\frac{|p-q|}{4\sqrt{2\pi}B_n^{\frac{3}{2}}\Omega^4} \leq \frac{|p-q|}{B_n} \cdot \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} \left(\frac{20}{17}\right)^4 \leq \frac{|p-q|}{B_n} \times 0,0385. \quad (31)$$

Por outro lado:

$$1 - pq\tau^2 \geq 1 - \frac{3}{5}pq = 1 - \frac{3}{5} \left\{ \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \right\} = \frac{17}{20} + \frac{3}{20}(p-q)^2.$$

Seja:

$$f_o(\xi) = \xi \left(\frac{17}{20} + \frac{3}{20}\xi^2 \right)^{-6}.$$

Então, $f'(\xi) = 0$ implica que $\xi^2 = \frac{17}{33}$. Portanto:

$$\xi \left(\frac{17}{20} + \frac{3}{20} \xi^2 \right)^{-6} \leq \sqrt{\frac{17}{33}} \times \left(\frac{55}{51} \right)^6.$$

Logo:

$$\frac{9|p-q|^2}{64\pi B_n \Omega^6} \leq \frac{|p-q|}{B_n} \times 0,051. \quad (32)$$

Substituindo (31) e (32) em (30), obtemos:

$$J_1 = J_3^\tau + J_4^\tau + \mathcal{O} \left\{ \frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n} \right\}.$$

□

Lema A.12 *Suponha que $B_n \geq 25$ e $P = J_1 + J_2$, então:*

$$P = J_1^\infty + J_2^\infty + \mathcal{O} \left\{ \frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n} + \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}} \right\}.$$

Demonstração:

Definindo:

$$J_3^\tau = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx.$$

$$J_3^\mathcal{O} = \int_\tau^\infty \frac{e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2}}{\pi x} dx.$$

$$J_3^\infty = \underbrace{\int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{\text{sen}(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x)}{\pi x} dx + \int_\tau^\infty \frac{e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2}}{\pi x} dx}_{J_3^\tau + J_3^\mathcal{O}}$$

$$J_4^\tau = -\frac{B_n}{3}(p-q) \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx$$

$$J_4^\mathcal{O} = \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 dx$$

$$J_4^\infty = \underbrace{-\frac{B_n}{3}(p-q) \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 \cos(\lambda\sqrt{B_n}2\pi x) dx + \int_0^\tau e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 dx}_{J_4^\tau + J_4^\mathcal{O}}$$

então:

$$P = J_1 + J_2$$

$$P = \underbrace{J_3^r + J_4^r + \mathcal{O}\left\{\frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n}\right\}}_{J_1} + J_3^{\mathcal{O}} + J_4^{\mathcal{O}} + J_2. \quad (33)$$

Como $2\pi\tau\sqrt{B_n} = \sqrt{3}B_n^{\frac{1}{4}}$, então:

$$J_3^{\mathcal{O}} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{dx}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{3}B_n^{\frac{1}{4}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^{\infty} \frac{x}{3B_n^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} dx.$$

Portanto:

$$J_3^{\mathcal{O}} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} \frac{dx}{\pi x} \leq \frac{1}{3\pi B_n^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}},$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} J_4^{\mathcal{O}} &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{B_n}{2}(2\pi x)^2} (2\pi x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{B_n}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\sqrt{3}B_n^{\frac{1}{4}}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{B_n}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{3}B_n^{\frac{1}{4}} \int_{\sqrt{3}B_n^{\frac{1}{4}}}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{1}{B_n}\right)^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}}, \end{aligned}$$

Uma vez que $B_n \geq 25$, então:

$$0 \leq \underbrace{\frac{3}{4} \log\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{J_1^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{6\sqrt{B_n}}}_{J_3^{\mathcal{O}}} + \underbrace{\frac{1}{3\pi\sqrt{B_n}}}_{J_4^{\mathcal{O}}} + \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \leq \frac{1}{2},$$

substituindo em (33), temos:

$$P = J_1^{\infty} + J_2^{\infty} + \mathcal{O}\left\{\frac{0,0605 + 0,09|p-q|}{B_n} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\sqrt{B_n}}\right\}.$$

□

Referências

- [1] USPENSKY, J. V.; *Introduction to Mathematical Probability*, Mc Graw-Hill, New York, 1937.
- [2] TODHUNTER, I., *History of the Mathematical Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965.
- [3] STIGLER, Stephen. M. *Statistics on the Table: the history of statistical concepts and methods*, Cambridge (MA): Belknap Press of Harvard University Press, 2002. 488p.
- [4] DAW, R. H.; PEARSON, Egon Sharpe. *Studies in the history of probability and statistics: Abraham De Moivre 1733 derivation of the normal curve: a bibliographical note*, *Biometrika*, v.59, n.3, 1972, p. 677-80.
- [5] TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza; PEREIRA, Riama Gouveia; TAKEUCHI, Margareth Yuri. *A Distribuição Normal e a Quincunx*, *Cad. Bras. Ens. Fís.*, v. 25, n. 2: p. 340-353, ago. 2008.
- [6] VIALI, Lorí. *Algumas considerações sobre a denominada curva normal*, v. 34, n. 1, p. 99-116, jan./jun., 2014.
- [7] TRIOLA, Mário F. *Introdução à estatística: atualização da tecnologia - 11a ed.* - Rio de Janeiro: LTC 2014.
- [8] FISHER, Hans. *The History of Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory*, New York: Springer 2011.
- [9] MARTHA Y., Franco Garcia. *Sobre el teorema del límite central* 2009. 81 f. Tese (Doutorado em Atuária). Instituto de Matemática. Universidad Nacional Autónoma de México, México. 2009.
- [10] DUARTE, Lucas Rodrigues. *A utilização do software GeoGebra no ensino da distribuição Normal de Probabilidade: uma aproximação entre a Geometria Dinâmica e a Educação Estatística*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. 129 f. Orientador: Dimas Felipe de Miranda
- [11] TEIXEIRA, Ricardo R. P.; PEREIRA, Riama G.; TAKEUCHI, Margareth Y. *A distribuição normal e o Quincunx*, *Cad. Bras. Ens. Fís. UFSC*, Florianópolis, SC, Brasil. v. 25, n. 2: p. 340-353, ago. 2008.
- [12] CAIRE, Elaine. *A história da origem da curva normal*. 2013. 109 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.
- [13] PEARSON, Karl. *Historical note on the origin of normal curve of errors*. *Biometrika*, v.16, n.3/4, Dec. 1924, p.402-404.
- [14] ROSS, Sheldon M. *A first course in probability*. New Jersey: Prentice Hall, 6th ed. 2002.

- [15] MAGALHÃES, Marcos N.; LIMA, Antônio C.P. *Noções de Probabilidade e Estatística* - 4 ed. - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2002.
- [16] DANTAS, Carlos A. B. *Probabilidade: Um Curso Introductório* - 2 ed. - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- [17] BITTENCOURT, H. R.; VIALI, L. *Contribuições para o Ensino da Distribuição Normal ou Curva de Gauss em Cursos de Graduação*. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática SIPEM. 3. 11-14 de out. 2006, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/doutorado/literatura/artigos/planilhas/Sipem.06.pdf> . Acessado em: 16/01/2015.
- [18] AQUINO, Priscila M. *O estudo da distribuição normal por Galton*. Junho 2004. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2004/009637_PriscilaA_Cerdeira_F809_RF.PDF Acesso em: 16/01/2015.