Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Jamerson Fernando Confort Martins

Determinantes, propriedades e métodos de condensação

Natal, fevereiro de 2015

Jamerson Fernando Confort Martins

Determinantes, propriedades e métodos de condensação

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Natal, fevereiro de 2015

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede.
Catalogação da Publicação na Fonte

Martins, Jamerson Fernando Confort.
Determinantes, propriedades e métodos de condensação / Jamerson Fernando Confort Martins. – Natal, RN, 2015.
vi, 92 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Determinantes (Matemática) – Dissertação. 2. Contexto histórico – Dissertação. 3. Sistemas lineares – Dissertação. I. Pereira, Marcelo Gomes. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM CDU 512.643.2

Jamerson Fernando Confort Martins

Determinantes, propriedades e métodos de condensação

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 06/02/2015

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. Ivan Mezzomo
Departamento de Matemática - UFERSA
Examinador Externo

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais Osmar Martins (in memoriam) e Maria Cristina Confort de Miranda Martins, e principalmente a minha esposa Elza Gomes Dias Confort Martins que nunca deixou de acreditar em mim, ao longo de minha formação, sempre me dando coragem e me incentivando nas horas mais difíceis. Ao meu amigo, professor e orientador Marcelo Gomes Pereira, que me guiou ao longo deste trabalho, através de contribuições que foram de grande valia.

Agradecimentos

A meus pais, Osmar Martins (in memoriam) e Maria Cristina Confort Martins, pela educação que me deram, por todos os princípios éticos e morais transmitidos a mim os quais norteam toda minha vida pessoal e profissional.

A minha esposa, Elza Gomes Dias Confort Martins, pela paciência e compreensão pelos momentos que não puderam ser vividos em virtude do tempo dedicado ao PROFMAT, mas que serão recompensados ao longo de nossas vidas.

Ao meu Orientador, Marcelo Gomes Pereira, pela paciência que teve comigo e por todas as orientações tão valiosas para este trabalho.

A todos os meus colegas de curso por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos e também por aqueles momentos de alegria compartilhada. Em especial aos colegas Antônio Roberto, Bruno, Eliel, Josieldes e Marco Lira, que fizeram parte do meu grupo de estudo e ao colega e Professor Tutor Carlos Alexande Gomes com sua didática ímpar, que desde o tempo do cursinho pré-vestibular me ensinou e me mostrou o mundo maravilhoso da matemática.

A todos os meus professores do (PROFMAT – UFRN) que me ajudarm a crescer profissionalmente durante todo o curso.

Enfim, a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com o desenvolvimento deste trabalho.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”

Albert Einstein

Resumo

Atualmente o ensino dos determinantes tem se restringido praticamente à memorização de fórmulas e propriedades, sem proporcionar uma análise crítica sobre o contexto histórico de formação e os processos de obtenção que geram tais fórmulas e propriedades. Para inserir o assunto dentro de um contexto histórico, o presente trabalho desenvolve-se a partir do estudo dos sistemas lineares. Em seguida, introduziremos a definição de determinante sob o olhar das permutações e inversões, algumas propriedades importantes do determinante e alguns métodos de condensação, como o Teorema de Laplace e a Regra de Chió. Por fim, trabalharemos com aplicações envolvendo as propriedades estudadas.

Palavras-chave: Contexto histórico, Sistemas Lineares, Determinantes.

Abstract

Currently, the teaching of determinants has been restricted basically to memorizing formulas and properties, without providing a critical analysis of the historical context of formation and the production processes that generate such formulas and properties. To insert the subject within a historical context, the present work is developed from the study of linear systems. Then we introduce the definition of the determinant from the perspective of permutations and inversions, some properties that involve determinants and condensation methods such as Laplace's Theorem and the Rule of Chio. Finally, we will work with applications involving the properties studied.

Keywords: Historical Context, Linear Systems, Determinants.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho de conclusão de curso nasceu de um problema que tive ao iniciar minha atividade docente, envolvendo a explicação da demonstração da Regra de Cramer para sistemas lineares $n \times n$, isso por que não encontrava nos livros didáticos de ensino médio existentes na literatura brasileira uma demonstração que atendesse minhas necessidades de forma plena, pois em muitas obras a mesma era suprimida, restringindo o conteúdo apenas à memorização de fórmulas ou à utilização dos sistemas 2×2, não sendo generalizada para sistemas $n \times n$. Considerando tais limitações consegui desenvolver, ao longo da minha carreira docente, uma solução prática e de fácil assimilação ao alunado que nunca tinha visto, mas que no processo de pesquisa deste trabalho, verifiquei existir em livros escolares americanos.

Assim, diante desse cenário, introduziremos o primeiro capítulo falando um pouco do contexto história dos determinantes e sua ligação com os sistemas lineares.

No segundo capítulo, observaremos os padrões que surgem nas soluções dos sistemas lineares (procedimento baseado em Colin Maclaurin [13] que contribuiu com as primeiras ideias sobre determinantes e a Regra de Cramer) e associaremos ainda tais padrões às tabelas formadas a partir dos coeficientes e os termos independentes dos sistemas envolvidos. Falaremos, ainda no segundo capítulo, sobre permutações e inversões de forma que esses assuntos possam ser introduzidos nos programas de ensino médio das escolas brasileiras associados à definição dos determinantes e às tabelas numéricas denominadas de matrizes.

No terceiro capítulo, mostraremos algumas propriedades envolvendo o estudo dos determinantes, bem como suas demonstrações e exemplos a fim de esclarecê-las.

No quarto capítulo, intitulado "Métodos de Condensação dos Determinantes", apresentaremos as demonstrações dos Métodos de Laplace, de Chió e de Hoüel, e finalizaremos com o quinto e último capítulo mostrando aplicações diretas das propriedades dos determinantes, quando realizaremos a demonstração do determinante de Vandermonde e a demonstração da Regra de Cramer para sistemas $n \times n$, este último o elo motivador desse trabalho.

Assim, o presente trabalho visa fortalecer o cálculo do determinante que é uma ferramenta fundamental da álgebra linear, assunto utilizado no meio científico.

Capítulo 2

Nota Histórica dos Determinantes

Segundo BOYER [3], o surgimento dos determinantes e das matrizes está intrinsicamente ligado ao estudo dos sistemas lineares, cujos primeiros relatos foram deixados pelos babilônios por meio de escritas cuneiformes em tabletas de argila cozida, as quais contêm problemas que levam a resolução de sistemas lineares de duas variáveis e duas equações, com a utilização da álgebra retórica [1].

EVES [7] relata um problema extraído da tábula de Strasburgo que data de 1800 a.C. aproximadamente, onde podemos ver a presença algébrica em problemas geométricos babilônicos, veja:

> "Uma área A, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 menos do que os 2/3 do lado do outro quadrado. Quais os lados do quadrado?"(EVES [7], pág. 79)

Segundo Eves [7], os chineses, durante a dinastia Han (206 a.C. e 100 a.C), chegaram muito mais perto de matrizes que os babilônios, através do mais influente texto de matemática chinês, o K'ui-Ch'ang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, de Liu Hui, em cujo conteúdo constam cálculos orientados, com teoria, associados à prática, com uma sequência de 246 problemas aplicados sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, aritmética, geometria, resolução de equações e sistemas lineares que é o foco deste trabalho.

Veja um exemplo extraído de EVES [7].

Problema 1, capítulo VIII do Nove Capítulos sobre a Arte Matemática.

[1] A álgebra retórica era escrita somente com o emprego de palavras sem a utilização de símbolos matemáticos. No entanto, as soluções dos problemas resolvidos com a utilização desse tipo de linguagem podem revelar indícios de generalização embora essas resoluções sejam baseadas na exposição de ideias para a determinação da solução desses problemas.

> "Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?"(EVES [7], pág. 268)

Traduzindo para a linguagem matemática atual, teremos o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

onde x, y e z denotam os três tipos de feixes.

No entanto, para os chineses, os coeficientes das três equações lineares envolvidas eram dispostos ordenadamente em colunas, formando uma tabela de números[2], como era feito nos quadrados mágicos, e utilizavam estas para efetuar operações elementares sobre as colunas, denominadas de "Regras de ouro", como cita MEYER [14].

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}} \tag{2.2}$$

> O método de eliminação de Gauss era conhecido pelos chineses no terceiro século a.C., mas carrega o nome de Gauss por causa de sua redescoberta em um artigo no qual ele resolveu um sistema de equações lineares para descrever a órbita de um asteróide. (FERNANDES e MIYASAKI [8])

Em TAVARES [15], o leitor pode encontrar a resolução desse e de outros problemas onde verificamos claramente a semelhança na resolução entre os métodos descritos.

Anos mais tarde, a ideia das técnicas chinesas de resolução de sistemas aparece no Japão, sendo que em 1683 o maior matemático japonês do século XVII, Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708), em seu manuscrito KaiFuku Dai no Ho (Método de Solução de Questões Secretas), formulou a base da teoria dos determinantes capaz de encontrar

[2]Os números para os chineses eram expressos através de bambus coloridos

determinantes de ordem 2×2, 3×3, 4×4 e 5×5, para resolver sistemas resultantes de problemas geométricos, como relata LUCCAS [12].

Figura 2.1:
Takakazu Seki Kowa.
Fonte: Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry [9]

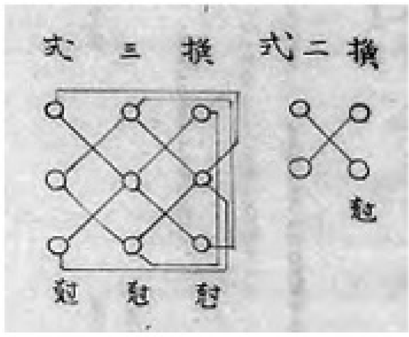


Figura 2.2:
Notação dos determinantes manuscrito Kaifuku Dai no Ho
Fonte: Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry [9]

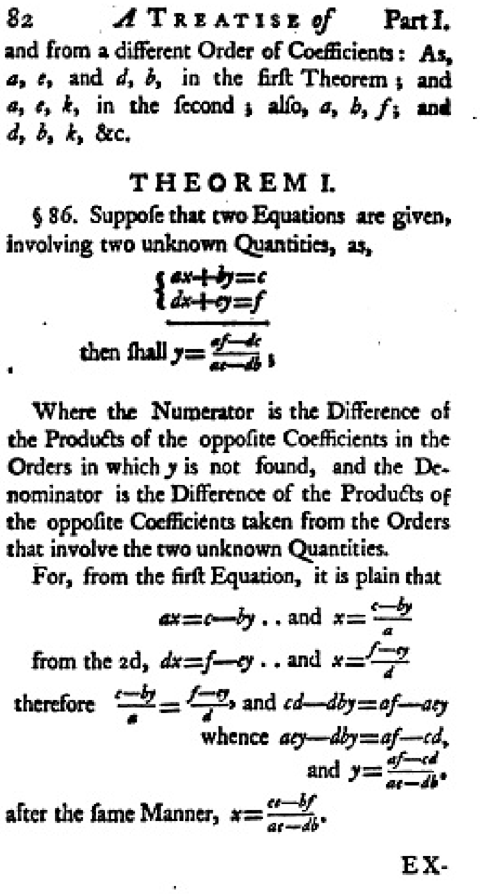
LUCCAS [12] também relata que o estudo sobre determinantes surgiu na Europa somente uma década depois, com o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646-1716)$, entretanto utilizando uma notação numérica mais versátil que a álgebra usada por Seki e muito similar à que usamos atualmente, com índices para os coeficientes das incógnitas de um sistema. Leibniz indicava, por exemplo, o elemento da primeira linha e segunda coluna de uma matriz por 1_2, enquanto hoje representamos por a_{12}. Leibniz os chamava de "falsos números" de dois dígitos, sendo que o primeiro deles informa a equação e o segundo informa a letra da qual faz parte.

LUCCAS [12] diz que Seki e Leibniz alcançaram a mesma generalização que remetem aos processos de cálculo atuais dos determinantes, porém por caminhos e com objetivos diferentes.

De acordo com BOYER [3], outro trabalho importante sobre sistemas e determinantes foi produzido em torno de 1729, por Colin Maclaurin $(1698-1746)$, ao escrever "A treatise of Algebra in Three Parts" [13], cuja publicação só ocorreu em 1748, dois anos após sua morte. Neste tratado, Colin trabalha a Regra de Cramer para sistemas lineares 2×2 e 3×3 e indica como proceder para o sistemas lineares 4×4, como podemos verificar sua prova entre as páginas 82 e 85, de MACLAURIN [13].

Veremos abaixo trechos extraídos do livro "A treatise of Algebra in Three Parts" [13], mostrando as primeiras provas para regra de Cramer para sistemas lineares 2×2

e 3×3.



82 *A* TREATISE *of* Part I.

and from a different Order of Coefficients: As, a, e, and d, b, in the firſt Theorem; and a, e, k, in the ſecond; alſo, a, b, f; and d, b, k, &c.

THEOREM I.

§ 86. Suppoſe that two Equations are given, involving two unknown Quantities, as,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

then ſhall $y=\frac{af-dc}{ae-db}$;

Where the Numerator is the Difference of the Products of the oppoſite Coefficients in the Orders in which y is not found, and the Denominator is the Difference of the Products of the oppoſite Coefficients taken from the Orders that involve the two unknown Quantities.

For, from the firſt Equation, it is plain that

$ax=c-by$ .. and $x=\frac{c-by}{a}$

from the 2d, $dx=f-ey$ .. and $x=\frac{f-ey}{d}$

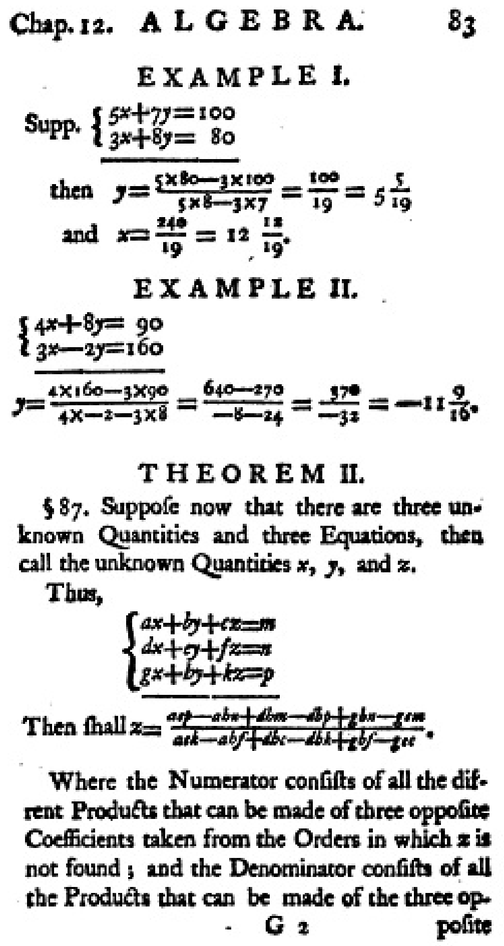
therefore $\frac{c-by}{a}=\frac{f-ey}{d}$, and $cd-dby=af-aey$

whence $aey-dby=af-cd$,

and $y=\frac{af-cd}{ae-db}$.

after the ſame Manner, $x=\frac{ce-bf}{ae-db}$.

EX-



Chap. 12. ALGEBRA. 83

EXAMPLE I.

Supp. $\begin{cases} 5x+7y=100 \\ 3x+8y=80 \end{cases}$

then $y=\frac{5\times 80-3\times 100}{5\times 8-3\times 7}=\frac{100}{19}=5\frac{5}{19}$

and $x=\frac{240}{19}=12\frac{12}{19}$.

EXAMPLE II.

$\begin{cases} 4x+8y=90 \\ 3x-2y=160 \end{cases}$

$y=\frac{4\times 160-3\times 90}{4\times -2-3\times 8}=\frac{640-270}{-8-24}=\frac{370}{-32}=-11\frac{9}{16}$.

THEOREM II.

§ 87. Suppoſe now that there are three unknown Quantities and three Equations, then call the unknown Quantities x, y, and z.

Thus,

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases}$$

Then ſhall $z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$.

Where the Numerator conſiſts of all the different Products that can be made of three oppoſite Coefficients taken from the Orders in which z is not found; and the Denominator conſiſts of all the Products that can be made of the three oppoſite

G 2

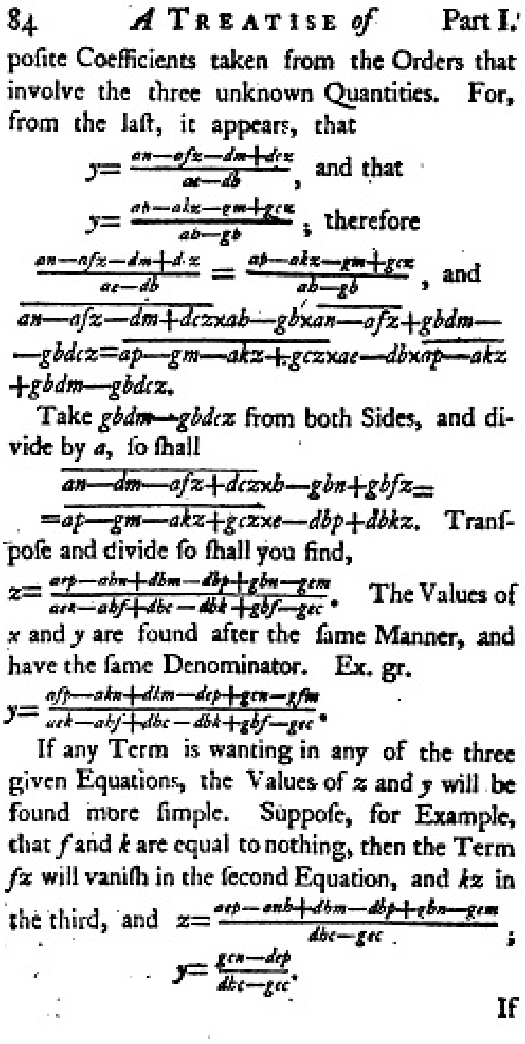
Figura 2.3:
pág. 82 do livro "A treatise of Algebra in Three Parts

Figura 2.4:
pág. 83 do livro "A treatise of Algebra in Three Parts

Mas o nome de Maclaurin não foi atribuído a regra, pois em 1750, o matemático suíço Gabriel Cramer $(1704-1752)$, publicou independentemente do matemático inglês Maclaurin, sua obra intitulada Introduction à L'analyse Des Lignes Courbes Algébriques, onde trabalha com uma regra de resolução de sistemas lineares $n \times n$ de uma forma muito similar à regra de Maclaurin, entretando com uma notação superior. Como relata BOYER [3].

O autor também comenta que a matemática inglesa na época estava em declínio, nos levando ao provável motivo do mundo matemático consagrar o nome de Cramer a tal regra.

Por sua vez, EVES [7] cita que Augustin-Louis Cauchy $(1787-1857)$ e Carl Gustav Jakob Jacobi $(1804-1851)$ foram talvez os matemáticos que mais contribuíram para



84 *A* TREATISE *of* Part I.

poſite Coefficients taken from the Orders that involve the three unknown Quantities. For, from the laſt, it appears, that

$$y = \frac{an - afz - dm + dcz}{ae - db}, \text{ and that}$$

$$y = \frac{ap - akz - gm + gcz}{ab - gb}; \text{ therefore}$$

$$\frac{an - afz - dm + dcz}{ae - db} = \frac{ap - akz - gm + gcz}{ab - gb}, \text{ and}$$

$\overline{an - afz - dm + dcz} \times \overline{ab - gb} \times \overline{an - afz} + gbdm - gbdcz = \overline{ap - gm - akz + gcz} \times \overline{ae - db} \times \overline{ap - akz} + gbdm - gbdcz.$

Take $gbdm - gbdcz$ from both Sides, and divide by a, ſo ſhall

$$\overline{an - dm - afz + dcz} \times \overline{b - gbn + gbfz} =$$
$$= \overline{ap - gm - akz + gcz} \times \overline{e - dbp + dbkz}.$$

Tranſpoſe and divide ſo ſhall you find,

$$z = \frac{aep - abn + dbm - dbp + gbn - gem}{aek - abf + dbc - dbk + gbf - gec}.$$

The Values of x and y are found after the ſame Manner, and have the ſame Denominator. Ex. gr.

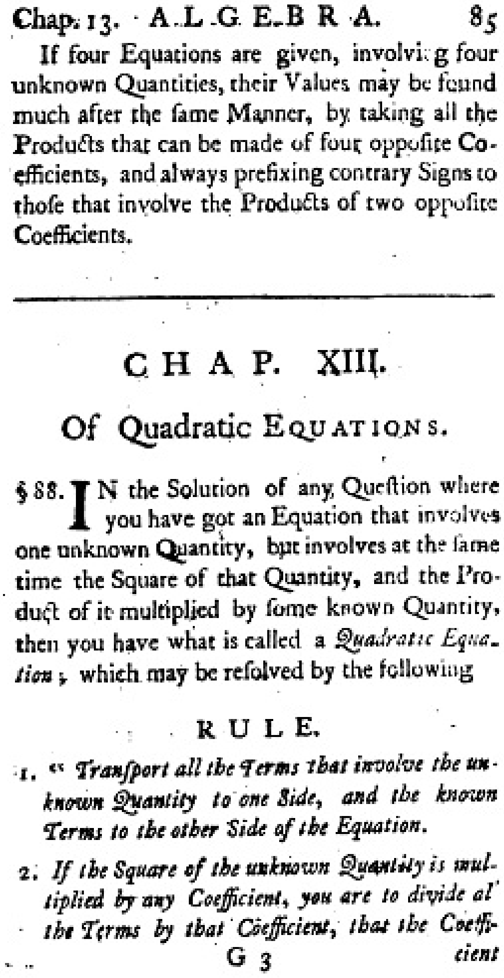
$$y = \frac{afp - akn + dkm - dcp + gcn - gfm}{aek - abf + dbc - dbk + gbf - gec}.$$

If any Term is wanting in any of the three given Equations, the Values of z and y will be found more ſimple. Suppoſe, for Example, that f and k are equal to nothing, then the Term fz will vaniſh in the ſecond Equation, and kz in the third, and $z = \dfrac{aep - anb + dbm - dbp + gbn - gem}{dbc - gec}$;

$$y = \frac{gcn - dcp}{dbc - gec}.$$

If

Figura 2.5:
pág. 84 do livro "A treatise of Algebra in Three Parts".



Chap. 13. ALGEBRA. 85

If four Equations are given, involving four unknown Quantities, their Values may be found much after the ſame Manner, by taking all the Products that can be made of four oppoſite Coefficients, and always prefixing contrary Signs to thoſe that involve the Products of two oppoſite Coefficients.

CHAP. XIII.

Of Quadratic EQUATIONS.

§ 88. In the Solution of any Queſtion where you have got an Equation that involves one unknown Quantity, but involves at the ſame time the Square of that Quantity, and the Product of it multiplied by ſome known Quantity, then you have what is called a *Quadratic Equation*, which may be reſolved by the following

RULE.

1. "*Tranſport all the Terms that involve the unknown Quantity to one Side, and the known Terms to the other Side of the Equation.*

2. *If the Square of the unknown Quantity is multiplied by any Coefficient, you are to divide all the Terms by that Coefficient, that the Coefficient*

G 3

Figura 2.6:
pág. 85 do livro "A treatise of Algebra in Three Parts".

a teoria dos determinantes. Cauchy, por exemplo, foi responsável por dar o sentindo atual do termo determinante que foi criado por Gauss; outra contribuição foi o artigo de 84 páginas de 1812, que contém a primeira demonstração do Teorema de Binet, no qual garante que se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $|AB| = |A| \cdot |B|$. Também destacamos o fato de Cauchy, em 1840, introduzir a palavra "característica", na teoria das matrizes, chamando a equação $|A - \lambda I| = 0$ de equação característica da matriz A. Já o matemático alemão Jacobi foi responsável por consolidar a teoria dos determinantes e por desenvolver a forma simples como essa teoria se apresenta até hoje.

Capítulo 3

Sistemas Lineares e os determinantes

É importante salientar que o surgimento dos determinantes está intrinsecamente ligado ao desenvolvimento e ao processo de observação das soluções de sistemas lineares, pois através desse estudo foi possível criar as regras e métodos inerentes ao cálculo dos determinantes. Nesse capítulo desenvolveremos tais observações a fim de possibilitar ao leitor uma maior clareza sobre o surgimento dos determinantes.

3.1 Equação Linear

É toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{3.1}$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas, que representam os termos desconhecidos; os números reais que multiplicam as incógnitas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, são chamados de coeficientes e b é o termo independente. Caso b assuma valor igual a zero a equação linear é denominada de homogênea. Por sua vez, diremos que a n-upla[1] $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução da equação (3.1) se ao substituirmos, x_1 por $\propto_1$, x_2 por $\propto_2$,..., x_n por $\propto_n$ a equação seja satisfeita.

[1] n-upla: sequência ordenada de n números.

$$a_1 \propto_1 + a_2 \propto_2 + \ldots + a_n \propto_n = b \tag{3.2}$$

Veja um exemplo de quando um conjunto é solução de uma equação linear.

Para verificar se o terno ordenado $(0, 2, 1)$ é solução da equação linear

$$-2x + y + 5z = 7, \tag{3.3}$$

devemos substituir os valores 0, 2 e 1 nas suas respectivas incógnitas.

$$\begin{gathered} -2.0 + 2 + 5.1 = \\ 0 + 2 + 5 = \\ 7. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Como o resultado obtido foi igual a 7, podemos concluir que o terno ordenado $(0, 2, 1)$ é uma solução da equação (3.3).

3.2 Sistema de m equações lineares e n incógnitas.

O sistema de equações lineares é o conjunto de duas ou mais equações lineares.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Em que b_i, $1 \leq i \leq m$, e a_{ij}, $1 \leq j \leq n$, são escalares reais.

Por sua vez, diremos que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é uma solução para o sistema linear (3.5), se satisfizer simultaneamente a todas as equações envolvidas, ou seja:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\propto_1 & + & a_{12}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\propto_n & = & b_1 \\ a_{21}\propto_1 & + & a_{22}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\propto_n & = & b_2 \\ a_{31}\propto_1 & + & a_{32}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{3n}\propto_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}\propto_1 & + & a_{i2}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{in}\propto_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\propto_1 & + & a_{m2}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\propto_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Operações Elementares

As operações elementares representam um grupo de operações quando aplicadas sobre as equações que compõem o sistema linear arbitrário (3.5), transformam-no em outro sistema linear S', denominado de sistema linear equivalente, cuja solução é igual a do sistema original (3.5).

Por exemplo, dados os sistemas:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 8 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & -1 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Verificamos que o par ordenado $(x, y) = (3, 2)$ satisfaz a ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são sistemas lineares equivalentes, ou seja, $S_1 \sim S_2$.

São operações elementares:

(I) Ao permutar duas ou mais equações do sistema linear (3.5), obteremos um sistema linear S' equivalente ao inicial.

Demonstração:

Note que, ao admitir que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução do sistema linear arbitrário (3.5), ela também será solução para qualquer sistema linear S' obtido pela permutação entre duas linhas de (3.5), pois estamos apenas descrevendo o mesmo problema, no entanto em uma ordem diferente.

Portanto a solução dada será a mesma.

(II) Quando multiplicarmos uma, ou mais, equação do sistema linear (3.5) por um escalar não nulo, o novo sistema linear S' será equivalente ao inicial.

Demonstração:

Ao multiplicar a i-ésima equação de (3.5) pelo escalar $k \neq 0$, obteremos o sistema S' cuja única diferença entre (3.5) e S' é a i-ésima equação, ou seja:

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i}_{\text{i-ésima equação do sistema (3.5)}} \ . \tag{3.8}$$

$$\underbrace{k \cdot a_{i1}x_1 + k \cdot a_{i2}x_2 + \ldots + k \cdot a_{in}x_n = k \cdot b_i}_{\text{i-ésima equação do sistema } S\text{'}} . \tag{3.9}$$

Então ao supor que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é uma solução de (3.5), automaticamente ela irá satisfazer todas as equações de S', exceto, possivelmente a i-ésima equação. Mostraremos que a mesma n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ também irá satisfazer a i-ésima equação.

De fato, ao substituir $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ no primeiro membro de (3.9), teremos:

$$k \cdot a_{i1} \cdot \propto_1 + k \cdot a_{i2} \cdot \propto_2 + \ldots + k \cdot a_{in} \cdot \propto_n = k \cdot (a_{i1} \cdot \propto_1 + a_{i2} \cdot \propto_2 + \ldots + a_{in} \cdot \propto_n) \tag{3.10}$$

Pela hipótese, sabemos que, $a_{i1} \cdot \propto_1 + a_{i2} \cdot \propto_2 + \ldots + a_{in} \cdot \propto_n = b_i$, assim:

$$k \cdot a_{i1} \cdot \propto_1 + k \cdot a_{i2} \cdot \propto_2 + ... + k \cdot a_{in} \cdot \propto_n = k \cdot b_i,$$

ou seja, $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ satisfaz (3.9) e portanto é solução de S'.

De forma recíproca, mostraremos que se $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução de S', então também irá satisfazer ao sistema (3.5).

Então, ao substituirmos $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ no primeiro membro de (3.8), teremos:

$$a_{i1} \cdot \propto_1 + a_{i2} \cdot \propto_2 + \ldots + a_{in} \cdot \propto_n = \left(\frac{k}{k}\right) \cdot a_{i1} \cdot \propto_1 + \left(\frac{k}{k}\right) \cdot a_{i2} \cdot \propto_2 + \ldots + \left(\frac{k}{k}\right) \cdot a_{in} \cdot \propto_n \tag{3.11}$$

Daí, ao colocarmos $\frac{1}{k}$ em evidência no segundo membro da equação (3.11), ficaremos com:

$$a_{i1}\cdot \propto_1 + a_{i2}\cdot \propto_2 + \ldots + a_{in}\cdot \propto_n = \frac{1}{k}\left(k \cdot a_{i1}\cdot \propto_1 + k \cdot a_{i2}\cdot \propto_2 + \ldots + k \cdot a_{in}\cdot \propto_n\right).$$

Mas, por hipótese,

$$k \cdot a_{i1}\cdot \propto_1 + k \cdot a_{i2}\cdot \propto_2 + ... + k \cdot a_{in}\cdot \propto_n = k \cdot b_i.$$

Assim:

$$\begin{aligned} a_{i1}\cdot \propto_1 + a_{i2}\cdot \propto_2 + \ldots + a_{in}\cdot \propto_n &= \tfrac{1}{k} \cdot k \cdot b_i \\ a_{i1}\cdot \propto_1 + a_{i2}\cdot \propto_2 + \ldots + a_{in}\cdot \propto_n &= b_i. \end{aligned}$$

O que prova que $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ satisfaz (3.8) e assim é solução de (3.5).

□

(III) Quando substituírmos uma equação de um sistema linear (3.5) pela soma membro a membro dela com um múltiplo de outra equação, obteremos um novo sistema linear S' equivalente ao inicial.

Demonstração:

Para demonstrar essa operação elementar, iremos considerar o sistema arbitrário (3.5).

Ao multiplicar a primeira equação de (3.5) por c_1, a segunda por c_2, ..., a m-ésima equação por c_m, de modo que ao substituir a i-ésima equação de (3.5) pela soma desses produtos (chamada de combinação linear das equações de (3.5)), obteremos um sistema linear S', cuja única diferença entre (3.5) e S' é a i-ésima equação.

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i}_{\text{i-ésima equação do sistema (3.5)}}. \tag{3.12}$$

$$\underbrace{(c_1a_{11}+\ldots+c_ma_{m1})x_1+\ldots+(c_1a_{1n}+\ldots+c_{mn}a_{mn})x_n=c_1b_1+\ldots+c_mb_m}_{\text{i-ésima equação do sistema } S\text{' (combinação linear das equações de (3.5))}} \quad (3.13)$$

Assim, ao supor que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é uma solução de (3.5), consequentemente ela irá satisfazer a todas as equações de S', exceto possivelmente a i-ésima equação, pois são distintas, entretanto mostratremos que a mesma n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ também irá satisfazê-la, pois, por hipótese, sabemos que (3.6).

Então, ao substituirmos a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ no primeiro membro da equação (3.13), teremos:

$$\begin{gathered}(c_1a_{11}+\ldots+c_ma_{m1})\propto_1+\ldots+(c_1a_{1n}+\ldots+c_ma_{mn})\propto_n=\\ c_1a_{11}\propto_1+\ldots+c_1a_{1n}\propto_n+\ldots+c_ma_{m1}\propto_1+\ldots+c_ma_{mn}\propto_n=\\ c_1(a_{11}\propto_1+\ldots+a_{1n}\propto_n)+\ldots+c_m(a_{m1}\propto_1+\ldots+a_{mn}\propto_n)=\\ c_1b_1+\ldots+c_mb_m.\end{gathered}$$

O que prova que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução da equação (3.13).

Logo, $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução de S'.

De forma recíproca, mostraremos que, se a n-upla, $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução de S', então ela irá satisfazer ao sistema linear (3.5), pois, por hipótese, sabemos que:

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\propto_1 & + & a_{12}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\propto_n & = & b_1\\ a_{21}\propto_1 & + & a_{22}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\propto_n & = & b_2\\ a_{31}\propto_1 & + & a_{32}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{3n}\propto_n & = & b_3\\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ d_1\propto_1 & + & d_2\propto_2 & + & \ldots & + & d_n\propto_n & = & c_1b_1+\ldots+c_mb_m\\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\propto_1 & + & a_{m2}\propto_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\propto_n & = & b_m \end{array}\right. \quad (3.14)$$

onde:

$$\begin{array}{ccl} d_1 & = & (c_1a_{11}+\ldots+c_ia_{i1}+\ldots+c_ma_{m1});\\ d_2 & = & (c_1a_{12}+\ldots+c_ia_{i2}+\ldots+c_ma_{m2});\\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots\\ d_n & = & (c_1a_{1n}+\ldots+c_ia_{in}+\ldots+c_ma_{mn}). \end{array}$$

Pela operação elementar II, multiplicaremos a equação ${L_k}^2$ de S' por c_k, com $1 \leq k \leq m$ e $k \neq i$, assim obteremos o sistema linear (E) equivalente a S'.

$$(E)\left\{\begin{array}{ccccccccc} c_1a_{11}\propto_1 & + & c_1a_{12}\propto_2 & + & \ldots & + & c_1a_{1n}\propto_n & = & c_1b_1 \\ c_2a_{21}\propto_1 & + & c_2a_{22}\propto_2 & + & \ldots & + & c_2a_{2n}\propto_n & = & c_2b_2 \\ c_3a_{31}\propto_1 & + & c_3a_{32}\propto_2 & + & \ldots & + & c_3a_{3n}\propto_n & = & c_3b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ d_1\propto_1 & + & d_2\propto_2 & + & \ldots & + & d_n\propto_n & = & c_1b_1+\ldots+c_mb_m \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ c_ma_{m1}\propto_1 & + & c_ma_{m2}\propto_2 & + & \ldots & + & c_ma_{mn}\propto_n & = & c_mb_m \end{array}\right. \tag{3.15}$$

Então, ao subtrairmos da i-ésima equação de (3.15) as demais equações de (3.15), teremos:

$$c_ia_{i1}\propto_1 + c_ia_{i2}\propto_2 + \ldots + c_ia_{in}\propto_n = c_ib_i. \tag{3.16}$$

Dividindo ambos os membros de (3.16) por c_i, obteremos:

$$a_{i1}\propto_1 + a_{i2}\propto_2 + \ldots + a_{in}\propto_n = b_i.$$

O que prova que a n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução da equação (3.12).
Logo, concluímos que a mesma n-upla $(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ é solução de (3.5).

$\square$

Definição:

Um sistema linear S, $m \times n$, é chamado de sistema escalonado se:
a) as incógnitas das equações lineares estão escritas numa mesma ordem;
b) em cada equação há pelo menos um coeficiente não nulo. Caso todos os coeficientes sejam nulos, o termo independente deverá ser não nulo;
c) a partir da primeira equação do sistema, de cima para baixo, o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo de cada equação aumenta

[2]Deixamos claro ao leitor que, a partir de agora, utilizaremos a notação L_k para representar a k-ésima equação do sistema.

de uma equação para a seguinte.

Observação:

1) Se, ao escalonarmos um sistema linear, ocorrer uma equação do tipo

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

esta deverá ser suprimida do sistema.

2) Se, ao escalonarmos um sistema linear, ocorrer uma equação do tipo

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

com $b \neq 0$, o sistema será, evidentemente, impossível.

Para deixar mais clara a utilização das operações elementares na resolução de sistemas lineares, analisaremos os exemplos a seguir:

Exemplo 1) Pelo fato de estar com o peso acima do recomendado, uma pessoa está fazendo o controle das calorias dos alimentos que ingere. Sabe-se que 2 porções de brócolis, 2 colheres de sopa de arroz e 2 almôndegas têm 252 calorias. Já uma porção de brócolis, 2 colheres de sopa de arroz e 3 almôndegas têm 290 calorias. Por outro lado, uma porção de brócolis, 3 colheres de sopa de arroz e 2 almôndegas têm 274 calorias. Se ontem seu almoço consistiu em uma colher de sopa de arroz, duas almôndegas e uma porção de brócolis, quantas calorias teve essa refeição?

Resolução:

Ao realizar a modelagem desse problema designaremos o número de calorias de uma porção de brócolis, uma colher de arroz e uma almôndega, como sendo respectivamente as incógnitas x, y e z, de tal forma que, ao realizarmos a leitura do referido problema, podemos extrair as seguintes equações:
a) 2 porções de brócolis, 2 colheres de sopa de arroz e 2 almôndegas têm 252 calorias:

$$2x + 2y + 2z = 252 \tag{3.17}$$

b) uma porção de brócolis, 2 colheres de sopa de arroz e 3 almôndegas têm 290 calorias:

$$x + 2y + 3z = 290 \tag{3.18}$$

c) uma porção de brócolis, 3 colheres de sopa de arroz e 2 almôndegas têm 274 calorias:

$$x + 3y + 2z = 274 \tag{3.19}$$

Com isso, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 252 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 274 \end{cases} \tag{3.20}$$

Utilizaremos as operações elementares e a notação $L_i \leftarrow L_i + k \cdot L_r$ para substituir a equação L_i pela combinação linear $L_i + k \cdot L_r$, em que $i \neq r$, $k \in \mathbb{R}$, a fim de resolver (3.20), para isso desenvolveremos os seguintes passos:

1º Passo: Vamos permutar (trocar) as equações L_1 e L_2 de (3.20), para que o primeiro coeficiente de x seja 1:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 252 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 274 \end{cases} \tag{3.21}$$

Observação:

Esse passo é importante, pois facilitará o processo de eliminação dos coeficientes.

2º Passo: Agora anularemos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação de (3.21), aplicando a operação elementar $L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$.

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ & & 2y & + & 4z & = & 328 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 274 \end{cases} \tag{3.22}$$

3º Passo: Agora em (3.22) faremos $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$, obtendo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ & & 2y & + & 4z & = & 328 \\ & - & y & + & z & = & 16 \end{array}\right. \tag{3.23}$$

4º Passo: Multiplicaremos a segunda equação de (3.23) por $\frac{1}{2}$ (operação elementar II), ficando com

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ & & y & + & 2z & = & 164 \\ & - & y & + & z & = & 16 \end{array}\right. \tag{3.24}$$

5º Passo: Efetuando a operação elementar $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ anularemos o coeficiente da 2ª incognita na 3ª equaçao de (3.24):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 290 \\ & & y & + & 2z & = & 164 \\ & & & & 3z & = & 180 \end{array}\right. \tag{3.25}$$

Como o sistema linear (3.25) obtido está escalonado, podemos determinar imediatamente o número de calorias de uma almôndega. Para isso, resolveremos a terceira equação obtida. Veja:

$$\begin{array}{rcl} 3z & = & 180 \\ z & = & 60 \quad \text{calorias.} \end{array}$$

Tendo o valor calórico da almôndega ($z = 60$), substituindo na equação $y+2z = 164$, descobriremos o valor de calorias da colher de arroz y.

$$\begin{array}{rcl} y + 2z & = & 164 \\ y + 2 \cdot 60 & = & 164 \\ y + 120 & = & 164 \\ y & = & 164 - 120 \\ z & = & 44 \quad \text{calorias.} \end{array}$$

Sabendo o valor calórico de uma colher de arroz ($y = 44$) e o valor calórico de uma almôndega ($z = 60$), então ao substituir na equação $x + 2y + 3z = 290$, descobriremos o valor calórico de uma porção de brócolis x, ou seja,

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 44 + 3 \cdot 60 &= 290 \\ x + 88 + 180 &= 290 \\ x + 268 &= 290 \\ x &= 290 - 268 \\ x &= 22 \quad \text{calorias.} \end{aligned}$$

Sabendo que:

• Caloria de uma porção de brócolis : $x = 22$ calorias;

• Caloria de uma colher de arroz : $y = 44$ calorias;

• Caloria de uma almôndega : $z = 60$ calorias.

Então, se o almoço de ontem consistiu em uma colher de sopa de arroz, duas almôndegas e uma porção de brócolis, logo essa pessoa ingeriu:

$$44 + 2.60 + 22 = 186 \quad \text{calorias.}$$

É importante ressaltar que o processo sistemático sempre leva a soluções ou ausência delas, como podemos verificar nos exemplos abaixo:

Exemplo 2) Mostre que o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & - & 14z & & & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.26}$$

admite infinitas soluções e esboce seu conjunto solução.

Resolução:

Note inicialmente que a variável y não aparece na terceira equação do sistema (3.26), logo, concluímos que nessa equação o coeficiente de y é zero. Assim, a sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 0y & - & 14z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.27}$$

Daí, para mostrar que o sistema (3.26) não admite soluções reais, aplicaremos as operações elementares II e III a fim de escalonar o sistema, para isso desenvolveremos os seguintes passos:

1º Passo: Substituiremos a L_2 de (3.27) por $L_2 - 2L_1$, obtento

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 9z & = & 0 \\ x & + & 0y & - & 14z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.28}$$

2º Passo: Agora efetuaremos a operação elementar $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ em (3.28), encontrando

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 9z & = & 0 \\ & - & 2y & - & 18z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.29}$$

3º Passo: Multiplicaremos a segunda equação do sistema (3.29) por -1 (operação elementar II), ficando com

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 9z & = & 0 \\ & - & 2y & - & 18z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.30}$$

4º Passo: Efetuando a operação elementar $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ transformamos (3.30) em:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 9z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Observação:

Quando, no processo de escalonamento de um sistema linear, obtivermos uma equação que tenha todos os coeficientes e o termo independente nulos, está deverá ser eliminada do sistema, pois toda n-upla de números reais será solução.

Assim, ao eliminar a última equação de (3.31), chegaremos ao sistema escalonado equivalente ao sistema original (3.26):

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ \quad\quad y + 9z = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Como o sistema escalonado (3.32) tem o número de equações menor que o número de incógnitas, notamos que não existe somente uma solução para o sistema, pois podemos escolher algumas incógnitas para serem denotadas em função de quaisquer valores que atribuímos às demais incógnitas.

Veja que y pode ser determinado em função dos valores que escolhermos para z, pois podemos escrever a segunda equação de (3.32) como sendo, $y = -9z$. Consequentemente também obteremos o valor de x, pois da primeira equação de (3.32) podemos escrever,

$$\begin{aligned} x &= -2y - 4z \\ x &= -2(-9z) - 4z \\ x &= 18z - 4z \\ x &= 14z \end{aligned}$$

Agora observe algumas soluções particulares do sistema.

$$z = 0, y = 0, x = 0;$$

$$z = 1, y = -9, x = 14;$$

$$z = 2, y = -18, x = 28.$$

Dessa forma, todas as soluções são achadas em função de cada valor atribuído a z.
Logo, o conjunto solução é: $S = \{(14z, -9z, z); z \in \mathbb{R}\}$.
Agora exibiremos um sistema que não admite soluções reais.

Exemplo 3) Mostre que o sistema abaixo não admite solução.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.33}$$

Resolução:

Para mostrar que o sistema (3.33) não admite soluções reais, aplicaremos as operações elementares II e III a fim de anular todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação de (3.33). Para isso, desenvolveremos os seguintes passos:

1º Passo: Substituiremos a L_2 de (3.33) por $L_2 - L_1$, obtendo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.34}$$

2º Passo: Agora efetuaremos a operação elementar $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ em (3.34), encontrando

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 2y & - & 2z & = & 2 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right. \tag{3.35}$$

3º Passo: Agora multiplicaremos a segunda equação do sistema (3.35) obtido por $\frac{-1}{2}$ (operação elementar II), ficando com

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right. \tag{3.36}$$

4º Passo: Efetuando a operação elementar $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ anularemos o coeficiente da 2ª incognita na 3ª equaçao de (3.36):

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 0z & = & -4 \end{array}\right. \tag{3.37}$$

Como a equação $0 \cdot z = -4$ não tem solução, segue que o sistema (3.37) não possui solução, portanto, o sistema original (3.33) não admite solução.

3.3 Classificação dos sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados de acordo com o número de soluções, da seguinte forma:

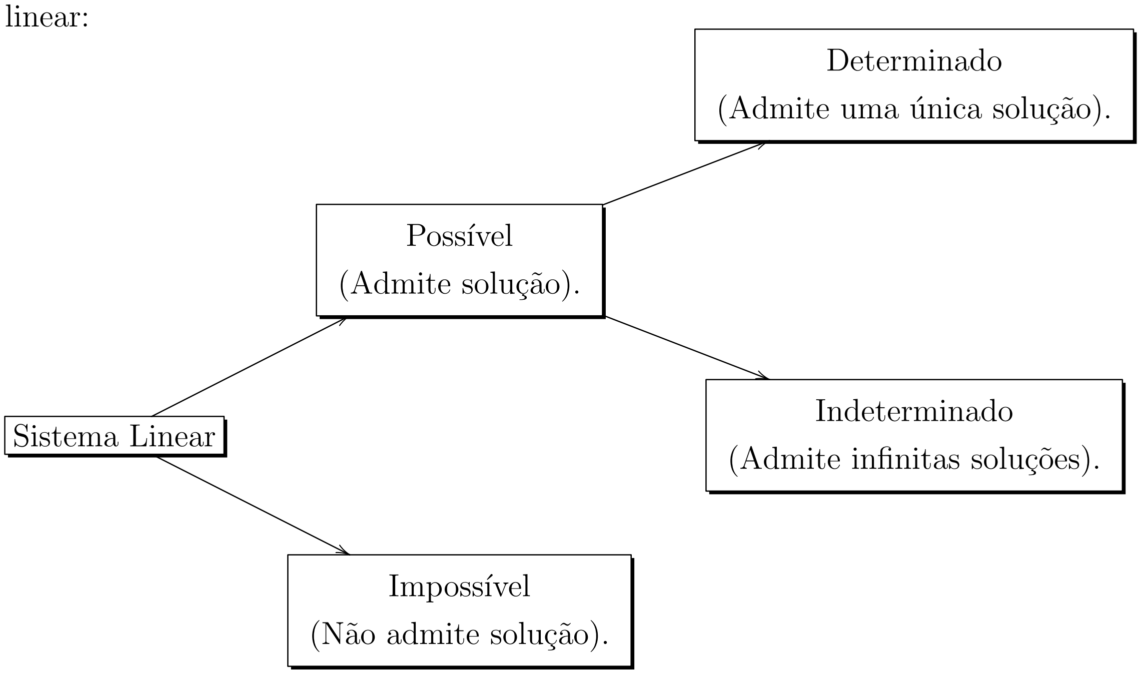
• **Sistema Possível:** Quando o sistema admite pelo menos uma solução. Temos dois casos.

1°) **Sistema Possível e Determinado (S.P.D):** Quando existe uma única solução.

2°) **Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I):** Quando existe infinitas soluções.

• **Sistema Impossível (S.I):** Quando o sistema não possui solução.

O esquema a seguir nos possibilita visualizar facilmente a classificação de um sistema linear:



3.4 Análise das soluções dos sistemas lineares

Nesta seção seguiremos os passos de Colin Maclaurin [13] na análise das soluções de sistemas 2×2 e 3×3, a fim de montar um padrão entre as soluções, com o objetivo de visualizar o surgimento dos determinantes.

Sistema lineares de duas equações e duas incógnitas

Considere um sistema linear de duas equações e duas incógnitas dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2. \end{array}\right. \tag{3.38}$$

Para obter a solução do sistema (3.38), aplicaremos as operações elementares.

Se, para algum $i = 1, 2$, tivermos $a_{i1} \neq 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_{11} \neq 0$, no sistema (3.38).

Aplicando a operação elementar $L_2 \leftarrow a_{11}L_2$, obteremos:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2. \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Agora efetuaremos a operação $L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1$ em (3.39), assim obteremos o sistema linear equivalente, abaixo:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{array}\right. \tag{3.40}$$

Isolando x_2 na segunda equação de (3.40), teremos:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ x_2 & = & \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \end{array}\right. \tag{3.41}$$

Note que na passagem de (3.40) para (3.41), a segunda equação do sistema (3.40) foi dividida por $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Assim, para determinar o valor de x_1, basta substituir o valor obtido de x_2 na primeira equação do sistema (3.38). Veja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} &= b_1. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Isolando $a_{11}x_1$ em (3.42), teremos:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 - a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ &= \frac{b_1 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - a_{12} \cdot (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ &= \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{21}a_{12} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Simplificando a expressão (3.43), obteremos:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= \frac{b_1a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ &= \frac{a_{11}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Dividindo ambos os membros da equação (3.44) por a_{11}, obteremos o valor de x_1.

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{3.45}$$

Sistema de três equações e três incógnitas

Considere o sistema de três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{3.46}$$

Como foi feito anteriormente, resolveremos o sistema (3.46) com auxílio das operações elementares, a fim de encontrarmos um padrão entre as soluções dos sistemas lineares quadrados.

Se $a_{11} \neq 0$ em (3.46), então aplicaremos as seguintes operações elementares

$L_2 \leftarrow a_{11}L_2$ e $L_3 \leftarrow a_{11}L_3$ em (3.46), obtendo

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & + & a_{11}a_{23}x_3 & = & a_{11}b_2 \\ a_{11}a_{31}x_1 & + & a_{11}a_{32}x_2 & + & a_{11}a_{33}x_3 & = & a_{11}b_3 \end{array}\right. \tag{3.47}$$

Efetuando as operações $L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1$ transformamos (3.47) em:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 & + & (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_3 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ & & (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 & + & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 & = & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{array}\right. \tag{3.48}$$

Agora trabalharemos apenas com as duas últimas equações do sistema (3.48), fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}L_2$, obtendo assim:

$$\begin{gathered}\left[(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot \frac{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}\right] \cdot x_3 \;\; = \\ (a_{11}b_3 - a_{31}b_1) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \cdot \frac{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}\end{gathered} \tag{3.49}$$

Reduzindo a expressão (3.49) a um denominador comum, obteremos:

$$\begin{gathered}\left[\frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}\right] \cdot x_3 = \\ \left[\frac{(a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}\right]\end{gathered} \tag{3.50}$$

Desenvolvendo a equação (3.50),

$$\begin{gathered}[(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})] \cdot x_3 = \\ [(a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})]\end{gathered} \tag{3.51}$$

Isolando x_3 em (3.51):

$$x_3 = \frac{(a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}{(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})} \tag{3.52}$$

Desenvolvendo todos os produtos no segundo membro de (3.52).

$$x_3 = \frac{\begin{array}{c}(a_{11}b_3a_{11}a_{22}) - (a_{11}b_3a_{21}a_{12}) - (a_{31}b_1a_{11}a_{22}) + (a_{31}b_1a_{21}a_{12}) \\ -(a_{11}b_2a_{11}a_{32}) + (a_{11}b_2a_{31}a_{12}) + (a_{21}b_1a_{11}a_{32}) - (a_{21}b_1a_{31}a_{12})\end{array}}{\begin{array}{c}(a_{11}a_{33}a_{11}a_{22}) - (a_{11}a_{33}a_{21}a_{12}) - (a_{13}a_{31}a_{11}a_{22}) + (a_{13}a_{31}a_{21}a_{12}) \\ -(a_{11}a_{23}a_{11}a_{32}) + (a_{11}a_{23}a_{31}a_{12}) + (a_{21}a_{13}a_{11}a_{32}) - (a_{21}a_{13}a_{31}a_{12})\end{array}}. \quad (3.53)$$

Reduzindo os termos semelhantes e colocando o fator comum a_{11} em evidência em (3.53), obtemos:

$$x_3 = \frac{a_{11} \cdot [(b_3a_{11}a_{22}) - (b_3a_{21}a_{12}) - (a_{31}b_1a_{22}) - (b_2a_{11}a_{32}) + (b_2a_{31}a_{12}) + (a_{21}b_1a_{32})]}{a_{11} \cdot [(a_{11}a_{33}a_{22}) - (a_{33}a_{21}a_{12}) - (a_{13}a_{31}a_{22}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{23}a_{31}a_{12}) + (a_{21}a_{13}a_{32})]}. \quad (3.54)$$

Simplificando a equação (3.54) e reordenando os elementos, ficamos com:

$$x_3 = \frac{(a_{11}a_{22}b_3) + (a_{12}b_2a_{31}) + (b_1a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}b_3) - (b_1a_{22}a_{31}) - (a_{11}b_2a_{32})}{(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}a_{32})}.$$

Assim, o sistema (3.48) pode ser representado pelo sistema linear equivalente abaixo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 & + & (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_3 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ & & & & x_3 & = & \dfrac{m}{n} \end{array}\right. \quad (3.55)$$

Sendo:

$$\frac{m}{n} = \frac{(a_{11}a_{22}b_3) + (a_{12}b_2a_{31}) + (b_1a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}b_3) - (b_1a_{22}a_{31}) - (a_{11}b_2a_{32})}{(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}a_{32})}.$$

Daí, ao substituir o valor encontrado de x_3 em (3.55), podemos obter x_1 e x_2, cujos valores são:

$$x_1 = \frac{(b_1a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}b_3) + (a_{13}b_2a_{32}) - (a_{13}a_{22}b_3) - (b_1a_{23}a_{32}) - (a_{12}b_2a_{33})}{(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}a_{32})}$$

e

$$x_2 = \frac{(a_{11}b_2a_{33}) + (b_1a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}b_3) - (a_{13}b_2a_{31}) - (b_1a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}b_3)}{(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}a_{32})}.$$

Observe que as soluções obtidas para cada incógnita dependem exclusivamente dos coeficientes e dos termos independentes de cada sistema e que ainda é possível associarmos cada sistema a tabelas, como veremos abaixo:

No sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

Observamos que x_1 e x_2 em (3.45) e (3.41) respectivamente possuem o mesmo denominador comum $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$, que podemos associar à tabela formada pelos coeficientes cuja ordem de disposição é a mesma que encontramos no sistema. Veja:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftarrow (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$$

Por sua vez, os numeradores de x_1 e x_2 em 3.45 e 3.49 respectivamente podem ser associados, respectivamente à tabela D_{x_1} (obtida através da tabela D ao substituir a coluna ordenada dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes correspondentes) e à tabela D_{x_2} (obtida através da tabela D ao substituir a coluna ordenada dos coeficientes de x_2 pelos termos independentes correspondentes).

$$D_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \longleftarrow (b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2) \quad \text{e} \quad D_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{pmatrix} \longleftarrow (a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_1)$$

Assim, os números $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$ e $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$ podem ser reescritos como sendo:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$$

É importante observar que as soluções obtidas só terão validade se o sistema proposto tiver o número de equações igual ao número de incógnitas e o denominador obtido for diferente de zero, pois assim conseguiremos obter o quociente de cada incógnita.

No sistema 3×3

Observamos que os números x_1, x_2 e x_3 possuem o mesmo denominador comum $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$ o qual pode ser associado à tabela D formada pelos coeficientes cuja ordem de disposição é a mesma que encontramos no sistema. Veja:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longleftarrow a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por sua vez, os numeradores de x_1, x_2 e x_3 podem ser associados respectivamente às tabelas D_{x_1}, D_{x_2} e D_{x_3}, obtidas através da tabela D ao substituir, em cada caso, respectivamente, a coluna ordenada dos coeficientes de x_1, x_2 e x_3 pelos termos independentes correspondentes. Com isso, obteremos:

$$D_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longleftarrow (b_1a_{22}a_{33})+(a_{12}a_{23}b_3)+(a_{13}b_2a_{32})-(a_{13}a_{22}b_3)-(b_1a_{23}a_{32})-(a_{12}b_2a_{33})$$

$$D_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \longleftarrow (a_{11}b_2a_{33})+(b_1a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}b_3)-(a_{13}b_2a_{31})-(b_1a_{21}a_{33})-(a_{11}a_{23}b_3)$$

$$D_{x_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \longleftarrow (a_{11}a_{22}b_3)+(a_{12}b_2a_{31})+(b_1a_{21}a_{32})-(a_{12}a_{21}b_3)-(b_1a_{22}a_{31})-(a_{11}b_2a_{32})$$

Ao analisar as soluções encontradas, constatamos que cada termo que compõe os fatores em cada parcela do numerador e denominador são formados fixando-se os índices das linhas e permutando-se os índices das colunas da tabela.

Dessa forma, veremos o conceito de permutação e inversão, pois o mesmo proporcionará uma maior clareza no processo de investigação, por meio do qual associamos cada tabela a um número, chamado de determinante.

3.5 Permutações e inversões

Uma permutação do conjunto de naturais $\{1, 2, ..., n\}$ é um rearranjo destes naturais em alguma ordem determinada sem omissões ou repetições de termos.

Assim, observe que, para o conjunto de naturais $\{1; 2\}$, podemos montar as 2 permutações $(2! = 2 \cdot 1 = 2)$ seguintes:

(1, 2) e (2, 1).

Por sua vez, ao analisar o conjunto de números naturais $\{1, 2, 3\}$ verificamos a existência de seis permutações $(3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6)$. Veja as permutações possíveis:

(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) e (1, 3, 2)

Em suma, dado um conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, formado por n inteiros distintos, então a quantidade de permutações permitidas será igual a:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou seja, ao fatorial de n.

Observação:

Diremos que ocorre uma inversão em uma permutação sempre que um número natural maior preceder um menor. Veja, por exemplo, que na permutação (2, 1, 3) temos a presença de uma inversão, pois, o número 2 precede o número 1; já na permutação (3, 2, 1) temos três inversões, pois, o número 2 precede o número 1 e o número 3 precede os números 1 e 2.

3.6 Processos práticos para se determinar o número de inversões

Em AITKEN [1] e EVES [6], verificamos um diagrama que nos permite determinar de modo prático o número de inversões de uma permutação, cuja montagem é realizada através das seguintes etapas:

(i) Escrever os elementos da permutação principal[3] em uma linha inferior (ou superior), onde imediatamente acima (ou abaixo) devemos colocar os elementos da permutação para os quais desejamos determinar o número de inversões;

(ii) Unir os elementos iguais através de uma segmento, de modo que todas as interseções possíveis sejam formadas apenas por dois segmentos;

(iii) Contar o número total de interseções formada apenas por dois segmentos, pois assim teremos o número de inversões.

Veja, por exemplo, que a permutação $(2, 4, 1, 3, 5)$ possui 3 inversões, como podemos verificar no diagrama abaixo.

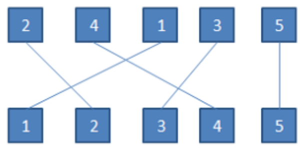


Figura 3.1: Número de inversões

Note que no diagrama temos exatamente 3 intersecões.

3.7 Relação entre permutações e determinantes

De acordo com TAVARES [15], o estudo das permutações está intrinsecamente ligado ao número que está associado a cada tabela que compõe as soluções dos sistemas lineares.

Por exemplo, o número $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$ visto na seção (3.3), referente ao denominador das incógnitas que compõem os sistemas lineares de ordem 2, está associado à tabela $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, da seguinte maneira: os índices correspondentes às linhas em cada uma das duas parcelas do número $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$ permanecem fixos, iguais a 1 e 2. Enquanto que os índices das colunas variam em cada parcela, de acordo com as permutações de $\{1, 2\}$, veja:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftarrow \left(a_{1\underline{1}} \cdot a_{2\underline{2}} - a_{1\underline{2}} \cdot a_{2\underline{1}}\right)$$

[3] Chamamos de permutação principal a permutação que conserva os números em sua ordem natural e de forma crescente.

TAVARES [15] distribui os elementos do número $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$ em na tabela, na primeira tabela destacou os elementos da 1^a parcela e na segunda tabela destacou os elementos da 2^a parcela.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{a}_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{\mathrm{a}_{22}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{\mathrm{a}_{12}} \\ \boxed{\mathrm{a}_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Observe que o sinal do produto em cada parcela varia de acordo com o número de inversões, como podemos verificar na tabela abaixo:

Tabela 3.1: Sinal das permutações das tabelas de ordem 2

Permutações	produto	Número de inversões	sinal
$(1,2)$	$a_{1\underline{1}} \cdot a_{2\underline{2}}$	0	+
$(2,1)$	$a_{1\underline{2}} \cdot a_{2\underline{1}}$	1	-

Note que o mesmo acontece com o número $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ que associamos à tabela $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ da seguinte maneira: os índices correspondentes às linhas em cada uma das três parcelas do número $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ permanecem fixos, iguais a 1, 2 e 3. Enquanto que os índices das colunas variam em cada parcela, de acordo com as permutações de $\{1, 2, 3\}$, veja:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longleftarrow a_{1\underline{1}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{3}} + a_{1\underline{2}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{1}} + a_{1\underline{3}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{2}} - a_{1\underline{3}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{1}} - a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{3}} - a_{1\underline{1}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{2}}$$

Veja a distribuição dos elementos na tabela que constituem cada parcela, extraído de TAVARES [15]:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Também verificamos que o sinal em cada produto varia de acordo com o número de inversões, como podemos observar na tabela abaixo:

Tabela 3.2: Sinal das permutações das tabelas de ordem 3

Permutações	produto	Número de inversões	sinal
$(1,2,3)$	$a_{1\underline{1}} \cdot a_{2\underline{2}} \cdot a_{3\underline{3}}$	0	+
$(2,3,1)$	$a_{1\underline{2}} \cdot a_{2\underline{3}} \cdot a_{3\underline{1}}$	2	+
$(3,1,2)$	$a_{1\underline{3}} \cdot a_{2\underline{1}} \cdot a_{3\underline{2}}$	2	+
$(3,2,1)$	$a_{1\underline{3}} \cdot a_{2\underline{2}} \cdot a_{3\underline{1}}$	3	-
$(2,1,3)$	$a_{1\underline{2}} \cdot a_{2\underline{1}} \cdot a_{3\underline{3}}$	1	-
$(1,3,2)$	$a_{1\underline{1}} \cdot a_{2\underline{3}} \cdot a_{3\underline{2}}$	1	-

Percebe-se que, a cada parcela dos determinantes obtidos, associamos um sinal, que depende do número t de inversões (ou transposições) existentes na permutação dos índices das colunas, quando fixamos os índices das linhas, chamado de sinal da permutação e denotado por:

$$(-1)^t = \begin{cases} 1 & ; \text{ se t é par.} \\ -1 & ; \text{ se t é ímpar.} \end{cases} \text{, onde } t \text{ é o número de inversões.}$$

3.8 Definição dos determinantes

O determinante de uma tabela quadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ formada por n linhas e n colunas é igual ao somatório de todos os produtos distintos possíveis de n fatores tomados nos n^2 elementos da matriz, escolhidos de tal forma que em cada um desses produtos haja exatamente um fator de cada linha e de cada coluna e que seja associado a cada um dos produtos o sinal positivo ou negativo, conforme denota a fórmula abaixo:

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t \, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

Também denotado na forma mais abreviada por:

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j \in P} (-1)^t \, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

onde P representa o conjuntos das permutações possíveis de $(1, 2, 3, \ldots, n)$ associados aos índices $(j_1, j_2, ..., j_n)$ e t, o número de inversões da permutação $j \in P$ tomada (t pode ser interpretado como sendo o número de transposições necessárias para trazer de volta os índices das colunas $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ à sua ordem natural), associado a cada um dos $n!$ termos que podem ser formados quando fixamos os índices das linhas e permutarmos os índices das colunas $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Ao analisar a fórmula dos determinantes, notamos que, se a permutação de $(1, 2, 3, \ldots, n)$ correspondente aos índices $(j_1, j_2, ..., j_n)$ possuir um número par de inversões (permutação de classe par), t será par; assim, o coeficiente $(-1)^t = (-1)^{\text{par}} = 1$. Com isso, concluímos que o sinal do termo correspondente no somatório será positivo, caso contrário (permutação de classe ímpar), ou seja, t ser um número ímpar, o sinal será negativo, pois $(-1)^t = (-1)^{\text{ímpar}} = -1$.

Observação:

É importante salientar que as tabelas às quais estamos nos referindo no presente trabalho são denominadas de matrizes, nesse caso em particular de matrizes quadradas de ordem n, pois são formadas por $n \times n$ elementos, dispostos em n linhas e n colunas que possuem propriedades operatórias específicas, propriedades sobre as quais, neste trabalho, não pretendemos nos debruçar.

Veja alguns exemplos da definição dos determinantes:

Determinante de 1^a ordem

Note que para calcular o determinante de uma matriz de ordem 1, devemos levar em consideração o fato de existir somente uma única coluna. Com isso o número de inversões é igual a zero, portanto teremos uma permutação de classe par e dessa forma o sinal do termo será positivo, logo, o determinante sempre será:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}.$$

Determinante de 2^a ordem

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 2, iremos fixar os índices das linhas, e como temos duas colunas que podem ser permutadas entre si, teremos um total de $2! = 2$ termos distintos. Veja:

$a_{1\underline{1}}a_{2\underline{2}} \Rightarrow$ zero inversões (1,2) $\Rightarrow$ permutação de classe par $\Rightarrow$ sinal positivo.

$a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}} \Rightarrow$ 1 inversão (2,1) $\Rightarrow$ permutação de classe ímpar $\Rightarrow$ sinal negativo.

Com isso:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Note que nesse caso, o determinante é obtido pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Assim, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5.$$

Determinante de 3^a ordem

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, iremos fixar os índices das linhas, e como temos três colunas que podem ser permutadas entre si, teremos um total de $3! = 6$ termos diferentes. Veja:

$a_{1\underline{1}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{3}} \Rightarrow$ zero inversões (1,2,3) $\Rightarrow$ permutação de classe par.

$a_{1\underline{2}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{1}} \Rightarrow$ 2 inversões (2,3,1)$\Rightarrow$ permutação de classe par.

$a_{1\underline{3}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{2}} \Rightarrow$ 2 inversões (3,1,2)$\Rightarrow$ permutação de classe par.

Como $(1,2,3),(2,3,1)$ e $(3,1,2)$ são permutações de classe par, logo terão sinal positivo.

$a_{1\underline{3}}a_{2\underline{2}}a_{3\underline{1}} \Rightarrow$ 3 inversões (3,2,1) $\Rightarrow$ permutação de classe ímpar.

$a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{3}} \Rightarrow$ 1 inversão (2,1,3)$\Rightarrow$ permutação de classe ímpar.

$a_{1\underline{1}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{2}} \Rightarrow$ 1 inversão (1,3,2)$\Rightarrow$ permutação de classe ímpar.

Como $(3,2,1),(2,1,3)$ e $(1,3,2)$ são permutações de classe ímpar, logo terão sinal negativo.

Com isso:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Isso é equivalente a calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 através da regra de Sarrus. Nela, repete-se a primeira e segunda coluna à direita da matriz. Feito isso, devemos somar os produtos da diagonal principal e das outras duas paralelas, e, por fim, subtrair os produtos da diagonal secundária e das outras duas paralelas a ela:

$$\begin{aligned} det(A) &= \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Durante nossa pesquisa encontramos em KUROSCH [10] outro método de extração do determinante de ordem 3, pouco difundido em nossas literaturas de ensino médio. Veja o esquema encontrado em KUROSCH [10],

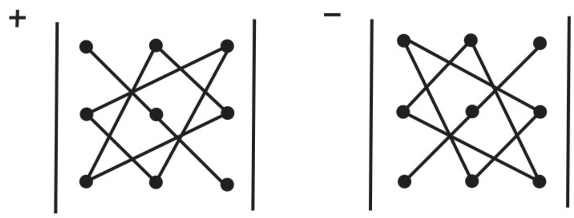


Figura 3.2: Fórmula mnemônica do determinante de ordem 3, KUROSCH [10]

Obtendo dessa forma:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Assim, podemos dizer que, os termos positivos no determinante de ordem 3, são formados pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelos produtos elementos que se dispõem nos vértices dos dois triângulos de bases paralelas a essa diagonal e os termos negativos pelos produto dos elementos da diagonal secundária e pelos produtos elementos que se dispõem nos vértices dos dois triângulos de bases paralelas a essa diagonal.

Exemplo envolvendo a definição dos determinantes

Uma matriz $n \times n$, $n > 2$, é constituída de "zeros" e "uns", de forma que em cada linha e em cada coluna haja exatamente um "um". O determinante dessa matriz é necessariamente:

a) 0 ou 1

b) 1 ou –1

c) 0 ou -1

d) n ou $-n$

e) $n - 1$ ou $1 - n$

Resolução:

Para realizarmos o problema, devemos lembrar a definição do determinante de uma matriz quadrada de ordem n, que é o somatório de todos os produtos distintos possíveis de n fatores, escolhidos de tal forma que em cada um desses produtos tenha exatamente um fator de cada linha e de cada coluna, e que seja associado a cada um dos produtos o sinal positivo ou negativo conforme as permutações dos subíndices de linhas e colunas sejam de classe par ou de classe ímpar. Como em cada linha e em cada coluna há exatamente um "um", o somatório do determinante apresentará apenas um termo não-nulo constituído por todos os “uns” e a esse termo pode ser atribuído sinal positivo ou negativo dependendo da classe da permutação.

Logo, o determinante da matriz é 1 ou -1.

Capítulo 4

Propriedades dos determinantes

Propriedade 1

Se uma matriz quadrada A possui uma fila (linha ou coluna) toda nula, então $det(A) = 0$.

Demonstração:

Este fato é justificado, tendo em vista que, para cada parcela do somatório que envolve o determinante, existe um elemento de cada linha (e somente um elemento de cada coluna); logo, se uma fila é toda nula, então todos os produtos contêm, pelo menos, um elemento igual a zero, o que, consequentemente, anula o determinante.

□

Propriedade 2

O determiante de uma matriz quadrada A muda de sinal quando permutam-se duas filas paralelas.

Demonstração:

Ao trocar duas filas paralelas de posição altera-se também a ordem dos índices dos elementos na permutação, alterando consequentemente o sinal da permutação e, por isso, o sinal dos termos também muda.

□

Propriedade 3

Se uma matriz quadrada A possuir duas filas paralelas iguais, então $det(A) = 0$.

Demonstração:

Suponha que uma matriz quadrada A de ordem n possua duas filas paralelas iguais, de modo que ao permutarmos estas filas iguais iremos obter uma matriz quadrada B que será igual a matriz A. Pela propriedade 2, teremos que $det(A) = -det(B)$, e, como as matrizes A e B são iguais, isto só será possível se $det(A) = det(B) = 0$.

□

Definição 1:

Denominamos de matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})_{n\times m}$, a matriz $A^t = (a_{ji})_{m\times n}$ obtida trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A.

Exemplo 1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Propriedade 4

O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, ou seja, $det(A) = det(A^t)$.

Demonstração:

De fato, para demonstrar esta propriedade, devemos lembrar que o determinante de uma matriz de ordem n é igual ao somatório de todos os produtos distintos possíveis formado por n fatores tomados entre os n^2 elementos da matriz, de tal forma que em cada um desses produtos haja exatamente um fator de cada linha e de cada coluna. Assim, para obter tais produtos, podemos fixar os índices das linhas (ou das colunas) $(1, 2, 3, \ldots, n)$ e permutar os índices das colunas (ou das linhas).

Assim, seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, cuja transposta é representada pela matriz de ordem n, $A^t = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, para todo $i \quad , \quad j \in 1, 2, 3, \ldots, n$.

Como sabemos que o determinante de A^t é dado por:

$$det(A^t) = \sum_{j \in P} (-1)^t b_{1j_{(1)}} b_{2j_{(2)}} \cdots b_{nj_{(n)}}.$$

Substituindo $b_{1j_{(1)}}, b_{2j_{(2)}}, \cdots, b_{nj_{(n)}}$, repectivamente por $a_{j_{(1)}1}, a_{j_{(2)}2}, \cdots, a_{j_{(n)}n}$ teremos:

$$det(A^t) = \sum_{j \in P} (-1)^t a_{j_{(1)}1} a_{j_{(2)}2} \cdots a_{j_{(n)}n}$$

Como,

$$det(A) = \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}} = \sum_{j \in P} (-1)^t a_{j_{(1)}1} a_{j_{(2)}2} \cdots a_{j_{(n)}n}.$$

Portanto,

$$det(A^t) = det(A).$$

$\square$

Exemplo 2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Propriedade 5

Quando multiplicamos uma fila de uma matriz quadrada A de ordem n por um número escalar k, o determinante da matriz obtida, A', será o produto de k pelo determinante de A, ou seja, $det(A') = k \cdot det(A)$.

Demonstração:

De fato, seja A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem n, multiplicaremos uma de suas filas pelo escalar k. Sem perda de generalidade, suponhamos que a fila multiplicada pelo escalar k seja a primeira linha, de modo que matriz obtida A' será:

$$A' = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim o determinante de $\det(A') = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ será:

$$det(A') = \sum_{j \in P} (-1)^t k \cdot a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}}$$

Como k é uma constante podemos reescrever o somatório da seguinte forma:

$$det(A') = k \cdot \sum_{j \in P} (-1)^t \cdot a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}}$$

Por sua vez, $\sum_{j \in P} (-1)^t \cdot a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}} = det(A)$. Portanto:

$$det(A') = k \cdot det(A)$$

□

Exemplo 3) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a 1^a linha por 6 e multiplicarmos a 3^a coluna por 4, o novo determinante valerá:

a) 8

b) 18

c) 24

d) 36

e) 48

Resolução:

Ora, pela propriedade 5, sabemos que ao multiplicar uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada por um escalar ou dividirmos uma fila (linha ou coluna) por um escalar diferente de zero, o seu determinante ficará multiplicado ou dividido por esse mesmo valor.

Assim, ao dividirmos a 1^a linha por 6 e multiplicarmos a 3^a coluna por 4, o determinante inicial 12 ficará dividido e multiplicado respectivamente por 6 e 4.

Dessa forma o novo determinante $det(A')$ será:

$$det(A') = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 12 \Rightarrow det(A') = 8.$$

Portanto a alternativa correta é a letra "a".

Propriedade 6

Quando multiplicamos uma matriz quadrada A de ordem n por uma constante k, o determinante de A fica multiplicado pela constante elevada à ordem da matriz, ou seja, $det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$.

Demonstração:

De fato, ao multiplicarmos uma matriz quadrada A de ordem n pelo escalar k, todos os elementos de A ficaram multiplicados por k; assim, seus elementos da matriz $k \cdot A$ são da forma $k \cdot a_{ij}$. Daí:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} & \cdots & k \cdot a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & k \cdot a_{n3} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, o determinante de det(k$\cdot A$) $= \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} & \cdots & k \cdot a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & k \cdot a_{n3} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{vmatrix}$ será:

$$det(k \cdot A) = \sum_{j \in P} (-1)^t k \cdot a_{1j_{(1)}} k \cdot a_{2j_{(2)}} \cdots k \cdot a_{nj_{(n)}}$$
$$det(k \cdot A) = \sum_{j \in P} (-1)^t (k^n) \cdot a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}}.$$

Como k^n é uma constante, podemos reescrever o somatório da seguinte forma:

$$det(k \cdot A) = (k^n) \cdot \sum_{j \in P} (-1)^t \cdot a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} \cdots a_{nj_{(n)}}.$$

Logo,

$$det(k \cdot A) = (k^n) \cdot det(A).$$

□

Definição 2

Diremos que uma matriz quadrada A é antissimétrica quando $A^t = -A$.

Exemplo 4) Seja A uma matriz quadrada de ordem n e antissimétrica. Sabendo que n é ímpar, calcule o determinante de A.

Resolução:

Ora, se a matriz A é antissimétrica, então $A^t = -A$ e dessa forma podemos escrever:

$$det(A^t) = det(-A).$$

Aplicando a propriedade 6 no segundo membro, ficaremos com:

$$det(A^t) = (-1)^n \cdot det(A).$$

Como n é ímpar, então:

$$det(A^t) = -det(A).$$

No entanto, sabemos pela propriedade 4 que $det(A^t) = det(A)$, então:

$$det(A) = -det(A)$$

Somando $det(A)$ a ambos os membros teremos:

$$2det(A) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Assim, o determinante desejado $det(A)$ será igual a zero, ou seja:

$$det(A) = 0.$$

Propriedade 7

Se uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$ possuir duas filas paralelas formadas por elementos correspondentes proporcionais, então $det(A) = 0$.

Demonstração:

Suponha que as linhas de índices i e r da matriz quadrada A sejam elementos proporcionais, isto é:

$$a_{ij} = k \cdot a_{rj}, \quad \forall \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq i < r \leq n.$$

Assim, o determinante $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, pode ser reescrito como sendo:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ k \cdot a_{r1} & k \cdot a_{r2} & k \cdot a_{r3} & \cdots & k \cdot a_{rp} & \cdots & k \cdot a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Agora aplicaremos a propriedade 5 no segundo membro de (4.1), obtendo:

$$det(A) = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

Como o determinante no segundo membro de (4.2) possui duas filas paralelas iguais, pela propriedade 3, temos:

$det(A) = k \cdot 0$, ou seja, $det(A) = 0$.

A demonstração seria análoga se tivéssemos duas colunas proporcionais.

$\square$

Propriedade 8

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, onde os elementos da i-ésima linha são da forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{i1} & = & b_{i1} + c_{i1} \\ a_{i2} & = & b_{i2} + c_{i2} \\ a_{i3} & = & b_{i3} + c_{i3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ip} & = & b_{ip} + c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{in} & = & b_{in} + c_{in}. \end{array}$$

Isto é, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & b_{i3} + c_{i3} & \cdots & b_{ip} + c_{ip} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então:

$$det(A) = det(A\text{'}) + det(A\text{''}).$$

Onde A' é a matriz obtida de A, substituindo-se os elementos a_{ip} da i-ésima linha pelo elementos b_{ip} com $1 \leq p \leq n$ e A" é a matriz que se obtém a partir de A, substituindo-se os elementos a_{ip} da i-ésima linha pelo elementos c_{ip} com $1 \leq p \leq n$.

Demonstração:

Dessa forma o determinante da matriz A será:

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & b_{i3}+c_{i3} & \cdots & b_{ip}+c_{ip} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots a_{ij_{(p)}} \cdots a_{nj_{(n)}}.
\end{aligned}
$$

Como $a_{ij_{(p)}} = b_{ij_{(p)}} + c_{ij_{(p)}}$, podemos reescrever o somatório da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots \left(b_{ij_{(p)}} + c_{ij_{(p)}}\right) \cdots a_{nj_{(n)}} \\
&= \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots b_{ij_{(p)}} \cdots a_{nj_{(n)}} \\
&\quad + \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots c_{ij_{(p)}} \cdots a_{nj_{(n)}}.
\end{aligned}
$$

Com isso:

$$
det(A) = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & b_{ip} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ip} & \cdots & c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

$\square$

Propriedade 9

Teorema de Jacobi

O Teorema de Jacobi garante que o determinante de uma matriz quadrada A não altera de valor quando adicionamos a uma fila de A uma outra fila (linha ou coluna) paralela, previamente multiplicada por uma constante.

Figura 4.1: Jacobi

Observação

Este Teorema é bastante importante, pois utilizando-se dele podemos introduzir zeros em uma fila de uma matriz e assim facilitar o cálculo do determinante pelo Teorema de Laplace e outros métodos de condensação, os quais veremos mais adiante.

Demonstração:

De fato, seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

uma matriz de ordem n, de tal forma que ao adicionarmos a i-ésima linha à r-ésima linha multiplicada pela constante k, com $1 \leq i, r \leq n$, iremos obter uma matriz A', tal que $det(A) = det(A')$, veja:

$$det(A\text{'}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} + k \cdot a_{r1} & a_{i2} + k \cdot a_{r2} & a_{i3} + k \cdot a_{r3} & \cdots & a_{ip} + k \cdot a_{rp} & \cdots & a_{in} + k \cdot a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agora iremos aplicar a propriedade 8, adição de determinantes, daí:

$$det(A\text{'}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ k \cdot a_{r1} & k \cdot a_{r2} & k \cdot a_{r3} & \cdots & k \cdot a_{rp} & \cdots & k \cdot a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Por sua vez, sabemos pela propriedade 7 que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ k \cdot a_{r1} & k \cdot a_{r2} & k \cdot a_{r3} & \cdots & k \cdot a_{rp} & \cdots & k \cdot a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Assim:

$$det(A') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rp} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow det(A') = det(A).$$

□

De modo análogo, podemos provar esta propriedade tomando como referência duas colunas quaisquer.

Exemplo 5) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ para todos $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $a \neq b$.
Sobre o determinante da matriz A, pode-se afirmar que:

a) é igual a $(a + b)$.

b) é sempre positivo.

c) é divisível por $(a + 3b)$.

d) é múltiplo de $(2a + b)$.

Resolução:

Para determinar a alternativa correta iremos aplicar inicialmente o Teorema de Jacobi. Para isso somaremos à primeira coluna todas as outras colunas, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

Note que a primeira coluna é múltipla de $(a + 3b)$, então aplicaremos a propriedade 5, e assim podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}.$$

Como o determinante desejado é múltiplo de $(a+3b)$, concluímos que o mesmo é divisível por $(a+3b)$.

Portanto a alternativa correta é a letra "c".

Exemplo 6) Considere as matrizes reais 3×3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se indicarmos por A e B, respectivamente, os determinantes dessas matrizes, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ é igual a:

a) $-2A - 2B$.

b) $2A + 2B - 1$.

c) $2A + 2B$.

d) $-2A - 2B - 1$.

e) $2A - 2B - 1$.

Resolução:

Inicialmente, aplicaremos a propriedade 9 (Teorema de Jacobi). Para isso, iremos subtrair a 1^a linha da 2^a linha.

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

Agora, aplicaremos a propriedade 8 no segundo membro, a fim de desmembra-la. Observe:

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

Agora aplicaremos a propriedade 2, onde ao permutar a 2^a e 3^a linha entre si, de cada uma dos determinantes do segundo membro, os mesmos trocarão de sinal, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & n & p \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Note que a segunda linha dos determinantes obtidos no segundo membro são múltiplas de 2, e pela propriedade 5 podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Como, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A$ e $\begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = B$, então o determinante desejado é igual a:

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -2A - 2B.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra “a”.

Definição 3

Para verificarmos propriedade abaixo, diremos doravante que uma matriz A quadrada de ordem n, é triangular inferior se e somente se para todo $i > j$, $a_{ij} = 0$.

Por outro lado, denominaremos de matriz triangular superior se e somente se para todo $i > j$, $a_{ij} = 0$.

Propriedade 10

O determinante de uma matriz triangular inferior (ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, também chamado de termo principal do determinante.

Demonstração:

Para demonstrarmos que o determinante de uma matriz triangular inferior de ordem n é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, tomaremos como base a definição do determinante de uma matriz A de ordem n:

$$det(A) = \sum_{j \in P} (-1)^t a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots a_{ij_{(p)}} \cdots a_{nj_{(n)}}.$$

Sabemos que o determinante de uma matriz quadrada de ordem n é igual ao somatório de todos os produtos distintos possíveis de n fatores tomados nos n^2 elementos da matriz, escolhidos de tal forma que em cada um desses produtos tenha exatamente um fator de cada linha e de cada coluna e que seja associado a cada um dos produtos o sinal positivo ou negativo. Garantindo dessa forma que todo produto diferente da diagonal principal $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{pp} \cdots a_{nn}$ tenha pelo menos um termo com $i < j$ cujo valor é igual $a_{ij} = 0$, portanto $a_{1j_{(1)}} a_{2j_{(2)}} a_{3j_{(3)}} \cdots a_{ij_{(p)}} \cdots a_{nj_{(n)}} = 0$.

Dessa forma, o determinante de uma matriz triangular inferior qualquer ficará restrito ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{pp} \cdots a_{nn}.$$

$\square$

De modo análogo, podemos demonstrar que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo 7) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Resolução:

Inicialmente aplicaremos o Teorema de Jacobi, onde iremos subtrair a 2^a, a 3^a, até a n-ésima linha da 1^a linha, de modo a obtermos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Como a matriz obtida é triangular superior, aplicaremos a propriedade 10, a qual diz que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal, assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

$\square$

Propriedade 11
Teorema de Binet

O determinante de um produto de matrizes quadradas de mesma ordem é o produto dos seus determinantes, ou seja, sendo A e B matrizes quadradas de ordem n, então:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Demonstração:

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = A \cdot B = (c_{ij})$ matrizes de ordem n, assim os elementos da matriz C são da forma:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Dessa forma,

$$C = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$det(A \cdot B) = det(C) = det \begin{pmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}.$$

Daí:

$$det(A \cdot B) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} b_{k_1 1} & a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}.$$

$$det(A \cdot B) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}^{n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix}.$$

Note que, se tivermos $k_i = k_j$ com i e j variando de 1 até n, o determinante da referida parcela do somatório será igual a zero pois teremos filas paralelas proporcionais e iguais. Por isso tomaremos apenas as permutações de $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ que denotaremos por P e t representará o número de inversões da permutação tomada.

$$det(A \cdot B) = \sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} = det(B).$$

Logo, concluímos que

$$det(A \cdot B) = \sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix} = det(B) \cdot det(A).$$

Ou seja,

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

$\square$

Definição 4

Matriz Identidade:

Denominamos de matriz identidade (ou matriz unidade) a matriz quadrada $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } \quad i = j. \\ -1 & ; \text{ se } \quad i \neq j. \end{cases} \qquad \forall \quad i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Veja alguns exemplos de matriz identidade.

a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação:

Note que toda matriz Identidade I é uma matriz triangular, consequentemente seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal e como todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, então $det(I) = 1$.

Definição 5

Matriz Inversa:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se $det(A) \neq 0$, então existe uma matriz B também quadrada e de ordem n, tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$A = B = I_n \text{ (}I\text{ é a matriz identidade).}$$

A matriz B é chamada de matriz inversa de A e representada por A^{-1}.

Logo, temos:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Observe que a operação de multiplicação com a matriz inversa é comutativa.

Se $det(A) = 0$, dizemos que a matriz A é não-inversível ou singular.

Exemplo 8) A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $det(A) = 7$. Nessas condições, determine osvalores de $det(3A)$ e $det(A^{-1})$.

Resolução:

Ora, pela propriedade 6, sabemos que dada uma matriz quadrada A de ordem n e k um número escalar, então $det(k) = k^n \cdot det(A)$.

Assim, se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $det(A) = 7$, logo $det(3A)$, será

$$det(3A) = 3^2 \cdot det(A)$$
$$det(3A) = 9 \cdot 7$$
$$det(3A) = 63.$$

Agora para determinar o valor de $det(A^{-1})$, devemos lembrar que se $det(A) \neq 0$, então:

$$A \cdot A^{-1} = I. \tag{4.3}$$

Calculando o determinante em ambos os membros de (4.3), obteremos

$$det(A \cdot A^{-1}) = det(I). \tag{4.4}$$

Agora, aplicaremos o teorema de Binet no primeiro membro de (4.4), assim

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I). \tag{4.5}$$

Substituindo $det(A)$ e $det(I)$ respectivamente por 7 e 1 em (4), teremos

$$7 \cdot det(A^{-1}) = 1.$$

Dividindo ambos os membros por 7, ficaremos com

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{7}.$$

Capítulo 5

Métodos de Condensação dos determinantes

Neste capítulo, estudaremos alguns métodos e regras de condensação ou abaixamento de ordem de um determinante, os quais possibilitam uma redução do número de operações, gerando consequentemente um ganho de tempo para a realização do cálculo dos determinantes.

De modo técnico, o abaixamento de ordem de um determinante D de uma matriz de ordem n consiste em achar um determinante D', de ordem menor que n, cujo valor numérico seja igual ao inicial.

5.1 Teorema de Laplace

Figura 5.1: Laplace

A demonstração que desenvolveremos é referente ao Teorema de Laplace e possibilitará ao leitor o entendimento de forma construtiva da definição do menor complementar e cofator. Sendo assim exposto de modo diferente do que encontramos nos livros didáticos de ensino médio disponíveis na literatura brasileira e até mesmo em livros de álgebra linear, que apresentam o teorema de forma repentina, sem nenhuma demonstração, mostrando-os como ferramentas milagrosas aos olhos dos professores e estudantes capazes de denotar a fórmula mnemônica do teorema de Laplace utilizada para o cálculo dos determinantes, que, por sua vez, também é dada sem nenhuma demonstração.

Então, para conseguir mostrar o processo que levou à criação do menor complementar e cofator, e suas definições, desenvolveremos a fórmula de obtenção do determinante de matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$, chamada de Teorema de Laplace. Para isso, tomaremos uma matriz quadrada arbitrária A de ordem $n \geq 2$, indicada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, de tal forma que seu determinante é expresso por:

$$det\,(A) = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então, ao somar $n-1$ parcelas iguais a zero a cada um dos elementos da i-ésima linha, o determinante da matriz A não será alterado e assim podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$det\,(A) = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \ldots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \ldots + 0 & \cdots & 0 + \ldots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Após o procedimento acima, aplicaremos a propriedade 8 demonstrada no capítulo anterior. Com isso, o determinante dado pode ser decomposto como a soma de n determinantes, como mostraremos a seguir:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Note que no segundo membro, a i-ésima linha do primeiro determinante é múltipla de a_{i1}, de modo que a i-ésima linha do segundo determinante é múltipla de a_{i2}, da mesma maneira que a i-ésima linha do terceiro determinante é múltipla de a_{i3}, e assim sucessivamente até a i-ésima linha do n-ésimo determinante que é múltipla de a_{in}.

Com isso, sobre a i-ésima linha dos determinantes mencionados anteriormente, aplicaremos a propriedade 5 demonstrada no capítulo anterior deste trabalho, e assim podemos reescrever os determinantes abaixo da seguinte forma:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{i1}\cdot det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + a_{i2}\cdot det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + a_{in} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto $(*)\, det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot D_{ij}$ sendo

$D_{ij} = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, veja que toda linha i é igual a zero, exceto na coluna j em que seu elemento é igual a 1.

Agora em relação a D_{ij} vamos deslocar a i-ésima linha para a primeira linha. No entanto não podemos simplesmente trocar a linha i pela linha 1 porque isso desordena o resto da matriz em relação à distribuição das linhas, então faremos os seguintes procedimentos.

Trocaremos a linha i com a linha $i-1$, depois com a linha $i-2$ e assim sucessivamente até chegar à primeira linha. Nesse processo permutamos as linhas $(i-1)$ vezes, e como sabemos pela propriedade 2 vista no capítulo 3, a qual indica que ao trocar de posição duas filas paralelas o determinante inicial muda de sinal, ou seja, é multiplicado por (-1) e como faremos $(i-1)$ permutações de posições entre as linhas, o novo determinante ficará multiplicado por $(i-1)$fatores de (-1) ou $(-1)^{i-1}$, daí:

$$D_{ij} = (-1)^{i-1} \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agora faremos um processo análogo, em relação à coluna j, pois levaremos está para a primeira coluna. Para isso, faremos $(j-1)$ transposições entre colunas. Com isso, o determinante ficará multiplicado por $(-1)^{j-1}$, daí:

$$D_{ij} = (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como $(-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j-2} = \frac{(-1)^{i+j}}{(-1)^2} = (-1)^{i+j}$, então podemos escrever:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} (*).$$

Agora mostraremos que o determinante $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$ M_{ij} obtido ao suprimir a linha i e a coluna j da matriz inicial A é igual ao determinante

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

É importante salientar que o determinante M_{ij} é chamado de menor complementar do elemento a_{ij} da matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$.

Para mostrar tal igualdade, devemos lembrar a definição do determinante, segundo a qual, o determinante de uma matriz quadrada de ordem n é igual ao somatório de todos os produtos distintos possíveis de n fatores tomados nos n^2 elementos da matriz, escolhidos de tal forma que em cada um desses produtos haja exatamente um fator de cada linha e de cada coluna e que seja associado a cada um dos produtos o sinal positivo ou negativo de acordo com o número de inversos.

Com isso, garantimos que em todos os produtos $a_{j_{(1)}1}a_{j_{(2)}2}\cdots a_{j_{(n)}n}$ dos quais $a_{j_{(1)}1} \neq a_{11}$, serão iguais a zero, pois todos os elementos da primeira linha são iguais a zero, exceto $a_{11} = 1$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= \textstyle\sum_{j\in P}(-1)^t a_{1j_{(1)}}a_{2j_{(2)}}a_{3j_{(3)}}\cdots a_{nj_{(n)}} \\
&= \textstyle\sum_{j\in P}(-1)^t a_{11}a_{2j_{(2)}}a_{3j_{(3)}}\cdots a_{nj_{(n)}}.
\end{aligned}
$$

Como a_{11} é uma constante, podemos retirá-la do somatório, daí:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= a_{11}\cdot \textstyle\sum_{j\in P}(-1)^t a_{2j_{(2)}}a_{3j_{(3)}}\cdots a_{nj_{(n)}} \\
&= 1\cdot \sum_{j\in P}(-1)^t a_{2j_{(2)}}a_{3j_{(3)}}\cdots a_{nj_{(n)}} \\
&= M_{ij}.
\end{aligned}
$$

Logo, por $(*)$:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Ressaltamos que a expressão

$$(-1)^{i+j} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

é denominada de cofator do elemento a_{ij} da matriz A e indicaremos por C_{ij}.

Com isso, o determinante da matriz quadrada A em relação a linha i é igual a:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}.$$

Deixamos claro ao leitor que essa demonstração pode ser realizada de modo análogo em relação a qualquer coluna j da matriz inicial A.

Assim, a última fórmula obtida é denominada de Teorema de Laplace ou Teorema da expansão dos cofatores, cuja definição é:

O determinante de uma matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores.

Isto é,

i) Se escolhermos a linha i da matriz A, então:

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + a_{i3} \cdot C_{i3} + \ldots + a_{ij}C_{ij} + \ldots + a_{in} \cdot C_{in}.$$

ii) Se escolhermos a coluna j da matriz A, então:

$$det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + a_{3j} \cdot C_{3j} + \ldots + a_{ij}C_{ij} + \ldots + a_{nj} \cdot C_{nj}.$$

Exemplo 1) Calcule o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ através do teorema de Laplace.

Resolução:

Para determinar o $det(M)$, escolheremos a coluna $j = 1$, pois esta possui um maior número de zeros.

$$
\begin{aligned}
det(M) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot C_{i1} \\
&= a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31} + a_{41} \cdot C_{41} \\
&= 3 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{41} \\
&= 3 \cdot C_{11} \\
&= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 1 \cdot (62) \\
&= 186.
\end{aligned}
$$

Portanto, $det(M) = 186$.

5.2 Método de Chió

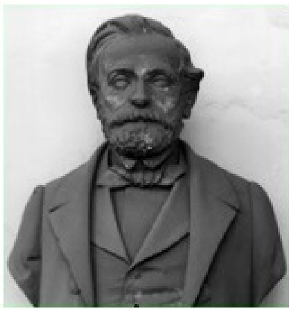


Figura 5.2: Felice Chió

A regra de Chió é um procedimento prático para rebaixar a ordem de uma matriz D de ordem n, com $n \geq 2$, que possui um elemento $a_{rs} = 1$ (caso não exista, um elemento igual a 1, obteremos o mesmo aplicando as propriedades anteriormente demonstradas), sem alterar o valor de seu determinante. A redução é obtida suprimindo a linha r e coluna s, e, de cada elemento restante da matriz, subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares" traçadas a partir dele, em relação à linha r e à coluna s, de tal forma que, o determinante inicial seja igual ao determinante condensado da matriz de ordem $(n-1)$ multiplicado por $(-1)^{r+s}$.

Demonstração:

Seja D um determinantes de ordem n, com $n \geq 2$ que possui um elemento $a_{rs} = 1$ como descrito abaixo:

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3s} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & 1 & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{ordem\ n}.$$

Agora aplicaremos o Teorema de Jacobi da seguinte forma:

1) fixaremos à s-ésima coluna do determinante.;
2) adicionaremos a primeira coluna, à s-ésima coluna multiplicada por $-a_{r1}$;
3) adicionaremos a segunda coluna, à s-ésima coluna multiplicada por $-a_{r2}$;
4) adicionaremos a terceira coluna, à s-ésima coluna multiplicada por $-a_{r3}$.

O processo será repetido até a n-ésima coluna, exceto para coluna s. Assim o determinante D da seguinte será reescrito da forma a seguir:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{r1} \cdot a_{1s} & a_{12} - a_{r2} \cdot a_{1s} & a_{13} - a_{r3} \cdot a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} - a_{rn} \cdot a_{1s} \\ a_{21} - a_{r1} \cdot a_{2s} & a_{22} - a_{r2} \cdot a_{2s} & a_{23} - a_{r3} \cdot a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} - a_{rn} \cdot a_{2s} \\ a_{31} - a_{r1} \cdot a_{3s} & a_{32} - a_{r3} \cdot a_{3s} & a_{33} - a_{r3} \cdot a_{3s} & \cdots & a_{3s} & \cdots & a_{3n} - a_{rn} \cdot a_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} - a_{r1} \cdot 1 & a_{r2} - a_{r2} \cdot 1 & a_{r3} - a_{r3} \cdot 1 & \cdots & 1 & \cdots & a_{rn} - a_{rn} \cdot 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - a_{r1} \cdot a_{ns} & a_{n2} - a_{r2} \cdot a_{ns} & a_{n3} - a_{r3} \cdot a_{ns} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{nn} - a_{rn} \cdot a_{ns} \end{vmatrix}.$$

Daí,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{r1} \cdot a_{1s} & a_{12} - a_{r2} \cdot a_{1s} & a_{13} - a_{r3} \cdot a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} - a_{rn} \cdot a_{1s} \\ a_{21} - a_{r1} \cdot a_{2s} & a_{22} - a_{r2} \cdot a_{2s} & a_{23} - a_{r3} \cdot a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} - a_{rn} \cdot a_{2s} \\ a_{31} - a_{r1} \cdot a_{3s} & a_{32} - a_{r3} \cdot a_{3s} & a_{33} - a_{r3} \cdot a_{3s} & \cdots & a_{3s} & \cdots & a_{3n} - a_{rn} \cdot a_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - a_{r1} \cdot a_{ns} & a_{n2} - a_{r2} \cdot a_{ns} & a_{n3} - a_{r3} \cdot a_{ns} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{nn} - a_{rn} \cdot a_{ns} \end{vmatrix}.$$

Agora, aplicaremos o Teorema de Laplace, tomando como referência a r-ésima linha, ou seja,

$$D = a_{r1} \cdot C_{r1} + a_{r2} \cdot C_{r2} + a_{r3} \cdot C_{r3} + \ldots + a_{rs} \cdot C_{rs} + \ldots + a_{rn} \cdot C_{rn}.$$

Como todos os elemento da linha r são nulos, exceto $a_{rs} = 1$, então,

$$D = a_{rs} \cdot C_{rs}$$
$$\mathrm{D} = \mathrm{C}_{rs}.$$

Daí,

$$D = (-1)^{r+s} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} - a_{r1} \cdot a_{1s} & a_{12} - a_{r2} \cdot a_{1s} & a_{13} - a_{r3} \cdot a_{1s} & \cdots & a_{1n} - a_{rn} \cdot a_{1s} \\ a_{21} - a_{r1} \cdot a_{2s} & a_{22} - a_{r2} \cdot a_{2s} & a_{23} - a_{r3} \cdot a_{2s} & \cdots & a_{2n} - a_{rn} \cdot a_{2s} \\ a_{31} - a_{r1} \cdot a_{3s} & a_{32} - a_{r3} \cdot a_{3s} & a_{33} - a_{r3} \cdot a_{3s} & \cdots & a_{3n} - a_{rn} \cdot a_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - a_{r1} \cdot a_{ns} & a_{n2} - a_{r2} \cdot a_{ns} & a_{n3} - a_{r3} \cdot a_{ns} & \cdots & a_{nn} - a_{rn} \cdot a_{ns} \end{vmatrix}}_{ordem\ n-1}.$$

□

Exemplo 2) Calcule o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ através da regra de Chió.

Resolução:

Para determinar o $det(M)$, aplicaremos a regra de Chió em relação ao elemento $a_{33} = 1$. Veja:

$$det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$det(M) = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 - 0 \cdot 2 & 1 - 4 \cdot 2 & -2 - (-2) \cdot 2 \\ 0 - 0 \cdot 0 & 2 - 4 \cdot 0 & 4 - (-2) \cdot 0 \\ 0 - 0 \cdot 3 & 1 - 4 \cdot 3 & 3 - (-2) \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & 9 \end{vmatrix} = 186.$$

5.3 Método de Hoüel

Figura 5.3: Guillaume Jules Hoüel

A Regra de Hoüel consiste em transformar o determinante de uma matriz quadrada A de ordem $n > 2$ com $a_{11} \neq 0$ no produto do inverso da potência do elemento a_{11} cujo expoente será igual à ordem da matriz inicial transformada menos duas unidades $\left(\frac{1}{{a_{11}}^{n-2}}\right)$ pelo determinante da matriz reduzida A_1 cuja ordem é $n-1$ e seus elementos b_{ij} são determinantes de ordem 2, da seguinte forma:

Primeira Linha

$$\begin{gathered}
b_{11} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \\
b_{12} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} \\
b_{14} = a_{11} \cdot a_{24} - a_{21} \cdot a_{14} \\
\cdots \\
b_{1,n-1} = a_{11} \cdot a_{2n} - a_{21} \cdot a_{1n}.
\end{gathered}$$

Segunda linha

$$\begin{gathered}
b_{21} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12} \\
b_{22} = a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} \\
b_{23} = a11 \cdot a_{34} - a_{31} \cdot a_{14} \\
\cdots \\
b_{2,n-1} = a_{11} \cdot a_{3n} - a_{31} \cdot a_{1n}.
\end{gathered}$$

Terceira linha

$$\begin{aligned} b_{31} &= a_{11} \cdot a_{42} - a_{41} \cdot a_{12} \\ b_{32} &= a_{11} \cdot a_{43} - a_{41} \cdot a_{13} \\ b_{33} &= a_{11} \cdot a_{44} - a_{41} \cdot a_{14} \\ &\cdots \\ b_{3,n-1} &= a_{11} \cdot a_{4n} - a_{41} \cdot a_{1n}. \end{aligned}$$

O processo deverá ser repetido para as demais linhas até a última linha de A_1, ficando com:

$$\begin{aligned} b_{n-1,1} &= a_{11} \cdot a_{n2} - a_{n1} \cdot a_{12} \\ b_{n-1,2} &= a_{11} \cdot a_{n3} - a_{n1} \cdot a_{13} \\ b_{n-1,3} &= a_{11} \cdot a_{n4} - a_{n1} \cdot a_{14} \\ &\cdots \\ b_{n-1,n-1} &= a_{11} \cdot a_{nn} - a_{n1} \cdot a_{1n}. \end{aligned}$$

Assim, o determinante da matriz inicial A pode ser reduzido no determinante da matriz A_1 abaixo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{{a_{11}}^{n-2}}\right) \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1,n-1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2,n-1} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \cdots & b_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ou ainda,

$$D = \left(\frac{1}{{a_{11}}^{n-2}}\right) \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{41} & a_{4n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{n1} & a_{n4} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Demonstração:

Como sabemos, é possível calcular o determinante de uma matriz de qualquer ordem através do teorema de Laplace. Entretanto, à medida que a ordem da matriz aumenta, a dicifuldade computacional para resolver tais determinantes aumenta. Veja por exemplo que, em um determinante de uma matriz de ordem n, ao ser resolvido por Laplace, precisamos calcular n determinantes de ordem $n-1$, e, para cada cada um deles, deveremos determinar $n-1$ determinantes de ordem $n-2$, da mesma forma que, para cada um destes, necessitamos calcular $n-2$ determinantes de ordem $n-3$ e assim por diante, até obtermos uma matriz de ordem menor ou igual a 3.

Entrento, para evitar o cálculo sucessivos de vários determinantes na resolução por Laplace e assim diminuir sua dificuldade de obtenção, utilizamos o mesmo associado ao Teorema de Jacobi, a fim de obtermos o maior número de zeros em uma fila, tornando o processo de resolução mais rápido.

Assim como os outros métodos citados, o método de Hoüel é uma regra de condensação. Razão por que partiremos do mesmo princípio facilitador usado no Teorema de Laplace, onde aplicamos o Teorema de Jacobi a fim de acrescentar zeros a uma fila, e, em seguida, desenvolveremos o Teorema de Laplace, pois assim a ordem do determinante ficará condensada.

A título de exemplo, tomemos um determinate D de ordem n, como o descrito abaixo:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Para desenvolver a regra de Hoüel, fixaremos a primeira coluna e em seguida aplicaremos o Teorema de Jacobi, da seguinte forma:

1) subtrairemos a segunda coluna do correspondente da primeira coluna multiplicado por $\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$;

2) subtrairemos a terceira coluna do correspondente da primeira coluna multiplicado por $\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$;

3) subtrairemos a quarta coluna do correspondente da primeira coluna multiplicado por $\dfrac{a_{14}}{a_{11}}$.

E assim sucessivamente, até a n-ésima coluna, veja:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} - a_{11} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{13} - a_{11} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{14} - a_{11} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{1n} - a_{11} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{24} - a_{21} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - a_{21} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{34} - a_{31} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{3n} - a_{31} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - a_{n1} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{n4} - a_{n1} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - a_{n1} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix}.$$

Simplificando os elementos teremos

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{24} - a_{21} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - a_{21} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{34} - a_{31} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{3n} - a_{31} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - a_{n1} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} & a_{n4} - a_{n1} \cdot \frac{a_{14}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - a_{n1} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix}.$$

Agora multiplicaremos todas as colunas a partir da segunda coluna por a_{11}. No entanto, para não alterar o valor do determinante inicial, devemos multiplicá-lo por $\dfrac{1}{{a_{11}}^{n-1}}$.

$$D = \frac{1}{{a_{11}}^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{24} - a_{21}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{2n} - a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{11}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{33} - a_{31}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{34} - a_{31}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{3n} - a_{31}\cdot a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{11}\cdot a_{n2} - a_{n1}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{n3} - a_{n1}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{n4} - a_{n1}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{nn} - a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Agora aplicaremos o Teorema de Laplace, tomando como referência a primeira linha, ou seja,

$$D = \frac{1}{{a_{11}}^{n-1}} \cdot (a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} + a_{14} \cdot C_{14} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}).$$

Como $a_{12} = a_{13} = a_{14} = \cdots = a_{1n} = 0$, então o determinante ficará igual a

$$D = \frac{1}{{a_{11}}^{n-1}} \cdot (a_{11} \cdot C_{11}).$$

Daí,

$$D = \frac{1}{{a_{11}}^{n-1}} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{24} - a_{21}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{2n} - a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{11}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{33} - a_{31}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{34} - a_{31}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{3n} - a_{31}\cdot a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{11}\cdot a_{n2} - a_{n1}\cdot a_{12} & a_{11}\cdot a_{n3} - a_{n1}\cdot a_{13} & a_{11}\cdot a_{n4} - a_{n1}\cdot a_{14} & \cdots & a_{11}\cdot a_{nn} - a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Simplificando a expressão e reescrevendo o determinante no formato desejado, teremos:

$$D = \left(\frac{1}{{a_{11}}^{n-2}}\right) \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{41} & a_{4n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{n1} & a_{n4} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

□

Exemplo 3) Calcule o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ através da regra de Hoüel.

Resolução:

Para determinar o $det(M)$, aplicaremos a regra de Hoüel. Veja:

$$\begin{aligned} det(M) &= \left(\frac{1}{3^{4-2}}\right) \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} . \\ &= \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 12 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 1674 \\ &= 186. \end{aligned}$$

Portanto, $det(M) = 186$.

Capítulo 6

Aplicação direta das Propriedades dos Determinantes

6.1 Determinante de Vandermonde

Chamamos de matriz de Vandermonde, ou das Potências, toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Note que cada coluna dessa matriz é formada por potências de mesma base com expoentes inteiros, que variam de 0 até $n-1$, de modo que em cada coluna os elementos formam uma progressão geométrica cujo primeiro elemento é sempre igual a 1.

Os elementos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ da segunda linha são chamados de elementos característicos da matriz.

Prova-se que o determinante de Vandermonde pode ser obtido multiplicando-se todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos $(a_j - a_i)$ com a condição de que $j > i$, ou seja:

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Observação:

Como o determinante de Vandermonde é obtido multiplicando-se todas as diferenças possíveis $(a_j - a_i)$ entre os elementos característicos, com a condição que $j > i$, podemos concluir que se pelo menos dois dos elementos característicos forem iguais entre si, o determinante será nulo, pois aparecerá um zero no produto.

Demonstração:

Para realizar a demonstração deste fato, utilizaremos o princípio da indução finita em n, que citamos no apêndice A deste trabalho. Assim, verificamos como base de indução, para $n = 2$, a veracidade deste fato. Veja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Com isso, a determinante de Vandermonde é válido para $n = 2$.

Agora, suponhamos que a propriedade seja válida para uma matriz de ordem $n-1$. Vamos provar sua validade para uma matriz de ordem n, ou seja, para:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{6.1}$$

Agora, aplicaremos o Teorema de Jacobi em (6.1) da seguinte forma:

1) adicionaremos à linha de índice n, a linha de índice $n-1$ multiplicada por $-a_1$.
2) adicionaremos à linha de índice $n-1$, a linha de índice $n-2$ multiplicada por $-a_1$.
3) adicionaremos à linha de índice $n-2$, a linha de índice $n-3$ multiplicada por $-a_1$.

O processo será repetido até a linha de índice 2, onde adicionaremos à mesma, a linha de índice 1 multiplicada por $-a_1$.

Com isso, obteremos o determinante equivalente abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 - a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_1^2 - a_1^2 & a_2^2 - a_1 \cdot a_2 & a_3^2 - a_1 \cdot a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 \cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_1^{n-2} & a_2^{n-2} - a_1 \cdot a_2^{n-3} & a_3^{n-2} - a_1 \cdot a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2} - a_1 \cdot a_n^{n-3} \\ a_1^{n-1} - a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \tag{6.2}$$

Reduzindo o determinante (6.2) a termos semelhantes, teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ 0 & a_2 \cdot (a_2 - a_1) & a_3 \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n \cdot (a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3} \cdot (a_2 - a_1) & a_3^{n-3} \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3} \cdot (a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2} \cdot (a_2 - a_1) & a_3^{n-2} \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2} \cdot (a_n - a_1) \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

Aplicando o Teorema de Laplace na primeira coluna do determinante (6.3), teremos

$$\begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ a_2 \cdot (a_2 - a_1) & a_3 \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n \cdot (a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} \cdot (a_2 - a_1) & a_3^{n-3} \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3} \cdot (a_n - a_1) \\ a_2^{n-2} \cdot (a_2 - a_1) & a_3^{n-2} \cdot (a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2} \cdot (a_n - a_1 \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Agora, em cada uma das colunas de (6.4), aplicaremos a propriedade 5 e assim ficamos com

$$(a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_4 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{V'}.$$

Como V' é um determinante de Vandermonde de uma matriz de ordem $n-1$, concluímos, por hipótese de indução, que

$$V' = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Dessa forma, o determinante de Vandermonde é válido para toda matriz de ordem $n \geq 2$, ou seja:

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

$\square$

Exemplo 1) Calcule o determinante de Vandermonde abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 25 & 9 & 4 & 16 \\ 125 & 27 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

Resolução:

Ora se, o determinante dado é de Vandermonde, então os elementos característicos são $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 4$, assim o determinante será igual a:

$$
\begin{aligned}
V &= (a_4 - a_3) \cdot (a_4 - a_2) \cdot (a_4 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_2 - a_1) \\
V &= (4-2) \cdot (4-3) \cdot (4-5) \cdot (2-3) \cdot (2-5) \cdot (3-5) \\
V &= (2) \cdot (1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) \\
V &= 12.
\end{aligned}
$$

6.2 Regra de Cramer

Figura 6.1: Gabriel Cramer

A demonstração sobre a Regra de Cramer que utiliza como meio norteador as propriedades dos determinantes vistas anteriormente é a mesma que fiz por muitos anos em minhas aulas no ensino médio diante dos meus alunos e que geralmente não deixa dúvidas na hora da sua construção.

Através desta pesquisa, descobri que a mesma é utilizada em alguns livros escolares americanos, cuja referências mais antiga que encontrei foi em Monthly, Vol. 60, $n°3$, pp. 186-187, The American Mathematical, 1953, de Whitford e Klamkin [16].

Consideremos um sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas, na sua forma genérica:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &=& b_3 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n &=& b_i \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &=& b_n
\end{array}
\right. .
$$

Seja D o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas (chamada de matriz principal incompleta);

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Seja D_{x_i} o determinante da matriz que se obtém do sistema dado, substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita $x_i \quad (i = 1, 2, 3, ..., n)$, pelos termos independentes $b_1, b_2, ..., b_n$, teremos, de acordo com a regra de Cramer:

Os valores das incógnitas x_i de um sistema linear de n equações e n incógnitas, cujo determinante da principal $D \neq 0$, são dados por frações cujo denominador é o determinante D dos coeficientes das incógnitas e o numerador é o determinante D_{x_i}. Com isso, podemos escrever:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}.$$

Demonstração:

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}.$$

De modo que o determinante D formado pelos coeficientes na ordem que aparecem no sistema, denominado de determinante da principal ou dos coeficientes, será:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Note que, ao multiplicarmos uma fila do determinante por um escalar, o determinante inicial também ficará multiplicado por esse escalar. Dessa forma, ao multiplicarmos a primeira coluna de D por x_1, D também ficará multiplicado por x_1, veja:

$$x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot x_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdot x_1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} \cdot x_1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} \cdot x_1 & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdot x_1 & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agora aplicaremos o Teorema de Jacobi da seguinte forma:

1) fixaremos à primeira coluna do determinante;
2) adicionaremos à primeira coluna, a segunda coluna multiplicada por x_2;
3) adicionaremos à primeira coluna, a terceira coluna multiplicada por x_3;
4) adicionaremos à primeira coluna, a quarta coluna multiplicada por x_4.

O processo será repetido até a n-ésima coluna, de tal forma que o determinante D ficará com o seguinte formato:

$$x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \ldots + a_{3n} \cdot x_n & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 + \ldots + a_{in} \cdot x_n & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agora substituiremos a primeira coluna ordenadamente por $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ assim:

$$x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ representa o determinante D_{x_1} da matriz, a qual obtemos trocando ordenadamente os coeficientes de x_1 pelos termos independentes do sistema, teremos

$$x_1 \cdot D = D_{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}.$$

De modo análogo, podemos mostrar que

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, x_4 = \frac{D_{x_4}}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}.$$

$\square$

Exemplo 2) Resolva o sistema linear abaixo através da regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 8 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$$

Resolução:

Note que podemos aplicar a regra de Cramer, pois o sistema possui 3 equações e 3 incógnitas, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações e o determinante da principal $D \neq 0$, como podemos verificar abaixo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

Agora calcularemos os determinantes das incógnitas D_x, D_y e D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} \boxed{8} & 2 & 1 \\ \boxed{3} & -1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Determinante obtido substituindo os coeficientes} \\ \text{de x pelos termos independentes correspondentes} \end{array} \right)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{8} & 1 \\ 2 & \boxed{3} & 1 \\ 3 & \boxed{2} & -1 \end{vmatrix} = 30 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Determinante obtido substituindo os coeficientes} \\ \text{de y pelos termos independentes correspondentes} \end{array} \right)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{8} \\ 2 & -1 & \boxed{3} \\ 3 & 1 & \boxed{2} \end{vmatrix} = 45 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Determinante obtido substituindo os coeficientes} \\ \text{de z pelos termos independentes correspondentes} \end{array} \right)$$

Daí vem:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{15} = 1.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{15} = 2.$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{45}{15} = 3.$$

Portanto, a solução do sistema é igual a:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

.

Capítulo 7

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi proporcionar um aprofundamento no processo de ensino e aprendizagem inerentes ao estudo dos determinantes, visto que atualmente os livros didáticos de ensino médio utilizados nas escolas brasileiras e até mesmo os de nível superior carecem de um tratamento mais formal que possibilite ao leitor melhor compreensão do assunto.

Assim, tentamos inserir o trabalho dentro do contexto histórico, para isso partimos do estudo dos sistemas lineares, pois com essas definições foi possível desenvolver os conceitos iniciais sobre permutação e inversão, assunto que geralmente é visto apenas no ensino superior.

A seu tempo, conseguimos, em nosso trabalho, ligar o conceito de permutações e inversões à definição dos determinantes, pois acreditamos que dessa forma é possível obter uma maior clareza e simplicidade, sem perder o formalismo existente nas demonstrações das propriedades aplicadas.

Dessa forma, é nossa opinião que essa atitude proporciona um benefício aos alunos que almejam ingressar em um curso da área de exatas, pois possibilita uma pequena familiarização do rigor matemático utilizado no ensino superior.

Com tudo o que foi exposto, acreditamos ter contribuído de forma enriquecedora, pois trouxemos novas ideias como as demonstrações do Teorema de Laplace, do Teorema de Binet e da Regra de Cramer, de modo a despertar o interesse de estudantes que possam dar continuidade a esse trabalho, já que entendemos que o processo de aperfeiçoamento deve ser contínuo.

Referências Bibliográficas

[1] AITKEN, A. C.; **Determinantes y Matrices**. Dossat, Madrid, 1939.

[2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R, RIBEIRO, V. L., FIGUEREDO; WETZLER, H. G; **Álgebra Linear**. São Paulo, Harbra, 1978.

[3] BOYER, C. B.; **História da Matemática** 2^a Edição. Editora Edgar Blücher Ltd, 1996.

[4] DE FARIAS, Cel. S.; **Curso de Álgebra**. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1968.

[5] DE MENEZES, D. L. ; **Abecedário da Álgebra**. Nobel, São Paulo, 1971.

[6] EVES, H.; **Elementary Matrix Theory**, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[7] EVES, H.; **Introdução à história da matemática**. Editora UNICAMP, São Paulo, 2007.

[8] FERNANDES, W. M. A.; MIYASAKI, R.; **Sistemas Lineares e Aplicações**. Anais do IX Seminário de Iniciação Científica, VI Jornada de Pesquisa e Pós-Graduação e Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, Anápolis, 2011.

[9] HIDETOSHI, F.; ROTHMAN, T.; **Sacred Mathematics Japanese Temple Geometry**. Princeton Univerity Press, EUA, 2008.

[10] KUROSCH, A. G.; **Curso de Álgebra Superior**. Mir, Moscou, 1968.

[11] LIMA, E. L.; **O Princípio da Indução, in Artigo da Revista Eureka,** $n°3$, SBM, Rio de Janeiro, 1998.

[12] LUCCAS, S.; **Abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática: apresentação de uma proposta pedagógica**. Dissertação de mestrado. UEL/PR, londrina, 2004.

[13] MACLAURIN, M. A. C.; **A treatise of Algebra in Three Parts**. Impresso por A. Millar e J. Nourse, London, 1748.

[14] MEYER, C. D.; **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**, SIAM, 2000.

[15] TAVARES, A. H.; **Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes.**. Dissertação de mestrado. UFRN, Natal, 2013.

[16] WHITFORD, D. E.; KLAMKIN, M. S. **On an Elementary Derivation of Cramer's Rule**.Monthly. Vol. 60, $n°3$, pp. 186-187, The American Mathematical, 1953.

Apêndice A

Indução Matemática

O princípio da Indução é uma ferramenta matemática que utilizamos de maneira eficiente na obtenção de demonstrações de fatos referentes aos números naturais.

Deve-se a Giussepe Peano (1858-1932) a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente com axiomas de Peano.

Vejamos os axiomas de Peano enunciados segundo Elon Lages [11].

Axiomas de Peano

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:
(i) Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.
(ii) A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.
(iii) Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(iv) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$, e se $n \in X \to s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O quarto axioma de Peano é conhecido como axioma da indução. Informalmente ele significa que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor.

O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais resulta do fato de que ele pode ser visto como método de demonstração, chamado método de Indução Finita ou Princípio da Indução Finita.

Princípio da Indução:

Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato do natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza, então todos os naturais gozam da propriedade P, assim:

Seja $P(n)$ uma afirmação sobre o inteiro positivo n tal que:
(i) $P(1)$ é verdadeira;
(ii) Se $P(k)$ for verdadeira, para algum natural $k \geq 1$, então $P(k+1)$ também é verdadeira. Assim $P(n)$ será verdadeira para todo n natural.

Observações:

A verificação de $P(1)$ chama-se passo básico. A hipótese de que $P(k)$ é verdadeira chama-se hipótese de indução[1]. O uso da hipótese de indução para provar $P(k+1)$ chama-se passo de indução.

Exemplo 1) Mostre que, para qualquer n natural tem-se que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

Demonstração:

Iremos demonstrar a fórmula acima por indução finita.

Assim, note que, para $n = 1$, a fórmula dada é válida pois:

$$1 = \frac{(1+1)\,1}{2}.$$

Agora, suponhamos que, para $n = k$, onde k é um natural qualquer, $P(k)$ seja válido, ou seja:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{(k+1)\,k}{2}.$$

Então, para n = k +1, $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{[(k+1)+1](k+1)}{2}$ também será válido.

De fato,

[1]Considere de agora em diante em todo o texto: H.I. como sendo a abreviatura de Hipótese de Indução.

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{H.I.}=\frac{(k+1)\,k}{2}.$$

Então ao somar $(K+1)$ a ambos os membros teremos:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\,k}{2}+(k+1)$$

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\,k+2\,(k+1)}{2}.$$

Fatorando o segundo membro obteremos:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+2)\,(k+1)}{2}.$$

Reescrevendo a expressão na forma desejada teremos:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{[(k+1)+1]\,(k+1)}{2}.$$

$\square$